<u>Moure’s pel laberint de la natura</u>

Daniel Campos Moreno

Departament de Física
Universitat Autónoma de Barcelona

(Basat en el projecte de tesi “Fronts de reacció i difusió en extincions biològiques i incendis forestals per a medis heterogenis” del mateix autor, subvencionat per la Generalitat de Catalunya amb la beca 2002 FI 00296)

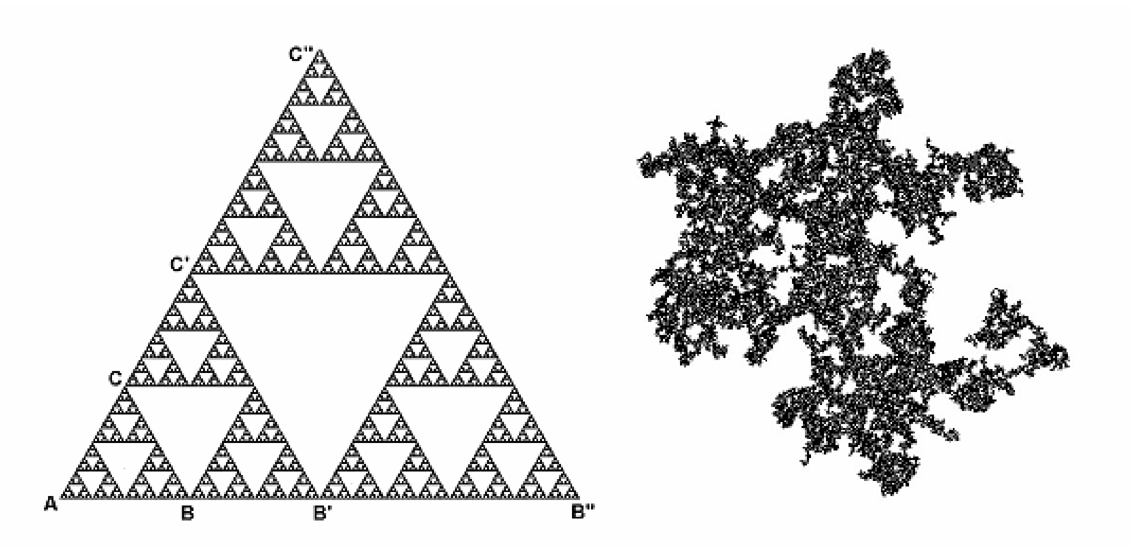
La concepció geométrica de la natura s’havia basat tradicionalment en estructures homogènies fins que, fa uns trenta anys, va aparèixer la teoria dels fractals, oferint-nos una nova manera de concebre les formes espacials del nostre entorn.

Pierre-Gille de Gennes, premi Nobel de Física del 1991, va ser qui va encunyar, a finals dels anys setanta, l’expressió “the ant in the labyrinth” (“la formiga a dins del laberint”). Amb ella, volia il·lustrar el problema físic d’una partícula movent-se a través d’una estructura plena d’obstacles de manera totalment desorganitzada i a l’atzar, tal i com podem esperar que ho farien un grup de formigues en deixar-les anar enmig d’un laberint (tot i que també es posible que en de Gennes estigués subestimant la intel·ligència i el sentit de l’orientació de les formigues).

Tots aquells fenomens de transport que, com en la imatge proposada per de Gennes, estan basats en el moviment més o menys aleatori dels individus s’anomenen en física fenomens de difusió. No cal anar gaire lluny per trobar una infinitat d’exemples a la natura en què els fenomens de difusió juguen un paper important: les molècules d’un cert contaminant es *difonen* en ser abocades en un riu, els virus o bactèris es *difonen* a través dels nostres teixits quan penetren a l’organisme, les emisions gasoses es *difonen* a través de l’aire, els animals d’una certa espècie es *difonen* a través del seu hábitat...

La difusió va començar a ser estudiada en profunditat pels físics i matemàtics fa ja més de cent anys. El que aquells primers científics feien era considerar la situació més senzilla, en la qual no existeixen les parets del laberint, de manera que les formigues es mouen a través d’un pla homogeni sense trobar-hi obstacles. Amb aquesta simplificació, aviat van ser capaços de respondre les qüestions principals que un es pot plantejar, com ara: ‘Quina es la probabilitat que una formiga s’hagi desplaçat una distància donada al cap d’un cert temps?’ o ‘Quin és el temps mitjà que una formiga necesita per recórrer una certa distància?’.

Durant molt de temps, doncs, l’estudi va quedar reduït al cas “sense obstacles” i a altres variants sempre basades en una geometria homogènia. Però aquesta situació va donar un gir radical amb l’aparició dels *fractals* com a nova eina matemática. Els fractals són estructures geomètriques aparentment complicades però que acompleixen una propietat molt especial anomenada autosimilitud; això vol dir que vistes a diferents escales, tenen el mateix aspecte –i per tant les mateixes propietats–.



A la figura d'adalt es mostren dos exemples d'estructures fractals. En el cas de l'esquerra és especialment senzill veure la idea d'autosimilitud: el triangle ABC és idèntic al AB´C´ (i al AB´´C´´), però a escales diferents. Pel contrari, en el cas de la dreta l'autosimilitud no és apreciable a simple vista, però si un és capaç d'estudiar (mitjançant, per exemple, un ordinador) les propietats de l'estructura troba també el mateix comportament a diferents escales; en aquest cas parlem d'un *fractal estadístic*.

Observant els dos dibuixos i la varietat de formes que presenten un s'adona que si fóssim capaços d'explicar un procés de difusió a través d'estructures com aquestes estaríem molt més a prop de donar solució al dilema de "la formiga dins del laberint".

És, fins i tot, temptador deixar-se portar per l'encant visual del problema, portant-lo més enllà del marc purament formal o científic. Donant-li un caire més filosòfic, el problema convida a crear tota mena d'especulacions i imatges, algunes d'elles ben atractives. Podem, per exemple, imaginar que en comptes de formigues, ara som nosaltres mateixos qui ens movem a cegues a través d'aquest laberint fractal. Avancem, ens movem a un costat i l'altre sense saber ben bé cap a on anem, i contínuament hem de superar obstacles que sorgeixen davant nostre. I cada vegada els obstacles que ens trobem són majors i costen més de vorejar... De vegades, arribem a un punt que és idèntic a un altre pel qual ja vam passar fa temps i que hem de tornar a creuar; altres vegades, arribem a un camí sense sortida i l'única manera d'avançar és desfer el camí i probar una altra via... Crec que seria difícil trobar en tota la ciència una metáfora de la vida tan escaient.

La ubiqüitat dels fractals

Fins aquest moment ha quedat descrit el problema que es vol plantejar, però encara no s'ha parlat de les motivacions que ens hi porten. En aquest sentit, la qüestió principal que un pot fer-se és "Què tenen d'especial els fractals per a què ens pugui interesar centrar-nos en l'estudi d'aquestes estructures?"

La primera raó és simplement de necessitat. Tal i com un pot imaginar, a la vida real els obstacles i les possibles limitacions físiques del medi determinen de manera important els processos de difusió. La descripció "sense obstacles", doncs, es mostra moltes vegades insuficient i no pot oferir una solució satisfactòria. D'altra banda, una estructura espacial totalment irregular és intractable des del punt de vista matemàtic, ja que per tal de construir un model és necesari que existeixin unes regles generals o regularitats que hom pugui traduir després al llenguatge matemàtic. Els fractals són estructures força complexes, però que a la vegada presenten una regularitat important (l'autosimilitud) que fa posible la seva anàlisi matemática. Per tant, constitueixen un cas intermedi de gran interés.

Ara bé, aquesta necessitat no pot en cap cas justificar l'ús dels fractals més enllà de la pura especulació matemática, si no és que aquestes estructures tenen una aplicació directa en els sistemes naturals. És a dir, ens hauríem de preguntar si en el món que ens envolta és posible trobar alguna estructura semblant a aquests fractals. Arribats a aquest punt, sorgeix la sorpresa i la satisfacció de B. B. Mandelbroot i altres pares de la teoria dels fractals quan van descobrir que existiexen una amplíssima varietat d'estructures a la natura que presenten la propietat de l'autosimilitud, per la qual cosa poden considerar-se fractals estadístics. Els exemples són gairebé interminables: els perfils de les costes i de les serralades, les xarxes fluvials i xarxes de comunicacions en general, els sistemes neuronal, respiratori i circulatori, la distribució dels arbres de moltes zones forestals, les ramificacions de les branques i de les arrels dels arbres, les nerviacions de les fulles, la localització geográfica dels epicentres de terretrèmols, la canalització interna dels materials porosos, les cadenes polimèriques... Així, es pot completar una llista tan llarga com variada, la qual cosa ha donat lloc a què es parli en molts casos de la *ubiqüitat dels fractals* a la natura.

A la vista d'aquest descobriment, s'obre una nova manera de contemplar el nostre entorn, no ara com una suma d'estructures desconegudes i plenes d’irregularitats, sinó com un món que amaga a dins seu una interessant organització. La natura ens ofereix un laberint que, dintre de la seva complexitat i riquesa, és moltes vegades un laberint fractal. És aquesta atraient nova visió de la geometría, i fins i tot del món en general, la que ha fet que molts investigadors s’interessin per aquest camp i que l’estudi de sistemes amb característiques fractals s’hagi convertit en les dues últimes décades en un dels temes més recurrents en la producció científica.

El dilema de de Gennes i les seves formigues, una vegada sabem tot això, resulta encara més apassionant. Queda, però, la difícil missió d’agafar les regles generals que sorgeixen d’aquesta propietat que és l’autosimilitud i fer encaixar les peces de manera adient. Si s’aconsegueix donar aquest pas, serà possible contestar aquelles preguntes que uns altres van resoldre fa més d’un segle pel cas “sense obstacles”.

Una vegada dut a terme l’anàlisi del problema, les conclusions que hem aconseguit extreure poden resumir-se en l’atractiu resultat de què les distàncies que recorren les formigues dins del laberint i els temps emprats en fer aquests camins segueixen relacions força diferents a les que apareixien fent servir geometries homogènies. És a dir, la concepció del temps i l’espai a dins del fractal queda d’alguna manera trastocada respecte al món “sense obstacles”.

Amb l’objectiu d’il·lustrar aquesta idea proposem un petit experiment mental. Imaginem, per exemple, que ara les formigues decedeixen organitzar-se i que, en comptes de moure’s a l’atzar, comencen a avançar totes cap endavant en la mateixa direcció (sempre i quan els obstacles del laberint les hi ho permetin). En aquest cas, el que observarem serà un fenomen de propagació a través del fractal en comptes de difusió, si bé la idea de fons continua sent la mateixa. En el cas “sense obstacles” o homogeni el resultat al que arribaríem és que, si les formigues sempre avancen en la mateixa direcció i triguen un cert temps en recorrer una distància, la formiga haurà avançat el doble de distància quan el temps sigui el doble.

En el fractal, per contra, no succeeix això; si la formiga avança una certa distància en un temps donat, quan el temps s’hagi doblat la distància recorreguda serà més petita que el doble. Per tant, en un fractal la distància que es pot avançar decreix amb el temps o, dit d’una altra manera, les formigues es veuen frenades, a un ritme continu i que pot determinar-se amb exactitud a partir de les propietats del fractal concret que considerem. Això és una conseqüència de dues característiques dels fractals que ja hem esmentat: en primer lloc, a mida que passa el temps els obstacles que un es troba a dins del fractal són cada vegada majors, de manera que costen més de vorejar. En segon lloc, amb el temps augmenta també la probabilitat d'escollir un camí equivocat i arribar a un carreró sense sortida, de manera que es perdrà un determinat temps en desfer el camí. La unió d'aquests dos aspectes fa que l'avanç de les formigues sigui cada vegada més lent. A més a més, és essencial senyalar que aquest comportament és independent de quin sigui el punt des del qual les formigues inicien el seu camí. Cap tipus d'estructura basada en una geometría homogènia podria donar lloc a aquestes propietats dinàmiques, de manera que veiem que el cas fractal implica un salt qualitatiu important.

Amb totes aquestes propietats i respostes a les mans, podem enfrontar-nos amb problemes com per exemple: Com es difon un contaminant abocat al riu a través de la xarxa fluvial? Quant pot trigar una substància injectada en el nostre cos a difondre's i arribar fins a un punt de l'organisme determinat? Amb quina velocitat es propaga un incendi a través d'un bosc segons quina sigui la distribució a l'espai dels arbres?

La utilitat de la difusió en fractals per casos com aquests pot ser decisiva. Això és el que succeeix en el cas de la relació de Nordin i Sabol, una llei empírica que en hidrologia explica el ritme al qual la concentració d'una substància abocada en un riu decau a mida que aquesta es difon corrent avall. Nosaltres hem comprovat que la difusió homogènia no pot donar una explicació a aquesta relació, però si en canvi es consideren les propietats fractals dels rius un troba que el resultat de Nordin i Sabol és perfectament esperable.

Fins i tot en aplicacions socials un tema com el transport a través de les xarxes de rius pot resultar d'interés. Un bon exemple són les migracions humanes i biològiques a través de grans territoris, en les quals la contínua necessitat d'aigua fa que els individus es vegin obligats a seguir els marges dels rius per tal de moure's i establir les seves poblacions. En el projecte de tesi, analitzem el cas de la colonització de Nord-Amèrica d'est a oest al llarg del segle XIX. Gràcies a les dades de l'època que es conserven i als informes dels historiadors que descriuen les rutes dels colonitzadors a través dels rius del país, hem pogut predir amb els models fractals el ritme de colonització del territori i hem comprobat que les prediccions són molt semblants a les dades reals, al contrari del que passa en considerar un model homogeni amb els colonitzadors movent-se indistintament al llarg de tot el territori.

El món real, no obstant, acostuma a ser força més complicat i els sistemes a la pràctica no funcionen mitjançant un únic procés aïllat, sinó per la superposició i la interacció de molts d'ells. Si es vol ser rigorós, s'haurà de considerar les pèrdues del sistema, tenir en compte els efectes estocàstics que fan que el sistema no sempre es comporti igual, etc. D'aquesta manera, la funció d'un model de difusió no és la de resoldre per si mateix tot el problema, sinó més aviat la d'ajudar-nos a determinar algunes propietats essencials de la solució, una solució que en qualsevol cas mai serà totalment exacta. Tal i com deia el personatge de Mefistòfeles en el *Faust* de Goethe,

> Grau, teurer Freund, ist alle Theorie,
> Und grün des Lebens goldner Baum.*

Què hi ha més enllà?

Aquestes limitacions pròpies del treball científic no fan sinó que estimular i augmentar l'interés dels investigadors per continuar endavant i assolir nous horitzons. Així, una vegada hem iniciat aquest viatge amb la intenció de fer front al dilema de de Gennes, el següent pas ens condueix a adonar-nos que, si bé els fractals apareixen amb una gran freqüència a la natura, també hi trobem moltes altres estructures encara més complexes i per les quals no es coneix encara l'origen ni les propietats. Cal fer-nos, doncs, la pregunta de si són els fractals l'última etapa en la concepció matemàtica de la natura, o és posible anar més enllà.

Possiblement la persona que millor s'ha aproximat al rerafons d'aquesta qüestió és Stephen Wolfram en el seu llibre *A New Kind of Science,* un dels textos científics més famosos i controvertits dels últims temps. En ell, Wolfram sosté què, després de la revolució que ha suposat el desenvolupament dels ordinadors durant la segona meitat del segle passat, disposem ara d'unes eines matemàtiques noves i potents que anys enrera eren impensables. Els seus arguments es basen en l'estudi d'uns models anomenats autòmates cel·lulars. Aquests autòmates cel·lulars no són res més que una llarga cadena de ceros i uns –de manera análoga als bits d'un ordinador– que evolucionen en el temps d'acord amb una o dues regles senzilles. Amb aquests models tan increïblement simples Wolfram és capaç de construir estructures no només fractals, sinó també d'altres amb unes irregularitats i una complexitat encara superiors. Ell defensa la idea que, de la mateixa manera que els ordinadors són capaços avui dia de realitzar les

* Grises, amic meu, són totes les teories,/ I verd l'arbre daurat de la vida.

tasques més complicades, aquests models constitueixen una nova manera d'afrontar problemes que poden abastar més enllà del que permeten les matemàtiques conegudes. Fins i tot assenyala que l'aplicació d'aquestes noves eines podria suposar una revolució matemática comparable a la introducció del càlcul diferencial per part de Newton i Leibnitz al segle XVII.

Malgrat que la idea pugui semblar pretensiosa i que la teoria és encara incipient, el cert és que el treball d'en Wolfram demostra que a partir de models i principis relativament senzills es pot arribar a crear estructures d'una complexitat enorme, amb la qual cosa s'ha donat un pas endavant en el camí que ens porta a la descripció de la riquesa de formes que ens ofereix la natura. Si més no, comencem a disposar de les eines necessàries per a crear nous laberints cada vegada més complicats; resta ara per veure si serem capaços de sortir-ne.