

Carlos Ivorra Castillo

**GEOMETRÍA
DIFERENCIAL**

Cada vez más llego a la convicción de que la necesidad de nuestra geometría no puede ser demostrada, al menos no por ni para el entendimiento humano. Quizás en otra vida alcancemos una visión distinta de la esencia del espacio, que nos resulta inalcanzable por ahora. Hasta entonces, no debemos poner a la geometría en igualdad de rango con la aritmética, que se sostiene puramente a priori, sino, digamos, con la mecánica.

KARL FRIEDRICH GAUSS

Índice General

Introducción	ix
Capítulo I: Variedades diferenciales	1
1.1 Diferenciabilidad en abiertos con frontera	2
1.2 Coordenadas	5
1.3 Variedades diferenciales con frontera	12
1.4 Aplicaciones diferenciables	21
1.5 Construcción de funciones diferenciables	26
Capítulo II: Elementos básicos de la geometría diferencial	39
2.1 El espacio tangente	39
2.2 Subvariedades	55
2.3 Curvas y arcos	65
2.4 Subvariedades definidas por ecuaciones	68
2.5 El teorema de Whitney	72
Capítulo III: Cálculo tensorial	79
3.1 Grupos uniparamétricos locales	80
3.2 Tensores	91
3.3 La derivada de Lie	102
3.4 El corchete de Lie	113
3.5 Derivaciones de formas diferenciales	121
Capítulo IV: Variedades de Riemann	127
4.1 Variedades semirriemannianas	128
4.2 Orientación de variedades	136
4.3 Integración en variedades diferenciales	143
4.4 Longitudes de arcos	159
4.5 Dualidad	162
4.6 Aplicaciones conformes	167
Capítulo V: El cálculo vectorial	175
5.1 La integral curvilínea	175
5.2 El flujo de un campo vectorial	182
5.3 El teorema de Stokes	185

5.4	Casos particulares del teorema de Stokes	190
5.5	El teorema de Stokes con singularidades	207
5.6	El teorema de transporte	211
5.7	La cohomología de De Rham	217
5.8	La cohomología y el cálculo vectorial	227
5.9	Apéndice: La interpretación del flujo	231
Capítulo VI: Conexiones afines		239
6.1	Varietades diferenciales afines	242
6.2	La restricción de una conexión afín	249
6.3	Transporte paralelo	252
6.4	Geodésicas	257
6.5	La torsión de una conexión afín	264
6.6	Curvatura	275
Capítulo VII: Geometría Riemanniana I		287
7.1	La conexión de Levi-Civita	287
7.2	Geodésicas	301
7.3	La métrica de una variedad de Riemann	307
7.4	El tensor de Riemann	326
7.5	El teorema de Liouville	334
Capítulo VIII: Geometría riemanniana II		339
8.1	Campos de Jacobi	339
8.2	Variaciones de geodésicas	346
8.3	Métrica, curvatura y transporte paralelo	351
8.4	Las ecuaciones de estructura	359
8.5	El teorema de Gauss-Bonnet	364
8.6	Triangulaciones	377
Capítulo IX: Elementos de topología diferencial		385
9.1	Aproximación de funciones de clase C^k	385
9.2	Pegado de difeomorfismos	395
9.3	Cocientes	403
9.4	Adjunción de asas	414
9.5	Isotopías	418
Capítulo X: La clasificación de las superficies compactas		441
10.1	Teoría de Morse	443
10.2	Descomposiciones en asas	451
10.3	El teorema de clasificación	460
Apéndice A: Tensores en espacios vectoriales		471
A.1	Tensores	471
A.2	El álgebra exterior	478
A.3	Elementos de volumen	487
A.4	Espacios semieuclicídeos	489

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	vii
A.5 Dualidad	494
Apéndice B: Electromagnetismo	505
B.1 Electrostática	509
B.2 Magnetostática	518
B.3 Las ecuaciones de Maxwell	533
Bibliografía	541
Índice de Materias	542

Introducción

En 1854 Bernhard Riemann presentó su “Lección inaugural” en la universidad de Gotinga, necesaria para optar a una plaza de *Privatdozent*, es decir, de profesor sin sueldo (que cobraba directamente una cuota a los alumnos que quisieran asistir a sus clases). El tema de la lección era elegido por el tribunal entre tres temas propuestos por el aspirante. Riemann había propuesto dos temas en los que había trabajado previamente y “de relleno” añadió “Los fundamentos de la geometría”, con la convicción de que —siguiendo una tradición no escrita— el tribunal elegiría el primer tema.

Sin embargo, el presidente del tribunal era Karl Friedrich Gauss, quien llevaba mucho tiempo interesando en los fundamentos de la geometría y, aunque no había manifestado gran cosa en público, discrepaba radicalmente de quienes pretendían “demostrar” que la geometría euclídea era la única geometría posible. Saltándose la tradición, Gauss eligió el tercer tema propuesto, y Riemann —cuya situación económica necesitaba urgentemente la plaza— cayó en una depresión.

No obstante, no tardó en recuperarse y en unas siete semanas estuvo en condiciones de presentar su lección inaugural con el título de “*Sobre las hipótesis en que se basa la geometría*”. La exposición estuvo orientada a un público no especialista, y por ello contenía muy pocas fórmulas. Ante una lectura superficial podría pensarse que no era más que una serie de vaguedades, pero una lectura atenta muestra que Riemann estaba resumiendo algunos resultados muy precisos. Riemann empezaba introduciendo vagamente el concepto de “variedad”, que concebía como un “espacio” en el que cada punto estaba determinado por “varias” coordenadas.

Hasta entonces la geometría se había estudiado siempre en el espacio tridimensional euclídeo, y el concepto de “curvatura” se concebía únicamente para curvas y superficies en el espacio, mientras que Riemann estaba planteando la posibilidad de trabajar con “espacios de coordenadas” sin suponerlos contenidos en el espacio euclídeo ni en ningún otro espacio. Riemann se planteaba cómo hablar de distancias en una variedad abstracta y llegó a bosquejar lo que hoy se conoce como una “métrica de Riemann”. Además planteó la conveniencia de trabajar en lo que hoy se llama un “sistema de coordenadas normales” y obtuvo expresiones para la métrica que involucraban unas cantidades que en esencia eran lo que hoy se conoce como el “tensor de Riemann” de una variedad de Riemann. Más aún, puso en evidencia su relación con la curvatura que Gauss

había definido para superficies en el espacio euclídeo, lo que abría las puertas a definir un concepto general de curvatura que permitiera afirmar, por ejemplo, que un espacio tridimensional fuera “curvo”, cosa inconcebible hasta entonces, si bien era una idea que Gauss llevaba largo tiempo acariciando, aunque sin saber concretarla.

Probablemente, pocos de los asistentes entendieron gran cosa, pero Gauss quedó encantado, y en el camino de vuelta de la facultad resaltó con un entusiasmo poco frecuente en él la profundidad de las ideas expuestas por Riemann.

La primera muestra detallada de los cálculos subyacentes a la exposición de Riemann aparece en un trabajo en latín que presentó a la Academia de París en 1861, donde esboza la prueba de que si las cantidades con las que describía la curvatura de una variedad se anulan, entonces la variedad es “plana”, en el sentido de “isométrica al espacio euclídeo usual”. Estas ideas pronto empezaron a ser desarrolladas por otros matemáticos, como Elwin Bruno Christoffel, que en 1869 introdujo el concepto de derivada covariante, junto con los que hoy se conocen como “símbolos de Christoffel”.

Pero fue Gregorio Ricci-Curbastro quien sistematizó estas ideas entre 1867 y 1896, que fueron expuestas en 1898 en un trabajo publicado junto con su alumno Tullio Levi-Civita con el título de “*Lecciones sobre la teoría de las superficies*”. En 1901 Levi-Civita publicó “*Métodos del cálculo diferencial absoluto y sus aplicaciones*”, donde el “cálculo diferencial absoluto” es lo que hoy se conoce como “cálculo tensorial”.

Albert Einstein usó el tratado de Levi-Civita para estudiar el cálculo tensorial que usaría para desarrollar la teoría general de la relatividad. En 1915 Levi-Civita escribió una carta a Einstein para señalarle varios errores matemáticos en su uso del cálculo tensorial, y ambos iniciaron así una fructífera correspondencia que se prolongó varios años. (En una ocasión le preguntaron a Einstein qué era lo que más le gustaba de Italia y respondió que los espagueti y Levi-Civita.)

Por aquel entonces, el cálculo tensorial era una jungla de subíndices y superíndices que subían y bajaban de una fórmula a la siguiente, pero no tardaron en aparecer matemáticos que se esforzaron por encontrar un enfoque más conceptual que permitiera llegar a una comprensión más profunda de la teoría. El primero fue probablemente Élie Joseph Cartan, que ya en 1899 había introducido el concepto moderno de “forma diferencial” con ayuda del cual desarrollaría una presentación muy elegante de la geometría de Riemann que, no obstante, fue vista como demasiado abstracta y no se impuso frente a los subíndices y superíndices de Ricci y Levi-Civita. Mucho más impacto tuvo el trabajo de Jean-Louis Koszul en 1954, con el título de “*Lecciones sobre fibrados y geometría diferencial*”, en el que introdujo el operador ∇ para representar la derivada covariante. A partir de ahí se terminó creando una “geometría diferencial sin índices” o “intrínseca”, en la que los conceptos fundamentales de la geometría diferencial son objetos algebraicos abstractos globales, y las expresiones coordinadas (con índices) son sólo representaciones auxiliares locales que en ocasiones son convenientes para realizar cálculos.

La geometría diferencial moderna no sólo proporciona el aparato algebraico

necesario para presentar con rigor el concepto de variedad abstracta esbozado por Riemann y demostrar sus resultados y sus conjeturas, sino que constituye además el marco más adecuado para el cálculo vectorial y el álgebra geométrica que diversos matemáticos como Grassmann, Clifford, etc. habían desarrollado a lo largo del siglo XIX, y pronto se convirtió también en una herramienta indispensable en otras ramas más abstractas de la matemática, como la topología algebraica o la geometría algebraica.

El propósito de este libro es familiarizar al lector con los conceptos fundamentales de la geometría diferencial moderna. Los cuatro primeros capítulos estudian el concepto de variedad diferencial, el cálculo tensorial y el cálculo diferencial e integral en variedades, los capítulos V y VI exponen el cálculo vectorial clásico desde el punto de vista moderno y los capítulos VII-IX están dedicados a la geometría riemanniana propiamente dicha. Puesto que la teoría de la relatividad requiere trabajar con métricas más generales que las métricas de Riemann, hemos definido el concepto general de variedad semirriemanniana (que incluye a las variedades riemannianas como caso particular) y hemos demostrado en el contexto general los resultados que así lo permiten (lo cual no supone ninguna complicación en las pruebas), si bien todos los ejemplos considerados se han ceñido al caso riemanniano. Finalmente, los dos últimos capítulos contienen una introducción a la topología diferencial que culmina con la clasificación de las superficies diferenciales compactas.

Por clarificar la exposición hemos reunido en el apéndice A los resultados del cálculo tensorial sobre espacios vectoriales de dimensión finita, de modo que el lector puede elegir entre estudiar dicho apéndice de una vez antes de empezar el capítulo III, donde se expone el cálculo tensorial sobre variedades, o bien ir alternando entre el apéndice y el capítulo III según se va indicando en el texto. El apéndice B contiene un resumen de la teoría clásica del electromagnetismo como ejemplo arquetípico de aplicación del cálculo vectorial, pues consideramos que, al margen de los ejemplos con los que hemos ido ilustrando cada concepto, una comprensión cabal de los resultados principales del cálculo vectorial requiere familiarizarse al mismo tiempo con los problemas que los motivaron y a los que se aplicaron.

Entre los temas fundamentales de la geometría diferencial que no hemos tocado cabe destacar los grupos de Lie y los fibrados. La razón —además de mantener el tamaño de este libro dentro de unos límites razonables— es que hemos pretendido que este libro pueda verse como una continuación natural de nuestros libros de *Análisis matemático* [An] y *Geometría* [G], por lo que nuestros objetivos a largo plazo han sido esencialmente tres:

1. Extender al contexto de las variedades diferenciales el cálculo diferencial e integral expuesto en [An], presentando sus aplicaciones al cálculo vectorial.
2. Mostrar cómo la teoría de subvariedades regulares de \mathbb{R}^n expuesta en [An] se puede generalizar al contexto de las variedades diferenciales abstractas.
3. Mostrar cómo las geometrías euclídea, elíptica e hiperbólica estudiadas en [G] se corresponden con la geometría de las variedades de Riemann de curvatura constante (nula, positiva y negativa, respectivamente).

Los grupos de Lie o la geometría de los fibrados no guardan relación con los conocimientos previos que suponemos al lector, sino más bien con aplicaciones posteriores de la teoría, por lo que hemos considerado razonable prescindir de ellos en una introducción a la geometría diferencial de estas características. Por otra parte, confiamos en que los temas tratados proporcionen al lector una base suficiente, no sólo para abordar un estudio en más profundidad de la geometría diferencial o de la teoría de la relatividad, sino también para iniciarse en otras ramas de la matemática, como la teoría de funciones de variable compleja o la geometría algebraica con la riqueza que aporta siempre una visión interdisciplinar.

Al margen de los tres objetivos precedentes, hemos aprovechado el nivel alcanzado con los nueve primeros capítulos para presentar en los dos últimos una introducción a la topología diferencial que complementa (y presuponen) algunos resultados topológicos presentados en mi libro de Topología algebraica.

Las referencias [Al], [G] y [An] remiten a mis libros de Álgebra, Geometría y Análisis, respectivamente, mientras que [TA] hace referencia a mi libro de Topología Algebraica, del cual, hasta los capítulos X y XI, no necesitaremos más que algunos resultados sobre cubrimientos a partir del capítulo VII y algunos resultados más en el capítulo siguiente. Recíprocamente, los resultados de [TA] que involucran variedades diferenciales se apoyan en los resultados de este libro. En la introducción de [TA] se muestra una posible ruta para una lectura simultánea de ambos libros. Por último, un par de ocasiones se usa el teorema de Taylor para funciones de varias variables, que está probado en mi libro de Funciones de variable compleja [VC] únicamente a partir de resultados de [An].

Capítulo I

Variedades diferenciales

En los últimos capítulos de [G] obtuvimos evidencias de que el concepto de variedad diferenciable definido en [An] que estábamos manejando “se nos empezaba a quedar pequeño”. En efecto, por una parte, en la sección 12.6 tuvimos que definir un tensor métrico para el plano hiperbólico H que nada tenía que ver con la inclusión de H en \mathbb{R}^2 , con lo que ésta debía ser “olvidada”, mientras que en la sección 13.5 tuvimos que definir una inmersión del plano proyectivo $P^2(\mathbb{R})$ en \mathbb{R}^4 simplemente para justificar que se cumplían las condiciones de la definición de variedad diferenciable, si bien dicha inmersión era irrelevante para todo lo que expusimos a continuación.

En este capítulo presentamos una definición abstracta de variedad diferencial que permitirá considerar como tal a todo espacio topológico dotado de cierta estructura adicional, sin necesidad de considerarlo sumergido en ningún espacio \mathbb{R}^m . Esto no sólo permitirá tratar de forma más natural los dos ejemplos que acabamos de recordar, sino que ayudará a distinguir las propiedades “intrínsecas” de una variedad, es decir, las que dependen exclusivamente de la variedad misma, de las propiedades “extrínsecas”, que dependen de la forma en que la consideramos sumergida en otra (en \mathbb{R}^m en particular).

Por simplicidad, adoptamos el convenio de que siempre que hablemos de funciones diferenciables habrá que entender que nos referimos en realidad a funciones de clase C^∞ . Muchos de los resultados que vamos a demostrar podrían probarse igualmente para funciones de clase C^1 o C^2 , pero no necesitaremos prestar atención al grado mínimo de derivabilidad que requiere cada uno de ellos.

Por otra parte, para enunciar ciertos resultados relacionados con el cálculo integral es conveniente considerar un concepto de variedad más general que el definido en el capítulo VII de [An], no sólo en el sentido que ya hemos indicado de no exigir que las variedades estén contenidas en un espacio \mathbb{R}^m , sino también en el de permitir que tengan un “borde”. Por ello dedicaremos la primera sección a un primer paso en la generalización del cálculo diferencial en \mathbb{R}^n al caso en que los dominios de las funciones consideradas no sean abiertos, sino abiertos “con frontera”.

1.1 Diferenciabilidad en abiertos con frontera

En principio, el concepto de diferenciabilidad en \mathbb{R}^n está definido para funciones $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde U es un abierto en \mathbb{R}^n . Sin embargo, en muchas ocasiones nos interesará considerar dominios que no sean necesariamente abiertos. Un ejemplo elemental de esta situación es cuando queramos considerar arcos diferenciables $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ (o, más en general, con imagen en una variedad diferencial, pero de momento consideramos el caso de \mathbb{R}^m). En un caso como éste tenemos que especificar qué entendemos por diferenciabilidad en los extremos a y b . El convenio que vamos a adoptar es muy simple: la diferenciabilidad de f en $[a, b]$ deberá entenderse como que f puede prolongarse a una función diferenciable en un intervalo abierto que contenga al intervalo $[a, b]$. Ahora vamos a dar una definición de diferenciabilidad en un subconjunto de \mathbb{R}^n que incluya a esta situación como caso particular:

Definición 1.1 Si $A \subset \mathbb{R}^n$, diremos que una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ es *diferenciable* en un punto $p \in A$ si existe un abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $p \in V$ y una función diferenciable¹ (en el sentido usual) $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $g|_{V \cap A} = f|_{V \cap A}$. Diremos que f es *diferenciable* en A si lo es en todos sus puntos.

Observemos que si $p \in \overset{\circ}{A}$ entonces f es diferenciable en p en el sentido de la definición anterior si y sólo si es diferenciable en un entorno V de p en el sentido usual, pues en este caso dicho V cumple la definición anterior con $g = f|_V$, mientras que si se cumple la definición anterior $V \cap \overset{\circ}{A}$ es un entorno de p en el que f es diferenciable en el sentido usual. En particular, si A es abierto en \mathbb{R}^n , la diferenciabilidad de f en A en el sentido de la definición anterior coincide con la diferenciabilidad en el sentido usual.

La definición que acabamos de dar no se comporta razonablemente sobre conjuntos arbitrarios, pero sí que lo hace sobre la clase de conjuntos que realmente nos van a interesar, que es algo más general que la de los conjuntos abiertos, pero no mucho más general:

Diremos que un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es *regular* si $A \subset \overline{\overset{\circ}{A}}$. Esto equivale a que exista un abierto $U \subset A$ tal que $U \subset A \subset \overline{U}$, en cuyo caso necesariamente $U = \overset{\circ}{A}$ y $A \subset U \cup \partial U$. En otras palabras: A consta de los puntos de un abierto U y parte de los puntos de su frontera. En particular, todo abierto de \mathbb{R}^n es regular.

Cuando hablemos de los *puntos frontera* de un conjunto regular A no nos referiremos a todos sus puntos frontera en el sentido topológico, sino únicamente a los que pertenecen a A , de modo que la notación ∂A representará al conjunto $A \cap \partial A$, donde aquí ∂A denota —excepcionalmente— la frontera topológica. Así se cumple que $A = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$ y $\overset{\circ}{A} \cap \partial A = \emptyset$. En particular A es abierto si y sólo si $\partial A = \emptyset$.

Por ejemplo, en este sentido, $\partial([0, 5]) = \{0\}$, mientras que la frontera topológica sería $\{0, 5\}$.

¹Recordemos que hemos adoptado el convenio de llamar diferenciables a las funciones de clase C^∞ .

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto regular y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable en un punto $p \in A$, podemos definir las derivadas parciales

$$\left. \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} \right|_p$$

como las derivadas correspondientes de la función g dada por la definición generalizada de diferenciabilidad.

La clave está en que, en el caso de un conjunto regular, estas derivadas no dependen de la elección de g , pues si g_1 y g_2 son extensiones diferenciables de f en un entorno de p , tomando la intersección de los dominios podemos suponer que ambas están definidas sobre el mismo abierto $V \subset \mathbb{R}^n$, luego

$$\frac{\partial^k g_1}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k g_2}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}$$

sobre el abierto $\overset{\circ}{A} \cap V$, y ambas derivadas son funciones continuas en V . Pero $p \in \overset{\circ}{A}$, luego también $p \in \overset{\circ}{A} \cap V$, y concluimos que ambas coinciden en p .

Por consiguiente, si $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable en p (y $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto regular), podemos definir la matriz jacobiana $Jf(p)$ (en particular el vector gradiente $\nabla f(p)$, cuando $m = 1$), al igual que la diferencial $df|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, como los conceptos correspondientes a cualquier extensión diferenciable de f en un entorno de p , sin que dependan de la elección de dicha extensión.

Es claro que si p es un punto interior de A , las derivadas parciales de f , su matriz jacobiana y su diferencial coinciden con las usuales (pues como extensión diferenciable de f en un entorno de p podemos tomar la restricción de f a un entorno de p).

Ahora es inmediato que los resultados fundamentales (locales) del cálculo diferencial en \mathbb{R}^n son válidos en este contexto ligeramente más general: las reglas de derivación, el teorema de Schwarz, la regla de la cadena, etc. Basta aplicarlos a extensiones diferenciables (en el sentido usual) de las funciones involucradas e inmediatamente se deduce la versión correspondiente para éstas.

Un *difeomorfismo* $f : A \rightarrow B$ entre dos conjuntos regulares es una biyección diferenciable con inversa diferenciable.

Teniendo en cuenta que en tal caso $Jf|_p J(f^{-1})|_{f(p)}$ y $J(f^{-1})|_{f(p)} Jf|_p$ tienen que ser la matriz identidad, concluimos que, para que dos conjuntos regulares sean difeomorfos, es necesario que ambos sean subconjuntos del mismo espacio \mathbb{R}^n .

Teorema 1.2 Si $f : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo entre dos subconjuntos regulares de \mathbb{R}^n , entonces $f[\partial U] = \partial V$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $p \in \overset{\circ}{U}$, pero que $f(p) \in \partial V$. Entonces existe un abierto W en \mathbb{R}^n y una función diferenciable $g : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ de modo que $f(p) \in W$ y $f^{-1}|_{V \cap W} = g|_{V \cap W}$. La antiimagen $W' = f^{-1}[V \cap W]$ es abierta en U , luego $W'' = W' \cap \overset{\circ}{U}$ es abierto en \mathbb{R}^n (y $p \in W''$). Como $f|_{W''} \circ g = f|_{W''} \circ f^{-1}$ es la identidad en W'' , la regla de la cadena nos da que $Jf(p)Jg(f(p))$ es la matriz identidad, luego $|Jf(p)| \neq 0$.

Si $f(p) \in \overset{\circ}{V}$ llegamos más fácilmente a la misma conclusión, que vale, pues, para todo punto de $\overset{\circ}{U}$, luego por el teorema de la función inversa [An 5.42] tenemos que $f[\overset{\circ}{U}] \subset \overset{\circ}{V}$ es abierto en \mathbb{R}^n , luego necesariamente $f[\overset{\circ}{U}] \subset \overset{\circ}{V}$, e intercambiando los papeles de U y V concluimos que $f[\overset{\circ}{U}] = \overset{\circ}{V}$, luego también $f[\partial U] = \partial V$. ■

Como acabamos de comprobar, la noción de diferenciabilidad que acabamos de introducir funciona correctamente sobre conjuntos regulares, pero la frontera de un conjunto regular puede ser un conjunto muy complejo. En la práctica vamos a trabajar únicamente con conjuntos regulares cuya frontera sea particularmente simple:

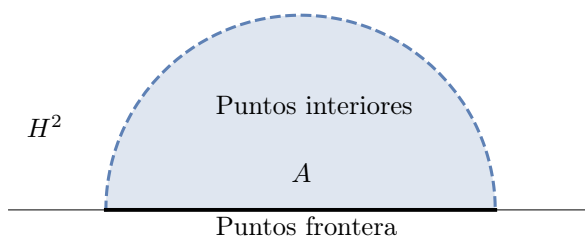
Definición 1.3 Un *abierto con frontera* A es un subconjunto regular de \mathbb{R}^n difeomorfo a un abierto del semiespacio $H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$.

Observemos ante todo que un abierto con frontera no es necesariamente abierto sino que, como todo conjunto regular, es la unión de un abierto con parte de los puntos de su frontera. Será abierto si y sólo si $\partial A = \emptyset$.

Lo que introduce esta definición es que, puesto que la frontera

$$\partial H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$$

es homeomorfa a \mathbb{R}^{n-1} , la frontera de cualquier abierto con frontera en \mathbb{R}^n es homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^{n-1} . La figura muestra un abierto de H^2 :



Observemos que la aplicación $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

es un difeomorfismo, de donde se sigue que \mathbb{R}^n es difeomorfo al cubo $]-1, 1[^n$, el cual es a su vez difeomorfo a $]0, 2[^n \subset H^n$, luego todo abierto de \mathbb{R}^n es difeomorfo a un abierto de H^n , luego todo abierto de \mathbb{R}^n es un abierto con frontera. Más precisamente: los abiertos de \mathbb{R}^n son exactamente los abiertos con frontera cuya frontera es vacía.

En general, es claro que todo conjunto regular difeomorfo a un abierto con frontera es un abierto con frontera, y que todo abierto en un abierto con frontera es un abierto con frontera. También es claro que cualquier semiespacio de la forma

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq a\}, \quad \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \leq a\}$$

es un abierto con frontera (pues es difeomorfo a H^n a través de una traslación, una simetría y/o una permutación de coordenadas), y también lo son los cubos

$$[0, 1[\times]-1, 1[^{n-1}, \quad]-1, 0] \times]-1, 1[^{n-1},$$

pues el primero es abierto en H^n y el segundo en el semiespacio opuesto a H^n .

1.2 Coordenadas

La geometría diferencial puede verse como una extensión de los conceptos del cálculo diferencial en \mathbb{R}^n a espacios topológicos más generales. En principio, el lector familiarizado con el capítulo VI de [An] ya tiene una idea aproximada de en qué términos vamos a llevar a cabo tal generalización, pero el enfoque que adoptaremos aquí obliga a realizar un esfuerzo de abstracción que no tiene equivalente en la presentación de [An], y por ello será conveniente detenernos a discutir incluso los puntos más elementales del aparato matemático que vamos a introducir. En esta sección nos ocuparemos del formalismo matemático en torno al concepto de “coordenadas” de un punto.

Espacios afines En la base de la geometría diferencial se encuentra la geometría analítica o, mejor dicho, el enfoque analítico de la geometría, consistente en asignar a cada punto del espacio una n -tupla de coordenadas y traducir las propiedades geométricas de los puntos y conjuntos de puntos en propiedades y conceptos algebraicos sobre sus coordenadas. Una forma “rápida” de pasar de puntos a coordenadas es identificar de salida una recta con \mathbb{R} , un plano con \mathbb{R}^2 y el espacio con \mathbb{R}^3 , lo que a su vez nos lleva a considerar a \mathbb{R}^n como un espacio general de n dimensiones. Esto es tanto como afirmar que un punto no es ni más ni menos que una n -tupla de coordenadas, pero simplificar hasta este extremo lo que supone asignar coordenadas a los puntos es más bien contraproducente, porque, al considerar que los puntos “vienen dados” ya con sus coordenadas correspondientes, perdemos de vista el hecho de que todo proceso de asignación de coordenadas conlleva unas elecciones arbitrarias (porque la realidad es que los puntos no tienen asociadas ningunas coordenadas “absolutas”).

En el contexto de la geometría diferencial es impensable identificar un punto del (o de un) espacio con unas coordenadas dadas, y para hacernos a la idea de que un punto no es lo mismo que sus coordenadas conviene no pensar en \mathbb{R}^n , sino mejor en un espacio afín E de dimensión n (en el sentido de [G 3.10], pero para el cuerpo $K = \mathbb{R}$). Un punto $P \in E$ ya no es una n -tupla de coordenadas, pero podemos asociarle unas coordenadas fijando un sistema de referencia afín $(O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ (según la definición [G, 3.17]). Tenemos entonces que a cada

punto P le podemos asociar unas coordenadas $x^1(P), \dots, x^n(P)$, que son los únicos números reales para los que se tiene la relación

$$P = O + \sum_i x^i(P) \vec{e}_i.$$

Más precisamente, diremos que los números $x^i(P)$ son las *coordenadas afines* asociadas al sistema de referencia afín dado.

Lo que conviene destacar aquí es que estas coordenadas no tienen ninguna relación directa con P , en el sentido de que podemos tomar otro sistema de referencia $(O'; \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ respecto del cual las coordenadas afines de P serán otros números $y^1(P), \dots, y^n(P)$ que pueden ser completamente distintos, y en un espacio afín “típico” (no es el caso de \mathbb{R}^n), no hay ningún criterio por el que las coordenadas de P respecto de un sistema de referencia sean “más representativas” a la hora de identificar a P que las de otro.²

Así pues, a partir de dos sistemas de referencia en el espacio E obtenemos dos sistemas de coordenadas afines $x, y : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. En estas circunstancias resulta conveniente conocer qué relación hay entre las coordenadas $x(P)$ e $y(P)$ que le corresponden a un mismo punto P . Para obtenerla consideramos las coordenadas de los vectores

$$\overrightarrow{OO'} = \sum_j a^j \vec{e}_j, \quad \vec{v}_i = \sum_j a_i^j \vec{e}_j,$$

de modo que

$$P = O' + \sum_i y^i(P) \vec{v}_i = O + \overrightarrow{OO'} + \sum_{ij} y^i(P) a_i^j \vec{e}_j = O + \sum_j (a^j + \sum_i a_i^j y^i(P)) \vec{e}_j.$$

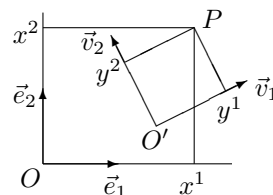
Por la unicidad de las coordenadas, resulta que

$$x^j(P) = a^j + \sum_i y^i(P) a_i^j.$$

Equivalentemente, la aplicación $y^{-1} \circ x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que transforma las coordenadas (y^1, \dots, y^n) de un punto p respecto de $(O'; \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ en sus coordenadas (x^1, \dots, x^n) respecto de $(O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ viene dada por $x = a + yA$, donde $a = (a^1, \dots, a^n)$ y $A = (a_i^j)$.

Por ejemplo, esta relación de cambio de coordenadas nos permite demostrar el teorema siguiente:

²Un ejemplo concreto de esta situación en la que no hay nada parecido a un “origen de coordenadas canónico” O ni una “base canónica”, es $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 2\}$, que es un espacio afín con el espacio vectorial asociado $\vec{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. Por ejemplo, si tomamos $O = (1, 1, 0)$ y $\vec{e}_1 = (1, -1, 0)$, $\vec{e}_2 = (1, 0, -1)$, entonces las coordenadas de $P = (0, 3, -1)$ son $(x_1, x_2) = (-2, 1)$, pero si tomamos cualquier otro sistema de referencia obtendremos otros números, y no hay ningún criterio “natural” para elegir un punto O en E ni una base \vec{e}_1, \vec{e}_2 en \vec{E} .



Teorema 1.4 *Si E es un espacio afín sobre \mathbb{R} , existe una única topología en E respecto a la cual las aplicaciones $x : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ que a cada punto le asignan sus coordenadas afines respecto de un sistema de referencia prefijado son homeomorfismos.*

DEMOSTRACIÓN: Fijamos un sistema de referencia en E y consideramos la aplicación $x : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ que a cada punto le asigna sus coordenadas afines. Esto nos da una topología en E , a saber, la que tiene por abiertos los conjuntos $U \subset E$ tales que $x[U]$ es abierto en \mathbb{R}^n . Es inmediato que estos conjuntos forman una topología y que es la única con la que x se convierte en un homeomorfismo. Sólo falta observar que si partimos de otro sistema de referencia que determina otras coordenadas afines $y : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ la topología que obtenemos de este modo es la misma. En efecto, basta observar que la biyección $y^{-1} \circ x$ tiene la forma que hemos obtenido: $y \mapsto a + yA$, por lo que es un homeomorfismo de \mathbb{R}^n en sí mismo (un difeomorfismo, de hecho, pero de momento no necesitamos este hecho). Por lo tanto, dado $U \subset E$, tenemos que $y[U]$ es abierto en \mathbb{R}^n si y sólo si lo es $(y^{-1} \circ x)[y[U]] = x[U]$, es decir, que los abiertos de la topología definida por y son los mismos que los de la definida por x . ■

Definición 1.5 Si E es un espacio afín sobre \mathbb{R} , llamaremos *topología euclídea* en E a la topología dada por el teorema anterior, es decir, la única topología para la que las asignaciones de coordenadas afines son homeomorfismos.

Todo esto se aplica al caso de los espacios vectoriales V de dimensión finita sobre \mathbb{R} —en los que lo “natural” es tomar como origen de coordenadas el vector nulo, aunque no hay en principio ningún criterio para elegir una base— y más en particular a \mathbb{R}^n , donde el sistema de referencia “natural” está formado por el vector nulo y la base canónica. La asignación de coordenadas correspondiente a este sistema de referencia es simplemente la identidad $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, de donde concluimos que la topología euclídea en \mathbb{R}^n es la topología usual que hemos usado para definir la topología euclídea en otros espacios afines.

Pero las asignaciones de coordenadas afines no son las únicas asignaciones de coordenadas que podemos considerar en un espacio afín. Por ejemplo, en la sección [IC 4.3] demostramos que los cuerpos sometidos a la atracción gravitatoria de un cuerpo de masa mucho mayor siguen trayectorias cónicas (o rectas), y en el argumento fue esencial representar la posición del cuerpo, no mediante sus coordenadas afines asociadas a una base de \mathbb{R}^2 (sus coordenadas cartesianas) sino mediante sus coordenadas polares. Para discutir lo que esto supone desde un punto de vista teórico, conviene introducir algunos conceptos:

Cartas Aunque el ejemplo de los espacios afines es más representativo que \mathbb{R}^n en cuanto que marca claramente la diferencia entre un punto y sus posibles coordenadas, todavía no es lo suficientemente general, en cuanto que en un espacio afín es posible dar un criterio por el que asignar coordenadas a todos los puntos del espacio, mientras que muchas asignaciones de coordenadas de interés —como es el caso de las coordenadas polares, que discutiremos en breve— tienen que restringirse a subconjuntos adecuados.

Definición 1.6 Una *carta* de dimensión n en un espacio topológico V es un homeomorfismo $x : U \rightarrow \tilde{U}$ entre un abierto U de V y un abierto con frontera \tilde{U} de \mathbb{R}^n .

Las aplicaciones $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ que resultan de componer x con las proyecciones de \mathbb{R}^n se llaman *funciones coordenadas* asociadas a la carta x . Si $p \in U$, los números reales $x^i = x^i(p)$ se llaman *coordenadas* del punto p respecto de la carta dada. Por ello las cartas de un espacio topológico V se llaman también *sistemas de coordenadas locales* de V (locales porque no están definidas necesariamente en todo el espacio V , sino sólo en un abierto). Si x es una carta, el homeomorfismo inverso $X = x^{-1} : \tilde{U} \rightarrow U$ recibe el nombre de *parametrización local* asociada a la carta.

Aquí la palabra “carta” debe entenderse en el sentido de “mapa”. Una carta de un espacio topológico es un mapa de una región del mismo. Exigimos que sea un homeomorfismo para que conserve “lo esencial” (por ejemplo, para que una curva (continua) sobre la región cartografiada U se corresponda con una curva (continua) sobre el mapa \tilde{U}), si bien permitimos que la carta dé lugar a deformaciones elásticas. El lector familiarizado con la cartografía terrestre sabrá que los mapas que abarcan grandes extensiones deforman necesariamente las regiones que representan. Por ejemplo, en la proyección más habitual del globo terrestre —la proyección cilíndrica—, Groenlandia parece tener casi una tercera parte de la superficie de África, cuando en realidad es mucho menor. La geometría diferencial enseña que cualquier carta de una esfera da lugar necesariamente a deformaciones (aunque éstas puedan ser despreciables cuando la región cartografiada sea suficientemente pequeña). No estamos en condiciones de probarlo ahora, pero nos limitamos a considerar tales deformaciones como admisibles al admitir cualquier homeomorfismo como carta.

Ejemplo: Las coordenadas polares Suponemos que el lector sabe lo que son las coordenadas polares en \mathbb{R}^2 , pero debemos detenernos aquí a discutir su relación con la definición precedente. En principio, podemos considerar la aplicación $X :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dada por $X(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$. Se trata de una aplicación continua y suprayectiva y como tal la podemos considerar como una *parametrización* de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, en el sentido de que cuando los parámetros ρ y θ recorren el dominio de X , los puntos $X(\rho, \theta)$ recorren todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, pero no es la parametrización asociada a una carta en el sentido de la definición anterior, porque no es biyectiva, luego no es la inversa de ninguna aplicación.

Ahora bien, si fijamos cualquier $\theta_0 \in \mathbb{R}$, la restricción

$$X_{\theta_0} : \tilde{U}_{\theta_0} =]0, +\infty[\times]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

sí que es inyectiva, y su imagen $U_{\theta_0} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ consta de todos los puntos de \mathbb{R}^2 menos los de la semirrecta $\{(\rho \cos \theta_0, \rho \sin \theta_0) \mid \rho \geq 0\}$. En particular U_{θ_0} es un abierto en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y la inversa de X_{θ_0} es la aplicación $x_{\theta_0} : U_{\theta_0} \rightarrow \tilde{U}_{\theta_0}$ dada por

$$x_{\theta_0}(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arccos_{\theta_0} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right),$$

donde \arccos_{θ_0} es la determinación del arco coseno que toma valores en el intervalo $]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$. Puesto que es continua y su inversa X_{θ_0} también lo es, concluimos que x_{θ_0} es un homeomorfismo, luego es una carta en el sentido de la definición precedente, y X_{θ_0} es su parametrización asociada.

Cuando hablemos de coordenadas polares sin especificar θ_0 entenderemos que $\theta_0 = -\pi$, de modo que la carta determinada por las coordenadas polares cubre todos los puntos no nulos de \mathbb{R}^2 excepto los de argumento $-\pi$, es decir, excepto los de la parte negativa del eje de abscisas.

Ya hemos mostrado las relaciones entre las coordenadas polares y cartesianas, pero conviene destacarlas:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad \blacksquare$$

Ejemplo: Las coordenadas esféricas Recordemos ahora otra asignación de coordenadas, en este caso en \mathbb{R}^3 , que nos será especialmente útil a la hora de ilustrar la teoría.

Consideramos la parametrización $X :]0, +\infty[\times]0, \pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(\rho, \theta, \phi) = (\rho \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \rho \cos \theta).$$

Claramente es diferenciable. Su matriz jacobiana es

$$J_X = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \theta \cos \phi & \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi & \cos \theta \\ \rho \cos \theta \cos \phi & \rho \cos \theta \operatorname{sen} \phi & -\rho \operatorname{sen} \theta \\ -\rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi & \rho \operatorname{sen} \theta \cos \phi & 0 \end{pmatrix}$$

y un simple cálculo muestra que el determinante jacobiano vale $\rho^2 \operatorname{sen} \theta$, luego es siempre no nulo en el dominio de X . Como en el caso de las coordenadas polares, no es cierto que X sea biyectiva, pero se restringe a aplicaciones biyectivas

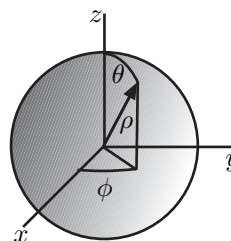
$$X_\alpha : \tilde{U}_\alpha =]0, +\infty[\times]0, \pi[\times]\alpha, \alpha + 2\pi[\rightarrow U_\alpha,$$

donde U_α es el abierto que resulta de quitar a \mathbb{R}^3 el semiplano que tiene al eje Z por frontera y contiene al punto $(\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha, 0)$.

Por el teorema de la función inversa, las aplicaciones inversas

$$x_\alpha : U_\alpha \rightarrow \tilde{U}_\alpha =]0, +\infty[\times]0, \pi[\times]\alpha, \alpha + 2\pi[,$$

son diferenciables (en particular continuas, luego homeomorfismos), luego son cartas que asignan a cada punto de su dominio unas *coordenadas esféricas* (ρ, θ, ϕ) , cuya interpretación geométrica es bien conocida. \blacksquare



Ejemplo Consideremos la esfera

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Una carta de S^2 es, por ejemplo, $p_3^+ : U_3^+ \rightarrow \tilde{U}_3^+$, donde

$$U_3^+ = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z > 0\}, \quad \tilde{U}_3^+ = B^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

y $p_3^+(x, y, z) = (x, y)$. Claramente p_3^+ es un homeomorfismo y la parametrización asociada es la aplicación $X_3^+ : \tilde{U}_3^+ \rightarrow U_3^+$ dada por

$$X_3^+(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}).$$

Cada punto de S^3 está determinado por sus tres coordenadas (x, y, z) , pero vemos que localmente, en el abierto U_3^+ , cada punto está determinado por las dos primeras. Así, podemos decir que el punto $p = (1/3, 2/3, 2/3) \in U_3^+$ tiene coordenadas $(x, y) = (1/3, 2/3)$ respecto de la carta considerada.

Nuevamente nos encontramos con que esta asignación de coordenadas no puede extenderse a toda la esfera. De hecho, no puede extenderse a ningún abierto mayor que U_3^+ , puesto que ello llevaría inevitablemente a que puntos distintos tendrían las mismas coordenadas. Ahora bien, análogamente podemos definir U_i^+ como la semiesfera formada por los puntos $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$ que cumplen $x_i > 0$, y a su vez U_i^- como la semiesfera opuesta, formada por los puntos con $x_i < 0$. Entonces las proyecciones correspondientes p_i^\pm son cartas de S^2 , donde p_i es la proyección que elimina la coordenada i -ésima. Todas ellas tienen imagen en la bola unitaria $\tilde{U}_i^\pm = B^2 \subset \mathbb{R}^2$ y las parametrizaciones correspondientes X_i^\pm son las aplicaciones que insertan en la posición i -ésima el término $\pm\sqrt{1 - u^2 - v^2}$.

Así, el mismo punto $p = (1/3, 2/3, 2/3) \in S^2$ tiene coordenadas $(1/3, 2/3)$ respecto de la carta p_3^+ y coordenadas $(2/3, 2/3)$ respecto de p_1^+ , y no hay ningún criterio por el que podamos decir que un par de coordenadas es “más representativo” que el otro, o que las coordenadas determinadas por cualquier otra carta. ■

Una cuestión de notación Antes de avanzar con la teoría es importante advertir que vamos a admitir un cierto grado de ambigüedad en la notación con la que nos referimos a las asignaciones de coordenadas que no debería causar ninguna confusión siempre que se sea consciente de ella.

Si $x : U \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ es una carta en un espacio topológico X , es habitual llamar x tanto a la carta en sí como a un elemento arbitrario $x \in \tilde{U}$, de modo que podemos decir que la carta x asigna a cada punto $p \in U$ una n -tupla de coordenadas $x = x(p)$. La primera x es una n -tupla en \mathbb{R}^n , la segunda es una función.

Peor aún es el caso de la expresión x^i , que puede tener, según el contexto, tres significados distintos. Puede representar la i -ésima coordenada de un punto $p \in U$, con lo que $x^i \in \mathbb{R}$, puede representar a la función $x^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada

punto p le asigna su coordenada i -ésima $x^i(p)$, pero también puede representar la función $x^i : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada n -tupla de coordenadas x le asigna su coordenada i -ésima. Así, podemos afirmar que $x^i = x \circ x^i$, donde x^i representa una función distinta en cada miembro.

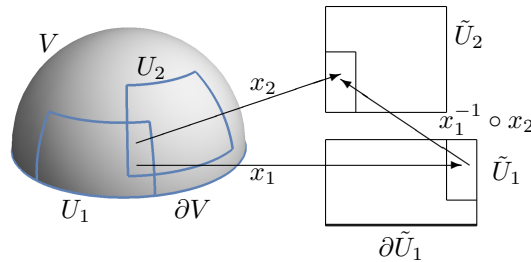
Normalmente evitaremos escribir fórmulas como la anterior, donde una misma expresión debe ser interpretada de dos formas distintas, pero sí será habitual que x^i represente una cosa en unas fórmulas y otra en otras, pero de modo que el contexto siempre deje claro el sentido correcto. ■

En general hemos pedido que una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ de un espacio topológico V sea un homeomorfismo. Nos gustaría pedir que fuera diferenciable, pero esto, en principio, no tiene sentido alguno. En el caso en que V es un subespacio topológico de \mathbb{R}^m , sí que tiene sentido decir que la parametrización $X : \tilde{U} \rightarrow U$ es diferenciable si la consideramos como aplicación $X : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$, y en esta idea se basa la definición de carta³ de [An 7.1], pero esto es justo lo que pretendemos evitar, exigir que el espacio topológico V tenga que ser necesariamente un subespacio de un espacio \mathbb{R}^m . Ahora bien, en el contexto general tienen sentido las definiciones siguientes:

Definición 1.7 Dos cartas $x : U_1 \rightarrow \tilde{U}_1$ y $x_2 : U_2 \rightarrow \tilde{U}_2$ en un espacio topológico V son *compatibles* si la aplicación $x_1^{-1} \circ x_2 : x_1[U_1 \cap U_2] \rightarrow x_2[U_1 \cap U_2]$ es un difeomorfismo entre abiertos con frontera de \mathbb{R}^n .

Un *atlas* de dimensión n en un espacio topológico V es una familia de cartas de dimensión n compatibles dos a dos tales que sus dominios forman un cubrimiento abierto de V .

La figura siguiente muestra dos cartas x_1 y x_2 de una semiesfera. Cada una está definida en una región distinta de la misma, pero ambas se solapan en una cierta región. Dicha región se proyecta en dos rectángulos, entre los cuales está definida la aplicación diferenciable $x_1^{-1} \circ x_2$.



Para comprobar la compatibilidad de las cartas de un atlas basta probar que las composiciones $x_1^{-1} \circ x_2$ son diferenciables, pues si esto vale para todo par

³Observemos que las cartas definidas en [An 7.1] se corresponden con lo que aquí estamos llamando parametrizaciones, es decir, son aplicaciones de un abierto de \mathbb{R}^n en un abierto de V y no al revés. Esto era necesario precisamente para poder hablar de cartas diferenciables, pero en la geometría diferencial abstracta es costumbre llamar cartas a las inversas de las parametrizaciones.

de cartas, en particular tendremos que $x_2^{-1} \circ x_1$ es diferenciable, lo cual implica que ambas aplicaciones son difeomorfismos.

Notemos también que si X_1 y X_2 son las parametrizaciones inversas, es lo mismo $x_1^{-1} \circ x_2$ que $X_1 \circ X_2^{-1}$. En ambos casos se trata de la aplicación que a cada punto de la región $x_1[U_1 \cap U_2]$ del primer “mapa” que también está cubierta por el segundo “mapa” le asigna el punto de éste que se corresponde con el mismo punto de V .

Ejemplo Las cartas p_i^\pm , para $i = 1, 2, 3$ consideradas en el ejemplo precedente forman un atlas de la esfera S^2 .

En efecto, si tomamos dos de ellas con dominios comunes, por ejemplo, p_2^- y p_3^+ , observamos que

$$((p_2^-)^{-1} \circ p_3^+)(x, z) = (x, -\sqrt{1 - x^2 - z^2}),$$

que claramente es una aplicación diferenciable en su dominio, e igualmente se razona con cualquier otro par. ■

1.3 Variedades diferenciales con frontera

En la sección siguiente veremos que, del mismo modo que lo que necesitamos para hablar de una aplicación continua entre dos conjuntos es haber fijado en cada uno de ellos una topología, lo que necesitamos para hablar de una aplicación diferenciable entre dos espacios topológicos es haber fijado en cada uno de ellos un atlas. No obstante, sucede que atlas distintos en un mismo espacio topológico pueden dar lugar a la misma noción de diferenciability, por lo que un atlas no es exactamente para la diferenciability lo que la topología es para la continuidad, sino que sería más bien lo análogo a una base, de modo que dos bases en el mismo conjunto pueden determinar la misma topología. El concepto que realmente podemos asociar a una “noción de diferenciability” es el siguiente:

Definición 1.8 Una *estructura diferencial* en un espacio topológico V es un atlas maximal respecto de la inclusión, es decir, un atlas que no está contenido en ningún otro.

Teorema 1.9 *Todo atlas en un espacio topológico V se extiende hasta una única estructura diferencial en V .*

DEMOSTRACIÓN: Dado un atlas \mathcal{A} de dimensión n en V , llamamos \mathcal{D} al conjunto de todas las cartas compatibles con todas las cartas de \mathcal{A} .

Se cumple que \mathcal{D} es un atlas que contiene a \mathcal{A} , pues, por una parte, la inclusión $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ es inmediata, lo que implica en particular que los dominios de las cartas de \mathcal{D} cubren V .

Por otra parte, si x_1 y x_2 son dos de sus cartas y u está en el dominio de $x_1^{-1} \circ x_2$, existe una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ en \mathcal{A} tal que $x_1^{-1}(u) \in U$.

Entonces

$$(x_1^{-1} \circ x_2)(u) = ((x_1^{-1} \circ x) \circ (x^{-1} \circ x_2))(u),$$

y tanto $x_1^{-1} \circ x$ como $x^{-1} \circ x_2$ son diferenciables, por definición de \mathcal{D} , luego $x_1^{-1} \circ x_2$ es diferenciable.

Si \mathcal{D}' es otro atlas que contiene a \mathcal{A} , se cumple que $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ por definición de atlas, y esto prueba tanto que \mathcal{D} es un atlas maximal como que es el único que extiende a \mathcal{A} . ■

Definición 1.10 Una *variedad diferencial* de dimensión n es un par (V, \mathcal{A}) , donde V es un espacio topológico de Hausdorff con una base numerable y \mathcal{A} es una estructura diferencial de dimensión n en V .

Por el teorema anterior, para determinar una estructura diferencial en un espacio topológico V basta determinar un atlas (no necesariamente maximal), si bien atlas distintos pueden determinar la misma estructura diferencial.

Como es habitual, escribiremos V en lugar de (V, \mathcal{A}) . Cuando hablemos de una carta (o sistema de coordenadas) de una variedad V se entenderá que nos referimos a una carta de su estructura diferencial. Un *atlas* de V será un conjunto de cartas de V cuyos dominios cubren a V .

La prueba del teorema anterior muestra que si \mathcal{A} es un atlas de una variedad V , entonces una carta en el espacio topológico V es una carta de V si y sólo si es compatible con todas las cartas de \mathcal{A} .

Si $x_1 : U_1 \rightarrow \tilde{U}_1$ y $x_2 : U_2 \rightarrow \tilde{U}_2$ son dos cartas de una variedad diferencial V y consideramos un punto $p \in U_1 \cap U_2$, entonces $x_1^{-1} \circ x_2$ transforma $x_2(p)$ en $x_1(p)$, luego según el teorema 1.2 sabemos que $x_1(p) \in \partial\tilde{U}_1$ si y sólo si $x_2(p) \in \partial\tilde{U}_2$. Esto justifica la definición siguiente:

Si V es una variedad diferencial, llamaremos *frontera* de V al conjunto ∂V de los puntos de V cuya imagen por cualquier carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ esté en $\partial\tilde{U}$. Acabamos de razonar que esto no depende de la carta considerada.

Es habitual llamar variedades diferenciales a las variedades diferenciales sin frontera, es decir, las que cumplen $\partial V = \emptyset$, mientras que para admitir que ∂V pueda ser no vacío se suele hablar de “variedades con frontera”. No obstante, aquí hemos definido las variedades diferenciales de modo que incluyen tanto el caso en que $\partial V = \emptyset$ como el contrario.

El término “variedad” hace referencia a que una variedad es un espacio topológico cuyos puntos están determinados localmente (es decir, que se distinguen de los puntos de un entorno) por “varias” coordenadas.

Ejemplos 1) Los ejemplos más elementales de variedades diferenciales son los espacios \mathbb{R}^n , considerados como variedades diferenciales con la estructura determinada por el atlas cuya única carta es la identidad $I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Las coordenadas de un punto respecto de esta carta son las que se conocen habitualmente como sus *coordenadas cartesianas*.

Cuando particularicemos a \mathbb{R}^n los resultados básicos que expondremos en los primeros capítulos de este libro obtendremos simplemente los resultados conocidos del cálculo diferencial en \mathbb{R}^n .

2) Un poco más en general, todo espacio afín E sobre \mathbb{R} se convierte en una variedad diferencial considerándolo como espacio topológico con la topología euclídea y tomando como única carta cualquier aplicación $x : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ que a cada punto le asigne sus coordenadas respecto de un sistema de referencia prefijado.

Aquí tenemos una primera muestra de la importancia de haber definido las variedades diferenciales en términos de estructuras diferenciales y no de atlas: si $y : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la asignación de coordenadas respecto de otro sistema de referencia, tenemos que x e y determinan dos atlas distintos en E , pero ambos definen la misma estructura diferencial, ya que y es una carta compatible con x . Ello se debe a que, como ya hemos observado, la aplicación $y^{-1} \circ x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo, luego y es una carta de la estructura diferencial definida por x , y viceversa.

En lo sucesivo consideraremos siempre a los espacios afines como variedades diferenciales con esta estructura. En particular, todo espacio vectorial V de dimensión finita n sobre \mathbb{R} tiene asignada de este modo una estructura de variedad diferencial. Las cartas correspondientes a sistemas de referencia que tienen por origen el vector nulo son simplemente los isomorfismos $x : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ de espacios vectoriales. La estructura diferencial que hemos definido en 1) sobre \mathbb{R}^n es un caso particular de ésta.

3) Todo abierto con frontera en \mathbb{R}^n es una variedad diferencial tomando como atlas el formado por la identidad como única carta. En lo sucesivo siempre consideraremos a tales abiertos como variedades diferenciales con esta estructura.

Más en general, todo abierto U en una variedad diferencial V es una variedad diferencial con el atlas formado por las cartas de V definidas sobre los abiertos de U .

4) Vamos a definir una estructura diferencial sobre la esfera S^n sin más que generalizar la que ya hemos definido para S^2 . Para ello llamamos U_i^+ al hemisferio formado por los puntos con $x_i > 0$ y U_i^- al hemisferio opuesto, formado por los puntos con $x_i < 0$, para $i = 1, \dots, n+1$.

La carta $p_i^\pm : U_i^\pm \rightarrow B^n$ es la definida por la proyección que elimina la componente i -ésima, con imagen en la bola unitaria abierta $B^n \subset \mathbb{R}^n$. Se comprueba sin dificultad que estas $2(n+1)$ cartas forman un atlas de S^n , que a su vez define una estructura diferencial.

5) La esfera S^n está contenida en \mathbb{R}^{n+1} , aunque la definición de variedad que hemos dado no requiere que se dé el caso. Veamos ahora lo fácil que es dotar de estructura de variedad diferencial al espacio proyectivo $P^n(\mathbb{R})$ (con la topología proyectiva definida en la sección [G 12.5]), a pesar de que no es un subconjunto de ningún espacio \mathbb{R}^m .

Llamamos U_i al conjunto de los puntos de $P^n(\mathbb{R})$ cuya coordenada i -ésima es no nula (para cada $i = 1, \dots, n+1$). Es claro que esta condición no depende del

representante que se escoja del punto, así como que los conjuntos U_i forman un cubrimiento abierto de $P^n(\mathbb{R})$. Para $i = n + 1$ definimos la carta $U_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}} \right),$$

y análogamente para los otros índices. Es inmediato comprobar que estas cartas determinan un atlas de $P^n(\mathbb{R})$, con lo que hemos definido en el espacio proyectivo una estructura de variedad diferencial sin necesidad de buscar un modo de sumergirlo en algún espacio \mathbb{R}^m .

6) El ejemplo más simple de variedad con frontera es un intervalo cerrado $V = [a, b] \subset \mathbb{R}$, con $a < b$. Basta considerar dos cartas, a saber, la identidad sobre $[a, b[$ y sobre $]a, b]$, que son ambos abiertos con frontera, pues son difeomorfos a $]0, 1[$, que a su vez es un abierto en $H^1 = [0, +\infty[$.

7) Vamos a dotar a la bola unitaria cerrada $V = \bar{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ de estructura de variedad diferencial con frontera. Empezamos tomando como carta la identidad I en la bola abierta B^n , la cual cubre a todos los puntos de V excepto los que están en S^{n-1} .

Ahora consideramos las cartas que hemos definido para S^{n-1} , por ejemplo, la carta $p_n^+ : U_n^+ \rightarrow B^{n-1}$ definida sobre la semiesfera $x_n > 0$ mediante $p_n^+(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1})$. A partir de ella definimos sobre el abierto $U_n^+ = \{x \in V \mid x_n > 0\}$ la carta $p_n^+ : U_n^+ \rightarrow]0, 1] \times B_1^{n-1}(0)$ dada por

$$\bar{p}_n^+(x) = (\|x\|, p_n^+(x/\|x\|)).$$

Claramente es un homeomorfismo, pues su inversa es

$$(r, x) \mapsto r(x, \sqrt{1 - \|x\|^2}),$$

ya que la imagen es un abierto con frontera, ya que es un abierto en el semiespacio $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 1\}$.

Así las cartas \bar{p}_i^\pm cubren toda la bola V salvo su centro (que está cubierto por la carta I). Es obvio que \bar{p}_i^\pm es compatible con I y, por ejemplo,

$$((p_n^+)^{-1} \circ p_{n-1}^-)(r, x) = (r, x_1, \dots, x_{n-2}, \sqrt{1 - \|x\|^2})$$

es claramente diferenciable, e igualmente vale para cualquier par de cartas con dominio común. Esto convierte a V en una variedad diferencial con frontera, de modo que $\partial V = S^{n-1}$.

En realidad podemos encontrar un atlas más simple para \bar{B}^n si observamos que la carta $p_n^+ : U_n^+ \rightarrow]0, 1] \times B^{n-1}$ es un difeomorfismo entre conjuntos regulares, pues puede prolongarse (con la misma definición) a un difeomorfismo

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\} \rightarrow]0, +\infty[\times B^{n-1},$$

ya que lo mismo vale para las demás cartas.

Esto significa que podemos tomar como cartas de \bar{B}^n a las restricciones de la identidad a los conjuntos U_i^\pm , que claramente son compatibles entre sí y con la identidad en B^n (pues las composiciones de la inversa de una carta con otra son siempre la aplicación identidad). ■

Cartas canónicas Es inmediato que la composición de una carta de una variedad V con un difeomorfismo entre abiertos con frontera de \mathbb{R}^n da lugar a otra carta de V , al igual que su restricción a un abierto menor. Estos dos hechos nos permiten elegir cartas alrededor de cada punto con características adicionales que las hagan más simples o manejables.

Por ejemplo, por la definición de abierto con frontera, en la definición de variedad diferencial habría sido equivalente exigir que las cartas tomaran valores en abiertos de H^n .

Una *carta cúbica* centrada en un punto p de una variedad diferencial V es una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ tal que $x(p) = 0$ y

$$\tilde{U} =]-1, 1[^n \quad \text{o bien} \quad \tilde{U} =]-1, 0] \times]-1, 1[^{n-1},$$

según si p es un punto del interior o de la frontera de V . Si \tilde{U} es una bola abierta $B_r^n(0)$ o bien $\tilde{U} = \{x \in B_r^n(0) \mid x_1 \leq 0\}$, tenemos una *carta esférica* centrada en p .

Es fácil ver que todo punto p en una variedad diferencial V admite una carta cúbica o esférica centrada en p . En efecto, ya hemos observado que podemos partir de una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ con \tilde{U} abierto en $H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$.

Componiéndola con la traslación $a \mapsto a - x(p)$ obtenemos una carta con $x(p) = 0$. Si p no está en la frontera de V entonces $x(p) = 0$ estará ahora en el interior de \tilde{U} , mientras que si $p \in \partial V$, entonces $x_1(p) = 0$, por lo que la traslación $a \mapsto a - x(p)$ envía puntos de H^n en puntos de H^n , luego se seguirá cumpliendo que $\tilde{U} \subset H^n$.

En el caso en que $p \notin \partial V$, podemos restringir la carta de modo que \tilde{U} sea un cubo $]-\epsilon, \epsilon[^n$ o bien una bola abierta $B_\epsilon^n(0)$ y, componiéndola con una homotecia podemos pasar a que \tilde{U} sea el cubo de la definición de carta cúbica o bien una bola abierta de cualquier radio prefijado, de acuerdo con la definición de carta esférica.

Si $p \in \partial V$, igualmente podemos exigir que $\tilde{U} = H^n \cap]-\epsilon, \epsilon[^n$ o alternativamente $\tilde{U} = H^n \cap B_\epsilon^n(0)$. Componiendo con una homotecia y con la simetría $a \mapsto (-a_1, a_2, \dots, a_n)$ obtenemos un cubo o una media bola según lo requerido por las definiciones de carta cúbica y esférica para puntos frontera. ■

En \mathbb{R}^n o en un espacio afín considerar cartas no definidas sobre todo el espacio es algo opcional, pues siempre podemos tomar cartas que asignan coordenadas simultáneamente a todos los puntos del espacio. Sin embargo, en una variedad diferencial “típica” como S^n esto ya no es así, y la posibilidad de que las cartas estén definidas únicamente sobre abiertos adecuados se vuelve esencial. Es imposible cubrir S^n con una única carta, pues su imagen tendría que ser abierta y compacta en \mathbb{R}^n (y no vacía) y no existen conjuntos así. El argumento vale igualmente para cualquier variedad compacta sin frontera.

Veamos ahora algunas técnicas generales para obtener nuevas variedades diferenciales a partir de otras dadas:

Ejemplos 8) Si V es una variedad diferencial de dimensión n con frontera no vacía, podemos dotar a ∂V de estructura de variedad diferencial sin frontera de dimensión $n - 1$ del modo siguiente:

Para cada punto $p \in \partial V$, tomamos una carta de V alrededor de p de la forma $x : U \rightarrow]a, b] \times \tilde{U}_0$, donde U_0 es un abierto en \mathbb{R}^{n-1} . Siempre existe una carta en estas condiciones (por ejemplo, una carta cúbica centrada en p). Seguidamente consideramos su restricción $x' : \partial U \rightarrow \{0\} \times \tilde{U}_0$ (donde llamamos $\partial U = U \cap \partial V$, que es un entorno abierto de p en ∂V) y la componemos con la proyección que elimina la primera componente, con lo que obtenemos un homeomorfismo $\bar{x} : \partial U \rightarrow \tilde{U}_0$.

Las cartas construidas de este modo cubren ∂U . Para que formen un atlas falta probar que son compatibles. Ahora bien, dadas dos cartas \bar{x}_1, \bar{x}_2 , se cumple que

$$\bar{x}_1^{-1} \circ \bar{x}_2 = i \circ (x_1^{-1} \circ x_2) \circ \pi,$$

donde $i :]-1, 0] \times]-1, 1[^{n-1} \rightarrow \tilde{U}$ viene dada por $x \mapsto (0, x)$ y π es la proyección que elimina la primera componente. La composición es obviamente diferenciable.

En resumen: una carta de un punto $p \in \partial V$ se obtiene tomando una carta de V alrededor de p en la que los puntos de ∂V tengan primera coordenada constante para a continuación omitir dicha coordenada.

Observemos que la estructura diferencial definida en S^n por 8) a partir de la definida en \bar{B}^{n+1} por 7) coincide con la definida en 4), pues las cartas \bar{x} que se obtienen según 8) a partir de las cartas x consideradas en 7) son precisamente las cartas de S^n según 4) de las que partimos en 7).

9) Si V_1 y V_2 son variedades diferenciales m y n con $\partial V_2 = \emptyset$, entonces $V_1 \times V_2$ es una variedad diferencial tomando como cartas alrededor de un punto (p, q) a los productos $(x \times y)(u, v) = (x(u), y(v))$, donde x es una carta alrededor de p y y es una carta alrededor de q . Más en general, el producto de un número finito de variedades diferenciales (todas ellas sin frontera salvo a lo sumo la primera) es de nuevo una variedad diferencial tomando como cartas los productos de cartas.

La restricción sobre la frontera es necesaria porque la construcción de la estructura diferencial del producto usa que $H^m \times \mathbb{R}^n \cong H^{m+n}$, por lo que el producto de un abierto con frontera de \mathbb{R}^m por un abierto de \mathbb{R}^n es un abierto con frontera de \mathbb{R}^{m+n} , pero no se cumple un resultado análogo cuando multiplicamos dos abiertos con frontera.

10) Si $f : V_1 \rightarrow V_2$ es un homeomorfismo entre espacios topológicos, es claro que toda estructura diferencial en V_2 determina una estructura diferencial en V_1 . Más concretamente, cada carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ de V_2 determina una carta $f \circ x : f^{-1}[U] \rightarrow \tilde{U}$, de manera que, si partimos de dos cartas x_1, x_2 , entonces $(f \circ x_1)^{-1} \circ (f \circ x_2) = x_1^{-1} \circ x_2$, luego la compatibilidad de las cartas de V_2 implica la compatibilidad de las cartas de V_1 .

En particular, si S_+^n es la semiesfera formada por los puntos de S^n con $x_{n+1} \geq 0$, la proyección $p : S_+^n \rightarrow \bar{B}^n$ que elimina la última componente es un

homeomorfismo, por lo que la estructura diferencial en \bar{B}^n definida en 5) induce una estructura diferencial en la semiesfera, que en el caso $n = 2$ es la que ilustra la figura de la página 11.

Observemos que, al contrario de lo que sucedía en los demás ejemplos que hemos visto de variedades con frontera, ∂S_+^n no es la frontera de S_+^n como subconjunto de \mathbb{R}^{n+1} (que es todo S_+^n). ■

Relación con las variedades definidas en [An] Como ya hemos señalado, una diferencia superficial entre las variedades diferenciables⁴ según [An 7.1] y las variedades abstractas que hemos definido aquí es que en [An] considerábamos que las cartas tenían dominio en un abierto de \mathbb{R}^n e imagen en la variedad, mientras que ahora consideramos cartas con dominio en la variedad e imagen en \mathbb{R}^n . (Y otra diferencia obvia es que ahora estamos admitiendo la posibilidad de que las variedades tengan frontera.)

Por otra parte, es fácil ver comprobar que si $S \subset \mathbb{R}^m$ es una variedad diferenciable de dimensión n en el sentido de [An 7.1], entonces el conjunto de todos los difeomorfismos $x : U \rightarrow \tilde{U}$ entre un abierto U de S y un abierto \tilde{U} de \mathbb{R}^n (difeomorfismo en el sentido de [An 7.11]), es una estructura diferencial con la que S se convierte en una variedad diferencial sin frontera en el sentido que hemos introducido aquí. Sus cartas son exactamente las inversas de las cartas en el sentido de [An] (comparar con el teorema [An 7.12]).

En particular, cada ejemplo de variedad diferenciable considerado en [An] nos proporciona ahora un ejemplo de variedad diferencial en sentido abstracto. No obstante, aquí vamos a desarrollar la teoría de variedades diferenciales sin apoyarnos en los resultados de [An] hasta mostrar la relación exacta entre las variedades allí definidas y las variedades abstractas que estamos considerando ahora. Concretamente, probaremos que las variedades de [An] se corresponden exactamente con lo que más adelante llamaremos subvariedades de \mathbb{R}^m . ■

Ejemplo: Coordenadas esféricas En la sección precedente hemos visto que la parametrización

$$X(\rho, \theta, \phi) = (\rho \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \rho \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \rho \cos \theta)$$

determina cartas diferenciables

$$x_\alpha : U_\alpha \rightarrow]0, +\infty[\times]0, \pi[\times]\alpha, \alpha + 2\pi[,$$

que, al variar α , cubren todo \mathbb{R}^3 excepto el eje Z . Si las restringimos a

$$x_\alpha : U_\alpha \cap \bar{B}^3 \rightarrow]0, 1] \times]0, \pi[\times]\alpha, \alpha + 2\pi[$$

obtenemos nuevas cartas de \bar{B}^3 (que cubren toda la bola menos su intersección con el eje Z), pues obviamente son difeomorfismos entre abiertos con frontera

⁴Otra diferencia sutil es que en [An] usábamos el término “diferenciable” y aquí “diferencial”, pues podemos considerar que las variedades definidas en [An] son subconjuntos “diferenciables” de \mathbb{R}^m , mientras que las que hemos definido ahora son más bien espacios topológicos con una estructura que permite hablar de diferenciabilidad.

(ya que se extienden a difeomorfismos entre abiertos de \mathbb{R}^3) y son trivialmente compatibles con las cartas del atlas de \bar{B}^3 formado por restricciones de la identidad.

Más aún, si las restringimos a su vez a $U_\alpha \cap S^2$ y las componemos con la proyección que elimina la primera componente, obtenemos homeomorfismos

$$x_\alpha : U_\alpha \cap S^2 \longrightarrow]0, \pi[\times]\alpha, \alpha + 2\pi[$$

que son nuevas cartas de S^2 (que cubren toda la esfera menos sus dos polos), por la propia construcción de la estructura diferencial que hemos asociado en general a la frontera de una variedad con frontera.

Si consideramos ahora la semiesfera $S_+^2 = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \geq 0\}$, vemos que las restricciones

$$x_\alpha : U_\alpha \cap S_+^2 \longrightarrow]0, \pi/2[\times]\alpha, \alpha + 2\pi[$$

junto con la proyección p_3^+ (definida sobre la semiesfera $z > 0$) constituyen un atlas que determina en S_+^2 una estructura de variedad diferencial con frontera $\partial S_+^2 = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z = 0\}$. La compatibilidad de las cartas es consecuencia inmediata de la compatibilidad de sus extensiones a cartas de S^2 . La figura de la página 11 muestra dos restricciones de dos cartas x_α sobre S_+^2 .

Así pues, cada punto de \mathbb{R}^3 que no esté en el eje Z puede determinarse indistintamente por sus coordenadas cartesianas (x, y, z) o por sus coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) . Lo mismo vale en particular para los puntos de \bar{B}^n y, a su vez, cada punto de S^2 que no sea uno de sus dos polos puede determinarse indistintamente por dos de sus coordenadas cartesianas o por sus coordenadas esféricas (θ, ϕ) . Insistimos una vez más en que no hay ninguna razón que haga a unas coordenadas “más relevantes” que otras en ningún sentido teórico. ■

Ya hemos observado que es imposible cubrir S^2 mediante una única carta. Apurando al máximo, podemos conseguir una carta que cubra toda la esfera menos un punto:

Ejercicio: Probar que la proyección estereográfica $f : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ descrita en el capítulo II de [An], dada por

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right),$$

cuya parametrización asociada es

$$g(u, v) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right)$$

es una carta de S^2 .

Terminamos esta sección observando que, aunque hemos definido una variedad diferencial como un espacio topológico dotado de una estructura diferencial, es posible construir una variedad diferencial definiendo directamente un atlas sobre un conjunto, de modo que la topología de la variedad venga determinada por el propio atlas, tal y como muestra el teorema siguiente:

Teorema 1.11 *Sea V un conjunto y \mathcal{A} un conjunto de biyecciones $x : U \rightarrow \tilde{U}$, donde los conjuntos $U \subset V$ cubren V y \tilde{U} es un abierto con frontera en \mathbb{R}^n . Supongamos además que*

1. *Si $x : U \rightarrow \tilde{U}$, $y : U' \rightarrow \tilde{U}'$ son dos elementos de \mathcal{A} , entonces $x[U \cap U']$ es abierto en \tilde{U} y $x^{-1} \circ y : x[U \cap U'] \rightarrow y[U \cap U']$ es un homeomorfismo.*
2. *Si $p, q \in V$, o bien existe $x : U \rightarrow \tilde{U}$ en \mathcal{A} tal que $p, q \in U$, o bien existen $x_1 : U_1 \rightarrow \tilde{U}_1$, $x_2 : U_2 \rightarrow \tilde{U}_2$ en \mathcal{A} tales que $p \in U_1$, $q \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Entonces existe una única topología de Hausdorff en V para la cual los elementos de \mathcal{A} son cartas. Si además:

3. *V puede cubrirse por una cantidad numerable de cartas y*
4. *Cuando $x, y \in \mathcal{A}$, la aplicación $x^{-1} \circ y$ es diferenciable,*

entonces \mathcal{A} es un atlas en V que determina una estructura de variedad diferencial con dicha topología.

DEMOSTRACIÓN: Veamos que las antiimágenes por las cartas de los abiertos de los abiertos \tilde{U} forman una base \mathcal{B} de una topología en V . Para ello tomamos dos cartas $x : U \rightarrow \tilde{U}$, $y : U' \rightarrow \tilde{U}'$, dos abiertos $G \subset \tilde{U}$, $G' \subset \tilde{U}'$ y un punto $p \in x^{-1}[G] \cap y^{-1}[G']$. Entonces $A = G \cap (x^{-1} \circ y)^{-1}[G']$ es un abierto en \tilde{U} y $p \in x^{-1}[A] \subset x^{-1}[G] \cap y^{-1}[G']$.

Para probar la unicidad consideramos una topología \mathcal{T} en V para la cual los elementos de \mathcal{A} sean cartas. Entonces es claro que $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, y si $A \in \mathcal{T}$, tenemos que A es la unión de los abiertos $A \cap U$, donde U recorre los dominios de las cartas de \mathcal{A} , y $A \cap U = x^{-1}[x[A \cap U]]$, donde $x[A \cap U]$ es abierto en \tilde{U} , luego $A \cap U \in \mathcal{B}$ y la topología \mathcal{T} es la que tiene a \mathcal{B} por base.

Se trata de una topología de Hausdorff, pues si $p, q \in V$ son dos puntos distintos, o bien pertenecen a los dominios disjuntos de dos cartas (que en particular son entornos disjuntos de p y q) o bien ambos pertenecen al dominio U de una carta x . En este caso, $x(p)$ y $x(q)$ tienen entornos disjuntos en \mathbb{R}^n y sus antiimágenes por x son entornos disjuntos de p y q en U , luego en V .

Finalmente, si existe $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ numerable tal que los dominios de las cartas de \mathcal{A}' cubren V , entonces la topología de V tiene una base numerable, a saber, la base \mathcal{B}' formada por los abiertos $x^{-1}[G]$, donde $x : U \rightarrow \tilde{U}$ es una carta de \mathcal{A}' y G pertenece a una base numerable de \tilde{U} . Es fácil ver que \mathcal{B}' es numerable y que todo abierto de \mathcal{B} es unión de abiertos de \mathcal{B}' .

Esto y la propiedad de Hausdorff son los requisitos topológicos que hemos impuesto en la definición de variedad diferencial, por lo que, si se dan las condiciones de la parte final del enunciado, ésta se cumple con el atlas maximal determinado por \mathcal{A} . ■

1.4 Aplicaciones diferenciables

La finalidad más inmediata de las estructuras diferenciales es la de extender el concepto de función diferenciable a espacios más generales que los abiertos de \mathbb{R}^n . Efectivamente, ahora podemos definir el concepto de diferenciabilidad de una aplicación entre variedades:

Definición 1.12 Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación entre dos variedades diferenciales. Diremos que f es *diferenciable* en un punto $p \in V$ si existen cartas $x : U \rightarrow \tilde{U}$ alrededor de p e $y : U' \rightarrow \tilde{U}'$ alrededor de $f(p)$ de modo que la aplicación

$$\bar{f} = x^{-1} \circ f \circ y : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}'$$

es diferenciable en $x(p)$.

Diremos que f es *diferenciable* si lo es en todos los puntos de V . Un *difeomorfismo* entre variedades diferenciales es una biyección diferenciable con inversa diferenciable.

La aplicación $\bar{f} = x^{-1} \circ f \circ y$ se llama *lectura* de f en las cartas dadas. Observemos que la diferenciabilidad de f en un punto dado no depende de la elección de las cartas con las que se calcula la lectura, pues si tenemos dos cartas $x_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i$ alrededor de p e $y_i : U'_i \rightarrow \tilde{U}'_i$ alrededor de $f(p)$, entonces, en un entorno de p se cumple que

$$x_2^{-1} \circ f \circ y_2 = (x_2^{-1} \circ x_1) \circ (x_1^{-1} \circ f \circ y_1) \circ (y_1^{-1} \circ y_2),$$

y así si $x_1^{-1} \circ f \circ y_1$ es diferenciable también lo es $x_2^{-1} \circ f \circ y_2$.

Por la misma razón podemos definir el *rango* de una aplicación diferenciable f en un punto p como el rango de la matriz jacobiana $J_{x(p)}(x^{-1} \circ f \circ y)$ de su lectura respecto de unas cartas dadas, que resulta ser independiente de la elección de dichas cartas.

Destaquemos algunos hechos sencillos sobre la diferenciabilidad de funciones:

1. Una aplicación $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, donde U es un abierto con frontera en \mathbb{R}^n es diferenciable en el sentido que acabamos de introducir si y sólo si lo es en el sentido que ya teníamos definido, pues su lectura respecto a la identidad como carta en U y la identidad como carta en \mathbb{R}^m es ella misma.
2. Es fácil comprobar que la composición de aplicaciones diferenciables entre variedades es diferenciable, así como que toda aplicación diferenciable es continua.
3. Una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ es un difeomorfismo, pues su lectura respecto a la propia x como carta de U y la identidad como carta de \tilde{U} es la identidad en \tilde{U} .

4. Recíprocamente, si U es un abierto en una variedad V y $x : U \rightarrow \tilde{U}$ es un difeomorfismo entre U y un abierto con frontera de \mathbb{R}^n , entonces x es una carta de V (pues las aplicaciones $x^{-1} \circ y$ e $y^{-1} \circ x$ son diferenciables, para todas las cartas y de un atlas cualquiera).
5. Si U es un abierto en una variedad V , la inclusión $i : U \rightarrow V$ es diferenciable (pues sus lecturas respecto a una misma carta en U y en V se reducen a la identidad). Por consiguiente, la restricción a un abierto de una aplicación diferenciable es diferenciable.
6. Si V es una variedad con frontera, la inclusión $i : \partial V \rightarrow V$ es diferenciable (pues su lectura respecto de una carta x de V y la carta correspondiente \bar{x} es la aplicación $x \mapsto (0, x)$).
7. Las proyecciones $\pi_i : V_1 \times V_2 \rightarrow V_i$ en un producto de variedades son diferenciables, al igual que las inclusiones dadas por $\iota_b(a) = (a, b)$, para $b \in V_2$ y $\iota_a(b) = (a, b)$, para $a \in V_1$.

En efecto, la lectura de π_i respecto de una carta $x_1 \times x_2$ en $V_1 \times V_2$ y x_i en V_i es la restricción de una proyección en \mathbb{R}^{m+n} sobre sus primeras o sus últimas componentes. La lectura de ι_b respecto a las cartas x_1 y $x_1 \times x_2$ es la restricción de una inclusión similar de \mathbb{R}^m a \mathbb{R}^{m+n} (insertando las coordenadas de b).

8. Una aplicación $f : V \rightarrow W_1 \times W_2$ es diferenciable si y sólo si lo son sus funciones coordenadas, es decir, las composiciones con las dos proyecciones.

Nota Si V y W son variedades diferenciables en el sentido de [An 7.1] y las consideramos también como variedades abstractas tomando como cartas las inversas de las cartas según dicha definición, es inmediato que una aplicación $f : V \rightarrow W$ es diferenciable en el sentido que acabamos de introducir si y sólo si lo es en el sentido de [An 7.11], pues la definición es la misma (salvo por el hecho de que en [An] está expresada en términos de cartas en el sentido inverso del que estamos considerando ahora). ■

Ejemplos 1) La inclusión $i : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es diferenciable y tiene rango n en todos los puntos. En efecto, su lectura con respecto, por ejemplo, a la proyección en las n primeras componentes y la identidad en \mathbb{R}^{n+1} es la aplicación

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, \pm \sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}),$$

que claramente es diferenciable y de rango n (pues la matriz jacobiana contiene una matriz identidad $n \times n$).

2) La proyección natural $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es diferenciable y tiene rango n en todos sus puntos, pues su lectura respecto a la identidad y una carta adecuada del espacio proyectivo es $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1/x_{n+1}, \dots, x_n/x_{n+1})$ (o la aplicación similar con otra coordenada en el denominador), que claramente es diferenciable y su matriz jacobiana contiene una submatriz $x_{n+1}^{-1} I_n$.

Por consiguiente también es diferenciable la restricción $S^n \rightarrow P^n(\mathbb{R})$, ya que es la composición con la inclusión $S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Además, el rango de la restricción sigue siendo n en todos los puntos.

3) La inclusión $i : \bar{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable y de rango n en todos sus puntos, pues ya hemos visto que, en un entorno de cada uno de sus puntos \bar{B}^n admite como carta a la identidad, luego la lectura de la inclusión respecto de la identidad tanto en \bar{B}^n como en \mathbb{R}^n es la identidad. ■

Nota Puede decirse que las cartas de una variedad diferencial son diferenciables “por definición”, en el sentido de que fijar un atlas en un espacio topológico es imponer que sus funciones sean diferenciables, lo cual determina a su vez si cualquier otra función definida sobre la variedad lo es o no.

Para ilustrar esta idea podemos considerar la aplicación $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $x(t) = t^3$. Claramente es un homeomorfismo diferenciable, pero no es un difeomorfismo, pues la inversa $X(t) = \sqrt[3]{t}$ no es derivable en 0. Sin embargo, podemos considerar en \mathbb{R} la estructura diferencial que resulta de tomar a x como única carta. Si llamamos \mathbb{R}^* a \mathbb{R} considerado como variedad diferencial con esta estructura, tenemos que $x : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ es un difeomorfismo, mientras que $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no lo es (aunque los espacios topológicos y la aplicación son los mismos en ambos casos), y esto prueba que \mathbb{R}^* y \mathbb{R} son variedades diferenciales distintas. Ahora bien, el primero de estos dos hechos implica también que \mathbb{R}^* y \mathbb{R} son variedades difeomorfas, por lo que son indistinguibles a efectos de la geometría diferencial.

Un problema nada trivial es si es posible definir en \mathbb{R}^n estructuras diferenciables no isomorfas a la usual. La respuesta es que, sorprendentemente, sólo es posible para $n = 4$. ■

Vamos a dar una interpretación geométrica del rango de una aplicación diferenciable. En primer lugar demostraremos el resultado para aplicaciones entre abiertos de espacios \mathbb{R}^n y a continuación lo generalizaremos a variedades arbitrarias:

Teorema 1.13 (del rango) Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ abiertos y sea $f : A \rightarrow B$ una aplicación diferenciable cuyo rango en todos los puntos de A sea constante igual a k . Sea $a \in A$ y $b = f(a)$. Entonces existen abiertos $a \in A_0 \subset A$, $b \in B_0 \subset f[A_0] \subset B$, $\tilde{A}_0 \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{B}_0 \subset \mathbb{R}^m$, y difeomorfismos $g : A_0 \rightarrow \tilde{A}_0$, $h : B_0 \rightarrow \tilde{B}_0$ tales que $g^{-1} \circ f \circ h : \tilde{A}_0 \rightarrow \tilde{B}_0$ es la aplicación dada por $x \mapsto (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$.

DEMOSTRACIÓN: No perdemos generalidad si suponemos que $a = 0 \in \mathbb{R}^n$ y $b = f(a) = 0 \in \mathbb{R}^m$. En efecto, podemos cambiar f por $T_a \circ f \circ T_{-b}$, donde $T_a(x) = a+x$ y $T_{-b}(y) = -b+y$, y si el teorema se cumple para esta composición, es claro que también se cumple para f .

La matriz jacobiana $J_a(f)$ tiene una submatriz $k \times k$ con determinante no nulo. Tampoco perdemos generalidad si suponemos que es la formada por sus primeras k filas y columnas, esta vez cambiando f por $p^{-1} \circ f \circ q$, donde p y q son permutaciones adecuadas de coordenadas.

Definimos $g : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ mediante

$$g(u) = (f^1(u), \dots, f^k(u), u_{k+1}, \dots, u_n).$$

Claramente g es diferenciable, $g(0) = 0$ y su matriz jacobiana es

$$J(g) = \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{\partial f^1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f^k}{\partial u_1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ \frac{\partial f^1}{\partial u_k} & \dots & \frac{\partial f^k}{\partial u_k} & \\ \hline & * & & I_{n-k} \end{array} \right),$$

por lo que su determinante en 0 es no nulo. Por el teorema de la función inversa [An 5.41] existen abiertos con frontera $0 \in A_0 \subset A$ y $\tilde{A}_0 \subset \mathbb{R}^n$ tales que g se restringe a un difeomorfismo $g : A_0 \rightarrow \tilde{A}_0$. Es claro entonces que

$$(g^{-1} \circ f)(x) = (x_1, \dots, x_k, \tilde{f}^{k+1}(x), \dots, \tilde{f}^m(x)),$$

para ciertas funciones \tilde{f}^j , luego su matriz jacobiana será de la forma

$$J(g^{-1} \circ f) = \left(\begin{array}{c|ccc} I_k & & * & \\ \hline & \frac{\partial \tilde{f}^{k+1}}{\partial x_{k+1}} & \dots & \frac{\partial \tilde{f}^m}{\partial x_{k+1}} \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ & \frac{\partial \tilde{f}^{k+1}}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial \tilde{f}^m}{\partial x_n} \end{array} \right).$$

Como, por hipótesis f tiene rango k en todos los puntos de A , es claro que $g^{-1} \circ f$ tiene también rango k en todos los puntos de \tilde{A}_0 , lo que se traduce en que toda la submatriz inferior derecha tiene que ser idénticamente nula en \tilde{A}_0 , lo cual a su vez significa que las funciones \tilde{f}_j sólo dependen de x_1, \dots, x_k . Cada una de ellas está definida en un entorno de 0 y cumple $\tilde{f}^j(0) = 0$, luego podemos tomar un entorno de 0, digamos $0 \in \tilde{B}_0 \subset \mathbb{R}^m$, en el que está definida la aplicación $p : \tilde{B}_0 \rightarrow B$ dada por

$$p(y) = (y_1, \dots, y_k, y_{k+1} + \tilde{f}^{k+1}(y_1, \dots, y_k), \dots, y_m + \tilde{f}^m(y_1, \dots, y_k)).$$

Claramente $p(0) = 0$ y su matriz jacobiana es de la forma

$$J(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & * \\ \hline 0 & I_{m-k} \end{array} \right),$$

luego su determinante es no nulo. Por el teorema de la función inversa, reduciendo \tilde{B}_0 , existe un abierto $B_0 \subset B$ tal que $p : \tilde{B}_0 \rightarrow B_0$ es un difeomorfismo. Cambiando A_0 por $A_0 \cap f^{-1}[B_0]$ y \tilde{A}_0 por su imagen por g podemos suponer que $f[A_0] \subset B_0$. Basta ver que $h = p^{-1} : B_0 \rightarrow \tilde{B}_0$ cumple el teorema.

En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} p(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) &= (x_1, \dots, x_k, \tilde{f}^{k+1}(x_1, \dots, x_k), \dots, \tilde{f}^m(x_1, \dots, x_k)) \\ &= (g^{-1} \circ f)(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

luego $(g^{-1} \circ f \circ h)(x) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$. ■

El teorema del rango se generaliza trivialmente al enunciado siguiente sobre variedades (sin frontera):

Teorema 1.14 (del rango) *Si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación diferenciable de rango constante k entre variedades sin frontera de dimensiones n y m , respectivamente, para cada $p \in V$ existen cartas alrededor de p y $f(p)$ respecto de las cuales la lectura de f es $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$.*

DEMOSTRACIÓN: Tomamos cartas cualesquiera alrededor de p y $f(p)$, digamos $x_0 : A' \rightarrow \tilde{A}'$ e $y_0 : B' \rightarrow \tilde{B}'$ y aplicamos el teorema anterior al punto $x_0(p)$ y a la lectura $x_0^{-1} \circ f \circ y_0 : \tilde{A}' \rightarrow \tilde{B}'$. Esto nos da abiertos $x_0(p) \in \tilde{A}'_0 \subset \tilde{A}'$, $y_0(p) \in \tilde{B}'_0 \subset \tilde{B}'$, $\tilde{A}' \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{B}'_0 \subset \mathbb{R}^m$ y difeomorfismos $g : \tilde{A}'_0 \rightarrow \tilde{A}$, $h : \tilde{B}'_0 \rightarrow \tilde{B}$ de modo que, si llamamos $A = x_0^{-1}[\tilde{A}'_0]$, $B = y_0^{-1}[\tilde{B}'_0]$ y definimos $x = x_0 \circ g$, $y = y_0 \circ h$, entonces las cartas $x : A \rightarrow \tilde{A}$ e $y : B \rightarrow \tilde{B}$ cumplen lo requerido. ■

De aquí podemos deducir varios casos particulares de interés. El más simple se da cuando $k = n = m$. Entonces la lectura en las cartas dadas por el teorema es la identidad, luego tenemos el teorema de la función inversa:

Teorema 1.15 (Teorema de la función inversa) *Sea $f : V \rightarrow W$ una función diferenciable entre variedades de dimensión n sin frontera y sea $p \in V$ un punto en el que f tenga rango n . Entonces existe un entorno U de p en V tal que $f[U]$ es abierto en W y $f|_U : U \rightarrow f[U]$ es un difeomorfismo.*

Notemos que sólo hace falta exigir que f tenga rango n en p , pues esto equivale a que la lectura de f respecto de unas cartas cualesquiera tenga determinante no nulo en las coordenadas de p , y por continuidad dicho determinante será no nulo en un entorno de p , luego de hecho f tiene rango constante n en un entorno de p . En realidad es fácil demostrar el teorema de la función inversa directamente a partir de su versión para funciones en \mathbb{R}^n , sin apoyarse en el teorema anterior.

Otro caso particular se da cuando $k = n \leq m$. En tal caso la lectura en las cartas dadas por el teorema del rango es $x \mapsto (x, 0)$, luego se trata de una aplicación inyectiva:

Teorema 1.16 *Sea $f : V \rightarrow W$ una función diferenciable entre variedades sin frontera y donde V tiene dimensión n . Sea $p \in V$ un punto donde f tenga rango n . Entonces existe un entorno de p donde f es inyectiva.*

Notemos que, al igual que en el caso anterior, el hecho de que f tenga rango n en p implica que lo mismo vale en un entorno de p .

Ejemplos 1) Hemos probado que la proyección natural $p : S^n \rightarrow P^n(\mathbb{R})$ es diferenciable de rango n . El teorema de la función inversa nos da que localmente es un difeomorfismo. Más precisamente, es claro que si $V_i = \{p \in S^n \mid p_i > 0\}$ y $U_i = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \in P^n(\mathbb{R}) \mid x_i \neq 0\}$, entonces $p|_{V_i} : V_i \rightarrow U_i$ es biyectiva, luego de hecho es un difeomorfismo.

2) Consideremos la aplicación $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por

$$F(x, y, z) = (xy, xz, yz, x^2 - y^2).$$

En [G, sección 12.5] demostramos que su restricción $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ cumple $f(p) = f(q)$ si y sólo si $p = \pm q$, por lo que a su vez induce una aplicación inyectiva y continua $\bar{f} : P^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$. Como el plano proyectivo es compacto, se trata de un homeomorfismo en su imagen. Ahora podemos probar que f y \bar{f} son diferenciables de rango 2. En efecto, la matriz jacobiana de F es

$$\begin{pmatrix} y & z & 0 & 2x \\ x & 0 & z & -2y \\ 0 & x & y & 0 \end{pmatrix}$$

Los determinantes de las submatrices formadas por las columnas 1, 3, 4 y 2, 3, 4 son, respectivamente, $2(x^2 + y^2)x$, $2(x^2 + y^2)y$, lo que prueba que F tiene rango 3 en todos los puntos salvo en los de la forma $(0, 0, z)$.

Como la inclusión $i : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tiene rango 2, es claro que f tiene rango 2 salvo quizá en los puntos $(0, 0, \pm 1)$. Alrededor de estos puntos podemos considerar las cartas p_3^\pm , cuyas inversas son $(x, y) \mapsto (x, y, \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2})$ y cuyas matrices jacobianas (en los dos polos) son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

luego la jacobiana de f en estos dos puntos es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, f tiene rango 2 en todos los puntos de S^2 .

Por otra parte, en un entorno de cada punto de $P^2(\mathbb{R})$, la aplicación \bar{f} puede expresarse como la composición de $p|_{V_i}^{-1}$ (la inversa local de la proyección $p : S^2 \rightarrow P^2(\mathbb{R})$ descrita en el apartado precedente), seguida de f . Como ambas aplicaciones tienen rango 2, resulta que \bar{f} también tiene rango 2. ■

1.5 Construcción de funciones diferenciables

En esta sección probaremos varios resultados de existencia de funciones diferenciables con propiedades prefijadas.

Particiones de la unidad En [An 8.7] probamos la existencia de particiones de la unidad en variedades diferenciables. Vamos a extender el resultado a las variedades en sentido abstracto que estamos considerando aquí. El primer paso es extender a variedades el teorema [An 8.5] sobre existencia de funciones “meseta”:

Teorema 1.17 *Sea V una variedad diferenciable, sea $p \in V$ y U un entorno de p . Entonces existe una función diferenciable $f : V \rightarrow [0, 1]$ que se anula en $V \setminus U$ y es constante igual a 1 en un entorno compacto de p .*

DEMOSTRACIÓN: sea $x : U \rightarrow \tilde{U}$ una carta esférica centrada en p cuya imagen sea la bola abierta de centro 0 y radio 3 (o media bola si p es un punto frontera). El teorema [An 8.5] nos da una función $g : B_3(0) \rightarrow [0, 1]$ diferenciable que vale 1 si $\|x\| \leq 1$ y vale 0 si $\|x\| \geq 2$. Entonces la composición $f = x \circ g_U : V \rightarrow [0, 1]$ es diferenciable, es constante igual a 1 en el entorno compacto $x^{-1}[B_1(0)]$ de p y se anula fuera del compacto $x^{-1}[B_2(0)]$. Es claro entonces que si la prolongamos a una función $f : V \rightarrow [0, 1]$ de forma que tome el valor 0 en $V \setminus U$, la extensión es diferenciable en V y cumple lo requerido. ■

Ahora necesitamos un resultado puramente topológico:

Teorema 1.18 *Si V es un espacio topológico localmente compacto con una base numerable, entonces existe una familia de abiertos $\{G_n\}_{n=0}^\infty$ de modo que $\overline{G_n}$ es compacto, $\overline{G_n} \subset G_{n+1}$ y $V = \bigcup_{n=0}^\infty G_n$.*

DEMOSTRACIÓN: Fijemos una base numerable de V . Todo punto tiene un entorno de clausura compacta, el cual contiene un abierto básico de clausura compacta. Por consiguiente, podemos partir de una base numerable formada por abiertos con clausura compacta, digamos $\{B_i\}_{i=0}^\infty$. Definimos $G_0 = B_0$. Entonces la clausura $\overline{G_0}$ es compacta, luego existe un $j_1 > 1$ tal que

$$\overline{G_0} \subset \bigcup_{i=0}^{j_1} B_i = G_1.$$

Como $\overline{G_1}$ es compacta, existe un $j_2 > 2$ tal que $\overline{G_1} \subset \bigcup_{i=0}^{j_2} B_i = G_2$. Continuando de este modo obtenemos la familia de abiertos buscada. ■

Se dice que un cubrimiento abierto \mathcal{U} de un espacio topológico *refina* a otro \mathcal{V} si todo abierto de \mathcal{U} está contenido en un abierto de \mathcal{V} . Una familia de conjuntos en un espacio topológico es *localmente finita* si todo punto del espacio tiene un entorno que corta únicamente a un número finito de conjuntos de la familia. El teorema anterior nos permite probar la siguiente propiedad de paracompacidad:

Teorema 1.19 *Si \mathcal{U} es un cubrimiento abierto de una variedad diferenciable V , entonces V admite un atlas numerable formado por cartas $x_j : U_j \rightarrow \tilde{U}_j$, para cada $j \in \mathbb{N}$, tal que $\{U_j\}_{j=0}^\infty$ es un refinamiento localmente finito de \mathcal{U} , $x_j[U_j]$ es la bola abierta $B_3(0)$ en \mathbb{R}^n o en H^n y de modo que los abiertos $V_j = x_j^{-1}[B_1(0)]$ son también un cubrimiento de V .*

DEMOSTRACIÓN: Toda variedad diferenciable es localmente compacta y tiene una base numerable, luego podemos tomar una familia de abiertos $\{G_n\}_{n=0}^\infty$ según el teorema anterior. Convenimos que $G_n = \emptyset$ si $n < 0$.

Para cada $p \in \overline{G_n} \setminus G_{n-1}$ podemos tomar una carta $x_p : U_p \rightarrow \tilde{U}_p$ tal que U_p esté contenido en un abierto del cubrimiento dado, $x_p(p) = 0$, $U_p \subset G_{n+1} \setminus \overline{G_{n-2}}$

y $x_p[U_p] = B_3(0)$ (en \mathbb{R}^n o H^n). Los abiertos $V_p = x_p^{-1}[B_1(0)]$ cubren el compacto $\overline{G}_n \setminus G_{n-1}$, luego podemos extraer un subcubrimiento finito \mathcal{V}_n . Sea \mathcal{V}'_n el cubrimiento formado por los U_p correspondientes a los $V_p \in \mathcal{V}_n$.

Llamamos \mathcal{A} al atlas formado por las cartas correspondientes a los elementos de la unión $\bigcup_n \mathcal{V}'_n$. Es claro que los dominios $\{U_j\}_{j=0}^\infty$ de las cartas forman un refinamiento del cubrimiento dado, al igual que los V_j correspondientes. Además, se trata de un cubrimiento localmente finito porque un abierto de \mathcal{V}'_n corta a lo sumo a los abiertos de \mathcal{V}'_i para $i = n-2, n-1, n, n+1, n+2$. ■

Pasamos ya a estudiar las particiones de la unidad en variedades:

Definición 1.20 Una *partición de la unidad* en una variedad diferencial V es un conjunto $\{\phi_i\}_{i \in I}$ de aplicaciones diferenciables $\phi_i : V \rightarrow [0, 1]$ tal que la familia de *soportes*

$$\text{sop } \phi_i = \overline{\{p \in V \mid \phi_i(p) \neq 0\}}$$

es localmente finita y además $\sum_{i \in I} \phi_i(p) = 1$ para todo $p \in V$.

Notemos que la suma tiene sentido porque todos los $\phi_i(p)$ son nulos salvo un número finito de ellos.

Diremos que una partición de la unidad en V está *subordinada* a un cubrimiento abierto de V si cada función de la partición tiene su soporte contenido en uno de los abiertos del cubrimiento. Hemos de probar que todo cubrimiento abierto en una variedad tiene una partición de la unidad subordinada. En la prueba de este resultado usaremos por primera vez el hecho de que toda variedad diferencial tiene —por definición— una base numerable.

Teorema 1.21 *Sea V una variedad diferencial y consideremos un cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ en V . Entonces existe una partición de la unidad $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ subordinada a \mathcal{U} formada por funciones de soporte compacto. Si no exigimos soporte compacto podemos tomarla de la forma $\{\phi_i\}_{i \in I}$ de modo que $\text{sop } \phi_i \subset U_i$ y todas las funciones ϕ_i sean nulas salvo a lo sumo una cantidad numerable.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos un atlas de V en las condiciones del teorema 1.19, formado por cartas $x_j : U_j \rightarrow \tilde{U}_j$. Sea $V_j = x_j^{-1}[B_1(0)]$. La prueba del teorema 1.17 nos da funciones diferenciables $\psi_j : V \rightarrow [0, 1]$ con soporte contenido en el correspondiente U_j y que valen 1 en V_j . Obviamente los soportes de las funciones ψ_j son compactos y forman una familia localmente finita.

Consideremos la suma $\psi = \sum_{j=0}^\infty \psi_j$.

En un entorno de cada punto, ψ es suma de un número finito de funciones diferenciables, luego es diferenciable. Además $\psi > 0$ porque para cada $q \in V$ existe un j tal que $q \in V_j$, luego $\psi_j(q) = 1$.

Consecuentemente, las funciones $\phi_j = \psi_j/\psi$ son diferenciables y cada ϕ_j tiene el mismo soporte que ψ_j , luego es claro que $\{\phi_j\}$ es una partición de la unidad subordinada a \mathcal{U} con soportes compactos.

Si no exigimos soportes compactos, para cada $n \in \mathbb{N}$ escogemos $i_n \in I$ tal que $\text{sop } \phi_n \subset U_{i_n}$. Sea $I' = \{i_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Para cada $i \in I'$ definimos

$$\tilde{\phi}_i = \sum_{i_n=i} \phi_n.$$

Si $i \in I \setminus I'$ tomamos $\tilde{\phi}_i = 0$. Las funciones $\tilde{\phi}_i$ forman una partición de la unidad con $\text{sop } \tilde{\phi}_i \subset U_i$. ■

Veamos una primera aplicación de las particiones de la unidad que ilustre la forma en que pueden aprovecharse:

Teorema 1.22 Si $A \subset \mathbb{R}^n$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función diferenciable en el sentido de 1.1, existe un abierto $A \subset U \subset \mathbb{R}^n$ y una función diferenciable $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $g|_A = f$.

DEMOSTRACIÓN: Según la definición 1.1, para cada $p \in A$ existe un abierto U_p y una función diferenciable $g_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $g_p|_{U_p \cap A} = f|_{U_p \cap A}$. Sea $U = \bigcup_{p \in A} U_p$. Aplicando a U el teorema anterior, obtenemos una partición

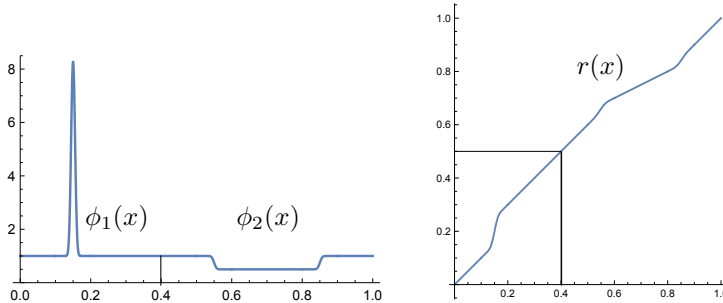
de la unidad $\{\phi_p\}_{p \in A}$ tal que $\text{sop } \phi_p \subset U_p$. La función $\phi_p g_p$ tiene su soporte contenido en $\text{sop } \phi_p \subset U_p$, luego se puede extender a una función diferenciable $h_p : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Además, como los soportes de las funciones h_p son una familia localmente finita, podemos definir $g = \sum_{p \in A} h_p : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ y se trata de una función diferenciable.

Además, si $q \in A$, tenemos que

$$g(q) = \sum_{p \in A} h_p(q) = \sum_{p \in A} \phi_p(q) f(q) = f(q). \quad \blacksquare$$

La homogeneidad de las variedades diferenciales Veamos que podemos construir una aplicación diferenciable estrictamente creciente $r :]0, 1[\rightarrow]0, 1[$ que coincide con la identidad alrededor de 0 y 1 y, para ciertos números prefijados $0 < x < y < 1$, cumple $r(x) = y$.

Definimos r como la integral de una función ϕ , a la que exigimos lo siguiente: ϕ vale 1 alrededor de 0 y de 1, es estrictamente positiva, su integral hasta x vale y y su integral hasta 1 vale 1. Para ello construimos independientemente dos funciones ϕ_1 en $[0, x]$ y ϕ_2 en $[x, 1]$ de modo que ambas valgan 1 alrededor de x , con lo que su unión será diferenciable en todo el intervalo unidad. La figura muestra la gráfica de ϕ para $x = 0.4$, $y = 0.5$.



La construcción de ϕ_1 no ofrece ninguna dificultad. Recordemos que, para todos los números reales $a < b$ el teorema [An 5.13] nos da una función diferenciable $h_{ab} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que es estrictamente positiva en el intervalo $]a, b[$ y se anula fuera de él. Basta tomar $1 + th_{x/4, x/2}$, donde t se elige de forma que la integral de $th_{x/4, x/2}$ sea $y - x$. La definición de ϕ_2 presenta el problema de garantizar que sea positiva. Para ello observamos que el área del rectángulo de base $[x, 1]$ y altura 1 es $1 - x > y - x$, luego podemos construir un rectángulo de base $[u, v]$ con $x < u < v < 1$ y altura $h < 1$ cuya área sea $y - x$. (En la figura es $u = 0.6, v = 0.8$.) Tomamos una función $\psi : [x, 1] \rightarrow [0, h]$ que valga h en $[u, v]$ y 0 alrededor de x y 1, con lo que su integral será mayor que $y - x$, luego existe un número $0 < s < 1$ tal que $s\psi$ tiene integral $y - x$ y es estrictamente menor que 1. Definimos $\phi_2 = 1 - s\psi$.

Esta construcción nos proporciona el teorema siguiente, que nos dice que podemos mover un punto de una bola abierta “sin que se note” en su superficie:

Teorema 1.23 *Sea B^n la bola abierta de centro 0 y radio 1 en \mathbb{R}^n y consideremos $a, b \in B^n$. Entonces existe un difeomorfismo $f : B^n \rightarrow B^n$ tal que $f(a) = b$ y además f coincide con la identidad en una cierta corona $\|x\| \geq r$.*

DEMOSTRACIÓN: Suponemos en primer lugar que $a = \lambda b \neq 0$, para cierto $0 < \lambda < 1$. Entonces tomamos r según la construcción precedente, de modo que $r(\|a\|) = \|b\|$, y definimos

$$f(x) = \frac{r(\|x\|)}{\|x\|}x$$

para todo $x \in B^n \setminus \{0\}$, y $f(0) = 0$. Claramente se trata de un difeomorfismo (la diferenciabilidad en 0 se sigue de que f es la identidad en una bola de centro 0), coincide con la identidad en una corona y $f(a) = b$.

En segundo lugar supongamos que $\|a\| = \|b\| \neq 0$ y que tienen todas sus coordenadas nulas excepto las dos primeras. Entonces a se transforma en b mediante un giro de ángulo $0 < \alpha_0 < 2\pi$. Tomamos una aplicación diferenciable $\alpha :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ que valga 0 alrededor de 0 y de 1 y de modo que $\alpha(\|a\|) = \alpha_0$ (por ejemplo $\alpha = th_{uv}$ con $0 < u < \|a\| < v < 1$ y un t ajustado adecuadamente).

Ahora basta definir

$$f(x) = (x_1 \cos \alpha(\|x\|) - x_2 \sin \alpha(\|x\|), x_1 \sin \alpha(\|x\|) + x_2 \cos \alpha(\|x\|), x_3, \dots, x_n).$$

Si $\|a\| = \|b\| \neq 0$ pero no se cumple la restricción sobre las coordenadas nulas, tomamos una base ortonormal de \mathbb{R}^n cuyos dos primeros vectores generen el plano que contiene a a y a b y sea $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la aplicación lineal que a cada punto de \mathbb{R}^n le asigna sus coordenadas en dicha base. Entonces $\phi(a)$ y $\phi(b)$ están en las condiciones precedentes, luego basta tomar $\phi \circ f \circ \phi^{-1}$, donde f es la aplicación construida en el caso anterior.

Componiendo difeomorfismos en los dos casos precedentes podemos obtener uno en las condiciones del teorema siempre que $a, b \neq 0$. Por lo tanto, sólo falta considerar el caso en que $a = 0$. Consideramos una bola abierta B' de centro distinto de 0, que contenga a 0 y esté contenida en B^n . Es claro que la

parte ya probada implica un resultado análogo para B' , por lo que existe un difeomorfismo en B' que transforma 0 en un punto distinto de 0 y que es la identidad en una corona. Esto permite extenderlo a un difeomorfismo en B^n que es la identidad en una corona y que transforma $a = 0$ en un punto a' , que a su vez puede transformarse en b' por otro difeomorfismo en las condiciones requeridas por la parte ya probada. ■

Como consecuencia obtenemos que las variedades diferenciales son homogéneas en el sentido siguiente:

Teorema 1.24 *Si V es una variedad diferencial sin frontera, G es un abierto conexo y a, b son dos puntos de G , existe un difeomorfismo $f : V \rightarrow V$ que deja fijos los puntos de $V \setminus G$ y cumple $f(a) = b$.*

DEMOSTRACIÓN: Todo punto de V (en particular de G) tiene una carta cuya imagen es la bola unitaria de \mathbb{R}^n . En particular tiene un entorno homeomorfo a dicha bola, luego es localmente arcoconexo, luego G es arcoconexo. Podemos tomar un arco $\phi : [0, 1] \rightarrow G$ que una a con b . La imagen del arco es un compacto que puede cubrirse por abiertos coordenados (contenidos en G) difeomorfos a la bola unitaria, luego por compacidad podemos extraer un subcubrimiento finito. Es fácil entonces construir una sucesión de puntos $a = p_0, \dots, p_k = b$ en G de modo que existen cartas $x_i : U_i \rightarrow B$ de modo que $p_i, p_{i+1} \subset U_i \subset G$. Si f_i es el difeomorfismo dado por el teorema anterior que transforma $x_i(p_i)$ en $x_i(p_{i+1})$, entonces $g_i = x_i \circ f_i \circ x_i^{-1} : U_i \rightarrow U_i$ es un difeomorfismo que transforma p_i en p_{i+1} y que es la identidad en la antiimagen de una corona por x_i . Claramente g_i se extiende a un difeomorfismo $g_i : V \rightarrow V$ que es la identidad en $V \setminus G$. Componiendo estos difeomorfismos obtenemos uno que cumple $f(a) = b$. ■

Ceros de funciones diferenciables En 2.25 veremos que la antiimagen de un valor regular r de una aplicación diferenciable es una subvariedad diferencial de su dominio. Ahora vamos a probar que sin la hipótesis de regularidad la antiimagen puede ser cualquier cerrado.

Teorema 1.25 *Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto no vacío, existe una función diferenciable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que es estrictamente positiva en U y nula fuera de U .*

DEMOSTRACIÓN: Lo probamos primero para el caso en que $U = B_\epsilon(x)$ es una bola abierta. En tal caso el teorema [An 5.14] nos da una función diferenciable $r : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ tal que $r(x) = 1$ si $|x| \leq \epsilon/2$, $r(x) = 0$ si $|x| > \epsilon$, y es estrictamente positiva en el intervalo $] -\epsilon, \epsilon[$ (el teorema nos da una función g que cumple justo lo contrario, pero basta tomar $r = 1 - g$). La función $g(y) = r(\|y - x\|)$ cumple lo requerido.

Para el caso general expresamos $U = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$, donde cada B_k es una bola abierta. Por la parte ya probada existe una función $f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ estrictamente positiva en B_k y nula fuera de B_k . Además, como las derivadas sucesivas de f_k están acotadas (en \bar{B}_k , luego en \mathbb{R}^n , pues fuera de \bar{B}_k son nulas) multiplicando f_k por una constante positiva podemos suponer además que todas las derivadas de f_k de orden $\leq k$ (incluyendo la propia f_k) están acotadas por $1/2^k$.

Definimos $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. La serie converge uniformemente por el criterio de mayoración de Weierstrass [An 3.56], ya que $|f_k(x)| \leq 1/2^k$, para todo k . Para probar que f es diferenciable demostramos inductivamente que f admite derivadas parciales de orden m y que cada una de ellas es el límite uniforme de las derivadas correspondientes de las sumas parciales de la serie. En efecto, sabemos que esto es cierto para $m = 0$. Si vale para m , tenemos que existe

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^m f_k}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}},$$

y que la convergencia es uniforme. Entonces, como

$$\left| \frac{\partial^{m+1} f_k}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m} \partial x_{i_{m+1}}} \right|_x \leq \frac{1}{2^k}$$

para todo $k \geq m + 1$, el teorema de Weierstrass nos da también que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^{m+1} f_k}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m} \partial x_{i_{m+1}}}$$

converge uniformemente a una función que, por [An 5.4], es

$$\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m} \partial x_{i_{m+1}}}.$$

Así pues, f es diferenciable y se anula exactamente fuera de U . ■

Teorema 1.26 (Whitney) *Si V es una variedad diferencial y $C \subset V$ es un conjunto cerrado, entonces existe $f \in C^\infty(V)$ tal que $A = f^{-1}[0]$.*

DEMOSTRACIÓN: El teorema 1.19 nos da un atlas de V formado por cartas $x_i : U_i \longrightarrow \tilde{U}_i$ cuyos dominios $\{U_i\}_{i=0}^{\infty}$ forman un cubrimiento localmente finito de V . El teorema 1.21 nos da una partición de la unidad $\{\phi_i\}_{i=0}^{\infty}$ de V tal que $\text{sop } \phi_i \subset U_i$. Sea $\tilde{C}_i = x_i[A \cap \text{sop } \phi_i] \subset \tilde{U}_i$. Por el teorema anterior existe una función diferenciable $\tilde{f}_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que se anula exactamente en \tilde{C}_i . Elevándola al cuadrado podemos suponer que $\tilde{f}_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, +\infty[$.

Entonces $f_i = x_i^{-1} \circ \tilde{f}_i \in C^\infty(U_i)$ se anula en $A \cap \text{sop } \phi_i$ y es estrictamente positiva en $U_i \setminus (A \cap \text{sop } \phi_i)$. Podemos considerar que $f_i \phi_i \in C^\infty(V)$ entendiendo que es nula fuera de U_i , y entonces $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \phi_i \in C^\infty(V)$, puesto que la suma es finita en un entorno de cada punto.

Claramente f cumple lo requerido, pues si $p \in A$ todas las funciones $f_i \phi_i$ se anulan en p , luego $f(p) = 0$, y si $p \notin A$, tomamos un i tal que $\phi_i(p) > 0$, con lo que $p \in U_i \setminus (A \cap \text{sop } \phi_i)$, luego $f_i(p) > 0$, luego $f_i(p) \phi_i(p) > 0$, luego $f(p) > 0$. ■

Abiertos estrellados La tercera aplicación tiene que ver con abiertos de \mathbb{R}^n :

Definición 1.27 Un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ no vacío es *estrellado* con centro en $p \in \mathbb{R}^n$ si cuando $x \in U$ y $0 \leq t \leq 1$, entonces $p + t(x - p) \in U$.

En otras palabras, U es estrellado con centro en p si cuando $x \in U$, todo el segmento que une p con x está contenido en U . Obviamente la definición vale en cualquier espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

Vamos a probar el teorema siguiente:

Teorema 1.28 *Todo abierto estrellado en \mathbb{R}^n es difeomorfo a \mathbb{R}^n .*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto estrellado centrado en p , entonces su trasladado $-p + U$ es estrellado con centro en 0, y si probamos que $-p + U$ es difeomorfo a \mathbb{R}^n , es obvio que lo mismo vale para U , luego no perdemos generalidad si suponemos que U está centrado en 0. Esto significa que si $x \in U$ y $0 \leq t \leq 1$, entonces $tx \in U$. De momento suponemos además que U está acotado.

De acuerdo con el teorema anterior, sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable estrictamente positiva en U y nula fuera de U , y definamos $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$g(x) = \int_0^1 \frac{dt}{f(tx)}.$$

Claramente g es diferenciable, al igual que $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $h(x) = g(x)x$.

Observamos ahora que si $x \in U$ y $\lambda > 0$ cumple $\lambda x \in U$, entonces

$$h(\lambda x) = \lambda x \int_0^1 \frac{dt}{f(\lambda tx)} = \lambda x \int_0^\lambda \frac{du/\lambda}{f(ux)} = x \int_0^\lambda \frac{dt}{f(tx)}.$$

De aquí se sigue que h es inyectiva, pues si se cumple $h(x) = h(y)$, si $x = 0$ o $y = 0$, necesariamente $x = y = 0$, y si $x \neq 0 \neq y$, tiene que ser $y = \lambda x$, con $\lambda = g(x)/g(y) > 0$, pero la igualdad que acabamos de probar implica que $\lambda = 1$, luego $x = y$.

Para probar que es suprayectiva tomamos $x \in \mathbb{R}^n$. Si $x = 0$ tenemos que $h(0) = 0$. En caso contrario, como U es entorno de 0, existe un $x_0 \in U$ tal que $x = \alpha x_0$, para cierto $\alpha > 0$.

Como estamos suponiendo que U está acotado, existe un $t > 0$ tal que $tx_0 \notin U$. Sea $t^* = \inf\{t > 0 \mid tx \notin U\}$. El hecho de que U es estrellado implica claramente que, si $t > 0$, se cumple $tx \in U$ si y sólo si $t < t^*$.

Sea $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $u(t) = f(tx_0)$. Por el teorema del valor medio, para $0 \leq t < t^*$, se cumple que existe $t_0 < t^*$ tal que

$$-u(t) = u(t^*) - u(t) = u'(t_0)(t^* - t),$$

luego, si $1/K$ es una cota de u' en el intervalo $[0, t^*]$, tenemos que

$$u(t) = |u'(t_0)|(t^* - t) \leq \frac{1}{K}(t^* - t),$$

luego

$$\frac{1}{f(tx_0)} \geq \frac{K}{t^* - t},$$

luego, para $\lambda < t^*$,

$$h(\lambda x_0) = x_0 \int_0^\lambda \frac{dt}{f(tx_0)} \geq Kx_0 \int_0^\lambda \frac{dt}{t^* - t} = K \log \frac{t^*}{t^* - \lambda} x_0.$$

Por continuidad existe $0 < \lambda < t^*$ tal que $h(\lambda x) = \alpha x_0 = x$.

Con esto hemos probado que $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es biyectiva y diferenciable. Si probamos que su diferencial es biyectiva en cada punto, tendremos que h es un difeomorfismo. Ahora bien:

$$\frac{\partial h}{\partial x_j} = \frac{\partial g}{\partial x_j} x + g(x) e_j,$$

donde e_j es el j -ésimo vector de la base canónica. Multiplicando por u_j y sumando queda que $dh(x)(u) = g(x)u + (u \nabla g(x))x$. En particular tenemos que $dh(0)(u) = g(0)u$ es claramente biyectiva. Tomemos ahora $x \neq 0$ y supongamos que existe un $u \neq 0$ tal que $dh(x)(u) = 0$, es decir, que

$$g(x)u = -(u \nabla g(x))x.$$

El miembro izquierdo no es nulo, luego tiene que ser $u = \lambda x$, luego $dh(x)(x) = 0$. Veamos que esto no es cierto:

$$\begin{aligned} dh(x)(x) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{h(x + \lambda x) - h(x)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} \left(x \int_0^{1+\lambda} \frac{dt}{f(tx)} - x \int_0^1 \frac{dt}{f(tx)} \right) \\ &= \frac{d}{ds} \int_0^s \frac{dt}{f(tx)} \Big|_1 x = \frac{1}{f(x)} x \neq 0. \end{aligned}$$

Esto termina la prueba en el caso en que U está acotado. En particular, como la bola $B_1(0)$ es obviamente un abierto estrellado acotado, tenemos construido un difeomorfismo $h : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Además, la definición radial de h (es decir, el hecho de que $h(x)$ sea un múltiplo de x) implica claramente que si U es un abierto estrellado, entonces $h^{-1}[U] \subset B_1(0)$ es también un abierto estrellado acotado.

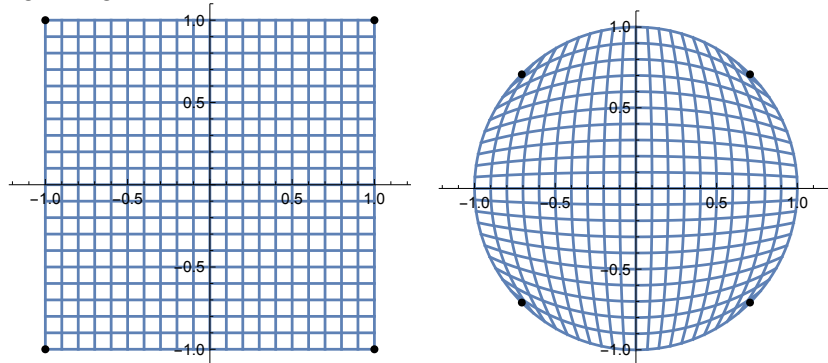
Por la parte ya probada existe un difeomorfismo $h^* : h^{-1}[U] \rightarrow \mathbb{R}^n$, luego $h^{-1} \circ h^* : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es también un difeomorfismo. ■

Por consiguiente, todos los abiertos estrellados en \mathbb{R}^n son difeomorfos entre sí, y en particular todos son difeomorfos a cualquier bola abierta.

Ejemplo Los difeomorfismos que hemos construido para probar el teorema anterior son complicados, pero en muchos casos particulares es posible encontrar otros más simples. Por ejemplo, la aplicación

$$f(x, y) = \left(x \sqrt{1 - \frac{y^2}{2}}, y \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} \right)$$

se restringe a un homeomorfismo entre el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ y el círculo de centro $(0, 0)$ y radio 1 que es un difeomorfismo entre sus interiores respectivos. La figura siguiente muestra cómo transforma una cuadrícula del cuadrado:



Veamos cómo se llega hasta ella. Por simetría podemos concentrarnos en determinar la imagen de un punto

$$(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

Para ello observamos que si x recorre el intervalo $[0, 1]$, entonces el punto

$$(x/\sqrt{2}, \sqrt{1-x^2/2})$$

recorre el arco de circunferencia de radio 1 que va de $(0, 1)$ a $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Consideramos entonces la elipse de centro $(0, 0)$ que tiene un semieje horizontal de longitud x y que pasa por dicho punto. Su ecuación será de la forma

$$\frac{u^2}{x^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1,$$

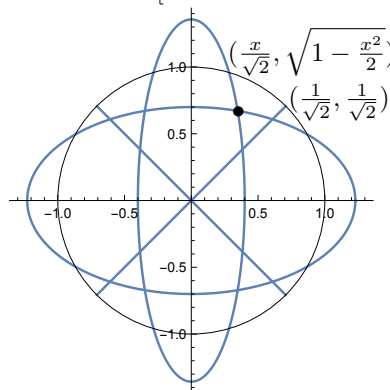
y al exigir que pase por el punto requerido se obtiene que $b = \sqrt{2-x^2}$. Por lo tanto, la ecuación es

$$\frac{u^2}{x^2} + \frac{v^2}{2-x^2} = 1.$$

El punto $f(x, y) = (u, v)$ se define como el punto del primer cuadrante que está sobre esta elipse y sobre la elipse análoga que se obtiene al intercambiar los papeles de x e y , es decir, la elipse de ecuación

$$\frac{u^2}{1-y^2} + \frac{v^2}{y^2} = 1.$$

Por ejemplo, el punto señalado en la figura anterior es $(u, v) = f(0.4, 0.7)$. Es fácil ver que el punto que hemos definido como $f(x, y)$ satisface las ecuaciones de ambas elipses, por lo que es ciertamente el determinado por este criterio.



Así, la función f transforma los segmentos horizontales y verticales en el cuadrado en arcos de elipse, salvo los puntos de los ejes de coordenadas, que claramente quedan invariantes. Notemos que

$$\|f(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2 - x^2y^2} \leq 1.$$

En efecto, la función $x^2 + y^2 - x^2y^2$ no tiene ningún máximo en el abierto $] -1, 1[\times] -1, 1[$, pues si lo tuviera sus derivadas parciales se anularían en dicho punto, y es fácil ver que sólo se anulan en $(0, 0)$, donde la función toma su valor mínimo. Por lo tanto, su máximo en el compacto $[-1, 1] \times [-1, 1]$ lo alcanza en los puntos de la frontera, en todos los cuales vale 1. Así pues, f transforma el cuadrado abierto en puntos del círculo abierto y la frontera del cuadrado en la frontera del círculo.

Tomemos ahora un punto (u, v) tal que $u^2 + v^2 < 1$ y veamos que tiene una única antiimagen (x, y) en el cuadrado abierto. Por simetría y teniendo en cuenta que f deja invariantes los puntos de los ejes, podemos suponer que $u, v > 0$ y tenemos que encontrar coordenadas $0 < x, y < 1$ tales que

$$u = x\sqrt{1 - \frac{y^2}{2}}, \quad v = y\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}.$$

Despejando en la segunda ecuación obtenemos que

$$y^2 = \frac{2v^2}{2 - x^2}.$$

Al sustituir en la primera ecuación llegamos a que

$$x^4 - (2 + u^2 - v^2)x^2 + 2u^2 = 0.$$

Por lo tanto,

$$x^2 = \frac{2 + u^2 - v^2 \pm \sqrt{(2 + u^2 - v^2)^2 - 8u^2}}{2}.$$

El discriminante no alcanza máximos ni mínimos en el interior del cuadrante circular $u^2 + v^2 < 1$, $u, v > 0$, porque sus derivadas parciales no se anulan en ninguno de sus puntos, luego su máximo y su mínimo en el cuadrante cerrado lo alcanza en la frontera. Es fácil ver que en los ejes varía entre 1 y 4, mientras que en el arco varía entre 0 y 1. Concretamente, haciendo $v^2 = 1 - u^2$, queda

$$(1 + 2u^2)^2 - 8u^2 = (2u^2 - 1)^2.$$

Por consiguiente, el discriminante siempre es ≥ 0 . Veamos ahora que si tomamos la raíz cuadrada positiva no se cumple que $x^2 < 1$. En efecto, para ello haría falta que

$$2 + u^2 - v^2 + \sqrt{(2 + u^2 - v^2)^2 - 8u^2} < 2,$$

luego

$$\sqrt{(2 + u^2 - v^2)^2 - 8u^2} < v^2 - u^2,$$

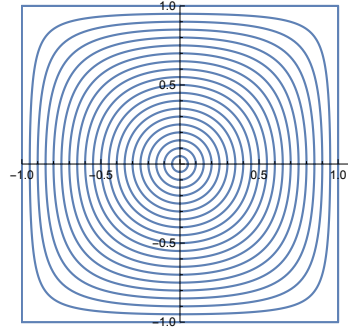
luego $u < v$ y $(2 + u^2 - v^2)^2 - 8u^2 < (v^2 - u^2)^2$, de donde llegamos a $u^2 + v^2 > 1$, contradicción. Por el contrario, el x^2 calculado con la raíz cuadrada negativa cumple claramente que $x^2 > 0$ y, con cálculos análogos al que hemos llevado a cabo con la raíz positiva, concluimos que $x^2 < 1$, así como que $x^2 < 2(1 - v^2)$, que es la condición necesaria y suficiente para que el y^2 calculado con la ecuación precedente a la cuártica cumpla $0 < y^2 < 1$.

Concluimos que existe un único $(x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[$ tal que $f(x, y) = (u, v)$. Explícitamente:

$$x = \sqrt{\frac{2 + u^2 - v^2 - \sqrt{(2 + u^2 - v^2)^2 - 8u^2}}{2}}, \quad y = \sqrt{\frac{2v^2}{2 - x^2}}$$

(o, alternativamente, podemos obtener una expresión para y en términos de u, v sin más que intercambiar u y v en la expresión que tenemos para x).

Esto prueba que f biyecta el cuadrado abierto con el círculo abierto, y es fácil ver que también biyecta las fronteras, por lo que f es un homeomorfismo entre el cuadrado cerrado y el círculo cerrado. La figura muestra la imagen de varias circunferencias por la aplicación inversa. Claramente f es diferenciable en el cuadrado abierto y su determinante jacobiano es



$$\frac{2 - x^2 - y^2}{\sqrt{(2 - x^2)(2 - y^2)}}$$

que no se anula en el interior del cuadrado, luego f es un difeomorfismo del cuadrado abierto en el círculo abierto. ■

Aproximación de funciones continuas Vamos a probar un resultado muy general de aproximación de funciones continuas mediante funciones diferenciables:

Teorema 1.29 *Sea $f : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ una aplicación continua en una variedad diferencial V y sea $A \subset V$ un cerrado tal que $f|_A$ es diferenciable. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existe una función diferenciable $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que $g|_A = f|_A$ y para todo $x \in V$ se cumple que $\|f(x) - g(x)\| < \epsilon$.*

DEMOSTRACIÓN: Que f sea diferenciable en A significa que, para cada $x \in A$, existe un abierto $x \in U_x \subset V$ y una aplicación diferenciable $h_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^k$ tal que $h_x|_{U_x \cap A} = f|_{U_x \cap A}$.

Si $x \in V \setminus A$, tomamos igualmente un abierto $x \in U_x \subset V \setminus A$ y definimos $h_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^k$ mediante $h_x(y) = f(x)$.

En ambos casos, reduciendo U_x , podemos suponer además que si $y \in U_x$ entonces $\|f(y) - f(x)\| < \epsilon/2$.

Por el teorema 1.21 podemos tomar una partición de la unidad $\{\phi_x\}_{x \in V}$ subordinada al cubrimiento $\{U_x\}_{x \in V}$. La función $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ dada por

$$g(y) = \sum_{x \in V} \phi_x(y) h_x(y)$$

está bien definida y es diferenciable porque en un entorno de cada punto hay únicamente una cantidad finita de sumandos no nulos y todos ellos son diferenciables. Si $y \in A$, tenemos que $\phi_x(y) = 0$ si $x \notin A$, luego

$$g(y) = \sum_{x \in V} \phi_x(y) f(y) = f(y).$$

Por otra parte, para cualquier $y \in V$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|g(y) - f(y)\| &= \left\| \sum_{x \in V} \phi_x(y) h_x(y) - f(y) \right\| \\ &= \left\| \sum_{x \in V} \phi_x(y) (h_x(y) - f(x)) + \sum_{x \in V} \phi_x(y) (f(x) - f(y)) \right\| \\ &\leq \sum_{x \in V} \phi_x(y) \|h_x(y) - f(x)\| + \sum_{x \in V} \phi_x(y) \|f(x) - f(y)\|. \end{aligned}$$

Ahora observamos que $h_x(y)$ puede ser $f(y)$ o $f(x)$, pero en ambos casos, si $y \in U_x$, se cumple que $\|h_x(y) - f(x)\| < \epsilon/2$ (y si $y \notin U_x$ es $\phi_x(y) = 0$), luego $\|g(y) - f(y)\| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. ■

Capítulo II

Elementos básicos de la geometría diferencial

En el capítulo anterior hemos definido únicamente los conceptos de variedad diferencial y de aplicación diferenciable entre variedades. Aunque casi todos los ejemplos concretos de variedades diferenciales que hemos considerado eran subespacios de \mathbb{R}^m , a efectos teóricos no hemos necesitado en ningún momento considerar un espacio \mathbb{R}^m que contenga a las variedades diferenciales con las que trabajamos. El primer momento en que notamos su falta es al tratar de definir el espacio tangente a una variedad en un punto. Para una subvariedad diferenciable V de \mathbb{R}^m en el sentido de [An], el espacio tangente en un punto p es un subespacio (vectorial) de \mathbb{R}^m cuyo trasladado afín por p se “confunde” con V en un entorno de p , en un sentido precisable analíticamente, de modo que las aplicaciones diferenciables entre variedades se confunden con aplicaciones lineales entre los espacios tangentes en un entorno de cada punto. Aparentemente, esto nos obliga a “salir” de la variedad y trabajar en el espacio \mathbb{R}^m que la contiene, pero ahora vamos a ver que no es así, sino que es posible sustituir este concepto externo de espacio tangente por otro equivalente interno (abstracto), definido algebraicamente a partir de la estructura diferencial de la variedad.

2.1 El espacio tangente

Es en esta sección donde el lector familiarizado con las variedades diferenciables en el sentido de [An] —pero no con el concepto de variedad diferencial abstracta— tendrá que hacer el mayor esfuerzo para asimilar la teoría abstracta y convencerse de que todo lo que puede hacer con variedades “concretas” puede hacerlo de modo formalmente idéntico en términos abstractos.

Definición 2.1 Sea V una variedad diferencial y sea $p \in V$. Definimos el conjunto de las funciones diferenciables locales en p como el conjunto $C_p^\infty(V)$ formado por todas las funciones diferenciables $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definidas sobre un entorno abierto U de p en V .

En $C_p^\infty(V)$ se puede definir puntualmente una suma, un producto y un producto por un escalar (real) de forma natural (el dominio de la suma o el producto de dos funciones locales es, por definición, la intersección de sus dominios), no obstante, con ello no obtenemos una estructura de espacio vectorial, ya que, por ejemplo, $f - f \neq g - g$ salvo que f y g tengan el mismo dominio (ambas serán funciones nulas, pero tal vez con dominios distintos). Este inconveniente se subsana tomando clases de equivalencia:

Definimos el *espacio de gérmenes diferenciables* en p como el conjunto cociente $G_p(V)$ de $C_p^\infty(V)$ respecto a la relación de equivalencia en virtud de la cual dos funciones locales f y g son equivalentes si y sólo si coinciden en un entorno de p .

La suma, el producto y el producto por un escalar en $C_p^\infty(V)$ inducen operaciones análogas en $G_p(V)$, pero ahora tenemos una estructura de álgebra conmutativa y unitaria. Notemos que si $\omega \in G_p(V)$, podemos hablar de $\omega(p)$ como el valor que toma en p cualquiera de las funciones locales que forman ω .

Definimos el *espacio tangente* a V en p como el conjunto $T_p(V)$ formado por todas las aplicaciones $v : C_p^\infty(V) \rightarrow \mathbb{R}$ que cumplen:

$$v(rf + sg) = rv(f) + sv(g) \quad (2.1)$$

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g), \quad (2.2)$$

para todo $f, g \in C_p^\infty(V)$, $r, s \in \mathbb{R}$. Tales aplicaciones se llaman *derivaciones* en $C_p^\infty(V)$, aunque normalmente las llamaremos *vectores tangentes* a V en p .

En principio es difícil relacionar esta definición algebraica abstracta con la idea geométrica de espacio tangente. Los resultados siguientes nos permitirán entender por qué esta definición es razonable. De lo que no cabe duda es de que se trata de una definición “intrínseca”, en el sentido de que no presupone que V sea un subespacio de ningún espacio \mathbb{R}^m , o de cualquier otra variedad diferencial.

Vamos a ver que el concepto de derivación es menos general de lo que podría parecer, en el sentido de que las derivaciones de $C_p^\infty(V)$ pueden describirse de manera muy simple.

Un hecho elemental es que las derivaciones toman el valor 0 sobre las funciones constantes:

Teorema 2.2 *Si V es una variedad diferencial, $v \in T_p(V)$ y c_λ es la función constante igual a $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $v(c_\lambda) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que $c_1 = c_1 c_1$, por lo que

$$v(c_1) = v(c_1) \cdot 1 + 1 \cdot v(c_1) = 2v(c_1),$$

luego $v(c_1) = 0$. En general $v(c_\lambda) = v(\lambda c_1) = \lambda v(c_1) = 0$. ■

Veamos ahora que el valor de una derivación depende únicamente de los gérmenes de las funciones sobre las que actúa:

Teorema 2.3 *Sea V una variedad diferencial, $p \in V$, $v \in T_p(V)$ y consideremos dos funciones $f, g \in C_p^\infty(V)$ que coinciden en un entorno de p . Entonces $v(f) = v(g)$.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que si f se anula en un entorno U de p entonces $v(f) = 0$. Por el teorema 1.17 existe una función $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que $f(p) = 1$ y $f|_{V \setminus U} = 0$. Sea $r = 1 - h$. Entonces $f = fr$, pues f es nula en U y r vale 1 fuera de U . Por consiguiente

$$v(f) = v(f)r(p) + f(p)v(r) = v(f) \cdot 0 + 0 \cdot v(r) = 0. \quad \blacksquare$$

Así pues, cada derivación $v \in T_p(V)$ induce una aplicación sobre el álgebra de gérmenes $v : G_p(V) \rightarrow \mathbb{R}$. La propiedad (2.1) se traduce en que v es lineal (lo cual no tenía sentido como aplicación en $C_p^\infty(V)$ porque este conjunto no es un espacio vectorial) y se sigue cumpliendo la relación (2.2), ahora para gérmenes α y β . Recíprocamente, toda aplicación lineal en $G_p(V)$ que cumpla (2.2) —lo que se llama una derivación en $G_p(V)$ — determina una única derivación en el espacio tangente $T_p(V)$.

Equivalentemente, podemos identificar el espacio tangente $T_p(V)$ con el espacio de las derivaciones del álgebra de gérmenes de p .

Otra consecuencia del teorema anterior es que si U es un abierto en una variedad V y $p \in U$, entonces podemos identificar a $T_p(U)$ con $T_p(V)$. En efecto, la inclusión $C_p^\infty(U) \rightarrow C_p^\infty(V)$ induce un isomorfismo $G_p(U) \rightarrow G_p(V)$, el cual induce a su vez un isomorfismo canónico entre los dos espacios tangentes. Concretamente, si $v \in T_p(U)$ y $f \in C_p^\infty(V)$ tiene dominio U' , al considerar a v como elemento de $T_p(V)$ tenemos que $v(f) = v(f|_{U \cap U'})$.

Definición 2.4 *Sea V una variedad diferencial, sea $p \in V$ y $x : U \rightarrow \tilde{U}$ una carta alrededor de p . Definimos la aplicación*

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p : C_p^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$$

como la dada por

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p = \left. \frac{\partial (x^{-1} \circ f)}{\partial x_i} \right|_{x(p)}.$$

En otras palabras, $x^{-1} \circ f$ es una función diferenciable en un abierto de \mathbb{R}^n que contiene al punto $x(p)$, y la derivada de f respecto a x_i se define como la derivada parcial de esta función respecto de la i -ésima variable en el punto $x(p)$.

Por razones tipográficas a veces escribiremos $\partial_{x_i}|_p$ en lugar de $\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p$. Es claro que $\partial_{x_i}|_p \in T_p(V)$. Su interpretación es clara: la derivada parcial de una función f respecto a la coordenada x^i en p es el incremento que experimenta f por cada unidad que aumentamos desde p la coordenada x_i .

Vamos a demostrar que estas derivadas parciales son una base de $T_p(V)$. Para ello necesitamos un resultado técnico:

Teorema 2.5 Sea U un abierto con frontera convexo en \mathbb{R}^n , sea $y^0 \in U$ y consideremos una función diferenciable $F : U \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces existen funciones diferenciables $F_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ tales que, para todo $y \in U$,

$$F(y) = F(y^0) + \sum_{i=1}^n F_i(y)(y_i - y_i^0),$$

$$y \text{ además } F_i(y^0) = \left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_{y^0}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $g(t) = F(t(y - y^0) + y^0)$, bien definida porque U es convexo. Claramente $g(0) = F(y^0)$, $g(1) = F(y)$. Además g es derivable y

$$g'(t) = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_{t(y-y^0)+y^0} (y_i - y_i^0).$$

Por consiguiente

$$F(y) = F(y^0) + \int_0^1 g'(t) dt = F(y^0) + \sum_{i=1}^n F_i(y)(y_i - y_i^0),$$

donde

$$F_i(y) = \int_0^1 \left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_{t(y-y^0)+y^0} dt.$$

Claramente las funciones F_i son de clase C^∞ y

$$F_i(y^0) = \int_0^1 \left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_{y^0} dt = \left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_{y^0}. \quad \blacksquare$$

Teorema 2.6 Sea V una variedad diferencial, sea x una carta alrededor de un punto $p \in V$ y sea $v \in T_p(V)$. Entonces

$$v = \sum_{i=1}^n v(x^i) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $f \in C_p^\infty(V)$ y consideremos un entorno U de p contenido tanto en el dominio de f como en el de x y cuya imagen por x sea convexa. En dicho entorno $f = x \circ (x^{-1} \circ f) = x \circ F$, donde F está en las hipótesis del teorema anterior (con $y^0 = x(p)$). Así pues, para todo $q \in U$, tenemos

$$f(q) = F(x(q)) = F(x(p)) + \sum_{i=1}^n F_i(x(q))(x^i(q) - x^i(p)),$$

luego

$$f = c_{f(p)} + \sum_{i=1}^n (x \circ F_i)(x^i - c_{x^i(p)}).$$

Como v es una derivación,

$$v(f) = \sum_{i=1}^n v(x^i)(x \circ F_i)(p) = \sum_{i=1}^n v(x^i) \left. \frac{\partial F}{\partial x_i} \right|_{x(p)} = \sum_{i=1}^n v(x^i) \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p.$$

■

En particular tenemos que las derivadas parciales $\partial_{x_i}|_p$ son un sistema generador del espacio tangente. A continuación probamos que son una base. Admitiendo esto, acabamos de ver que la coordenada de una derivación v correspondiente al vector básico $\partial_{x_i}|_p$ es $v(x^i)$.

Teorema 2.7 *Sea V una variedad diferencial y x una carta alrededor de un punto $p \in V$. Entonces las derivadas $\partial_{x_i}|_p$ forman una base del espacio tangente $T_p(V)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sólo falta probar que las derivadas son linealmente independientes (en particular distintas dos a dos). Supongamos que

$$\alpha_1 \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p + \cdots + \alpha_n \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p = 0.$$

Aplicamos esta igualdad a la función x^i y observamos que

$$\left. \frac{\partial x^i}{\partial x_j} \right|_p = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

La conclusión es, entonces, que cada $\alpha_i = 0$.

■

Nota Aquí termina el proceso artificial que nos ha permitido definir los espacios tangentes abstractos. El lector puede —si lo considera oportuno— olvidar tranquilamente todos los razonamientos precedentes, pues nunca le hará falta recordarlos. Sólo necesita quedarse con la idea de que a cada punto p de una variedad diferencial V de dimensión n le hemos asociado un espacio vectorial $T_p(V)$ de dimensión n (debe recordar su definición como espacio de derivaciones de gérmenes —que es conceptualmente simple— pero puede olvidar la prueba artificial de que realmente tiene dimensión n) así como que a cada carta alrededor de p le hemos asociado una base de $T_p(V)$, la formada por las derivaciones $\partial_{x_i}|_p$ (cuya definición, que es muy simple, debe recordar, al igual que la fórmula del teorema 2.6, que nos da las coordenadas de un vector tangente en dicha base, pero puede olvidar la prueba artificial de 2.6 y los resultados anteriores y posteriores).

A partir de aquí vamos a comprobar que los espacios $T_p(V)$ abstractos se comportan de modo formalmente análogo a los espacios tangentes “geométricos” definidos en [An 7.8]. Como indicábamos al principio de la sección, el lector debe hacer cuantos esfuerzos resulten necesarios para captar plenamente esta analogía formal.

■

Espacios afines Para comparar el funcionamiento de los espacios tangentes abstractos con los espacios tangentes geométricos de las subvariedades de \mathbb{R}^n estudiadas en [An] conviene considerar el caso intermedio de los espacios afines.

Sea E un espacio afín de dimensión n sobre \mathbb{R} y fijemos un sistema de referencia $(O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, el cual define una carta $x : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, la cual define a su vez una base $\partial_{x_1}|_p, \dots, \partial_{x_n}|_p$ de $T_p(E)$. Podemos considerar entonces el isomorfismo $\theta_p : T_p(E) \rightarrow \vec{E}$ que hace corresponder esta base con $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$.

Más explícitamente, puesto que las coordenadas de un vector $v \in T_p(E)$ en la base que estamos considerando son $v(x^i)$, el isomorfismo θ_p viene dado por

$$\theta_p(v) = \sum_i v(x^i) \vec{e}_i.$$

Vamos a probar que θ_p es un isomorfismo canónico, en el sentido de que no depende de la carta con la que lo calculamos. Concretamente, si $(O'; \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ es otro sistema de referencia, que determina una carta $y : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, consideramos la matriz de cambio de base (a_i^j) , que cumple

$$\vec{v}_i = \sum_j a_i^j \vec{e}_j, \quad x^j = a^j + \sum_i y^i a_i^j,$$

con lo que $\vec{e}_j = \sum_i b_j^i \vec{v}_i$, donde $(b_j^i) = (a_i^j)^{-1}$. Entonces

$$\sum_j v(x^j) \vec{e}_j = \sum_{i,j} v(y^i) a_i^j b_j^i \vec{v}_i = \sum_i v(y^i) \vec{v}_i.$$

Así pues, en cada punto p de un espacio afín E tenemos un espacio tangente $T_p(E)$, pero todos ellos se identifican de forma natural a través de θ_p con el mismo espacio vectorial \vec{E} . ■

Abiertos en \mathbb{R}^n El ejemplo precedente se aplica en particular a \mathbb{R}^n y, más en general, a un abierto con frontera V en \mathbb{R}^n , de modo que tenemos isomorfismos canónicos

$$\theta_p : T_p(V) \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Calculado a partir de la carta formada por la identidad, θ_p se reduce a

$$\theta_p(v) = (v(x^1), \dots, v(x^n)). \quad (2.3)$$

En el caso en que V es un abierto en \mathbb{R}^n tenemos también una expresión explícita para el isomorfismo inverso, pues $\theta_p^{-1}(v)$ no es sino la derivada direccional $D_p(*, v)$ en la dirección de V . En efecto, es fácil ver que $D_p(*, v) \in T_p(V)$, así como que la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow T_p(V) \\ v &\longmapsto D_p(*, v) \end{aligned}$$

es lineal y hace corresponder la base canónica de \mathbb{R}^n con la base formada por las derivadas parciales usuales, es decir, con las derivaciones $\partial_{x_i}|_p$. Por lo tanto, coincide con θ_p^{-1} . En definitiva, el isomorfismo canónico identifica cada vector tangente “geométrico” v con la derivada en la dirección de v .

Consideremos seguidamente cualquier otra carta $y : W \rightarrow \tilde{W}$ alrededor de un punto $p \in V$. Entonces, la base $\partial_{y_1}|_p, \dots, \partial_{y_n}|_p$ de $T_p(V)$ se corresponde con la base $\theta_p(\partial_{y_1}|_p), \dots, \theta_p(\partial_{y_n}|_p)$ de \mathbb{R}^n , la cual tiene una interpretación geométrica muy simple. Basta observar que

$$\begin{aligned} \theta_p(\partial_{y_i}|_p) &= \left(\frac{\partial x^1}{\partial y_i} \Big|_p, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial y_i} \Big|_p \right) = \\ &= \left(\frac{\partial Y \circ x^1}{\partial y_i} \Big|_{y(p)}, \dots, \frac{\partial Y \circ x^n}{\partial y_i} \Big|_{y(p)} \right) = \frac{\partial Y}{\partial y_i} \Big|_{y(p)}, \end{aligned}$$

donde $Y = y^{-1}$. Equivalentemente, $\theta_p(\partial_{y_i}|_p)$ es el vector tangente a la curva que resulta de fijar todas las coordenadas de p excepto la i -ésima y dejar que ésta varíe. ■

Enseguida presentamos un ejemplo que ilustre las observaciones precedentes, pero para estar en condiciones de realizar los cálculos necesarios conviene observar un hecho general:

Cambio de base Si p es un punto de una variedad V y x, y son dos cartas alrededor de p , tenemos dos bases de $T_p(V)$. Teniendo en cuenta el teorema 2.6, es claro que¹

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_p = \frac{\partial x^1}{\partial y_i} \Big|_p \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p + \dots + \frac{\partial x^n}{\partial y_i} \Big|_p \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_p.$$

En otras palabras, la matriz de cambio de base es la formada por las derivadas parciales de las coordenadas x^j respecto de las coordenadas y_i . Teniendo en cuenta la definición de estas derivadas, vemos que no es sino la matriz jacobiana de la función $y^{-1} \circ x$ en el punto $y(p)$. ■

Ejemplo Consideremos a \mathbb{R}^3 como variedad diferencial. Para cada $p \in \mathbb{R}^3$, el espacio tangente $T_p\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial distinto. La carta identidad nos da una base canónica, formada por las derivaciones $\partial_x|_p, \partial_y|_p, \partial_z|_p$.

Técnicamente, $\partial_x|_p$ es la aplicación que a cada función diferenciable definida en un entorno de p le hace corresponder su derivada parcial respecto de x en el punto p , pero en muchas ocasiones podemos prescindir de este hecho y pensar simplemente que $5\partial_x|_p + 3\partial_y|_p - 7\partial_z|_p$ es un vector tangente “típico” a \mathbb{R}^3 en el punto p .

Si queremos “materializar” estos vectores tangentes abstractos, sólo tenemos que aplicar el isomorfismo θ_p , de modo que

$$\theta_p(\partial_x|_p) = (\partial_x|_p(x), \partial_x|_p(y), \partial_x|_p(z)) = (1, 0, 0),$$

e igualmente con los otros vectores básicos. Por lo tanto:

$$\theta_p(5\partial_x|_p + 3\partial_y|_p - 7\partial_z|_p) = (5, 3, -7).$$

¹Observemos que formalmente se trata de la regla de la cadena: para derivar una función f respecto de y_i hay que sumar sus derivadas respecto de cada x_j multiplicadas por la derivada de x^j .

Así pues, la única diferencia práctica entre trabajar con el espacio tangente abstracto o identificarlo con \mathbb{R}^3 está en escribir $5\partial_x|_p + 3\partial_y|_p - 7\partial_z|_p$ o escribir $(5, 3, -7)$. Incluso podríamos escribir $(5, 3, -7)$ simplemente por el convenio de representar los vectores por sus coordenadas en una base prefijada, y entonces ya no habría ninguna diferencia práctica.

Si tomamos otra carta de \mathbb{R}^3 , por ejemplo la determinada por las coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) , en cada punto de \mathbb{R}^3 (fuera del eje Z) podemos considerar una base alternativa de $T_p(\mathbb{R}^3)$, a saber, la dada por $(\partial_\rho|_p, \partial_\theta|_p, \partial_\phi|_p)$. La relación entre ambas es que

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\Big|_p = \frac{\partial x}{\partial\rho}\Big|_p \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + \frac{\partial y}{\partial\rho}\Big|_p \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p + \frac{\partial z}{\partial\rho}\Big|_p \frac{\partial}{\partial z}\Big|_p$$

e igualmente con las otras dos. Explícitamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\rho}\Big|_p &= \sin\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + \sin\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p + \cos\theta \frac{\partial}{\partial z}\Big|_p, \\ \frac{\partial}{\partial\theta}\Big|_p &= \rho \cos\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + \rho \cos\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p - \rho \sin\theta \frac{\partial}{\partial z}\Big|_p, \\ \frac{\partial}{\partial\phi}\Big|_p &= -\rho \sin\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + \rho \sin\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p. \end{aligned}$$

Por concretar, podemos considerar el punto $p = (1/3, 2/3, 2/3)$, cuyas coordenadas esféricas cumplen

$$\rho = 1, \quad \cos\theta = \frac{2}{3}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \cos\phi = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \sin\phi = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

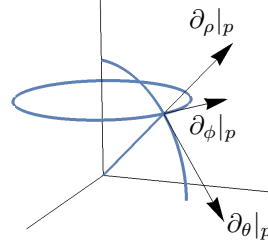
Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\rho}\Big|_p &= \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial z}\Big|_p, \\ \frac{\partial}{\partial\theta}\Big|_p &= \frac{2\sqrt{5}}{15} \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + \frac{4\sqrt{5}}{15} \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p - \frac{\sqrt{5}}{3} \frac{\partial}{\partial z}\Big|_p, \\ \frac{\partial}{\partial\phi}\Big|_p &= -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p. \end{aligned}$$

Técnicamente, $\partial_\rho|_p$ es la derivación que a cada función diferenciable en un entorno de p le asigna su derivada parcial respecto de ρ en p (es decir, la derivada respecto de la función expresada en términos de las coordenadas esféricas). Como antes, “concretar” estos vectores “abstractos” consiste en calcular

$$\theta_p(\partial_\rho|_p) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \theta_p(\partial_\theta|_p) = \left(\frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{4\sqrt{5}}{15}, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right), \quad \theta_p(\partial_\phi|_p) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right).$$

La representación geométrica que muestra la figura no es casual. Por ejemplo, el vector correspondiente a $\partial_\rho|_p$ es la derivada de la curva que se obtiene al fijar θ, ϕ y dejar que varíe ρ . Dicha “curva” es una recta que se aleja una unidad del origen por cada unidad que aumenta ρ , por lo que $\theta_p(\partial_\rho|_p)$ es el vector unitario que apunta en la dirección opuesta al origen.



Similarmente, $\theta_p(\partial_\theta|_p)$ es tangente a la curva que resulta de fijar ρ, ϕ , que es el “meridiano” de S^2 que resulta de mantener constante la distancia al origen y la “longitud geográfica”, mientras que $\theta_p(\partial_\phi|_p)$ es tangente al “paralelo” que resulta de mantener constante la distancia al origen y “latitud geográfica” en S^2 . ■

Derivadas sucesivas Observemos que si V es una variedad diferencial, $p \in V$, $f \in C_p^\infty(V)$ y x es un sistema de coordenadas alrededor de p , entonces tenemos definidas las funciones $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ (en la intersección de los dominios de x y f). Es claro que están en $C_p^\infty(V)$, pues sus lecturas en la carta x son las derivadas parciales de la función $x^{-1} \circ f$. En particular podemos calcular las derivadas segundas

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_p = \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right),$$

las cuales determinan funciones

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

que están en $C_p^\infty(V)$, pues sus lecturas en x son las derivadas segundas de $x^{-1} \circ f$. Por este mismo motivo es claro que las derivadas cruzadas de una función son iguales. Del mismo modo podemos calcular derivadas sucesivas de cualquier orden. ■

La diferencial de una aplicación Hasta ahora hemos generalizado el concepto de aplicación diferenciable al caso de aplicaciones entre variedades diferenciales cualesquiera, pero no así el de diferencial de una aplicación diferenciable, que sólo lo tenemos definido para aplicaciones entre abiertos (con frontera) de espacios \mathbb{R}^n .

Definición 2.8 Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación diferenciable entre variedades y sea $p \in V$. Definimos la *diferencial* de f en p como la aplicación

$$df|_p : T_p(V) \rightarrow T_{f(p)}(W)$$

dada por

$$df|_p(v)(u) = v(f \circ u), \quad \text{para todo } u \in C_{f(p)}^\infty(W).$$

Es inmediato comprobar que $df|_p(v) \in T_{f(p)}(W)$, así como que $df|_p$ es una aplicación lineal. Si V y W son abiertos (con frontera) en \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m , respectivamente, la diferencial que acabamos de definir se corresponde con la usual a través de los isomorfismos canónicos θ_p definidos por (2.3), es decir, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} T_p(V) & \xrightarrow{df|_p} & T_{f(p)}(W) \\ \theta_p \downarrow & & \downarrow \theta_{f(p)} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{df|_p} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

En efecto, se comprueba inmediatamente que cuando partimos del vector básico $\partial_{x_i}|_p$ llegamos por ambos caminos a la m -tupla cuya j -ésima coordenada es $\partial_{x_i} f_j|_p$.

Ejemplo Similarmente, si $f : E \rightarrow F$ es una aplicación afín entre dos espacios afines, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} T_p(V) & \xrightarrow{df|_p} & T_{f(p)}(W) \\ \theta_p \downarrow & & \downarrow \theta_{f(p)} \\ \vec{E} & \xrightarrow{\vec{f}} & \vec{F} \end{array}$$

donde \vec{f} es la aplicación lineal asociada.

En efecto, si $(O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, $(f(O); \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ son sistemas de referencia de E y F respectivamente y $\vec{f}(\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^m a_i^j \vec{v}_j$, para cada punto

$$p = O + \sum_{i=1}^n x^i(p) \vec{e}_i \in E$$

tenemos que

$$f(p) = f(O) + \sum_{i=1}^n x^i(p) \vec{f}(\vec{e}_i) = f(O) + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x^i(p) a_i^j \vec{v}_j.$$

Esto quiere decir que si llamamos y^j a las coordenadas respecto del sistema de referencia de F , la aplicación $x^{-1} \circ f \circ y^j$ es $x \mapsto \sum_{i=1}^n x^i a_i^j$. Por consiguiente,

$$df|_p(\partial_{x_i}|_p)(y^j) = \left. \frac{\partial(f \circ y^j)}{\partial x_i} \right|_p = \left. \frac{\partial(x^{-1} f \circ y^j)}{\partial x_i} \right|_{x(p)} = a_i^j.$$

Con esto la conmutatividad del diagrama es inmediata:

$$\theta_{f(p)}(df|_p(\partial_{x_i}|_p)) = \sum_{j=1}^m df|_p(\partial_{x_i}|_p)(y^j) \vec{v}_j = \sum_{j=1}^m a_i^j \vec{v}_j = \vec{f}(\vec{e}_i) = \vec{f}(\theta_p(\partial_{x_i}|_p)). \quad \blacksquare$$

La regla de la cadena resulta inmediata:

Teorema 2.9 Si $f : V \rightarrow W$ y $g : W \rightarrow X$ son aplicaciones diferenciables entre variedades diferenciables y $p \in V$, entonces

$$d(f \circ g)|_p = df|_p \circ dg|_{f(p)}.$$

DEMOSTRACIÓN: En efecto, si $v \in T_p(M)$ y $u \in C_p^\infty(X)$, entonces

$$d(f \circ g)|_p(v)(u) = v(f \circ g \circ u) = df|_p(v)(g \circ u) = dg|_{f(p)}(df|_p(v))(u).$$

■

Uniendo esto al hecho obvio que de la diferencial de la identidad en cada punto es la identidad del correspondiente espacio tangente, concluimos que las diferenciales de los difeomorfismos entre variedades son isomorfismos de espacios vectoriales.

Es fácil calcular la matriz de una diferencial respecto de las bases asociadas a dos cartas. Concretamente, si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación diferenciable, $p \in V$, x es una carta alrededor de p e y es una carta alrededor de $f(p)$, llamamos $f^j = f \circ y^j$, que son funciones definidas en un entorno de p . Entonces, la coordenada de la imagen de $\partial_{x_i}|_p$ correspondiente a $\partial_{y_j}|_{f(p)}$ es

$$df|_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) (y^j) = \frac{\partial f^j}{\partial x_i} \Big|_p.$$

Así pues, la matriz de $df|_p$ respecto a las bases asociadas a x e y es la *matriz jacobiana* de f en p , dada por

$$J_p(f) = \left(\frac{\partial f^j}{\partial x_i} \Big|_p \right).$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial f^j}{\partial x_i} \Big|_p = \frac{\partial (x^{-1} \circ f \circ y^j)}{\partial x_i} \Big|_{x(p)},$$

resulta que $J_p(f)$ coincide con la matriz jacobiana $J_{x(p)}(\bar{f})$ de la lectura \bar{f} de f en las cartas consideradas. En particular, el rango de f en p definido en 1.12 coincide con el rango de $df|_p$ como aplicación lineal.

Así, por ejemplo, la hipótesis sobre el rango en los teoremas 1.15 y 1.16 puede sustituirse por la condición equivalente de que $df|_p$ sea biyectiva en el primer caso e inyectiva en el segundo.

El espacio cotangente Sea V una variedad diferenciable, $p \in V$ y $f \in C_p^\infty(V)$. Si U es el dominio de f , a través de la identificación natural entre $T_p(U)$ y $T_p(V)$ podemos considerar que $df|_p : T_p(V) \rightarrow T_{f(p)}(\mathbb{R})$. Más aún, mediante la identificación $\theta_{f(p)} : T_{f(p)}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, podemos considerar que $df_p : T_p(V) \rightarrow \mathbb{R}$. Veamos la expresión de $df|_p$ con estas identificaciones.

Concretamente, si $v \in T_p(V)$, estamos llamando $df|_p(v)$ a lo que en principio sería $\theta_{f(p)}(df|_p(v)) = df|_p(v)(x)$, donde x es la identidad en \mathbb{R} . Así pues,

$$df|_p(v) = v(f).$$

Definimos el *espacio cotangente* de V en p como el espacio dual $T_p^*(V)$, es decir, el espacio vectorial de todas las aplicaciones lineales de $T_p(V)$ en \mathbb{R} . Acabamos de probar que si $f \in C_p^\infty(V)$ entonces $df|_p \in T_p^*(V)$.

Si x es una carta alrededor de p , entonces

$$dx^i|_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) = \frac{\partial x^i}{\partial x_j} \Big|_p = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Esto significa que $dx^i|_p$ es la base dual de la base asociada a x en $T_p(V)$, de donde se sigue a su vez que, si $f \in C_p^\infty(V)$, entonces

$$df|_p = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_p dx^1|_p + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_p dx^n|_p.$$

Si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación diferenciable entre variedades y $p \in V$, definimos la *codiferencial* de f en p como la aplicación $df_p^* : T_{f(p)}^*(W) \rightarrow T_p^*(V)$ dual de la diferencial $df|_p : T_p(V) \rightarrow T_{f(p)}(W)$. ■

Nota Conviene destacar un hecho que, de no reparar en él adecuadamente, puede llevar a confusiones indeseables. Si $x : U \rightarrow \tilde{U}$ es una carta en una variedad diferencial V y $p \in V$, la derivada parcial $\partial_{x_i}|_p$ no está determinada por la función coordenada x^i , sino que depende de toda la carta x . Podemos tener dos cartas alrededor de p para la que la función coordenada x^i sea la misma y que, en cambio, las derivadas correspondientes $\partial_{x_i}|_p$ sean distintas. El lector debería meditar sobre ello hasta asimilarlo debidamente. A continuación presentamos un ejemplo en el que se da dicha situación. ■

Ejemplo Consideremos el punto $p = (1/3, 2/3, 2/3) \in S^2$. No tenemos ninguna base canónica para $T_p(S^2)$. Alrededor de p podemos considerar, por ejemplo, las cartas de coordenadas (x, y) , (x, z) , (y, z) o (θ, ϕ) , y cada una de ellas nos da una base distinta: $(\partial_x|_p, \partial_y|_p)$, $(\partial_x|_p, \partial_z|_p)$, $(\partial_y|_p, \partial_z|_p)$, $(\partial_\theta|_p, \partial_\phi|_p)$. Por ejemplo, la relación entre las dos primeras es

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p &= \frac{\partial x}{\partial x} \Big|_p \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p, \\ \frac{\partial}{\partial z} \Big|_p &= \frac{\partial x}{\partial z} \Big|_p \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \frac{\partial y}{\partial z} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p. \end{aligned}$$

Para calcular estas derivadas hay que expresar (x, y) en términos de las coordenadas (x, z) , es decir, $(x, y) = (x, \sqrt{1 - x^2 - z^2})$, con lo que resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p &= \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p - \frac{x}{y} \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p, \\ \frac{\partial}{\partial z} \Big|_p &= -\frac{z}{y} \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p. \end{aligned}$$

En el caso concreto del punto $(1/3, 2/3, 2/3)$ queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p &= \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p, \\ \frac{\partial}{\partial z} \Big|_p &= -\frac{\partial}{\partial y} \Big|_p. \end{aligned}$$

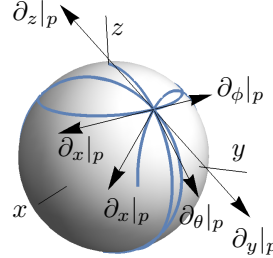
Aquí tenemos una ilustración del fenómeno del que advertíamos en la nota precedente. En la primera ecuación la derivada $\partial_x|_p$ no es la misma en ambos miembros. No es lo mismo lo que varía una función por cada unidad que aumenta x cuando está expresada en términos de (x, y) que cuando lo está en términos de (x, z) . Por ejemplo, si la función es y , en el primer caso la derivada es 0, mientras que en el segundo se trata de la derivada de $\sqrt{1-x^2-z^2}$. Similarmente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_p &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \Big|_p \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \frac{\partial y}{\partial \theta} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p = \cos \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \cos \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p, \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \Big|_p &= \frac{\partial x}{\partial \phi} \Big|_p \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \frac{\partial y}{\partial \phi} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p = -\sin \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \sin \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p, \end{aligned}$$

o en el punto concreto que estamos considerando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_p &= \frac{2\sqrt{5}}{15} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \frac{4\sqrt{5}}{15} \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p, \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \Big|_p &= -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p. \end{aligned}$$

Si queremos representar estos vectores tangentes “abstractos” como vectores en \mathbb{R}^3 tenemos que transportarlos mediante $di|_p : T_p(S^2) \rightarrow T_p(\mathbb{R}^3)$, para después aplicar el isomorfismo θ_p . En general, $di|_p(v)(f) = v(i \circ f)$, luego las coordenadas en la base canónica de $T_p(\mathbb{R}^3)$ de un vector $v \in T_p(S^2)$ son $(v(x), v(y), v(z))$. Para las bases que hemos considerado tenemos:



$T_p S^2$	$T_p \mathbb{R}^3$	$p = (1/3, 2/3, 2/3)$
$\partial_x _p, \partial_y _p$	$(1, 0, -x/z), (0, 1, -y/z)$	$(1, 0, -1/2), (0, 1, -1)$
$\partial_x _p, \partial_z _p$	$(1, -x/y, 0), (0, -z/y, 1)$	$(1, -1/2, 0), (0, -1, 1)$
$\partial_\theta _p, \partial_\phi _p$	$(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta)$ $(-\sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi, 0)$	$(\frac{2\sqrt{5}}{15}, \frac{4\sqrt{5}}{15}, -\frac{\sqrt{5}}{3})$ $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$

Observemos, por ejemplo, que el vector $\partial_x|_p$ correspondiente a la base de coordenadas (x, y) es tangente a la curva $y = 2/3$ (el que apunta hacia abajo en la figura), mientras que el correspondiente a la base (x, z) es tangente a la curva $z = 2/3$ (el que apunta hacia la izquierda en la figura).

Para “materializar” los vectores tangentes de la primera columna de la tabla anterior en vectores tangentes a la esfera “de verdad” hemos tenido que usar la inclusión $i : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. El interés de toda la teoría que hemos expuesto en esta sección es que podemos trabajar exactamente igual con los espacios tangentes abstractos sin necesidad de dar este último paso y, por consiguiente, también cuando consideremos variedades para las cuales no haya una forma obvia de sumergirlas en un espacio \mathbb{R}^m o, aunque la haya, tenerla en cuenta no haga sino complicar los cálculos. ■

En general podemos pensar en los elementos de $T_p(V)$, para cualquier variedad V , como las direcciones en las que puede derivarse cada función de $C_p^\infty(V)$, si bien la construcción concreta de $T_p(V)$ hace que la derivación de funciones en una dirección v coincida con el propio vector tangente v .

Espacios tangentes de productos Consideremos ahora dos variedades diferenciales V_1 y V_2 (al menos una de ellas sin frontera) y puntos $p_i \in V_i$. Consideremos las proyecciones $\pi_i : V_1 \times V_2 \rightarrow V_i$ y las inclusiones $\iota_{p_i} : V_i \rightarrow V_1 \times V_2$ (dadas por $\iota_{p_1}(q) = (p_1, q)$, $\iota_{p_2}(q) = (q, p_2)$). La aplicación

$$(d\pi_1|_{(p_1, p_2)}, d\pi_2|_{(p_1, p_2)}) : T_{(p_1, p_2)}(V_1 \times V_2) \rightarrow T_{p_1}(V_1) \times T_{p_2}(V_2)$$

dada por

$$(d\pi_1|_{(p_1, p_2)}, d\pi_2|_{(p_1, p_2)})(v) = (d\pi_1|_{(p_1, p_2)}(v), d\pi_2|_{(p_1, p_2)}(v))$$

y la aplicación

$$d\iota_{p_2}|_{p_1} + d\iota_{p_1}|_{p_2} : T_{p_1}(V_1) \times T_{p_2}(V_2) \rightarrow T_{(p_1, p_2)}(V_1 \times V_2)$$

dada por

$$(d\iota_{p_2}|_{p_1} + d\iota_{p_1}|_{p_2})(v_1, v_2) = d\iota_{p_2}|_{p_1}(v_1) + d\iota_{p_1}|_{p_2}(v_2)$$

son isomorfismos de espacios vectoriales mutuamente inversos. (Teniendo en cuenta que $\iota_{p_i} \circ \pi_j$ es la identidad o una constante según si $i \neq j$ o $i = j$ se concluye fácilmente que la segunda aplicación seguida de la primera es la identidad, y como ambos espacios tienen la misma dimensión, esto implica que son isomorfismos.) Equivalentemente, podemos considerar que

$$T_{(p_1, p_2)}(V_1 \times V_2) = T_{p_1}(V_1) \oplus T_{p_2}(V_2)$$

si identificamos $T_{p_i}(V_i) = d\iota_{p_i} : T_{p_i}(V_i) \rightarrow T_{(p_1, p_2)}(V_1 \times V_2)$. A través de esta identificación, las proyecciones en cada sumando directo se corresponden con las diferenciales $d\pi_i|_{(p_1, p_2)}$.

En términos de coordenadas, si consideramos cartas alrededor de p_1 y p_2 con coordenadas x^1, \dots, x^m e y^1, \dots, y^n , respectivamente, y llamamos igualmente $x^1, \dots, x^m, y^1, \dots, y^n$ a las coordenadas de la carta producto $x \times y$ (de modo que x^i en $V_1 \times V_2$ es $\pi_1 \circ x^i$, mientras que y^j es $\pi_2 \circ y^j$), tenemos que

$$d\iota_{p_2}|_{p_1}(\partial_{x_k}|_{p_1}) = \partial_{x_k}|_{(p_1, p_2)}, \quad d\iota_{p_1}|_{p_2}(\partial_{y_k}|_{p_2}) = \partial_{y_k}|_{(p_1, p_2)},$$

por lo que $\partial_{x_k}|_{p_1}$ se identifica con $\partial_{x_k}|_{(p_1, p_2)}$ y $\partial_{y_k}|_{p_2}$ se identifica con $\partial_{y_k}|_{(p_1, p_2)}$. ■

El fibrado de tangentes Con la definición de variedad de [An] todos los espacios tangentes $T_p(V)$ de una misma variedad V son subespacios de un mismo espacio \mathbb{R}^m , con lo que, por ejemplo, si $x : U \rightarrow \tilde{U}$ es una carta de V , podemos considerar el campo diferenciable $U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de vectores tangentes dado por

$$p \mapsto \theta_p(\partial_{x_i}|_p) = \left. \frac{\partial x^{-1}}{\partial x_i} \right|_{x(p)},$$

que a cada $p \in U$ le asigna un vector tangente en $T_p(V)$, y podemos decir que es diferenciable porque podemos verlo como aplicación en \mathbb{R}^m . Sin embargo, si V es una variedad abstracta, no podemos decir en principio que la aplicación $p \mapsto \partial_{x_i}|_p$ sea diferenciable, porque su imagen no está en ninguna variedad diferencial (ya que cada $\partial_{x_i}|_p$ pertenece a un espacio distinto $T_p(V)$). Ahora vamos a definir una variedad abstracta TV que sustituye a \mathbb{R}^m como variedad que contiene a todos los vectores tangentes en todos los puntos de una variedad diferencial V .

Concretamente, si V es una variedad diferencial de dimensión n , llamamos

$$TV = \bigcup_{p \in V} T_p(V).$$

Notemos que la unión es disjunta. Aunque en realidad es redundante, conviene representar a los elementos de TV como pares (p, v) , donde $v \in T_p(V)$. Si $x : U \rightarrow \tilde{U}$ es una carta en V , podemos considerar a TU como subconjunto de TV a través de las identificaciones naturales entre los espacios $T_p(U)$ y $T_p(V)$. Consideramos la aplicación $\tilde{x} : TU \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$\tilde{x}(p, v) = (x_1(p), \dots, x_n(p), v(x_1), \dots, v(x_n)).$$

Es claro que \tilde{x} es inyectiva, pues si $\tilde{x}(p, v) = \tilde{x}(q, w)$, comparando las primeras componentes concluimos que $p = q$ y comparando las segundas concluimos que $v = w$. (Las segundas componentes son las coordenadas de v y w respecto a la base de $T_p(V)$ asociada a x .) Además la imagen de \tilde{x} es el abierto con frontera $\tilde{U} \times \mathbb{R}^n$.

Vamos a ver que el conjunto de todas las biyecciones \tilde{x} satisface las hipótesis del teorema 1.11, por lo que constituye un atlas de una estructura diferencial en TV , para cierta topología en TV .

En efecto, si $\tilde{x} : TU \rightarrow \tilde{U} \times \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} : TU' \rightarrow \tilde{U}' \times \mathbb{R}^n$ son dos cartas de TV , tenemos que

$$TU \cap TU' = T(U \cap U'), \quad \tilde{x}[T(U \cap U')] = x[U \cap U'] \times \mathbb{R}^n,$$

que es abierto en \mathbb{R}^{2n} o H^{2n} . Además, si (u, v) está en este conjunto, entonces

$$\tilde{x}^{-1}(u, v) = \left(x^{-1}(u), \sum_{j=1}^n v_j \partial_{x_j}|_{x^{-1}(u)} \right),$$

y

$$(\tilde{x}^{-1} \circ \tilde{y})(u, v) = ((x^{-1} \circ y)(u), w),$$

donde

$$w_i = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \Big|_{x^{-1}(u)} = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial (x^{-1} \circ y_i)}{\partial x_j} \Big|_u.$$

Es claro, pues, que $\tilde{x}^{-1} \circ \tilde{y}$ es una función diferenciable en su dominio.

Además, si $(p, v), (q, w)$ son dos puntos de TV , o bien $p = q$, en cuyo caso ambos están en el dominio de una carta $\tilde{x} : TU \rightarrow \tilde{U} \times \mathbb{R}^n$, donde $x : U \rightarrow \tilde{U}$ es una carta de V alrededor de p , o bien $p \neq q$, en cuyo caso podemos tomar cartas alrededor de cada uno de ellos con dominios disjuntos, las cuales dan lugar a cartas de TV alrededor de $(p, v), (q, w)$, también con dominios disjuntos.

Con esto tenemos que en TV existe una única topología de Hausdorff para la cual las biyecciones \tilde{x} forman un atlas de una estructura diferencial. Además TV puede cubrirse por una cantidad numerable de cartas, las correspondientes a una cantidad numerable de cartas que cubran V . ■

Así pues, si V es una variedad diferencial, podemos considerar a TV como variedad con la estructura determinada por las cartas \tilde{x} . A esta variedad TV se la conoce como *fibrado de tangentes* de V . Es claro que ∂TV está formado por los pares (p, v) tales que $p \in \partial V$, por lo que podemos identificar $\partial TV = T\partial V$.

He aquí algunas aplicaciones diferenciables relacionadas con el fibrado de tangentes:

1) La aplicación $\pi : TV \rightarrow V$ dada por $\pi(p, v) = p$.

Su lectura en dos cartas \tilde{x} y x es la proyección en las n primeras componentes.

2) La aplicación $i : V \rightarrow TV$ dada por $i(p) = (p, 0)$.

Su lectura en unas cartas x, \tilde{x} es $x \mapsto (x, 0)$. Además es un homeomorfismo en su imagen, pues su inversa es $\pi|_{i[V]}$, luego es continua.

3) Las aplicaciones $i_p : T_p(V) \rightarrow TV$ dadas por $i_p(v) = (p, v)$, considerando en $T_p(V)$ la estructura de variedad asociada a su estructura de espacio vectorial.

Fijada una carta x alrededor de p , su lectura respecto al isomorfismo que a cada $v \in T_p(V)$ le asigna sus coordenadas en la base ∂_{x_i} y la carta \tilde{x} es la dada por $v \mapsto (x(p), v)$.

4) Si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación diferenciable entre variedades, podemos definir $df : TV \rightarrow TW$ mediante $df(p, v) = (f(p), df|_p(v))$.

También es una aplicación diferenciable, pues su lectura en dos cartas \tilde{x} y \tilde{y} es de la forma

$$(\tilde{x}^{-1} \circ df \circ \tilde{y})(u, v) = ((x^{-1} \circ f \circ y)(u), w),$$

donde

$$w_i = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial (x^{-1} \circ f \circ y^i)}{\partial x_j} \Big|_u$$

5) Si E es un espacio afín, los isomorfismos canónicos $\theta_p : T_p(E) \longrightarrow \vec{E}$ determinan una aplicación $\theta : TE \longrightarrow \vec{E}$. Claramente es diferenciable, pues fijada una carta $x : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$, su lectura respecto de las cartas naturales es la aplicación $(p, v) \mapsto v$. ■

Volviendo al ejemplo que habíamos puesto al principio de este apartado, ahora podemos decir que $p \mapsto (p, \partial_{x_i}|_p)$ es una aplicación $U \longrightarrow TV$ diferenciable, pues su lectura en las cartas x, \tilde{x} es $p \mapsto (p, e_i)$, donde e_i es el i -ésimo vector de la base canónica.

2.2 Subvariedades

Introducimos ahora el concepto de subvariedad, gracias al cual conectaremos el concepto abstracto de variedad diferencial con el clásico de subvariedad de \mathbb{R}^m considerado en [An]. Conviene introducir primero el concepto más general de inmersión entre variedades:

Definición 2.10 Una *inmersión* $f : V \longrightarrow W$ entre dos variedades diferenciales es una aplicación diferenciable cuya diferencial en cada punto sea inyectiva. Una inmersión es *regular* si es inyectiva y un homeomorfismo en su imagen (considerando en ésta la topología relativa inducida desde W).

El teorema 1.16 garantiza que toda inmersión es localmente inyectiva, es decir, que todo punto de su dominio tiene un entorno en el cual es inyectiva.

Ejemplos Vamos a comparar distintas aplicaciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

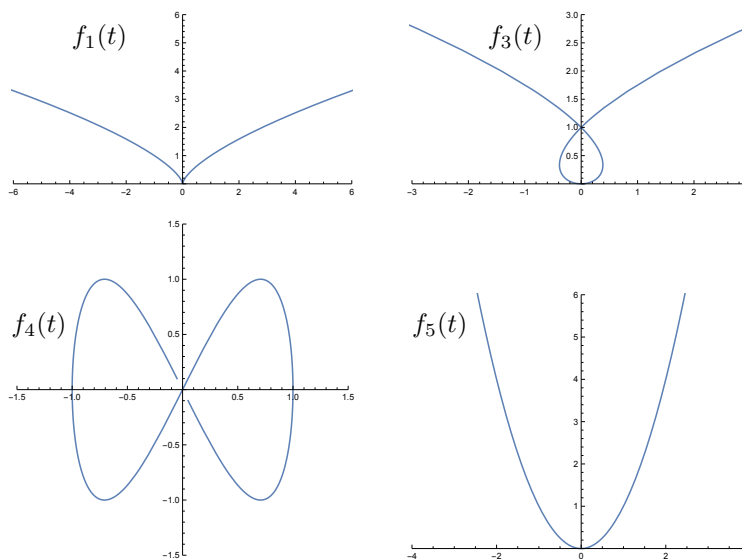
1) $f_1(t) = (t^2, t^3)$ es una aplicación diferenciable inyectiva, pero no es una inmersión, porque $df_1|_0$ es la aplicación nula. Esto se pone de manifiesto en su gráfica porque presenta un “pico” en $(0, 0)$, si bien no tendría por qué notarse. Por ejemplo, $g(t) = (t^3, t^3)$ no es una inmersión por el mismo motivo, pero su gráfica es una recta.

2) $f_2(t) = (\cos t, \sin t)$ es una inmersión no inyectiva.

3) $f_3(t) = (t^3 - 3t, t^2)$ es también una inmersión no inyectiva, pero en este caso la no inyectividad se reduce a que un único punto, $(0, 1)$, tiene dos anti-imágenes.

4) $f_4(t) = (\sin(2 \arctan t), \sin(4 \arctan t))$ es la figura en forma de ocho que muestra la figura. La curva tiende a $(0, 0)$ cuando t tiende a $\pm\infty$. Es una inmersión inyectiva, pero no es regular, pues su imagen (la figura en forma de ocho) no es homeomorfa a \mathbb{R} .

5) $f_5(t) = (t, t^2)$ es una inmersión regular. ■



Definición 2.11 Sea V una variedad diferencial y W un subconjunto de V dotado también de una estructura de variedad diferencial (con la topología relativa). Diremos que W es una *subvariedad*² de V si la inclusión $i : W \rightarrow V$ es una inmersión (necesariamente regular, ya que la inclusión es siempre inyectiva y consideramos en W la topología relativa).

Notemos que la diferenciabilidad de la inclusión equivale a que las inversas de las cartas de W sean diferenciables como aplicaciones en V .

Relación con las variedades definidas en [An] Si $S \subset \mathbb{R}^m$ es una variedad diferenciable en el sentido de [An 7.1], hemos visto que los difeomorfismos entre abiertos de S y abiertos de \mathbb{R}^n determinan una estructura diferencial en S . Ahora podemos precisar que con ella S es una subvariedad de \mathbb{R}^m . En efecto, si $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una carta en el sentido de [An 7.1], entonces existe un abierto $V \subset \mathbb{R}^m$ tal que $X : U \rightarrow S \cap V$ es un homeomorfismo y $x^{-1} : S \cap V \rightarrow U$ es una carta de S en el sentido abstracto. La lectura de la inclusión respecto de dicha carta en S y la identidad en \mathbb{R}^m es precisamente X , que tiene rango n en todos sus puntos, luego la inclusión es una inmersión.

Más aún, los subconjuntos de $S \subset \mathbb{R}^m$ que admiten una estructura de subvariedad son precisamente las variedades diferenciables en el sentido de [An 7.1]. En efecto, si S admite tal estructura y $x : S \cap V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ es una carta respecto a ella, tenemos que $X = x^{-1} : U \rightarrow S \cap V$ es un difeomorfismo (en particular un homeomorfismo), luego tiene rango n , y como la inclusión en \mathbb{R}^m es diferenciable, resulta que $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es también diferenciable, y sigue teniendo rango n , luego cumple la definición de carta de [An 7.1]. Por consiguiente, S es una variedad diferenciable en el sentido de [An 7.1].

²Estamos llamando “subvariedades” a lo que más precisamente se conoce como “subvariedades regulares”. El concepto general de “subvariedad” se obtiene permitiendo que la topología de W no sea la topología relativa, pero nunca necesitaremos considerar este caso.

Observemos que hemos probado que si un conjunto $S \subset \mathbb{R}^m$ admite una estructura de subvariedad, entonces sus cartas son necesariamente las inversas de las cartas consideradas en [An 7.1] (que no dependían de ninguna elección arbitraria de un atlas), luego resulta que S admite una única estructura de subvariedad. Un poco más adelante generalizaremos este hecho. ■

Ejemplos 1) Todo abierto W en una variedad V es una subvariedad, pues la lectura de la inclusión respecto de una misma carta alrededor de un punto es la identidad, luego su diferencial es inyectiva.

2) Si V tiene frontera, entonces ∂V es una subvariedad de V , pues la lectura de la inclusión respecto de una carta alrededor de un punto en V y de la carta que induce en ∂V es la aplicación $x \mapsto (0, x)$, que claramente tiene diferencial inyectiva.

3) Ya hemos comprobado S^n es una subvariedad de \mathbb{R}^{n+1} y que la bola unitaria cerrada \bar{B}^n es una subvariedad de \mathbb{R}^n , pues en ambos casos hemos visto que la inclusión tiene rango n en todo punto. ■

Si W es una subvariedad de V , tenemos que $di|_p$ transforma cada espacio tangente $T_p(W)$ en un subespacio de la misma dimensión en $T_p(V)$ (y esto garantiza que W no forma ángulos en V). Identificaremos cada espacio $T_p(W)$ con su imagen en $T_p(V)$ a través de la diferencial de la inclusión.

Concretamente, si V es una subvariedad de \mathbb{R}^m y $x : U \rightarrow \tilde{U}$ es una carta de V , llamemos $X = x^{-1} : \tilde{U} \rightarrow U$. Entonces un vector $\partial_{x_i}|_p$, para $p \in U$, se corresponde con el vector de coordenadas $di|_p(\partial_{x_i})(r^j)$ en \mathbb{R}^m , donde r^j son las coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^m . Más concretamente,

$$di|_p(\partial_{x_i})(r^j) = \left. \frac{\partial r^j}{\partial x_i} \right|_p = \left. \frac{\partial X \circ r^j}{\partial x_i} \right|_{x(p)} = \left. \frac{\partial X^j}{\partial x_i} \right|_{x(p)},$$

luego $\partial_{x_i}|_p$ se corresponde con el vector

$$\left. \frac{\partial X}{\partial x_i} \right|_{x(p)}.$$

Así pues, hemos probado lo siguiente (compárese con las observaciones tras la definición [An 7.10]):

Teorema 2.12 *Si V es una subvariedad de \mathbb{R}^m de dimensión n y $X : \tilde{U} \rightarrow V$ es la inversa de una carta en V , entonces, para cada $x \in \tilde{U}$, la base de $T_{X(x)}(V)$ asociada a la carta se corresponde, a través de la identificación de este espacio con un subespacio de \mathbb{R}^m , con la formada por los vectores*

$$\left. \frac{\partial X}{\partial x_i} \right|_x, \quad i = 1, \dots, n.$$

La interpretación geométrica de esto es que el vector $\partial_{x_i}|_p$ es la representación “abstracta” del vector tangente a la curva que resulta de fijar todas las coordenadas de la carta excepto la i -ésima.

Ejemplo Vamos a comprobar que si $p \in S^n$, entonces $T_p(S^n)$ se corresponde con el subespacio de \mathbb{R}^{n+1} formado por los vectores ortogonales a p . Para ello consideramos la aplicación $r : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$r(x) = x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2.$$

Claramente es diferenciable y $i \circ r$ es constante igual a 1, luego su diferencial en p es nula. Por consiguiente, la imagen de $di|_p$ está contenida en el núcleo de $dr|_p$. Teniendo en cuenta las dimensiones concluimos la igualdad. Observemos que

$$dr|_p = 2p_1 dx^1|_p + \cdots + 2p_{n+1} dx^{n+1}|_p.$$

A través del isomorfismo canónico, el núcleo de $dr|_p$ en $T_p(\mathbb{R}^{n+1})$ se corresponde con el núcleo de $dr|_p$ en \mathbb{R}^{n+1} considerando ahora la diferencial en el sentido usual del análisis, es decir, como la aplicación $x \mapsto 2px$ (producto escalar). Ahora es evidente que dicho núcleo está formado por los vectores de \mathbb{R}^{n+1} ortogonales a p . ■

Ya hemos observado que las subvariedades de \mathbb{R}^m son simplemente los subconjuntos de \mathbb{R}^m que cumplen la definición de variedad diferenciable [An 7.1], de modo que cada subconjunto es o no es una variedad diferenciable, sin que haya opción de elegir unas cartas u otras. Ahora probaremos, más en general, que cada subespacio topológico de una variedad diferencial V admite a lo sumo una estructura diferencial que lo convierta en subvariedad. Necesitamos algunos resultados previos:

Definición 2.13 Sea V una variedad diferencial. Un conjunto de funciones $x^1, \dots, x^m \in C_p^\infty(V)$ es *independiente* en p si las diferenciales $dx^1|_p, \dots, dx^m|_p$ son linealmente independientes en $T_p^*(V)$.

Obviamente, las funciones coordenadas de una carta son siempre funciones independientes. Recíprocamente tenemos el teorema siguiente:

Teorema 2.14 Sea V una variedad diferencial de dimensión n e y^1, \dots, y^n un conjunto de n funciones independientes en un punto $p \in V$. Entonces y^1, \dots, y^n forman un sistema de coordenadas alrededor de p .

DEMOSTRACIÓN: Sea U un entorno de p en el que estén definidas todas las funciones y^i . Definimos $y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mediante $y(q) = (y^1(q), \dots, y^n(q))$. Claramente y es diferenciable.

Llamemos x^1, \dots, x^n a las proyecciones en \mathbb{R}^n , es decir, a las coordenadas cartesianas. Consideremos la codiferencial $dy_p^* : T_{y(p)}^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow T_p^*(V)$. Tenemos que

$$dy_p^*(dx^i|_{y(p)}) = dy|_p \circ dx^i|_{y(p)} = dy^i|_p.$$

Así pues, dy_p^* transforma la base $dx^i|_{y(p)}$ de $T_{y(p)}^*(\mathbb{R}^n)$ en la base $dy^i|_p$ de $T_p^*(V)$. Por consiguiente dy_p^* es un isomorfismo, luego también lo es $dy|_p$.

Si p no es un punto frontera de V , el teorema de la función inversa 1.15 nos da que y se restringe a un difeomorfismo en un entorno de p , es decir, a una carta.

Si $p \in \partial V$, restringiendo U podemos suponer que es el dominio de una carta $z : U \rightarrow \tilde{U}$, de modo que $d(z^{-1} \circ y)|_{z(p)}$ es un isomorfismo. Por definición de diferenciabilidad en un abierto con frontera, existe una aplicación diferenciable $h : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida en un entorno de $z(p)$ tal que $(z^{-1} \circ y)|_{\tilde{U} \cap U_0} = h|_{\tilde{U} \cap U_0}$.

Por el teorema de la función inversa, restringiendo U_0 podemos suponer que $h[U_0]$ es abierto en \mathbb{R}^n y que $h : U_0 \rightarrow h[U_0]$ es un difeomorfismo. Entonces $h[\tilde{U} \cap U_0] = y[U \cap z^{-1}[U_0]]$ es un abierto con frontera en \mathbb{R}^n y la restricción de y a $U \cap z^{-1}[U_0]$ es una carta. ■

Un poco más en general tenemos:

Teorema 2.15 *Sea V una variedad diferencial de dimensión n e y^1, \dots, y^m un conjunto de $m \leq n$ funciones independientes en un punto $p \in V$. Entonces y^1, \dots, y^m forman parte de un sistema de coordenadas alrededor de p .*

DEMOSTRACIÓN: Sea x una carta alrededor de p . Entonces $dy^1|_p, \dots, dy^m|_p$ puede completarse hasta una base de $T_p^*(V)$ mediante algunas de las diferenciales $dx^i|_p$. Digamos que $dy^1|_p, \dots, dy^m|_p, dx^{m+1}|_p, \dots, dx^n|_p$ forman dicha base. Por el teorema anterior $y^1, \dots, y^m, x^{m+1}, \dots, x^n$ forman un sistema de coordenadas alrededor de p . ■

Con esto podemos probar un resultado fundamental sobre subvariedades:

Teorema 2.16 *Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación entre variedades y supongamos que W es una subvariedad de X . Entonces f es diferenciable si y sólo si lo es como aplicación $f : V \rightarrow X$.*

DEMOSTRACIÓN: Una implicación es obvia. Supongamos que $f : V \rightarrow X$ es diferenciable y tomemos un punto $p \in V$. Sea (U, x) una carta en X alrededor de $f(p)$. Consideremos la inclusión $i : W \rightarrow X$. Como $di|_{f(p)}$ es inyectiva, tenemos que $di_{f(p)}^*$ es suprayectiva, luego los elementos

$$di_{f(p)}^*(dx_i|_{f(p)}) = di|_{f(p)} \circ dx_i|_{f(p)} = d(x_i|_{U \cap W})|_{f(p)}$$

son un sistema generador de $T_{f(p)}^*(W)$. Eliminando algunos de ellos obtenemos una base. Si llamamos m a la dimensión de X y n a la de W , tenemos que n de las funciones $x_i|_{U \cap W}$ son independientes en $f(p)$, luego por 2.14 forman un sistema de coordenadas (de W) alrededor de $f(p)$. En otras palabras, si llamamos $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ a una cierta proyección (es decir, una aplicación que elimina las componentes adecuadas), la composición $x \circ \pi$ se restringe a una carta en W alrededor de $f(p)$. La lectura de f (como aplicación de V en W) respecto a una carta cualquiera y alrededor de p y la carta $x \circ \pi$ alrededor de $f(p)$ es $(y^{-1} \circ f \circ x) \circ \pi$. Las tres primeras funciones forman una función diferenciable, pues son una lectura de f como aplicación en X , y al componer con π seguimos teniendo una función diferenciable. Así pues, f es diferenciable en un entorno de p , y esto vale para todo $p \in V$. ■

De aquí deducimos dos consecuencias destacables. La primera es la que ya habíamos anunciado:

Teorema 2.17 *Sea V una variedad diferencial y $W \subset V$. Entonces W admite a lo sumo una estructura diferencial que lo convierte en subvariedad de V .*

DEMOSTRACIÓN: Sean W y W' el mismo conjunto W con dos estructuras diferenciales que lo conviertan en subvariedad de V . Entonces la identidad en W es diferenciable como aplicación $W \rightarrow V$, luego también lo es como aplicación $W \rightarrow W'$, e igualmente al revés, luego la identidad es un difeomorfismo, lo que significa que ambas estructuras diferenciales son la misma. ■

Así, por ejemplo, en el capítulo anterior hemos definido una estructura diferencial en S^n tomando como cartas las proyecciones cartesianas en \mathbb{R}^n . También podríamos haber considerado las proyecciones estereográficas, o muchas otras aplicaciones. Ahora sabemos que todas ellas dan lugar a la misma estructura diferencial.

La segunda consecuencia es la relación entre subvariedades e inmersiones regulares:

Teorema 2.18 *Una aplicación $f : V \rightarrow W$ entre variedades diferenciales es una inmersión regular si y sólo si es un difeomorfismo entre V y una subvariedad de W .*

DEMOSTRACIÓN: Si f es una inmersión regular, en particular es un homeomorfismo entre V y $V' = f[V]$. A través de dicho homeomorfismo podemos definir una estructura de variedad diferencial en V' que lo convierta en un difeomorfismo (tomando como cartas las composiciones con f^{-1} de las cartas de V). La expresión para la inclusión $i : V' \rightarrow W$ como composición de $f^{-1} : V' \rightarrow V$ con $f : V \rightarrow W$ muestra que es una inmersión, luego V' es una subvariedad regular.

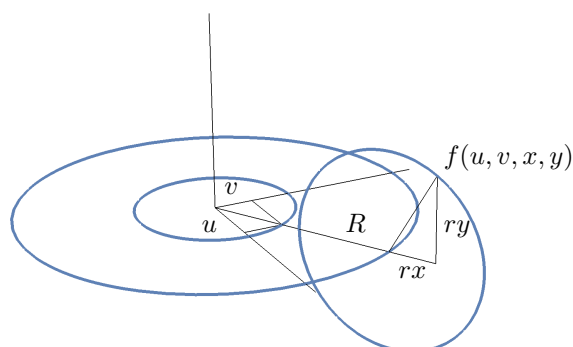
Recíprocamente, Si V' es una subvariedad de W y $f : V \rightarrow V'$ es un difeomorfismo, entonces, componiendo con la inclusión vemos que $f : V \rightarrow W$ es diferenciable de rango máximo, luego es una inmersión regular. ■

Ejemplo: El toro Definimos el *toro sólido* como $TS = S^1 \times \bar{B}^2$, que es el producto de una variedad diferencial sin frontera por otra con frontera, luego es una variedad diferencial con frontera, en este caso compacta y tridimensional, y su frontera es el *toro* $T = S^1 \times S^1$, que es una variedad diferencial sin frontera compacta y bidimensional.

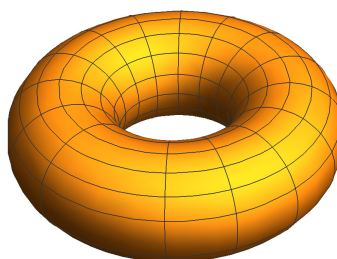
Como las inclusiones $i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $i : \bar{B}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ son inmersiones regulares, es fácil ver que lo mismo le sucede a la inclusión $i : TS \rightarrow \mathbb{R}^4$. Sin embargo, podemos definir también una inmersión regular $f : TS \rightarrow \mathbb{R}^3$. Para ello fijamos dos números reales $0 < r < R$ y definimos f mediante

$$f(u, v, x, y) = ((R + rx)u, (R + rx)v, ry).$$

La figura siguiente muestra las circunferencias de centro en $(0, 0, 0)$ y radios 1 y R respectivamente. El punto $(Ru, Rv, 0)$ está en la segunda.



Para calcular $f(u, v, x, y)$, multiplicamos el punto $(u, v, 0)$ por $R + rx$, con lo que pasamos a un punto de la circunferencia de radio $R + rx$, y como tercera coordenada tomamos ry . De este modo, cuando (x, y) varía en \bar{B}^2 , con un $(u, v) \in S^1$ fijo, recorremos todo el círculo de radio r que aparece en vertical en la figura. Cuando varía (u, v) , este círculo recorre un tubo, que es precisamente la imagen de TS .



Teniendo en cuenta que hemos tomado $r < R$, es fácil ver que f es inyectiva y, como es continua y TS es compacto, es un homeomorfismo en su imagen.

Si consideramos, por ejemplo, un punto con $v \neq 0$, de modo que la función u sirve como carta de S^1 (y la identidad como carta de \bar{B}^2), es fácil ver que el determinante jacobiano de f es $(R + rx)r^2/v \neq 0$, e igualmente se razona para puntos con $u \neq 0$, con lo que podemos concluir que f es una inmersión regular.

Así pues, su imagen (el toro “geométrico” de radios R y r) es una subvariedad de \mathbb{R}^3 , cuya frontera es la imagen de la frontera del toro “abstracto”, es decir, la superficie del tubo. ■

Ejercicio: Construir inmersiones regulares en \mathbb{R}^3 del cilindro sólido $\mathbb{R} \times \bar{B}^2$ y, en particular, de su frontera $\mathbb{R} \times S^1$.

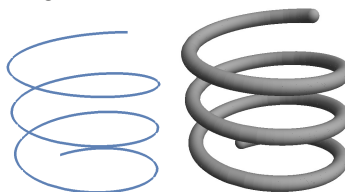
Ejemplo La aplicación $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$ considerada en el ejemplo 4) de la página 26 es una inmersión regular, luego si llamamos $E = f[\mathbb{P}^2(\mathbb{R})]$, tenemos que E es una subvariedad de \mathbb{R}^4 difeomorfa a $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. ■

Subvariedades del fibrado de tangentes Si V es una variedad diferencial, las aplicaciones $i : V \rightarrow TV$ e $i_p : T_p(V) \rightarrow TV$ definidas al final de la sección anterior son inmersiones regulares, pues hemos calculado sus lecturas respecto de cartas adecuadas y es claro que son inyectivas. También hemos visto que la primera es un homeomorfismo en la imagen y, en cuanto a la segunda, si llamamos y a la composición $TU \xrightarrow{\tilde{x}} x[U] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, tenemos que $i_p \circ y$ es el isomorfismo $\alpha(v) = (dx_1|_p(v), \dots, dx_n|_p(v))$. De aquí se sigue que la aplicación $i_p^{-1} = y|_{i_p[T_p(V)]} \circ \alpha^{-1}$ es continua, luego i_p es un homeomorfismo en la imagen.

Así pues, podemos identificar a la variedad V y los espacios $T_p(V)$ con subvariedades del fibrado de tangentes TV . ■

Entornos tubulares Como aplicación de los resultados que hemos obtenido hasta ahora vamos a demostrar la existencia de entornos tubulares de subvariedades compactas de \mathbb{R}^m . La idea subyacente es que si $V \subset \mathbb{R}^n$ es una subvariedad, un entorno tubular de V de radio $\epsilon > 0$ es la unión de todas las bolas abiertas de radio ϵ y centro en un punto de V . Cuando V es una curva, sus entornos tubulares tienen ciertamente el aspecto de un tubo, como en el caso que muestra la figura, pero en general no es así. Por ejemplo, un entorno tubular de una esfera es simplemente una esfera “engordada”.

Lo que vamos a probar es que si V es compacta sin frontera y el radio ϵ es suficientemente pequeño, el entorno tubular es una variedad diferencial con una estructura muy concreta. Conviene dar una definición de entorno tubular distinta de la que acabamos de dar, pero equivalente en el caso de las subvariedades compactas sin frontera.



Definición 2.19 Sea $V \subset \mathbb{R}^m$ una subvariedad diferencial sin frontera de dimensión n . Definimos

$$N(V) = \{(p, v) \in V \times \mathbb{R}^m \mid v \perp T_p(V)\}.$$

Llamaremos $\pi : N(V) \rightarrow V$ a la proyección $\pi(p, v) = p$.

Naturalmente, aquí hay que entender que estamos considerando la identificación canónica $T_p(V) \subset \mathbb{R}^m$, lo que nos permite hablar de vectores de \mathbb{R}^m ortogonales a los de $T_p(V)$.

Por el teorema del rango, para cada punto $p \in V$ existen cartas $y : U_0 \rightarrow \tilde{U}_0$ en V y $z : U \rightarrow \tilde{U}$ en \mathbb{R}^m alrededor de p tales que $U_0 = V \cap U_0$ y de modo que la lectura de la inclusión es $(y^{-1} \circ z)(x) = (0, x)$. Llamemos $z_0 : U \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$ a la composición de z con la proyección en las $m - n$ primeras componentes de \mathbb{R}^m . Sea $Y : \tilde{U}_0 \rightarrow U_0$ la inversa de y . Así $Y \circ z_0 = 0$, luego, para cada $x \in \tilde{U}_0$, se cumple que $J(Y)(y) \cdot J(z_0)(Y(y)) = 0$. Equivalentemente, para cada $q \in U_0$ se cumple que

$$J(Y)(y(q)) \cdot J(z_0)(q) = 0.$$

Pero las filas de $J(Y)(y(q))$ son los vectores $\partial Y / \partial y_i|_{y(q)}$, que, según 2.12, forman una base de $T_q(V)$, luego las columnas de $J(z_0)(q)$, es decir, los vectores $\nabla z_i(q)$, para $i = 1, \dots, m - n$, son una base del espacio ortonormal $T_q(V)^\perp \subset \mathbb{R}^m$ (donde tenemos en cuenta que dichas columnas son linealmente independientes, pues forman parte de la matriz jacobiana de z). Esto nos permite definir

$$f : U_0 \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow U_0 \times \mathbb{R}^m$$

mediante

$$f(q, r) = (q, r_1 \nabla z_1(q) + \dots + r_{m-n} \nabla z_{m-n}(q)),$$

cuya lectura en las cartas y e $y \times 1$ es

$$(y, r) \mapsto (y, r_1 \nabla z_1(Y(y)) + \cdots + r_{m-n} \nabla z_{m-n}(Y(y))).$$

Esto muestra que f es diferenciable. Por otra parte, podemos definir

$$g : U_0 \times \mathbb{R}^m \longrightarrow U_0 \times \mathbb{R}^{m-n}$$

mediante

$$g(q, v) = (q, \pi_0(v \cdot (J(z)^t(q))^{-1})),$$

donde π_0 es la proyección en las $m-n$ primeras componentes. Se trata también de una aplicación diferenciable y resulta que $f \circ g = 1$.

En efecto, si $r \in \mathbb{R}^m$

$$r_1 \nabla z_1(q) + \cdots + r_m \nabla z_m(q) = r \cdot (Jz)^t(q),$$

luego si $r \in \mathbb{R}^{m-n}$ y $f(q, r) = (q, v)$, tenemos que

$$v = r_1 \nabla z_1(q) + \cdots + r_{m-n} \nabla z_{m-n}(q) = (r, 0) \cdot (Jz)^t(q),$$

luego

$$g(f(q, r)) = g(q, v) = (q, \pi_0(v \cdot (Jz)^t(q))^{-1}) = (q, \pi_0(r, 0)) = (q, r).$$

Por lo tanto $df_{(q,r)} \circ dg_{f(q,r)} = 1$, luego $df_{(q,r)}$ es inyectiva, luego f es una inmersión. Más aún, es claro que $f[U_0 \times V] = \pi^{-1}[U_0] \subset N(V)$ y se trata de un homeomorfismo en su imagen, pues su inversa es $g|_{\pi^{-1}[U_0]}$, luego es continua. Así pues, f es una inmersión regular, luego su imagen $\pi^{-1}[U_0]$ es una subvariedad diferencial de $V \times \mathbb{R}^m$ de dimensión m . Como los abiertos $\pi^{-1}[U_0]$ cubren $N(V)$, concluimos que $N(V)$ es una subvariedad diferencial de $V \times \mathbb{R}^m$, y hemos probado que todo punto $p \in N(V)$ tiene un entorno U_0 tal que existe un difeomorfismo que hace conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} U_0 \times \mathbb{R}^{m-n} & \xrightarrow{f} & \pi^{-1}[U_0] \\ & \searrow \pi & \downarrow \pi \\ & & U_0 \end{array}$$

Definimos $\theta : N(V) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mediante $\theta(q, v) = q + v$ y, para cada $\epsilon > 0$, sea

$$N(V, \epsilon) = \{(p, v) \in N(V) \mid \|v\| < \epsilon\}.$$

Si V es compacta, definimos además el abierto

$$V_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(x, V) < \epsilon\}.$$

Teorema 2.20 (del entorno tubular) *Si $V \subset \mathbb{R}^m$ es una subvariedad compacta sin frontera, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño se cumple que $\theta : N(V, \epsilon) \longrightarrow V_\epsilon$ es un difeomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN: Dado $p \in V$, sean U_0 y f según la discusión precedente. Vamos a calcular $d(f \circ \theta)_{(p,0)} : T_p V \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Para ello observamos que

$$d(f \circ \theta)_{(p,0)}(\partial y_i|_{(p,0)})(x^j) = \frac{\partial((Y \times 1) \circ f \circ \theta \circ x^j)}{\partial y_i} \Big|_{(y_0,0)},$$

pero para derivar respecto de y_i podemos sustituir antes las últimas coordenadas nulas, y resulta que $\theta(f(\phi_0^{-1}(y), 0)) = \theta(Y(y), 0) = Y(y)$, luego

$$d(f \circ \theta)_{(p,0)}(\partial y_i|_{(p,0)})(x^j) = \frac{\partial Y^j}{\partial y_i} \Big|_{(y_0,0)},$$

luego los vectores $d(f \circ \theta)_{(p,0)}(\partial y_i|_{(p,0)})$ son la base de $T_p(V)$ asociada a parametrización local Y de V .

Por otra parte,

$$d(f \circ \theta)_{(p,0)}(\partial r_i|_{(p,0)})(x^j) = \frac{\partial((Y \times 1) \circ f \circ \theta \circ x^j)}{\partial r_i} \Big|_{(y_0,0)},$$

y ahora $x^j(\theta(f(p, r))) = x^j(p + r_1 \nabla z_1(p) + \dots + r_{m-n} \nabla z_{m-n}(p))$, luego

$$d(f \circ \theta)_{(p,0)}(\partial r_i|_{(p,0)})(x^j) = x^j(\nabla z_i(p)),$$

luego $d(f \circ \theta)_{(p,0)}(\partial r_i|_{(p,0)}) = \nabla z_i(p)$, y estos vectores forman una base del espacio $T_p(V)^\perp$.

Así pues, $d(f \circ \theta)_{(p,0)}$ transforma una base en una base, luego es un isomorfismo y, como $f(p, 0) = (p, 0)$, lo mismo vale para $d\theta_{(p,0)}$. Esto equivale a que el determinante jacobiano de θ respecto de una carta no se anula en $(p, 0)$, luego tampoco lo hace en un entorno de $(p, 0)$, luego existe un entorno W_p de p en V y un $\epsilon_p > 0$ tales que $d\theta_{(q,v)}$ es un isomorfismo para todo $q \in W_p$ y todo $v \in \mathbb{R}^{m-n}$ tal que $\|v\| < \epsilon_p$.

Por compacidad podemos cubrir V con un número finito de abiertos W_p y tomar el mínimo $\epsilon > 0$ de los ϵ_p correspondientes, y así tenemos que $d\theta_{(p,v)}$ es un isomorfismo para todo $(p, v) \in N(V, \epsilon)$.

Veamos ahora que, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, la restricción $\theta : N(V, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ es inyectiva.

En caso contrario existirían dos sucesiones $(x_i, v_i) \neq (y_i, w_i)$ en $N(V)$ tales que $\|v_i\|$ y $\|w_i\|$ tienden a 0 y $\theta(x_i, v_i) = \theta(y_i, w_i)$. Por la compacidad de V , pasando a una subsucesión, podemos suponer que las sucesiones $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ convergen a puntos $x, y \in V$, respectivamente. Entonces $\theta(x_i, v_i) = \theta(y_i, w_i)$ converge a $\theta(x, 0) = \theta(y, 0)$, de modo que $x = y$, pero, por el teorema de la función inversa 1.15, el hecho de que $d\theta_{(x,0)}$ sea un isomorfismo implica que θ es inyectiva en un entorno de $(x, 0)$, con lo que existe un i tal que $(x_i, v_i) = (y_i, w_i)$, lo cual es una contradicción.

Claramente $\theta[N(V, \epsilon)] \subset V_\epsilon$. Veamos que también se da la inclusión opuesta. Si $q \in \mathbb{R}^m$ cumple $d(q, V) < \epsilon$, por compacidad existe $p \in V$ tal que $d(p, q)$ toma el valor mínimo (luego $\|q-p\| < \epsilon$). Basta ver que $q-p \in T_p(V)^\perp$, pues entonces $(p, q-p) \in N(V, \epsilon)$ y $q = \theta(p, q-p) \in \theta[N(V, \epsilon)]$.

Ahora bien, sea $Y : \tilde{U} \rightarrow V$ la inversa de una carta tal que $Y(0) = p$ y sea $\sigma_i(t) = Y(0, \dots, t, \dots, 0)$, con la t en la posición i -ésima. Entonces la imagen de σ está contenida en V , luego $\|q - \sigma_i(t)\|^2$ toma su valor mínimo en $t = 0$, que es donde $\sigma_i(0) = p$. Por lo tanto, la derivada $-2(q - \sigma_i(t))\sigma'_i(t)$ se anula en $t = 0$, es decir, $(q - p)\sigma'_i(0) = 0$, pero es claro que

$$\sigma'_i(0) = \left. \frac{\partial Y_i}{\partial y_i} \right|_p,$$

luego $q - p$ es ortogonal a una base de $T_p(V)$, luego $q - p \in T_p(V)^\perp$.

Finalmente el teorema de la función inversa nos da que $\theta : N(V, \epsilon) \rightarrow V_\epsilon$ es un difeomorfismo. ■

Definición 2.21 Si $V \subset \mathbb{R}^m$ es una subvariedad compacta sin frontera de \mathbb{R}^m los abiertos de la forma V_ϵ , donde $\epsilon > 0$ cumple el teorema anterior, se llaman *entornos tubulares* de V .

Notemos que si ϵ es demasiado grande, no sólo podemos encontrarnos con que V_ϵ se corta a sí mismo aunque V no lo haga, sino que también puede ocurrir que dos bolas ortogonales a V de radio ϵ correspondientes a puntos distintos de V se corten entre sí, con lo que θ no es inyectiva.



2.3 Curvas y arcos

Las curvas, aparte de ser objetos geométricos por sí mismos, son útiles como auxiliares en el estudio de variedades diferenciales de dimensiones superiores. En principio podríamos definir una curva como una variedad diferencial de dimensión 1, pero conviene generalizar un tanto esta definición posible a través del concepto de curva parametrizada que introducimos a continuación:

Definición 2.22 Una *curva parametrizada* (diferenciable) en una variedad diferencial V es una aplicación diferenciable $\alpha : I \rightarrow V$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo no vacío (sin excluir que sea el propio \mathbb{R}).

Para cada $t_0 \in I$ definimos su *derivada* como

$$\alpha'(t_0) = d\alpha|_{t_0}(\partial_t|_{t_0}) \in T_{\alpha(t_0)}(V).$$

Si $x : U \rightarrow \tilde{U}$ es una carta de V alrededor de $\alpha(t_0)$, convendremos en representar $x(t) = x(\alpha(t))$ (siempre que el contexto permita distinguir a $x(t)$ de la carta $x(p)$).

Las coordenadas de $\alpha'(t)$ respecto de la base $\partial_{x^1}|_{\alpha(t)}, \dots, \partial_{x^n}|_{\alpha(t)}$ de $T_{\alpha(t)}(V)$ son $\alpha'(t)(x^i) = (\alpha \circ x^i)'(t)$, de modo que:

$$\alpha'(t) = \sum_i \frac{dx^i}{dt} \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\alpha(t)}.$$

Por lo tanto, considerando la derivada como aplicación $\alpha' : I \rightarrow TV$, su lectura respecto de la carta \tilde{x} es $t \mapsto (x(t), x'(t))$, lo que muestra que α' es diferenciable.

En el caso en que V es una subvariedad de \mathbb{R}^m esta derivada se identifica con la usual:

$$\theta_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = (\alpha'(t)(x^1), \dots, \alpha'(t)(x^m)) = ((x^1)'(t), \dots, (x^m)'(t)).$$

A menudo conviene pensar en α como la trayectoria de una partícula puntual, y entonces $\alpha'(t)$ es su velocidad en el instante t .

Una curva α es *regular* si su derivada no se anula en ningún punto.

Un *arco parametrizado* (diferenciable) es una curva definida en un intervalo cerrado, es decir, $\alpha : [a, b] \rightarrow V$. Los puntos $\alpha(a)$ y $\alpha(b)$ se llaman *extremos* del arco.

Aunque en teoría podríamos trabajar exclusivamente con arcos diferenciables, en la práctica es mucho más cómodo permitir que la diferenciabilidad pueda fallar en un número finito de puntos:

Una aplicación $\alpha : [a, b] \rightarrow V$ es un *arco diferenciable (o regular) a trozos* si existe una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ de modo que las restricciones $\alpha_i = \alpha|_{[t_{i-1}, t_i]} : [t_{i-1}, t_i] \rightarrow V$ sean arcos diferenciables (regulares).

Si $\alpha : [a, b] \rightarrow V$ es un arco diferenciable a trozos y $t : [u, v] \rightarrow [a, b]$ es una aplicación diferenciable a trozos, entonces $t \circ \alpha$ es también un arco diferenciable a trozos. Se dice que es una *reparametrización* de α y que $t(s)$ es un *cambio de parámetro*.

Si $t(s)$ es derivable en s y $\alpha(t)$ es derivable en $t(s)$, se cumple que

$$\begin{aligned} (t \circ \alpha)'(s) &= d(t \circ \alpha)|_s(\partial_s|_s) = d\alpha|_{t(s)}(dt|_s(\partial_s|_s)) \\ &= d\alpha|_{t(s)}(t'(s)\partial_t|_t) = t'(s)\alpha'(t(s)). \end{aligned}$$

Diremos que $t(s)$ es un *cambio regular de parámetro* si su derivada no se anula en ningún punto. En tal caso, el cálculo precedente muestra que si α es regular a trozos, $t \circ \alpha$ también lo es.

Así, un arco y cualquiera de sus reparametrizaciones corresponden a una misma trayectoria recorrida con velocidades distintas, y tal vez en sentido opuesto, pues una reparametrización decreciente entre dos intervalos invierte el sentido en que se recorre un arco.

En particular, dado un arco $\alpha : [a, b] \rightarrow V$, podemos definir el *arco opuesto* $-\alpha : [a, b] \rightarrow V$ como la reparametrización de α dada por

$$(-\alpha)(t) = \alpha(a + b - t),$$

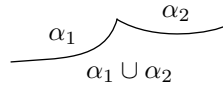
que cumple $(-\alpha)(a) = \alpha(b)$, $(-\alpha)(b) = \alpha(a)$.

Por otra parte, si $\alpha_1 : [a, b] \rightarrow V$ y $\alpha_2 : [c, d] \rightarrow V$ son dos arcos diferenciables (o regulares) a trozos tales que $\alpha_1(b) = \alpha_2(c)$, podemos definir su *concatenación* como el arco $\alpha_1 \cup \alpha_2 : [a, b + d - c] \rightarrow V$ dado por

$$(\alpha_1 \cup \alpha_2)(t) = \begin{cases} \alpha_1(t) & \text{si } a \leq t \leq b, \\ \alpha_2(c - b + t) & \text{si } b \leq t \leq b + d - c. \end{cases}$$

Es claro que la imagen de $\alpha_1 \cup \alpha_2$ es la unión de las imágenes, así como que $(\alpha_1 \cup \alpha_2)(a) = \alpha_1(a)$, $(\alpha_1 \cup \alpha_2)(b + d - c) = \alpha_2(d)$.

Notemos que aunque α_1 y α_2 sean diferenciables (o regulares), su concatenación $\alpha_1 \cup \alpha_2$ no tiene por qué serlo en el punto de unión, y ésta es la razón por la que estamos considerando arcos diferenciables (o regulares) a trozos: para poder concatenar arcos fácilmente, sin tener que “limar” los posibles picos en los puntos de unión.



Una de las razones por las que los arcos son útiles es que permiten conectar puntos cualesquiera de una variedad conexa:

Teorema 2.23 *Si V es una variedad diferencial conexa y $p, q \in V$, existe un arco parametrizado regular a trozos $\alpha : [a, b] \rightarrow V$ tal que $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos en primer lugar que todo punto $p \in V$ tiene un entorno en el que dos puntos cualesquiera pueden unirse por un arco regular a trozos. Basta tomar una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ alrededor de p tal que \tilde{U} sea convexo (por ejemplo, una carta cúbica o esférica). Así, si $p, q \in U$ son puntos distintos, podemos unirlos por el arco $\alpha(t) = x^{-1}((1-t)x(p) + tx(q))$. Si $p = q$ consideramos otro punto $r \in U$ y concatenamos un arco que una p con r con otro que una r con $p = q$.

Ahora fijamos $p \in V$ y llamamos U_p al conjunto de todos los puntos $q \in V$ que cumplen el enunciado. Vamos a ver que $U_p \neq \emptyset$ es abierto y cerrado en V , con lo que, por conexión, será $U_p = V$ y el teorema quedará probado.

En primer lugar, cualquier entorno de p en las condiciones precedentes está contenido en U_p , luego no es vacío.

Si $q \in U_p$, tomamos un entorno U_0 cuyos puntos puedan unirse por arcos regulares a trozos. Entonces $U_0 \subset U_p$, pues si $r \in U_0$ podemos concatenar un arco que una p con q con otro que una q con r . Esto prueba que U_p es abierto.

Por otro lado, si $q \in V \setminus U_p$ y U_0 es un entorno cuyos puntos puedan unirse por arcos regulares a trozos, entonces $U_0 \subset V \setminus U_p$, pues si existiera $r \in U_0 \cap U_p$, podríamos concatenar un arco que uniera p con r con otro que uniera r con q , y entonces $q \in U_p$, contradicción. Esto prueba que U_p es cerrado. ■

Nos van a interesar casi exclusivamente las variedades diferenciales conexas, pero no hemos impuesto la conexión en la definición de variedad diferencial porque, por ejemplo, la frontera de una variedad diferencial conexa no tiene por qué ser conexa. No obstante, el hecho de que las variedades diferenciales sean localmente conexas implica claramente que sus componentes conexas son abiertas (y cerradas), luego cada una de ellas es una subvariedad diferencial.

2.4 Subvariedades definidas por ecuaciones

Probamos ahora que los sistemas de ecuaciones determinados por funciones diferenciables casi siempre definen subvariedades. Para ello conviene introducir un nuevo concepto:

Definición 2.24 Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación diferenciable entre variedades. Un punto $p \in V$ es un *punto crítico* de f si $df|_p : T_p V \rightarrow T_{f(p)} W$ no es suprayectiva. Un punto $q \in W$ es un *valor crítico* de f si es la imagen de un punto crítico de f . En caso contrario se dice que q es un *valor regular* (y aquí incluimos el caso en que q no tiene antiimágenes en V).

El interés de esta definición se pone de manifiesto en el teorema siguiente:

Teorema 2.25 Sea $f : V \rightarrow R$ una aplicación diferenciable entre variedades sin frontera de dimensiones m y n respectivamente, sea $r \in R$ un valor regular de f tal que $W = f^{-1}[r] \neq \emptyset$. Entonces W es una subvariedad de V de dimensión $m - n$.

DEMOSTRACIÓN: Para cada punto $p \in W$ tenemos que $df|_p$ es suprayectiva, es decir, que tiene rango n . Por la continuidad de los determinantes de las submatrices de la matriz jacobiana concluimos que lo mismo vale en un entorno de p , y el teorema del rango 1.14 nos da una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ de V alrededor de p y otra $y : U' \rightarrow \tilde{U}'$ de R alrededor de r de modo que la lectura de f en estas cartas es la proyección en las n primeras componentes. En particular, $U \cap W$ está formado por los puntos de U cuyas n primeras coordenadas valen $r_0 = y(r)$.

Sea $\tilde{x} : U \cap W \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{R}^{m-n}$ la composición de la restricción de x con la proyección en las $m - n$ últimas coordenadas. (Notemos que \tilde{U} es abierto porque las proyecciones son abiertas.) Se trata de un homeomorfismo, porque claramente es una aplicación continua y su inversa es $\tilde{x}^{-1}(u) = x^{-1}(r_0, u)$, que también es continua.

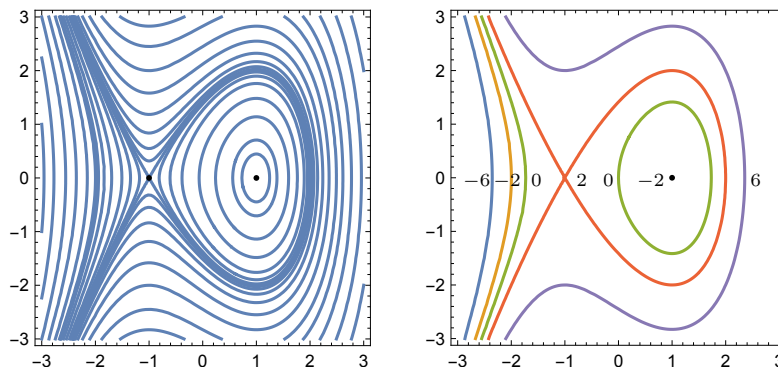
Así pues, \tilde{x} es una carta de W , y es claro que estas cartas forman un atlas de W , luego la dotan de estructura de variedad diferencial. De hecho, es una subvariedad de V , pues la lectura de la inclusión $i : W \rightarrow V$ respecto de unas cartas \tilde{x} y x es $u \mapsto (r_0, u)$, que claramente tiene rango $m - n$. ■

Ejemplos 1) Ahora es inmediato que S^n , vista como el conjunto de puntos que cumplen la ecuación $x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1$, es una subvariedad de \mathbb{R}^{n+1} . Basta observar que 1 es un valor regular de la aplicación $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2$.

2) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^3 - 3x + y^2$. Es fácil ver que sus puntos críticos son $(\pm 1, 0)$, por lo que sus valores críticos son ± 2 . La figura de la izquierda muestra diversos conjuntos $f^{-1}[r]$, para distintos valores de r . La de la derecha destaca los correspondientes a $r = -6, -2, 0, 2, 6$.

Vemos que las variedades correspondientes a $r = \pm 6$ son curvas difeomorfas a \mathbb{R} , mientras que la correspondiente a $r = 0$ tiene dos componentes conexas, una difeomorfa a \mathbb{R} y otra difeomorfa a S^1 . El conjunto correspondiente al valor

crítico $r = 2$ no es una subvariedad de \mathbb{R}^2 porque alrededor del punto $(-1, 0)$ no es homeomorfa a un abierto de \mathbb{R} (es una curva con una autointersección). Por último, el conjunto correspondiente al valor crítico $r = -2$ consta de una variedad difeomorfa a \mathbb{R} más un punto aislado, el $(1, 0)$, la presencia del cual hace que $f^{-1}[-2]$ no sea una subvariedad de \mathbb{R} .



Ahora bien, si aplicamos el teorema anterior a la restricción de f al abierto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$, entonces -2 pasa a ser un valor regular, y $f^{-1}[-2]$ es la subvariedad que resulta de eliminar el punto $(1, 0)$ cuando consideramos f definida en todo \mathbb{R}^2 . ■

Hasta ahora hemos probado que a veces los sistemas de ecuaciones definen variedades, pero antes hemos afirmado que “casi siempre” es así. Este matiz, es decir, el hecho de que los valores singulares de una aplicación diferenciable son siempre “pocos”, como muestra el ejemplo precedente, es lo que afirma el teorema con el que concluimos esta sección.

Concretamente, el teorema de Sard afirma que el conjunto de valores críticos de cualquier aplicación diferenciable tiene medida nula, pero para dar sentido a esto hemos de generalizar el concepto de “conjunto nulo” a variedades arbitrarias.

Definición 2.26 Un subconjunto A de una variedad diferencial V es *nulo* si para toda carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ de V se cumple que $x[U \cap A]$ es nulo para la medida de Lebesgue.

El teorema [An 4.39] afirma que la imagen de un conjunto nulo por una aplicación diferenciable entre abiertos de \mathbb{R}^N es un conjunto nulo, de donde se sigue claramente su generalización a variedades:

Teorema 2.27 Si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación diferenciable entre variedades de la misma dimensión, entonces las imágenes por f de los subconjuntos nulos de V son nulos en W .

De aquí se sigue que la definición de conjunto nulo puede debilitarse: es suficiente con que $x[U \cap A]$ sea nulo cuando $x : U \rightarrow \tilde{U}$ varía en un atlas numerable \mathcal{A} de V . En efecto, podemos expresar

$$A = \bigcup_{x \in \mathcal{A}} (A \cap U),$$

de modo que si $x' : U' \rightarrow \tilde{U}'$ es cualquier carta de V , tenemos que

$$x'[A \cap U'] = \bigcup_{x \in \mathcal{A}} x'[A \cap U \cap U'],$$

y basta probar que cada conjunto $x'[A \cap U \cap U']$ es nulo. Ahora bien, este conjunto es la imagen del conjunto nulo $x[A \cap U \cap U']$ por el difeomorfismo $x^{-1} \circ x'$.

Las propiedades de la medida de Lebesgue implican inmediatamente que la unión numerable de conjuntos nulos es nula, que todo subconjunto de un conjunto nulo es nulo y que todo conjunto nulo tiene interior vacío.

Conviene destacar una consecuencia: si $C \subset V$ tiene la propiedad de que para todo $p \in C$ existe un entorno U en V tal que $C \cap U$ es nulo, entonces C es nulo. En efecto, como V tiene una base numerable es posible cubrir C por una cantidad numerable de conjuntos cuya intersección con C es nula, luego C es nulo.

Teorema 2.28 *Si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación diferenciable entre variedades V y W de dimensiones $n < m$ respectivamente, entonces $f[V]$ es nulo en W .*

DEMOSTRACIÓN: Consideramos la aplicación

$$g : V \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow W$$

que resulta de componer f con la proyección en el primer factor. Sus lecturas respecto de cartas del producto son aplicaciones diferenciables $\tilde{U} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \tilde{U}'$, para ciertos abiertos $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ y $\tilde{U}' \subset \mathbb{R}^m$, cuyas imágenes son también las imágenes de los conjuntos nulos $\tilde{U} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \times \{0\}$. Por lo tanto, todas las lecturas tienen imagen nula, lo cual implica que la imagen de g (que es la misma que la de f) es nula. ■

Ahora ya podemos enunciar el teorema que perseguimos:

Teorema 2.29 (Teorema de Sard) *Si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación diferenciable, entonces el conjunto de valores críticos de f es nulo.*

DEMOSTRACIÓN: Si $A \subset W$ es el conjunto de valores críticos de f y tomamos una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ de W , es claro que $x[A \cap U]$ es el conjunto de valores críticos de $f|_{f^{-1}[U]} \circ x$, y hemos de probar que este conjunto es nulo, luego podemos suponer que $W = \mathbb{R}^k$.

Razonaremos por inducción sobre la dimensión n de V . El teorema es obviamente cierto si $n = 0$.

Llamemos $C \subset V$ al conjunto de puntos críticos de f . Es fácil ver que es cerrado en V (si un punto tiene diferencial suprayectiva, la matriz de ésta en una carta dada tendrá un menor de orden k no nulo, luego lo mismo sucederá en un entorno). Llamemos $D \subset C$ al conjunto de puntos de V donde la diferencial es nula. También es claro que D es cerrado. Hemos de probar que $f[C]$ es nulo, para lo cual probaremos que $f[D]$ y $f[C \setminus D]$ son ambos nulos.

Sea f_1 la primera función coordenada de f . Si un punto $p \in V$ cumple $df|_p = 0$, entonces también $df_1|_p = 0$, luego si E es el conjunto de puntos críticos de f_1 (que en este caso coincide con el conjunto de puntos donde df_1 se anula), tenemos que $f[D] \subset f_1[E] \times \mathbb{R}^{k-1}$. Para probar que $f[D]$ es nulo basta ver, pues, que $f_1[E]$ es nulo, es decir, podemos suponer que $f : V \rightarrow \mathbb{R}$. Expresando V como unión numerable de abiertos coordenados, podemos suponer también que V es un abierto con frontera en \mathbb{R}^n .

Llamemos D_i al conjunto de los puntos $p \in V$ tales que todas las derivadas parciales de f de orden $\leq i$ se anulan en p . Los conjuntos D_i son cerrados y satisfacen las inclusiones $D = D_1 \supset D_2 \supset \dots \supset D_n$.

Veamos que $f[D_n]$ es nulo. Para ello basta ver que $f[D_n \cap Q] = 0$ para todo cubo cerrado $Q \subset V$. Sea s la longitud de los lados de Q . Para cada natural m podemos dividir Q en m^n cubos de lado s/m y diámetro $sm^{-1}\sqrt{n}$. Tomemos $\bar{x} \in Q \cap D_n$ y sea Q' uno de los cubos pequeños que contienen a \bar{x} . Por el teorema de Taylor para funciones de n variables [VC 2.9], existe una constante B tal que si $x \in Q'$ entonces

$$|f(x) - f(\bar{x})| \leq B\|x - \bar{x}\|^{n+1} \leq B \left(\frac{s\sqrt{n}}{m} \right)^{n+1}.$$

Esto significa que $f[Q']$ está contenido en un intervalo de longitud A/m^{n+1} , donde A es una constante independiente de m . Entonces $f[Q \cap D_n]$ está contenido en una unión de intervalos cuya medida (de la unión) es menor o igual que A/m . Esto prueba que $f[Q \cap D_n]$ es un conjunto nulo.

Ahora probamos que cada $f[D_i \setminus D_{i+1}]$ es nulo, lo que implica que $f[D]$ es nulo, tal y como queremos probar.

Como D_{i+1} es cerrado en V , podemos cambiar V por $V \setminus D_{i+1}$ y suponer que $D_{i+1} = \emptyset$. Así, cada $\bar{x} \in D_i$ anula a todas las derivadas de f de orden $\leq i$ pero no a una derivada de orden $i+1$. Así pues, f tiene una derivada parcial g de orden i cuya diferencial es no nula en \bar{x} . Sea $U_{\bar{x}}$ un entorno de \bar{x} donde dg no se anula. Basta probar que $f[U_{\bar{x}}]$ es nulo, pues D_i puede cubrirse por una cantidad numerable de abiertos de este tipo. Equivalentemente, podemos suponer que dg no se anula en V .

De este modo, $D_i \subset g^{-1}[0]$ y 0 es un valor regular de g . El teorema 2.25 nos da que $V' = g^{-1}[0]$ es una subvariedad de \mathbb{R}^n de dimensión³ $n-1$ y D_i está contenido en el conjunto de puntos críticos de $f|_{V'}$. Por hipótesis de inducción $f[D_i] = f|_{V'}[D_i]$ es nulo.

Ahora nos falta demostrar que $f[C \setminus D]$ es nulo. Al igual que antes, podemos cambiar V por $V \setminus D$ y suponer que $D = \emptyset$, es decir, que df no se anula en ningún punto. Basta probar que todo punto $x \in C$ tiene un entorno con imagen nula. Concretamente, puesto que $df_x \neq 0$, existe una coordenada de f , digamos f_k , cuya diferencial en x no es nula. Sea U_x un entorno de x donde df_k no se anule, es decir, donde todos los puntos son regulares para f_k . Basta probar que $f[U_x]$ es nulo o, equivalentemente, podemos suponer que $U_x = V$.

³Si $n = 1$ la conclusión es simplemente que V' es un conjunto numerable.

Para cada $t \in \mathbb{R}$ en la imagen de f_k , tenemos que $V_t = f_k^{-1}[t]$ es una subvariedad de V de dimensión $n-1$. Sea $f_t = f|_{V_t} : V_t \rightarrow \mathbb{R}^{k-1} \times \{t\}$. Es claro que la diferencial de f_t en cada punto de V_t está formada por las $k-1$ primeras componentes de la diferencial de f en el punto y, como la última no se anula, un punto de V_t es crítico para f si y sólo si lo es para f_t , es decir, $C_{f_t} = C \cap V_t$. Por hipótesis de inducción tenemos que $f_t[C \cap V_t] = f[C] \cap (\mathbb{R}^{k-1} \times \{t\})$ es nulo. El teorema de Fubini implica entonces que $f[C]$ es nulo. ■

Como aplicación demostramos que el teorema de cambio de variable [An 6.35] es válido para aplicaciones diferenciables inyectivas, aunque no sean difeomorfismos:

Teorema 2.30 (Teorema de cambio de variable) *Sea $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable e inyectiva en un abierto de \mathbb{R}^n y sea $f : g[U] \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación integrable Lebesgue. Entonces*

$$\int_{g[U]} f \, dm = \int_U (g \circ f) |\Delta_g| \, dm,$$

(donde Δ_g es el determinante jacobiano de g).

DEMOSTRACIÓN: Sea $C = \{x \in U \mid \Delta_g = 0\}$ el conjunto de los puntos críticos de g , que claramente es un cerrado en U , luego $U_0 = U \setminus C$ es abierto en \mathbb{R}^n y $g|_{U_0} : U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable, inyectiva y su determinante jacobiano es no nulo en todos los puntos. Por el teorema de la función inversa, [An 5.42], tenemos que $V_0 = g[U_0] = g[U] \setminus g[C]$ es abierto en \mathbb{R}^n y que $g|_{U_0} : U_0 \rightarrow V_0$ es un difeomorfismo. El teorema de Sard nos da que $g[C]$ es un conjunto nulo, luego en particular $g[U] = V_0 \cup g[C]$ es un conjunto medible Lebesgue. Así pues:

$$\int_{g[U]} f \, dm = \int_{V_0} f \, dm = \int_{U_0} (g \circ f) |\Delta_g| \, dm = \int_U (g \circ f) |\Delta_g| \, dm.$$

La primera igualdad se debe a que $g[U] \setminus V_0$ es un conjunto nulo, la segunda al teorema de cambio de variables [An 6.35], y la última a que Δ_g es nulo en los puntos de $C = U \setminus U_0$. ■

Terminamos esta sección recordando el teorema 1.26, en virtud del cual todo subconjunto cerrado en una variedad diferencial V puede expresarse como $f^{-1}[r]$, para cierta función diferenciable $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, por lo que los conjuntos de la forma $f^{-1}[r]$ pueden distar mucho de ser subvariedades diferenciales en el caso en que r no es un valor regular.

2.5 El teorema de Whitney

Hemos demostrado que las variedades diferenciables en el sentido de [An 7.1] coinciden con las subvariedades de los espacios \mathbb{R}^m . Por otra parte, hemos definido $P^2(\mathbb{R})$ como una variedad abstracta, sin considerarla sumergida en ningún

espacio \mathbb{R}^m , y hemos demostrado que en realidad es difeomorfa a una subvariedad de \mathbb{R}^4 . Ahora vamos a probar que esto no es casual, sino que, de hecho, toda variedad diferencial es difeomorfa a una subvariedad de un espacio \mathbb{R}^m . Esto nos permite afirmar que la definición abstracta de variedad no es realmente más general, sino equivalente a la definición clásica. Para probarlo necesitamos algunos resultados previos.

Consideramos el conjunto $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ de las matrices de dimensión $m \times n$ en \mathbb{R} como espacio normado con la norma dada por $\|(m_{ij})\| = \max\{|m_{ij}|\}$. Claramente, cualquier isomorfismo de espacios vectoriales entre $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ y \mathbb{R}^{mn} es un homeomorfismo, y podemos tomarlo como única carta de un atlas en $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$, que lo dota de estructura de variedad diferencial.

Teorema 2.31 *Si $k \leq m, n$, el conjunto $\text{Mat}_{m \times n}^k(\mathbb{R})$ de las matrices de rango k es una subvariedad de $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ de dimensión $k(m+n-k)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $D_i : \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ las aplicaciones que a cada matriz M le hacen corresponder los determinantes de sus submatrices cuadradas de dimensión k (cada índice i corresponde a una submatriz posible). Claramente se trata de aplicaciones diferenciables, en particular continuas, luego el conjunto de matrices para las que un $D_i \neq 0$ es abierto en $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$, al igual que su unión. En particular es una subvariedad de $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Dicha unión es el conjunto de todas las matrices de rango $\geq k$, luego si $k = \min\{m, n\}$ el teorema está probado. Supongamos que $k < \min\{m, n\}$ y tomemos una matriz $M_0 \in \text{Mat}_{m \times n}^k(\mathbb{R})$. Existe un i tal que $D_i(M_0) \neq 0$. Por simplicidad supondremos que se trata del determinante de las primeras k filas y columnas de M_0 .

Sea $V_i = \{M \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R}) \mid D_i(M) \neq 0\}$, que es un abierto en $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$, luego una subvariedad. Para que una matriz $M \in V$ esté en $\text{Mat}_{m \times n}^k(\mathbb{R})$ es necesario y suficiente que anule a los determinantes $D_{uv}(M)$ que resultan de completar la submatriz de las k primeras filas y columnas de M con la fila $k+u$ y la columna $k+v$ de M , para $u = 1, \dots, m-k$, $v = 1, \dots, n-k$.

Sea $f : V_i \rightarrow \mathbb{R}^{(m-k)(n-k)}$ la aplicación dada por

$$f(M) = (D_{1,1}(M), \dots, D_{m-k, n-k}(M)).$$

Así $V_i \cap \text{Mat}_{m \times n}^k(\mathbb{R}) = \{M \in V \mid f(M) = 0\}$. La aplicación f es esencialmente de una aplicación de un abierto de \mathbb{R}^{mn} en $\mathbb{R}^{(m-k)(n-k)}$. Su matriz jacobiana está formada por las derivadas

$$\frac{\partial D_{uv}}{\partial m_{ij}}.$$

Consideremos la submatriz cuadrada determinada por las variables m_{ij} para $i = k+1, \dots, m$, $v = k+1, \dots, n$. En la submatriz cuyo determinante es D_{uv} no aparece ninguna de estas variables salvo $m_{k+u, k+v}$, por lo que todas las derivadas son nulas excepto las que aparecen en la diagonal:

$$\frac{\partial D_{uv}}{\partial m_{k+u, k+v}} = D_1.$$

Esta igualdad se debe a que podemos desarrollar el determinante por la columna que contiene a $m_{k+u, k+v}$ y el resultado es $D_1 m_{k+u, k+v} + \dots$, donde los términos restantes no contienen la variable $m_{k+u, k+v}$, luego la derivada parcial es D_1 .

En definitiva, la matriz jacobiana de f tiene un menor no nulo de dimensión $(m-k)(n-k)$, lo que significa que su diferencial es suprayectiva en todo punto. En particular, $0 \in \mathbb{R}^{(m-k)(n-k)}$ es un valor regular, luego el teorema 2.25 nos da que $V_i \cap \text{Mat}_{m \times n}^k(\mathbb{R})$ es una subvariedad de V_i de dimensión $k(m+n-k)$.

Como los abiertos $V_i \cap \text{Mat}_{m \times n}^k(\mathbb{R})$ cubren $\text{Mat}_{m \times n}^k(\mathbb{R})$, es claro que la unión de un atlas de cada una de las subvariedades es un atlas de $\text{Mat}_{m \times n}^k(\mathbb{R})$, con el cual resulta ser una subvariedad de $\text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$. ■

Teorema 2.32 *Sea U un abierto en \mathbb{R}^n o H^n y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable, con $m \geq 2n$. Para todo $\epsilon > 0$ existe $A \in \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$ tal que $\|A\| < \epsilon$ y la aplicación $x \mapsto f(x) + xA$ es una inmersión.*

DEMOSTRACIÓN: Si $J_f(x)$ es la matriz jacobiana de f en el punto x , buscamos una matriz A tal que $J_f(x) + A$ tenga rango n en todos los puntos o, equivalentemente, tal que $A \neq B - J_f(x)$, para toda matriz B de rango menor que n .

Consideremos la aplicación $F_k : U \times \text{Mat}_{n \times m}^k(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$ dada por $F_k(x, B) = B - J_f(x)$, que claramente es diferenciable. Observemos que, para $k < n$, el dominio es una variedad de dimensión

$$n + k(m + n - k) \leq n + (n - 1)(m + 1) \leq nm - 1 < nm.$$

(Notemos que la dimensión de $\text{Mat}_{n \times m}^k(\mathbb{R})$ es $nm - (n - k)(m - k)$ y crece con k . La primera desigualdad sale de cambiar k por $n - 1$ y la segunda de que $m \geq 2n$.) El teorema 2.28 nos da entonces que F_k tiene imagen nula en $\text{Mat}_{n \times m}(\mathbb{R})$, y también lo será la unión de las imágenes de las aplicaciones F_k para $k < n$, luego en particular tiene interior vacío, luego podemos tomar una matriz A que no esté en dicha imagen con $\|A\| < \epsilon$, tal y como requiere el enunciado. ■

Teorema 2.33 *Sea $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable definida en una variedad V de dimensión $n < m$. Sea $x : U \rightarrow \tilde{U}$ una carta de V y $K \subset U$ compacto tal que $df|_p$ es inyectiva en todos los puntos $p \in K$. Entonces existe un $\eta > 0$ tal que toda $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable con $\|J_g(p)\| < \eta$ para todo $p \in K$ cumple que $d_p(f + g)$ es inyectiva para todo $p \in K$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\delta(x)$ el máximo de los valores absolutos de los determinantes de las submatrices $n \times n$ de $J_f(x)$. Tenemos que $\delta(x)$ no se anula en K y tiene que tomar un valor mínimo $\delta > 0$. La continuidad uniforme de $J_f(x)$ sobre K implica que existe $\eta > 0$ tal que si $\|J_g(p)\| < \eta$ para todo $p \in K$ entonces el máximo de los valores absolutos de los determinantes de las submatrices $n \times n$ de $J_f(p) + J_g(p)$ es $> \delta/2$ para todo $p \in K$, luego $f + g$ tiene diferencial inyectiva. ■

Teorema 2.34 *Sea $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable definida en una variedad diferencial de dimensión n con $m \geq 2n$ y sea $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua que tome únicamente valores positivos. Entonces existe una inmersión $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ tal que $\|f(p) - g(p)\| < h(p)$ para todo $p \in V$.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos un atlas numerable de V , formado por cartas $x_j : U_j \rightarrow \tilde{U}_j$, en las condiciones del teorema 1.19, es decir, de modo que los abiertos coordenados formen un cubrimiento localmente finito y los abiertos $V_j = x_j^{-1}[B_1(0)]$ formen también un cubrimiento de V .

De acuerdo con la prueba de 1.17, podemos tomar funciones $\gamma_j : V \rightarrow \mathbb{R}$ que tomen el valor 1 en V_j y se anulen fuera de $x_j^{-1}[B_2(0)]$.

Aplicamos el teorema 2.32 a $x_0^{-1} \circ f$, lo que nos da una matriz A_0 tal que la aplicación $u \mapsto (x_0^{-1} \circ f)(u) + uA_0$ es una inmersión. Llamamos $f_0 : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ a la aplicación dada por $f_0(p) = f(p) + \gamma_0(p)x_0(p)A_0$. Así, f_0 tiene diferencial inyectiva en todos los puntos de \bar{V}_0 . Como A_0 puede tomarse de norma arbitrariamente pequeña, podemos exigir que $\|f_0(p) - f(p)\| < h(p)/2$ para todo punto $p \in V$.

Ahora definimos $f_1(p) = f_0(p) + \gamma_1(p)x_1(p)A_1$, donde la matriz A_1 se toma de norma suficientemente pequeña para que cumpla el teorema 2.32 (y así f_1 tiene diferencial inyectiva en todos los puntos de \bar{V}_1 y $\|f_1(p) - f_0(p)\| < h(p)/4$), y también el teorema 2.33, de modo que también tiene diferencial inyectiva en todos los puntos de \bar{V}_0 .

De este modo obtenemos una sucesión de funciones $\{f_j\}_{j=0}^\infty$. Como el cubrimiento $\{U_j\}_{j=0}^\infty$ es localmente finito, la sucesión es finalmente constante en cada U_j , por lo que define una función diferenciable $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ que tiene diferencial inyectiva en todos los puntos de V , es decir, que es una inmersión. Además

$$\|g(p) - f(p)\| = \left\| \sum_{j=0}^n f_{j+1}(p) - f_j(p) \right\| < \sum_{j=0}^n \frac{1}{2^{j+1}} h(p) < h(p). \quad \blacksquare$$

En particular el teorema anterior prueba que si V es una variedad de dimensión n , existe una inmersión $f : V \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, no necesariamente inyectiva. El teorema siguiente prueba que existe una inmersión inyectiva en \mathbb{R}^{2n+1} :

Teorema 2.35 *Sea $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación diferenciable definida en una variedad diferencial de dimensión n con $m \geq 2n + 1$ y sea $h : V \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua que tome únicamente valores positivos. Entonces existe una inmersión inyectiva $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ tal que $\|f(p) - g(p)\| < h(p)$ para todo $p \in V$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 2.34 existe una inmersión $g_0 : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\|f(p) - g_0(p)\| < h(p)/2$, para todo $p \in V$. Las inmersiones son localmente inyectivas, por lo que para cada $p \in V$ existe un abierto $p \in V_p \subset V$ tal que $g_0|_{V_p}$ es inyectiva.

Los abiertos V_p forman un cubrimiento de V , luego por el teorema 1.19 podemos tomar un atlas de V formado por cartas $x_j : U_j \rightarrow B_3(0)$ tal que $\{U_j\}_{j=0}^\infty$ es un cubrimiento localmente finito de V que refina al formado por los

abiertos V_p , de modo que f es inyectiva en cada U_j y los abiertos $V_j = x_j^{-1}[B_1(p)]$ son también un cubrimiento de V . Más aún, una ligera modificación de la prueba⁴ de 1.19 nos permite exigir además que cada U_j tenga clausura compacta en V .

En particular $m_j = \inf\{h(p) \mid p \in U_j\} > 0$. Como en la prueba de 1.17, tomamos funciones $\gamma_j : V \rightarrow \mathbb{R}$ que tomen el valor 1 en V_j y se anulen fuera de $x_j^{-1}[B_2(0)]$.

Vamos a definir una sucesión $\{b_j\}_{j=0}^\infty$ en \mathbb{R}^p tal que $\|b_j\| \leq 2^{-(j+1)}m_j$ y de modo que las aplicaciones $g_r = g_0 + \sum_{j=0}^{r-1} b_j \gamma_j : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ sean immersiones.

Observemos que, para garantizar la segunda condición, basta exigir que las normas de los b_j sean suficientemente pequeñas, pues partimos de que g_0 es una inmersión y, si lo mismo vale para g_r , el teorema 2.33 aplicado a soporte compacto de γ_r nos da que si $\|b_r\|$ es suficientemente pequeño entonces g_{r+1} tiene diferenciales suprayectivas en todos los puntos de dicho soporte y trivialmente en los exteriores a él.

Supuestos definidos b_0, \dots, b_{r-1} (y, por lo tanto, g_r) consideramos el abierto $D_r = \{(p_1, p_2) \in V \times V \mid \gamma_r(p_1) \neq \gamma_r(p_2)\}$ (claramente no vacío), en el cual podemos definir la aplicación $G_r : D_r \rightarrow \mathbb{R}^p$ dada por

$$G_r(p_1, p_2) = \frac{g_r(p_1) - g_r(p_2)}{\gamma_r(p_2) - \gamma_r(p_1)}.$$

Como G_r es diferenciable y la dimensión de D_r es $2n < p$, el teorema 2.28 nos da que $G_r[D_r]$ es nulo en \mathbb{R}^p . En particular tiene interior vacío, luego podemos tomar $b_r \in \mathbb{R}^p$ de norma suficientemente pequeña como para que se cumplan las condiciones que hemos requerido y además $b_r \notin G_r[D_r]$.

Como el cubrimiento $\{U_j\}_{j=0}^\infty$ es localmente finito, la sucesión $\{g_r\}_{r=0}^\infty$ es finalmente constante en un entorno de cada punto de V , por lo que define una inmersión $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$. Es claro que cumple la condición $\|f(p) - g(p)\| < h(p)$. Falta probar que es inyectiva.

Supongamos que existen puntos $p_1, p_2 \in V$ tales que $g(p_1) = g(p_2)$. Sea j_0 un índice tal que si $j \geq j_0$ entonces $\gamma_j(p_1) = \gamma_j(p_2) = 0$ y

$$g_j(p_1) = g(p_1) \neq g(p_2) = g_j(p_2).$$

Ahora bien, en general, si $r > 0$ cumple $g_r(p_1) = g_r(p_2)$, tenemos que

$$g_{r-1}(p_1) + b_{r-1}\gamma_{r-1}(p_1) = g_{r-1}(p_2) + b_{r-1}\gamma_{r-1}(p_2).$$

Si fuera $\gamma_{r-1}(p_1) \neq \gamma_{r-1}(p_2)$, entonces $(p_1, p_2) \in D_{r-1}$ y $b_{r-1} = G_r(p_1, p_2)$, lo cual contradice la elección de b_{r-1} . Por consiguiente, tiene que cumplirse que $\gamma_{r-1}(p_1) = \gamma_{r-1}(p_2)$ y, en consecuencia, $g_{r-1}(p_1) = g_{r-1}(p_2)$. Repitiendo el razonamiento llegamos a que $g_r(p_1) = g_r(p_2)$ y $\gamma_r(p_1) = \gamma_r(p_2)$ para todo $r \leq j_0$, luego de hecho para todo r .

⁴Basta tomar en dicha prueba cartas $x'_p : U'_p \rightarrow B_4(0)$ y luego definir $U_p = x'^{-1}_p[B_3(0)]$. Así $\bar{U}_p = x'^{-1}_p[\bar{B}_3(0)]$ es compacto.

Ahora bien, existe un j tal que $\gamma_j(p_1) = 1$, luego también $\gamma_j(p_2) = 1$, pero esto implica que $p_1, p_2 \in V_j$, donde g_0 es inyectiva, luego $p_1 = p_2$. ■

Finalmente:

Teorema 2.36 (Teorema de Whitney) *Si V es una variedad diferencial de dimensión n , existe una inmersión regular $g : V \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ tal que $g[V]$ es cerrado en \mathbb{R}^{2n+1} .*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 2.34 existe una inmersión $g_0^* : V \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$. Como en la prueba del teorema anterior, podemos tomar abiertos V_p donde g_0 es inyectiva y con ellos tomar un atlas formado por cartas $x_j : U_j \rightarrow B_3(0)$ en las condiciones indicadas y a su vez las funciones γ_j .

Ahora definimos $g_{n+1}^* : V \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ mediante $g_{n+1}^*(p) = \sum_{j=0}^{\infty} j\gamma_j(p)$ (donde hay que tener en cuenta que todos los sumandos son nulos a partir de un término en cada entorno de p). Claramente es un función diferenciable, y con ella podemos formar otra función $g_0 : V \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ dada por $g_0(p) = (g_0^*(p), g_{n+1}^*(p))$.

Es claro que g_0 sigue siendo una inmersión y que sigue siendo inyectiva en cada abierto V_p , luego toda la prueba del teorema anterior sigue siendo válida para esta función g_0 (tomando $f = g_0$). Vamos a demostrar que la inmersión inyectiva $g : V \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ que obtenemos a partir de ella es, de hecho, regular.

Basta probar que si K es un compacto en \mathbb{R}^{2n+1} , entonces $g^{-1}[K]$ es compacto en V , pues esto implica que g es cerrada.

En efecto, si $C \subset V$ es cerrado y $p \in \overline{g[C]}$, podemos tomar una bola cerrada $K \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ alrededor de p , y entonces $g^{-1}[K]$ es compacto en V , al igual que $g^{-1}[K] \cap C$, luego por continuidad $g[g^{-1}[K] \cap C]$ es compacto en \mathbb{R}^{2n+1} , pero $p \in \overline{K \cap g[C]} \subset g[g^{-1}[K] \cap C] \subset g[C]$. Por lo tanto $g[C]$ es cerrado en \mathbb{R}^{2n+1} . En particular $g[V]$ es cerrado en \mathbb{R}^{2n+1} y g^{-1} es continua en $g[V]$.

Tomemos un compacto $K \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ y sea $M = \max\{\|x\| \mid x \in K\}$. Así, si $p \in g^{-1}[K]$, tenemos que $|g_{n+1}^*(p)| \leq \|g(p)\| \leq M$, luego $p \in \bigcup_{j \leq M} \bar{V}_j$, ya que si $p \in \bar{V}_j$ entonces $\gamma_j(p) = 1$, luego $g_{n+1}^*(p) \geq j$. Así pues, $g^{-1}[K] \subset \bigcup_{j \leq M} \bar{V}_j$ es compacto. ■

Equivalentemente, toda variedad diferencial de dimensión n es difeomorfa a una subvariedad de \mathbb{R}^{2n+1} .

Capítulo III

Cálculo tensorial

En los capítulos precedentes hemos presentado poco más que los conceptos y resultados imprescindibles para extender el concepto de diferenciabilidad y de aplicación diferencial a espacios topológicos más generales que los abiertos de \mathbb{R}^n , aunque esto ha dado pie a demostrar algunos resultados no triviales, como el teorema de Sard, o el de Whitney, o la unicidad de la estructura diferencial de las subvariedades. Todavía queda bastante camino por recorrer hasta que podamos decir que ya disponemos de un cálculo diferencial e integral en variedades equiparable al que conocemos para abiertos en \mathbb{R}^n , pero aquí vamos a avanzar un poco en esa dirección estudiando en primer lugar los campos de vectores tangentes a una variedad y, a continuación, los campos tensoriales, una generalización que resulta ser una herramienta potentísima e imprescindible para la geometría diferencial.

La noción de campo vectorial en una variedad diferencial V es muy simple: se trata de una aplicación diferenciable que asigna a cada punto $p \in V$ un vector $X_p \in T_p(V)$, donde la diferenciabilidad se interpreta en términos del fibrado de tangentes TV :

Definición 3.1 Un *campo vectorial* en una variedad diferencial V es una aplicación diferenciable $X : V \rightarrow TV$ tal que, para cada $p \in V$, se cumple que $X_p \in T_p(V)$. Equivalentemente, si $\pi : TV \rightarrow V$ es la proyección natural, la condición es que $X \circ \pi$ sea la identidad en V . Llamaremos $\mathfrak{X}(V)$ al conjunto de todos los campos vectoriales en V .

En la práctica la diferenciabilidad de un campo de vectores se comprueba mejor localmente, es decir, X será diferenciable si y sólo si lo es su restricción al dominio de cada carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ de V , pero tenemos que

$$X|_U = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

para ciertas funciones $a^i : U \rightarrow \mathbb{R}$, y sucede que $X|_U$ es diferenciable si y sólo si lo son todas las funciones a_i . Basta observar que la lectura de X en las cartas x y \tilde{x} es $u \mapsto (u, (x^{-1} \circ a)(u))$.

Las funciones a^i se llaman *coordenadas* de X respecto de la carta x .

Observemos que si $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$, podemos definir su suma puntualmente: $(X + Y)_p = X_p + Y_p$, y el resultado es un nuevo campo $X + Y \in \mathfrak{X}(V)$ (la diferenciabilidad de la suma se sigue del hecho de que las coordenadas de la suma son las sumas de coordenadas). Similarmente, si $f \in C^\infty(V)$, podemos definir $fX \in \mathfrak{X}(V)$ también puntualmente, es decir, mediante $(fX)_p = f(p)X_p$.

Es fácil comprobar que $\mathfrak{X}(V)$ tiene estructura de $C^\infty(V)$ -módulo con estas operaciones (y, en particular, identificando a \mathbb{R} con las funciones constantes) de \mathbb{R} -espacio vectorial.

En definitiva, cuando V es una subvariedad de \mathbb{R}^m podemos identificar a $\mathfrak{X}(V)$ con el conjunto de todas las aplicaciones diferenciables $X : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ tales que, para cada $p \in V$, se cumple que $X_p \in T_p(V)$.

En efecto, cada $X \in \mathfrak{X}(V)$ da lugar a una composición (obviamente diferenciable) $\tilde{X} : V \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$V \xrightarrow{X} TV \xrightarrow{di} T\mathbb{R}^m \xrightarrow{\theta} \mathbb{R}^m$$

de modo que, para cada $p \in V$, se cumple que $\tilde{X}_p \in T_p(V)$, considerando ahora a $T_p(V)$ como subespacio de \mathbb{R}^m . Recíprocamente, cada aplicación diferenciable $\tilde{X} : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ procede de un único campo $X \in \mathfrak{X}(V)$.

En efecto, dada \tilde{X} , también es diferenciable la aplicación $X : V \rightarrow T\mathbb{R}^m$ dada por $X_p = (p, \theta_p^{-1}(\tilde{X}_p))$, pues su lectura respecto de una carta x alrededor de p y de \tilde{I} (donde I es la identidad en \mathbb{R}^m) es $p \mapsto (p, (x^{-1} \circ \tilde{X})(p))$. Ahora bien, di es una inmersión regular que nos permite identificar a TV con una subvariedad de $T\mathbb{R}^m$, luego el teorema 2.16 nos da que X también es diferenciable cuando la consideramos como aplicación $X : V \rightarrow TV$. Es claro entonces que $X \in \mathfrak{X}(V)$, así como que induce la aplicación dada \tilde{X} . La unicidad es inmediata. ■

3.1 Grupos uniparamétricos locales

En esta sección generalizaremos al contexto de las variedades diferenciales los resultados básicos sobre existencia y unicidad de solución de los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Aunque los conceptos que vamos a introducir aquí se pueden aplicar en contextos muy diversos, conviene introducirlos pensando en un caso típico:

Imaginemos que por una variedad diferencial V se mueve un fluido. Podemos considerar la aplicación $X : V \rightarrow TV$ que a cada punto $p \in V$ le asigna la velocidad $X_p \in T_p(V)$ que tiene el fluido en dicho punto, es decir, la velocidad a la que se movería una partícula de masa despreciable que fuera arrastrada por el fluido y pasara por ese punto. Vamos a considerar el caso en que este campo de velocidades es diferenciable, es decir, que $X \in \mathfrak{X}(V)$, lo que se traduce en que el movimiento del fluido es “suave”. En realidad la velocidad del fluido en

cada punto podría depender del tiempo. Desde el momento en que suponemos que X_p sólo depende del punto p estamos restringiéndonos a los llamados flujos estacionarios, pero luego veremos que el caso general puede reducirse fácilmente a éste.

Definición 3.2 Si $X \in \mathfrak{X}(V)$, diremos que una curva $\alpha : I \rightarrow V$ es una *curva integral* de X si para todo $t \in I$ se cumple que $\alpha'(t) = X_{\alpha(t)}$.

Así, si pensamos en X como el campo de velocidades de un fluido estacionario, las curvas integrales son las trayectorias de las partículas de fluido. Demostrar la existencia y unicidad de curvas integrales es una sencilla traducción al contexto de las variedades diferenciales de los resultados generales sobre existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales, pero de hecho probaremos que los campos vectoriales definen un aparato más sofisticado que las meras curvas integrales, para lo cual necesitamos algunos conceptos y resultados previos.

Nota En el resto de esta sección supondremos que todas las variedades diferenciales consideradas son variedades sin frontera. De este modo evitamos los problemas que surgen cuando una curva integral se interrumpe por llegar a la frontera, o un caso más patológico aún: si pensamos, por ejemplo en el campo $X = \partial_y$ en el disco \bar{B}^2 , sus curvas integrales son rectas verticales, luego en el punto $p = (1, 0)$ una curva integral de X estaría definida sólo en un punto. ■

Definición 3.3 Un *grupo uniparamétrico* en una variedad diferencial V es una aplicación diferenciable $\Phi : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ tal que, para todo punto $p \in V$ se cumple $\Phi(0, p) = p$ y, además, para $s, t \in \mathbb{R}$ se cumple $\Phi(s, \Phi(t, p)) = \Phi(s+t, p)$.

Si convenimos en representar $\Phi_t(p) = \Phi_p(t) = \Phi(t, p)$, la última propiedad se expresa en la forma

$$\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s}.$$

La idea subyacente es muy simple: podemos pensar que por la variedad V se mueve un fluido estacionario y que $\Phi(t, p)$ es la posición que ocupa en el instante t la partícula de fluido que en $t = 0$ está situada en la posición p . Lo que dice la segunda condición es que si dejamos fluir durante t unidades de tiempo la partícula situada en p —con lo que llegará al punto $\Phi(t, p)$ — y luego dejamos que fluya s unidades de tiempo a partir de ahí, acabará en el punto resultante de dejarla fluir durante $s + t$ unidades de tiempo a partir de p .

Observemos que Φ no es más que una acción diferenciable del grupo aditivo \mathbb{R} en el conjunto V en el sentido de [TG 2.1] (aunque allí la definición está expresada con notación multiplicativa en vez de aditiva). En estos términos, la órbita de un punto $p \in V$ es la imagen de la curva de flujo Φ_p .

En realidad vamos a necesitar un concepto ligeramente más general, pues veremos que un campo vectorial no define necesariamente un grupo uniparamétrico, por las razones que se ponen de manifiesto en los ejemplos siguientes:

Ejemplos 1) Consideremos $V = \mathbb{R}^2$ y $\Phi : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ la aplicación dada por

$$\Phi(t, (x, y)) = (x + t, y).$$

Claramente es un grupo uniparamétrico en el que las trayectorias de las partículas de fluido son rectas paralelas al eje X recorridas a velocidad constante 1. Sin embargo, si consideramos $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, podemos definir Φ igualmente, pero ahora, para los puntos de la forma $(x, 0)$, las trayectorias tienen que interrumpirse al llegar al punto $(0, 0)$, simplemente porque dicho punto no está en V . Concretamente, la línea de flujo $\Phi_{(x,0)}(t)$ está definida en el intervalo

$$I_{(x,0)} = \begin{cases}]-\infty, -x[& \text{si } x < 0, \\]-x, +\infty[& \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Es fácil ver que esto se traduce en que el dominio de Φ es el abierto

$$W = (\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})) \cup \{(t, (x, 0)) \in \mathbb{R} \times V \mid x(x+t) > 0\}.$$

■

2) Un caso muy distinto se da cuando $V = \mathbb{R}$ y $\Phi(t, x) = \frac{x}{1 - xt}$.

Si queremos que las trayectorias Φ_x estén definidas en un intervalo que contenga a $t = 0$, sucede que el máximo posible es

$$I_x = \begin{cases}]1/x, +\infty[& \text{si } x < 0, \\ \mathbb{R} & \text{si } x = 0, \\]-\infty, 1/x[& \text{si } x > 0. \end{cases}$$

En efecto, para $x = 0$ se cumple que $\Phi(t, 0) = 0$, luego la trayectoria está definida en \mathbb{R} y corresponde a una partícula en reposo que no se mueve de $x = 0$. Para $x > 0$ nos encontramos con que el dominio de Φ_x se tiene que interrumpir en $1/x$, pero no porque la trayectoria se interrumpa por un “obstáculo”, como sucedía en el ejemplo precedente, sino simplemente porque a la partícula de fluido que se encuentra en x en el instante $t = 0$ le bastan $1/x$ unidades de tiempo para recorrer todo el intervalo $[x, +\infty[$, y por ello no tiene sentido considerar intervalos de tiempo mayores. En cambio, si analizamos el “movimiento pasado” de la partícula, nos encontramos con que ha tardado infinito tiempo en recorrer el intervalo $]0, x]$. Su trayectoria completa recorre, pues, el intervalo $]0, +\infty[$, pero sólo en el lapso de tiempo correspondiente al intervalo $] -\infty, 1/x[$. La situación cuando $x < 0$ es análoga, aunque el intervalo que recorre es $] -\infty, 0[$.

Consecuentemente, el máximo dominio posible para Φ es el abierto

$$W = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times V \mid xt < 1\}.$$

■

Ahora vamos a generalizar el concepto de grupo uniparamétrico para que abarque los ejemplos precedentes. Básicamente se trata de admitir que Φ esté definido en un subconjunto abierto de $\mathbb{R} \times V$ con ciertas condiciones para que se sigan cumpliendo parcialmente las propiedades de la definición precedente:

Definición 3.4 Un *grupo uniparamétrico local* en una variedad diferencial V es una aplicación diferenciable $\Phi : W \rightarrow V$, donde

1. $W \subset \mathbb{R} \times V$ es un abierto tal que, para cada $p \in V$, existe un intervalo abierto $0 \in I_p \subset \mathbb{R}$ que cumple que

$$W \cap (\mathbb{R} \times \{p\}) = I_p \times \{p\}.$$

2. $\Phi(0, p) = p$, para todo $p \in V$.
3. Si $(t, p) \in W$, entonces $I_{\Phi(t, p)} = I_p - t$ y, si $s \in I_{\Phi(t, p)}$, se cumple que $t + s \in I_p$ y

$$\Phi(s, \Phi(t, p)) = \Phi(t + s, p).$$

Si mantenemos la notación $\Phi_t(p) = \Phi_p(t) = \Phi(t, p)$, los intervalos I_p considerados en la propiedad 1) son simplemente los dominios de las funciones Φ_p , es decir, estamos exigiendo que W sea tal que al formar la función Φ_p obtenemos un intervalo que contenga a $t = 0$. La primera parte de la propiedad 3) afirma que si dejamos que la partícula de fluido situada en p fluya durante $t > 0$ unidades de tiempo, entonces el flujo a partir de $\Phi_p(t)$ estará definido para t unidades de tiempo menos en el futuro y t unidades de tiempo más en el pasado (o al revés si $t < 0$).

Es evidente que un grupo uniparamétrico es simplemente un grupo uniparamétrico local definido en $W = \mathbb{R} \times V$.

Si $\Phi : W \rightarrow V$ es un grupo uniparamétrico local, definimos

$$V_t = \{p \in V \mid (t, p) \in W\},$$

que no es sino el dominio de la aplicación Φ_t . Más concretamente:

Teorema 3.5 *En las condiciones precedentes, V_t es abierto en V y la aplicación $\Phi_t : V_t \rightarrow V_{-t}$ es un difeomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN: La aplicación $V \rightarrow \mathbb{R} \times V$ dada por $p \mapsto (t, p)$ es diferenciable (es, de hecho, una inmersión regular), y V_t es la antiimagen de W por dicha aplicación, luego ciertamente es abierto en V .

Si $p \in V_t$, por la propiedad 3) de la definición de flujo $-t \in I_p - t = I_{\Phi(t, p)}$, luego $(-t, \Phi(t, p)) \in W$, luego $\Phi(t, p) \in V_{-t}$. Por lo tanto, $\Phi_t : V_t \rightarrow V_{-t}$. Además, Φ_t puede expresarse como la composición de $p \mapsto (t, p)$, seguida de Φ , luego es diferenciable.

Finalmente, su inversa es $\Phi_{-t} : V_{-t} \rightarrow V_t$, pues las propiedades 2) y 3) nos dan que

$$\Phi(-t, \Phi(t, p)) = \Phi(0, p) = p. \quad \blacksquare$$

En el caso en que Φ sea un grupo uniparamétrico (global), tenemos que $V_t = V$ para todo t , con lo que cada Φ_t es un difeomorfismo de la variedad V en sí misma.

Definición 3.6 Si $\Phi : W \rightarrow V$ es un grupo uniparamétrico local en una variedad diferencial V , definimos $X \in \mathfrak{X}(V)$ mediante

$$X_p = \Phi'_p(0) = d\Phi_p|_0(\partial_t|_0) \in T_p(V).$$

Se trata de una aplicación diferenciable, pues si x es una carta de V alrededor de p , tenemos que

$$X_p = \sum_i X_p(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_i \frac{\partial \Phi_p^i}{\partial t} \Big|_0 \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p.$$

Por lo tanto, la lectura de X en las cartas x y \tilde{x} es

$$u \mapsto \left(u, \frac{\partial(x^{-1} \circ \Phi \circ x)}{\partial t} \Big|_0 \right),$$

que claramente es diferenciable.

Diremos que X es el campo vectorial que genera Φ . Esto tiene sentido, pues enseguida veremos que cada campo vectorial determina un grupo uniparamétrico local Φ y, concretamente, el determinado por el campo X definido de este modo a partir de Φ será el propio Φ . Para probarlo conviene observar antes lo siguiente:

Teorema 3.7 Si $\Phi : W \rightarrow V$ es un grupo uniparamétrico local generado por $X \in \mathfrak{X}(V)$, las curvas $\alpha(t) = \Phi_p(t)$ son curvas integrales de X .

DEMOSTRACIÓN: En principio, de la propia definición de X se sigue que $\alpha'(0) = X_{\alpha(0)}$, pero de hecho $\alpha'(t) = X_{\alpha(t)}$ para todo $t \in I_p$, pues

$$\alpha(t+s) = \Phi_p(t+s) = \Phi(t+s, p) = \Phi(s, \Phi(t, p)) = \Phi_{\alpha(t)}(s),$$

luego, derivando respecto de s y evaluando en 0, queda que

$$\alpha'(t) = \Phi'_{\alpha(t)}(0) = X_{\alpha(t)}. \quad \blacksquare$$

Ahora probamos un teorema local sobre existencia de grupos uniparamétricos:

Teorema 3.8 Sea V una variedad diferencial y $X \in \mathfrak{X}(V)$. Para cada $p \in V$ existe un intervalo abierto $0 \in I \subset \mathbb{R}$ y un entorno abierto U de p en V de modo que existe una aplicación diferenciable $\Phi_U : I \times U \rightarrow V$ tal que:

1. para todo $q \in U$ se cumple $\Phi_U(0, q) = q$ y
2. para todo $t \in I$, se cumple que $\Phi'_{U,q}(t) = X_{\Phi_U(t,q)}$.

Más aún, si $\alpha : J \rightarrow V$ es una curva integral de X tal que $\alpha(0) = q \in U$, entonces $\alpha(t) = \Phi_U(t, q)$, para todo $t \in I \cap J$. En particular, Φ^U es única, en el sentido de que si $\Psi_{U'} : J \times U' \rightarrow V$ cumple lo mismo, entonces Φ_U y $\Psi_{U'}$ coinciden en los puntos comunes de sus dominios.

DEMOSTRACIÓN: Sea $x : U_0 \rightarrow \tilde{U}_0$ una carta alrededor de p . Entonces

$$X|_{U_0} = \sum_i f^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

para ciertas funciones $f^i \in C^\infty(U_0)$. Sea $\tilde{f}^i = x^{-1} \circ f^i \in C^\infty(\tilde{U}_0)$. Estas funciones definen una aplicación $\tilde{f} : \tilde{U}_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable. El teorema [An 5.46] nos da que el problema de Cauchy

$$\left. \begin{aligned} x'(t, x_0) &= \tilde{f}(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \right\}$$

tiene solución única de clase C^∞ en un entorno de $(0, x(p))$, es decir, que existe un intervalo abierto $0 \in I \subset \mathbb{R}$ y un abierto $x(p) \in \tilde{U} \subset \tilde{U}_0$ tal que hay definida una función diferenciable $\tilde{x} : I \times \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ con la propiedad de que

$$\tilde{x}'(t, x_0) = \tilde{f}(\tilde{x}(t, x_0)), \quad \tilde{x}(0, x_0) = x_0.$$

Más aún, como $\tilde{x}^{-1}[\tilde{U}]$ es un entorno de $(0, x(p))$, podemos reducir el dominio de \tilde{x} para que se dé la inclusión $\tilde{x}[I \times \tilde{U}] \subset \tilde{U}_0$. Sea $U = x^{-1}[\tilde{U}] \subset V$. Podemos definir entonces $\Phi_U : I \times U \rightarrow V$ mediante

$$\Phi_U(t, q) = x^{-1}(\tilde{x}(t, x(q)))$$

y claramente se trata de una aplicación diferenciable, pues tiene a \tilde{x} por lectura. Es claro que todo $q \in U$ cumple $\Phi_U(0, q) = q$ y además, la coordenada i -ésima de $\Phi'_{U,q}(t)$ en la base $\partial_{x_1}|_{\Phi_{U,q}(t)}, \dots, \partial_{x_n}|_{\Phi_{U,q}(t)}$ es

$$\begin{aligned} \Phi'_{U,q}(t)(x^i) &= d\Phi_{U,q}|_t(\partial_t|_t)(x^i) = \left. \frac{\partial(\Phi_{U,q} \circ x^i)}{\partial t} \right|_t = (\tilde{x}^i)'(t, x(q)) \\ &= \tilde{f}^i(\tilde{x}(t, x(q))) = f^i(x^{-1}(\tilde{x}(t, x(q)))) = f^i(\Phi_U(t, q)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\Phi'_{U,q}(t) = \sum_i f^i(\Phi_U(t, q)) \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_{\Phi_U(t, q)} = X_{\Phi_U(t, q)}.$$

Esto prueba que Φ_U cumple las dos propiedades requeridas. Consideramos ahora cualquier curva integral $\alpha : J \rightarrow V$ de X que cumpla $\alpha(0) = q \in U$. Cambiando J por $J \cap I$ podemos suponer que $J \subset I$. El hecho de que sea una curva integral de X se traduce inmediatamente en que $\tilde{\alpha} = \alpha|_{J \cap \alpha^{-1}[U]} \circ x$ cumple $\tilde{\alpha}'(t) = \tilde{f}(\tilde{\alpha}(t))$, y además $\tilde{\alpha}(0) = x(q)$. La unicidad de la solución del problema de Cauchy nos da que $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{x}(t, x(q))$, luego $\alpha(t) = \Phi(t, q)$, en principio para todo $t \in J \cap \alpha^{-1}[U]$, pero esta igualdad, junto con que $J \subset I \subset \Phi_q^{-1}[U]$, implica que $J \subset \alpha^{-1}[U]$.

Finalmente, si $\Psi_{U'}$ cumple las propiedades a) y b) del enunciado y $q \in U \cap U'$, tenemos que $\Psi_{U',q}$ es una curva integral de X que toma el valor q en 0, luego, por lo que acabamos de probar, $\Psi_{U'}(t, q) = \Phi_U(t, q)$, para todo $t \in I \cap J$. ■

No podemos esperar que la aplicación Φ_U dada por el teorema anterior sea un grupo uniparamétrico local porque la definición impone condiciones sobre el dominio que no tienen por qué cumplirse. No obstante, podemos asegurarlas tomando el mayor dominio posible. Para verlo empezamos demostrando lo siguiente:

Teorema 3.9 *Sea V una variedad diferencial y $X \in \mathfrak{X}(V)$. Para cada $p \in V$ existe un único intervalo abierto $0 \in I_p \subset \mathbb{R}$ sobre el que existe una única curva integral $\Phi_{X,p} : I_p \rightarrow V$ que cumple $\Phi_{X,p}(0) = p$ y, si $\beta : J \rightarrow V$ es cualquier otra curva integral de X con $\beta(0) = p$, entonces $J \subset I_p$ y $\beta = \Phi_{X,p}|_J$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\alpha : I \rightarrow V$ y $\beta : J \rightarrow V$ son dos curvas integrales de X tales que $\alpha(0) = \beta(0) = p$. Sea $I_0 \subset I \cap J$ el conjunto de puntos donde coinciden. Por continuidad I_0 es cerrado en el intervalo $I \cap J$. Si $t_0 \in I_0$, entonces $\alpha(t_0) = \beta(t_0) = q$. Es fácil ver que $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t + t_0)$ y $\tilde{\beta}(t) = \beta(t + t_0)$ son curvas integrales de X tales que $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = q$, luego el teorema anterior nos da que coinciden en un entorno de 0, luego α y β coinciden en un entorno de t_0 , luego I_0 es abierto en $I \cap J$. Por conexión $I_0 = I \cap J$.

Con esto hemos probado que α y β coinciden en la intersección de sus dominios. Ahora basta llamar I_p a la unión de todos los dominios de todas las curvas integrales de X definidas en un entorno de 0 y que cumplen $\alpha(0) = p$, y tomar como $\Phi_{X,p} : I_p \rightarrow V$ la única extensión común de dichas curvas integrales. Claramente cumple lo pedido. ■

Definición 3.10 Con la notación del teorema anterior, dada una variedad diferencial V y un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(V)$, definimos

$$W_X = \bigcup_{p \in V} I_p \times \{p\},$$

y $\Phi_X : W_X \rightarrow V$ mediante $\Phi_X(t, p) = \Phi_{X,p}(t)$. Diremos que Φ_X es el *flujo* asociado a X .

Teorema 3.11 *Si V es una variedad diferencial y $X \in \mathfrak{X}(V)$, $\Phi_X : W_X \rightarrow V$ es un grupo uniparamétrico local en V cuyo campo vectorial generador es X . Cualquier otro grupo uniparamétrico local con el mismo generador es necesariamente una restricción de Φ_X a un abierto adecuado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $(t, p) \in W$ y sea $p_0 = \Phi_X(t, p)$. Veamos que se cumple $I_{p_0} = I_p - t$, tal y como exige la definición de grupo uniparamétrico local. En efecto, la curva $\alpha : I_p - t \rightarrow V$ dada por $\alpha(s) = \Phi_{X,p}(s + t)$ es una curva integral de X que cumple $\alpha(0) = p_0$, luego $I_p - t \subset I_{p_0}$, y la inclusión opuesta se obtiene considerando la curva $\beta : I_{p_0} + t \rightarrow V$ dada por $\beta(s) = \Phi_{X,p_0}(s - t)$.

Más aún, $\alpha(s) = \Phi_{X,p_0}(s)$, luego $\Phi_X(s, \Phi_X(t, p)) = \Phi_X(s + t, p)$, también como exige la definición.

Falta probar que W_X es abierto en $\mathbb{R} \times V$ y que Φ_X es diferenciable. Más concretamente, vamos a probar lo siguiente:

(*) Para cada $t \in \mathbb{R}$ tal que $(t, p_0) \in W$, existe un $\delta > 0$ y un entorno U de p_0 en V de modo que $]t - \delta, t + \delta[\times U \subset W$ y que Φ_X es diferenciable en este abierto.

Esto es claro si $t = 0$, pues entonces el teorema 3.8 nos da una aplicación diferenciable $\Phi : I \times U \rightarrow V$ y claramente se cumple que $I \times U \subset W$ y $\Phi_X|_{I \times U} = \Phi$.

Supongamos que existe un t que no cumple (*). Podemos suponer que $t > 0$, pues el caso $t < 0$ se trata análogamente. Sea t_0 el ínfimo del conjunto de dichos t . Necesariamente $t_0 > 0$, pues todos los t en un entorno de 0 que cumpla (*) lo cumplen también. Como hay puntos $(t, p_0) \in W$ con $t > t_0$, la definición de W implica que $(t_0, p_0) \in W$, pero no puede cumplir (*), ya que entonces todos los puntos de un intervalo $[0, t_0 + \epsilon[$ lo cumplirían también.

Aplicamos el teorema 3.8 a $q_0 = \Phi_X(t_0, p_0)$, lo que nos da un entorno U_0 de q_0 y una aplicación diferenciable $\Phi :]-\delta, \delta[\times U_0 \rightarrow V$ cuyas curvas Φ_q son curvas integrales de X , luego $]-\delta, \delta[\times U_0 \subset W$ y Φ_X se restringe a Φ en este abierto (luego es diferenciable).

Como $\Phi_X(t_0, p_0) = q_0 \in U_0$, por continuidad de Φ_{X, p_0} existe $0 < t_1 < t_0$ tal que $t_0 - t_1 < \delta$ y $\Phi_X(t_1, p_0) \in U_0$.

Por la elección de t_0 , existe un $\delta_1 > 0$ y un entorno U_1 de p_0 de modo que $]t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1[\times U_1 \subset W$ y Φ_X es diferenciable en este abierto. En particular $\Phi_{X, t_1} : U_1 \rightarrow V$ es diferenciable y, como $\Phi_{X, t_1}(p_0) \in U_0$, restringiendo U_1 podemos suponer que $\Phi_{X, t_1}[U_1] \subset U_0$.

Entonces, si $q \in U_1$, está definido $\Phi_X(t_1, q) \in U_0$, y a su vez, si $|s| < \delta$, está definido

$$\Phi_X(s, \Phi_X(t_1, q)) = \Phi_X(s + t_1, q).$$

Esto implica que $]t_1 - \delta, t_1 + \delta[\times U_1 \subset W$ y que la restricción de Φ_X a este abierto puede calcularse como la composición de las aplicaciones diferenciables

$$]t_1 - \delta, t_1 + \delta[\times U_1 \xrightarrow{I \times \Phi_{X, t_1}}]t_1 - \delta, t_1 + \delta[\times U_0 \xrightarrow{r}]-\delta, \delta[\times U_0 \xrightarrow{\Phi_X} V,$$

donde $r(s, q) = (s - t_1, q)$. Además, $t_0 \in]t_1 - \delta, t_1 + \delta[$, pues $t_0 - t_1 < \delta$. Esto prueba que t_1 cumple (*), contradicción.

Es inmediato que el campo vectorial que genera Φ_X es X , y si $\Psi : W_0 \rightarrow V$ es otro grupo uniparamétrico local con el mismo generador, entonces, para cada $p \in V$, tenemos que Ψ_p es una curva integral de X tal que $\Psi_p(0) = p$, luego por el teorema anterior su dominio está contenido en I_p y, para todo t en dicho dominio, $\Psi(t, p) = \Psi_X(t, p)$, luego Φ_X extiende a Ψ . ■

Ejemplo Es fácil comprobar que los campos generadores de los dos grupos uniparamétricos locales que hemos puesto más arriba como ejemplos son, respectivamente, $X_{(x, y)} = \partial_x$ y $X_x = x^2 \partial_x$. ■

Notemos que el teorema 3.9 nos asegura que si $\alpha : I \rightarrow V$ es una curva integral de un campo vectorial X tal que $\alpha(0) = p$, entonces α es necesariamente una restricción del flujo $\Phi_{X, p}$.

Veamos algunas propiedades adicionales de los grupos uniparamétricos:

Teorema 3.12 Si Φ es un grupo uniparamétrico local en una variedad V generado por $X \in \mathfrak{X}(V)$, $p \in V$ y $s \in I_p$, entonces $d\Phi_t|_p(X_p) = X_{\Phi_p(t)}$.

DEMOSTRACIÓN: Si $f \in C_{\Phi_p(t)}^\infty$, tenemos que

$$d\Phi_t|_p(X_p)(f) = X_p(\Phi_t \circ f) = \left. \frac{\partial(\Phi_p \circ \Phi_t \circ f)}{\partial s} \right|_0,$$

mientras que

$$X_{\Phi_p(t)}(f) = \left. \frac{\partial(\Phi_{\Phi_p(t)} \circ f)}{\partial s} \right|_0,$$

pero

$$\Phi_{\Phi_p(t)}(s) = \Phi(s, \Phi(t, p)) = \Phi(t, \Phi(s, p)) = \Phi_t(\Phi_p(s)) = (\Phi_p \circ \Phi_t)(s),$$

por lo que ambas derivadas son la misma. ■

En particular, teniendo en cuenta que Φ_t es un difeomorfismo, resulta que $X_p = 0$ si y sólo si $X_{\Phi_p(t)} = 0$, para cualquier $t \in I_p$. Esto significa que $\Phi_p'(0) = 0$ si y sólo si $\Phi_p'(t) = 0$ o, en otras palabras, que la derivada de una curva integral de un campo vectorial X es idénticamente nula o no se anula nunca. En el primer caso la curva es constante, y en el segundo caso es una inmersión.

Definición 3.13 Si V es una variedad diferencial, un campo $X \in \mathfrak{X}(V)$ es *completo* si el grupo uniparamétrico Φ_X que determina es global, es decir, si está definido en $\mathbb{R} \times V$.

Vamos a probar que en una variedad compacta, todos los campos vectoriales son completos. Esto es consecuencia de un resultado más general:

Teorema 3.14 Sea V una variedad diferencial, $X \in \mathfrak{X}(V)$ y $p \in V$. Si el intervalo I_p en el que está definida la curva integral $\Phi_{X,p}$ tiene supremo finito β y $\{t_i\}_i \subset I_p$ es una sucesión que converge a β , entonces la sucesión $\{\Phi_X(t_i, p)\}_i$ no está contenida en ningún subconjunto compacto de V . En particular, no puede converger en V . Lo mismo vale para el ínfimo de I_p si es finito.

DEMOSTRACIÓN: Sea $K \subset V$ compacto. Para cada $q \in K$, existe un $\delta_q > 0$ y un entorno U_q de q de manera que Φ_X está definido en $]-\delta_q, \delta_q[\times U_q$. Los abiertos U_q cubren K , luego podemos extraer un subcubrimiento finito y podemos tomar el mínimo δ correspondiente a dicho subcubrimiento, de modo que Φ_X está definido en $]-\delta, \delta[\times K$.

Si la sucesión $\{\Phi_X(t_i, p)\}_i$ está contenida en K , tomamos un i suficientemente grande como para que $\beta - t_i < \delta/2$. Sea $q = \Phi_X(t_i, p)$. Entonces $I_q = I_p - t_i$, luego $\Phi_{X,q}$ sólo está definida para $t < \beta - t_i < \delta/2$, pero esto es imposible, porque $q \in K$, luego $\Phi_{X,q}$ tiene que estar definido siempre que $-\delta < t < \delta$.

Esto implica que la sucesión no puede converger, ya que si lo hiciera casi todos sus términos estarían en un entorno del límite con clausura compacta, y eliminando los primeros términos tendríamos otra sucesión del mismo tipo contenida en un compacto. ■

Teorema 3.15 *Sea V una variedad diferencial y $X \in \mathfrak{X}(V)$ se anula fuera de un subconjunto compacto de V , entonces es completo. En particular, si V es compacta, todos sus campos vectoriales son completos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $K \subset V$ un compacto tal que X se anule fuera de K . Si $p \in V$, o bien $X_p = 0$, en cuyo caso $\Phi_{X,p}$ es constante y está definida en \mathbb{R} , o bien $X_p \neq 0$, en cuyo caso, por la observación tras el teorema 3.12, todo $t \in I_p$ cumple que $\Phi'_{X,p}(t) = X_{\Phi_X(p,t)} \neq 0$, luego $\Phi_{X,p}(t) \in K$. El teorema anterior implica que $I_p = \mathbb{R}$. ■

Otro hecho elemental es que los difeomorfismos transportan campos vectoriales y sus flujos correspondientes entre variedades:

Definición 3.16 Sea $f : V_1 \rightarrow V_2$ un difeomorfismo entre variedades diferenciales sin frontera y sea $X \in \mathfrak{X}(V_1)$. Definimos $f_*(X) \in \mathfrak{X}(V_2)$ mediante

$$f_*(X)_p = df|_{f^{-1}(p)}(X_{f^{-1}(p)}).$$

Es claro que $f_*(X)$ es diferenciable, pues si X tiene coordenadas a^i respecto de una carta x de V_1 , entonces $f_*(X)$ tiene coordenadas $f^{-1} \circ a^i$ respecto de la carta $f^{-1} \circ x$.

Teorema 3.17 *Sea $f : V_1 \rightarrow V_2$ un difeomorfismo entre variedades diferenciales sin frontera y sea $X \in \mathfrak{X}(V_1)$. Entonces tenemos el diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} V_{1,t} & \xrightarrow{\Phi_{X,t}} & V_{1,-t} \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ V_{2,t} & \xrightarrow{\Phi_{f_*(X),t}} & V_{2,-t} \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN: Observemos que si $\alpha : I \rightarrow V$ es una curva integral de X entonces $\alpha \circ f$ es una curva integral de $f_*(X)$, pues

$$\begin{aligned} (\alpha \circ f)'(t) &= d(\alpha \circ f)|_t(\partial_t|_t) = df|_{\alpha(t)}(d\alpha|_{\alpha(t)}(\partial_t|_t)) = df|_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) \\ &= df|_{\alpha(t)}(X_{\alpha(t)}) = f_*(X)_{f(\alpha(t))} = f_*(X)_{(\alpha \circ f)(t)}. \end{aligned}$$

Recíprocamente, como claramente $X = (f^{-1})_*(f_*(X))$, también se cumple que las antiimágenes de curvas integrales son curvas integrales. Esto implica que $f[V_{1,t}] = V_{2,t}$, así como que $\Phi_{f_*(X)}(t, f(p)) = f(\Phi_X(t, p))$, pues ambos miembros son la única curva integral de $f_*(X)$ que pasa por $f(p)$ en $t = 0$. ■

Flujos no estacionarios Terminamos mostrando que, tal y como habíamos indicado, toda la teoría que hemos desarrollado puede usarse igualmente para tratar con flujos no estacionarios, es decir, flujos determinados por campos vectoriales que varían con el tiempo. Esto significa que partimos de una aplicación diferenciable $X : J \times V \rightarrow TV$, donde J es un intervalo abierto en \mathbb{R} , de modo

que $X_{t,p} \in T_p(V)$. Una curva integral $\alpha : I \rightarrow V$ para X es una curva que cumpla

$$\alpha'(t) = X_{(t,\alpha(t))}.$$

Para tratar con esta situación basta con definir $\tilde{X} : J \times V \rightarrow T(J \times V)$ mediante $\tilde{X}_{t,p} = (\partial_t|_t, X_{t,p})$. Claramente $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(J \times V)$, luego define un grupo uniparamétrico local $\tilde{\Phi}$, que podemos descomponer como

$$\tilde{\Phi}(t, s, p) = (\Phi_0(t, s, p), \Phi_1(t, s, p))$$

Entonces $\tilde{\Phi}_{s,p}$ es una curva integral de \tilde{X} tal que $\tilde{\Phi}(0, s, p) = (s, p)$ y

$$\tilde{\Phi}'_{(s,p)}(t) = (\Phi'_{0,(s,p)}(t), \Phi'_{1,(s,p)}(t)) = \tilde{X}_{\tilde{\Phi}(t,s,p)} = (\partial_t|_{\Phi_0(t,s,p)}, X_{\tilde{\Phi}(t,s,p)}).$$

La curva $\Phi_{0,(s,p)} : I_{(s,p)} \rightarrow J$ es una curva integral del campo ∂_t tal que $\Phi_{0,(s,p)}(0) = s$. Por la unicidad tiene que ser $\Phi_{0,(s,p)}(t) = s + t$. Así pues,

$$\Phi'_{1,(s,p)}(t) = X_{s+t, \Phi_{(s,p)}(t)}, \quad \Phi_{1,(s,p)}(0) = p,$$

luego la curva $\alpha(t) = \Phi_1(t - s, s, p)$ cumple

$$\alpha(s) = p, \quad \alpha'(t) = X_{t,\alpha(t)},$$

luego es la trayectoria de la partícula de fluido que en el instante s se encontraba en el punto p . Equivalentemente, $\Phi_1(t, s, p)$ es la posición en el instante $s + t$ de la partícula de fluido que en el instante s se encontraba en el punto p .

Definimos entonces $\Phi(s, t, p) = \Phi_1(t - s, s, p)$, que es la posición en el instante t de la partícula de fluido que en el instante s se encontraba en p . La relación entre Φ y $\tilde{\Phi}$ es que

$$\tilde{\Phi}(t - s, s, p) = (t, \Phi(s, t, p))$$

y claramente se cumple la relación $\tilde{\Phi}_{st} \circ \tilde{\Phi}_{tu} = \tilde{\Phi}_{su}$. ■

Terminamos con una versión del teorema 3.15 para flujos no estacionarios:

Teorema 3.18 *Sea W una variedad diferencial sin frontera y $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times W)$ un campo vectorial tal que existe un abierto $V \subset \mathbb{R} \times W$ de clausura compacta tal que, para todo punto $(t, p) \in (\mathbb{R} \times W) \setminus V$, se cumpla que $X_{(t,p)} = \partial_t|_{(t,p)}$. Entonces X es un campo completo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\Phi_X : W_0 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times W \rightarrow \mathbb{R} \times W$ el grupo uniparamétrico local definido por X . Tomamos un abierto V_0 de clausura compacta tal que $\bar{V} \subset V_0 \subset \mathbb{R} \times W$. Para cada $(t, w) \in \bar{V}_0$ existe un abierto $(0, t, w) \in]-\epsilon_{t,w}, \epsilon_{t,w}[\times W_{t,w} \subset W_0$. Los abiertos $W_{t,w}$ cubren \bar{V}_0 y, tomando un subcobrimiento finito, encontramos un $\epsilon > 0$ y un abierto $\bar{V}_0 \subset W_1 \subset \mathbb{R} \times W$ tales que $]-\epsilon, \epsilon[\times W_1 \subset W_0$.

Por otra parte, si $(t_0, w_0) \in (\mathbb{R} \times W) \setminus \bar{V}_0$, tenemos que $X_{(t,w)} = \partial_t|_{(t,w)}$ en $(\mathbb{R} \times W) \setminus \bar{V}$, luego la curva integral de (t_0, w_0) en un entorno de 0 es de la forma $\Phi_{X,(t_0,w_0)}(t) = (t_0 + t, w_0)$.

Si para todo $t > 0$ se cumple que $(t_0 + t, w_0) \notin \overline{V}$, entonces $\alpha(t) = (t_0 + t, w_0)$ es la curva integral de X que pasa por (t_0, w_0) y está definida para todo $t > 0$. Si, por el contrario, existe un (mínimo) $t_1 > 0$ tal que

$$\Phi_{X,(t_0,w_0)}(t_1) = (t_0 + t_1, w_0) \in \overline{W},$$

entonces, $\Phi_{(t_0+t_1,w_0)}$ está definido en $] -\epsilon, \epsilon[$, luego $\Phi_{X,(t_0,w_0)}$ está definido en $[0, t_1 + \epsilon[$, luego en cualquier caso $\Phi_{X,(t_0,w_0)}$ está definido en $[0, \epsilon[$. Igualmente se razona con valores negativos de t , y así concluimos que $\Phi_{X,(t_0,w_0)}$ está definido en $] -\epsilon, \epsilon[$.

En definitiva, resulta que Φ_X está definido en $] -\epsilon, \epsilon[\times \mathbb{R} \times W \subset W_0$, pero esto significa que toda curva integral puede prolongarse al menos $\epsilon/2$ unidades en ambos sentidos, lo que claramente implica que todas las curvas integrales están definidas en \mathbb{R} , es decir, que $\Phi_X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times W \longrightarrow \mathbb{R} \times W$. ■

3.2 Tensores

Los campos vectoriales que hemos estudiado hasta aquí son un caso particular del concepto de campo tensorial que vamos a presentar a continuación. Son muchos los contextos en los que conviene asignar un cierto objeto algebraico a cada punto de una variedad diferencial V . En el caso de un campo vectorial, a cada punto le asigna a una función, pero también tenemos el caso mucho más simple de una función $f \in C^\infty(V)$ que asigna un número $f(p)$ a cada punto de V , o el de df , que le asigna una función $df|_p \in T_p(V)^*$. El concepto de tensor sistematiza todas estas asignaciones en una misma estructura matemática a la vez que permite dar sentido al requisito de que la asignación sea diferenciable.

A partir de aquí supondremos al lector familiarizado con el concepto de tensor sobre un espacio vectorial de dimensión finita, tal y como se presenta en la sección A.1 del apéndice A. Existen dos formas equivalentes de extender el concepto de tensor al contexto de las variedades diferenciales. La primera consiste en definir los tensores como campos tensoriales:

Definición 3.19 Un *campo tensorial* de tipo (r, s) en una variedad diferencial V es una aplicación T que a cada punto $p \in V$ le hace corresponder un tensor $T_p \in \mathcal{T}_s^r(T_p(V))$.

Representaremos por $\tilde{\mathcal{T}}_s^r(V)$ el conjunto de todos los campos tensoriales en V de tipo (r, s) . Claramente tiene estructura de espacio vectorial real con las operaciones definidas puntualmente. Más aún, tiene estructura de módulo sobre el anillo de todas las funciones reales definidas sobre V (con la suma y el producto definidas también puntualmente). El conjunto

$$\tilde{\mathcal{T}}(V) = \bigoplus_{r,s} \tilde{\mathcal{T}}_s^r(V)$$

tiene estructura de álgebra unitaria no conmutativa con el producto tensorial \otimes definido puntualmente.

Cada carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ de V determina los campos tensoriales

$$\partial_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \partial_{x_{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s} \in \tilde{\mathcal{T}}_s^r(U).$$

En cada punto $p \in U$ constituyen una base de $\mathcal{T}_s^r(T_p(V))$, luego si $T \in \tilde{\mathcal{T}}_s^r(V)$, entonces

$$T|_U = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \partial_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \partial_{x_{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}, \quad (3.1)$$

para ciertas funciones $T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} : V \rightarrow \mathbb{R}$ unívocamente determinadas por T . Concretamente,

$$T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}(p) = T_p(dx^{i_1}|_p, \dots, dx^{i_r}|_p, \partial_{x_{j_1}}|_p, \dots, \partial_{x_{j_s}}|_p).$$

Estas funciones se llaman *coordenadas* del campo T respecto a la carta dada. Diremos que un campo tensorial T es *diferenciable* si sus coordenadas respecto a cualquier carta son diferenciables.

Es fácil ver que para que un campo tensorial T sea diferenciable es suficiente con que tenga coordenadas diferenciables respecto a las cartas de un atlas de V . En efecto, si y es una carta alrededor de un punto p en dicho atlas y x es cualquier otra carta alrededor de p , tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_l a_j^l \frac{\partial}{\partial y_l}, \quad dx^i = \sum_k b_k^i dy^k,$$

donde las funciones $a_j^l = \partial_{x_j} y^l$ son diferenciables, al igual que las funciones b_k^i , pues son los coeficientes de la matriz inversa de a_j^l . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} T_p(dx^{i_1}|_p, \dots, dx^{i_r}|_p, \partial_{x_{j_1}}|_p, \dots, \partial_{x_{j_s}}|_p) = \\ \sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \\ l_1, \dots, l_s}} b_{k_1}^{i_1} \cdots b_{k_r}^{i_r} a_{j_1}^{l_1} \cdots a_{j_s}^{l_s} T_p(dy^{k_1}|_p, \dots, dy^{k_r}|_p, \partial_{y_{l_1}}|_p, \dots, \partial_{y_{l_s}}|_p), \end{aligned}$$

lo que prueba que las coordenadas de T en la carta x también son diferenciables.

Definición 3.20 Llamaremos $\mathcal{T}_s^r(V)$ al conjunto de los campos tensoriales diferenciables en la variedad V . Es claro que tiene estructura de espacio vectorial real con las operaciones definidas puntualmente y es un $C^\infty(V)$ -módulo, donde $C^\infty(V)$ es el anillo de las funciones diferenciables de V en \mathbb{R} (también con las operaciones definidas puntualmente). Similarmente, el espacio

$$\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{r,s} \mathcal{T}_s^r(V)$$

tiene estructura de álgebra unitaria no conmutativa con el producto tensorial \otimes definido puntualmente.

Tenemos definidas (también puntualmente, véase A.4) las *contracciones tensoriales*

$$C_i^k : \mathcal{T}_s^r(V) \longrightarrow \mathcal{T}_{s-1}^{r-1}(V).$$

Puesto que las coordenadas de una contracción se obtienen sumando las del tensor de partida, es claro que las contracciones de los campos tensoriales diferenciables son diferenciables.

En la práctica es costumbre llamar simplemente *tensores* a los campos tensoriales diferenciables en una variedad.

En particular, observemos que $\mathcal{T}_0^0(V) = C^\infty(V)$ es el anillo de las funciones diferenciables en V .

Teorema 3.21 *Si V es una variedad diferencial, entonces $\mathcal{T}_0^1(V) = \mathfrak{X}(V)$ es el espacio de los campos vectoriales en V .*

DEMOSTRACIÓN: Por definición, todo $X \in \mathcal{T}_0^1(V)$ puede verse como una aplicación $X : V \longrightarrow TV$ tal que, para todo $p \in V$, se cumple $X_p \in T_p(V)$. Sólo falta probar que la diferenciabilidad de X como campo tensorial coincide con su diferenciabilidad como aplicación entre variedades.

En efecto, dado $q \in V$, tomamos una carta $x : U \longrightarrow \tilde{U}$ de V alrededor de q . Entonces, X es diferenciable en U como aplicación si y sólo si lo es su composición con la carta \tilde{x} de TV , es decir, con la aplicación

$$p \mapsto \tilde{x}(X_p) = (x^1(p), \dots, x^n(p), X_p(\partial_{x_1}|_p), \dots, X_p(\partial_{x_n}|_p)),$$

pero las primeras coordenadas son ciertamente diferenciables y las últimas son las coordenadas de $X|_U$ como tensor, luego la diferenciabilidad de X como aplicación equivale a su diferenciabilidad como campo tensorial. ■

Otro espacio tensorial relevante es $\Lambda^1(V) = \mathcal{T}_1^0(V)$. Cada $\omega \in \Lambda^1(V)$ asigna a cada punto $p \in V$ un elemento $\omega_p \in T_p(V)^*$.

Por ejemplo, si $x : U \longrightarrow \tilde{U}$ es una carta de V , podemos ver a las funciones coordenadas x^i como tensores $x^i \in C^\infty(U)$, a las derivadas parciales ∂_{x_i} como tensores $\partial_{x_i} \in \mathfrak{X}(U)$ y a las diferenciales dx^i como tensores $dx^i \in \Lambda^1(U)$.

Más en general, todo $\omega \in \Lambda^1(X)$ admite en cada abierto coordenado la expresión coordenada

$$\omega|_U = f_1 dx^1 + \dots + f_n dx^n,$$

para ciertas funciones $f_1, \dots, f_n \in C^\infty(U)$.

Por ejemplo, si $f \in C^\infty(V)$, tenemos que $df \in \Lambda^1(V)$, y su expresión coordenada en una carta $x : U \longrightarrow \tilde{U}$ es

$$df|_U = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx^n.$$

Localización Al principio de la sección hemos afirmado que hay dos formas equivalentes de extender el concepto de tensor al contexto de las variedades diferenciales. Ya hemos presentado una de ellas. La segunda consiste en considerar que, del mismo modo que un tensor en un espacio vectorial V no es más que una aplicación multilineal $T : (V^*)^r \times V^s \rightarrow \mathbb{R}$, el concepto análogo cuando V es una variedad diferencial es que un tensor “debe ser” una aplicación $C^\infty(V)$ -multilineal

$$T : \Lambda(V)^r \times \mathfrak{X}(V)^s \rightarrow C^\infty(V).$$

Vamos a ver que, en efecto, los tensores pueden verse como aplicaciones multilineales de este tipo. En primer lugar, si $T \in \mathcal{T}_s^r(V)$, $\omega^1, \dots, \omega^r \in \Lambda^1(V)$ y $X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(V)$, podemos formar la aplicación

$$\bar{T}(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) : V \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\bar{T}(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)(p) = T_p(\omega_p^1, \dots, \omega_p^r, X_{1,p}, \dots, X_{s,p}).$$

Es fácil ver que es diferenciable (pues en un entorno de cada punto p se expresa como combinación de las funciones coordenadas de T , ω_i , X_i). Por consiguiente tenemos definida una aplicación

$$\bar{T} : \Lambda(V)^r \times \mathfrak{X}(V)^s \rightarrow C^\infty(V).$$

que claramente es $C^\infty(V)$ -multilineal y determina al tensor T . Lo que no es inmediato es que toda aplicación de este tipo se corresponde con un tensor, y ése es el contenido del teorema siguiente:

Teorema 3.22 (Lema de localización) *Si V es una variedad diferencial y*

$$\alpha : \Lambda^1(V)^r \times \mathfrak{X}(V)^s \rightarrow C^\infty(V)$$

es $C^\infty(V)$ -multilineal, existe un único tensor $T \in \mathcal{T}_s^r(V)$ tal que $\bar{T} = \alpha$.

DEMOSTRACIÓN: Tomemos $p \in V$, $\omega_0^1, \dots, \omega_0^r \in T_p^*(V)$, $v_1^0, \dots, v_s^0 \in T_p(V)$. Es fácil construir campos $\omega^i \in \Lambda^1(V)$, $X_i \in \mathfrak{X}(V)$ tales que $\omega_p^i = \omega_0^i$, $X_{i,p} = v_i^0$. Por ejemplo, tomamos una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ alrededor de p y consideramos funciones $f_i^j \in C^\infty(V)$ tales que $f_i^j(p)$ sean las coordenadas de v_i^0 en la base $\partial_{x_j}|_p$ y se anulen fuera de un compacto contenido en U . Entonces los campos $\sum_j f_i^j \partial_{x_j}$ son diferenciables en V (entendiendo que valen 0 fuera de U , donde no están definidas las parciales) y toman el valor v_i^0 en p . Similarmente con las formas ω^i . Definimos

$$T_p(\omega_0^1, \dots, \omega_0^r, v_1^0, \dots, v_s^0) = \alpha(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s).$$

Hemos de comprobar que esta definición no depende de los campos que hemos construido. Primeramente veremos que si un campo ω^i o un campo X_i se anula en un abierto U , entonces $\alpha(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)|_U = 0$.

En efecto, para cada $p \in U$ existe una función $f \in C^\infty(V)$ que se anula en un entorno compacto de p y vale 1 fuera de U . Si $\omega^i|_U = 0$, entonces $\omega^i = f\omega^i$, luego

$$\begin{aligned}\alpha(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)(p) &= \alpha(\omega^1, \dots, f\omega^i, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)(p) \\ &= f(p) \alpha(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)(p) = 0.\end{aligned}$$

Si se anula un campo X_i se razona igualmente.

Ahora veamos que si $\omega_p^i = 0$ o bien $X_{i,p} = 0$, entonces

$$\alpha(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)(p) = 0,$$

lo cual justifica que T_p está bien definido. Supongamos concretamente que $X_{i,p} = 0$.

Tomemos una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ alrededor de p y sea $X_i|_U = \sum_k a^k \partial_{x_k}$. Sea $h \in C^\infty(V)$ una función que tome el valor 1 en un entorno compacto de p y que se anule fuera de otro compacto contenido en U . Podemos considerar que las funciones $\tilde{a}^k = ha^k$ y los campos $\tilde{Y}_k = h\partial_{x_k}$ están definidos en todo V , entendiéndose que valen 0 fuera de U . Así, el campo

$$\tilde{X}_i = \sum_k \tilde{a}^k \tilde{Y}_k \in \mathfrak{X}(V)$$

coincide con X_i en un entorno de p luego, por lo que hemos demostrado,

$$\alpha(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)(p) = \sum_k \tilde{a}^k(p) \alpha(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, \tilde{Y}_k, \dots, X_s)(p) = 0,$$

pues estamos suponiendo que $\tilde{a}^k(p) = a^k(p) = 0$ para todo k .

Sólo falta probar que el campo tensorial T es diferenciable, pues claramente $\bar{T} = \alpha$ y la unicidad también es obvia.

Fijada una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$, es claro que, para cada $p \in U$,

$$\begin{aligned}T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}(p) &= T_p(dx^{i_1}|_p, \dots, dx^{i_r}|_p, \partial_{x_{j_1}}|_p, \dots, \partial_{x_{j_s}}|_p) \\ &= \alpha(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s),\end{aligned}$$

donde ω^k es cualquier forma tal que $\omega_p^k = dx^{i_k}|_p$ y X_k es cualquier campo tal que $v_{k,p} = \partial_{x_{j_k}}|_p$. Ahora bien, podemos construir ω^k y X_k de modo que coincidan con dx^{i_k} y $\partial_{x_{j_k}}$ no sólo en p , sino de hecho en un entorno U' de p , con lo que

$$T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}|_{U'} = \alpha(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)|_{U'}$$

Así pues las coordenadas de T son diferenciables en un entorno de cada punto de U , luego son diferenciables en U . ■

Por consiguiente, una forma alternativa de definir un tensor $T \in \mathcal{T}_s^r(V)$ consiste en fijar primero $\omega^1, \dots, \omega^r \in \Lambda^1(V)$ y $X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(V)$ y especificar después cuánto tiene que valer

$$T_p(\omega_p^1, \dots, \omega_p^r, X_{1,p}, \dots, X_{s,p})$$

para cada $p \in V$.

Ejemplo El equivalente del teorema A.3 afirma que $\mathcal{T}_s^1(V)$ puede identificarse con el espacio de las aplicaciones $C^\infty(V)$ -lineales $F : \mathfrak{X}(V)^s \rightarrow \mathfrak{X}(V)$, lo cual se deduce del lema de localización sin más que tener en cuenta que cada F se corresponde biunívocamente con una aplicación $\bar{F} : \Lambda^1(V) \times \mathfrak{X}(V)^s \rightarrow C^\infty(V)$ dada por $\bar{F}(\omega, X_1, \dots, X_s) = \omega(F(X_1, \dots, X_s))$, y a su vez éstas se corresponden biunívocamente con los tensores de tipo $(1, s)$. En particular $\mathcal{T}_1^1(V)$ se identifica con el espacio de las aplicaciones $C^\infty(V)$ -lineales $F : \mathfrak{X}(V) \rightarrow \mathfrak{X}(V)$. ■

Protracciones y retracciones de tensores Si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación diferenciable entre variedades, para cada punto $p \in V$ tenemos que $df|_p : T_p(V) \rightarrow T_{f(p)}(W)$ es una aplicación lineal entre espacios vectoriales, por lo que define protracciones y retracciones entre los espacios correspondientes de tensores contravariantes y covariantes, respectivamente. Al combinar las retracciones locales obtenemos las *retracciones* globales entre los espacios de tensores covariantes

$$f^* : \tilde{\mathcal{T}}_s^0(W) \rightarrow \tilde{\mathcal{T}}_s^0(V)$$

dadas por

$$f^*(T)_p(v_1, \dots, v_s) = T_{f(p)}(df|_p(v_1), \dots, df|_p(v_s)).$$

Si f es un difeomorfismo (o simplemente un difeomorfismo local, es decir, si las diferenciales $df|_p$ son isomorfismos) podemos extender la retracción a tensores arbitrarios:

$$f^* : \tilde{\mathcal{T}}_s^r(W) \rightarrow \tilde{\mathcal{T}}_s^r(V)$$

mediante

$$f^*(T)_p(\omega^1, \dots, \omega^r, v_1, \dots, v_s) = T_{f(p)}(df|_p^{-1} \circ \omega^1, \dots, df|_p^{-1} \circ \omega^r, df|_p(v_1), \dots, df|_p(v_s)).$$

En cambio, las *protracciones* sólo se pueden combinar cuando f es un difeomorfismo, y entonces pueden definirse para tensores arbitrarios. Concretamente

$$f_* : \tilde{\mathcal{T}}_s^r(V) \rightarrow \tilde{\mathcal{T}}_s^r(W)$$

viene dada por

$$f_*(T)_p(\omega_1, \dots, \omega_r, v_1, \dots, v_s) = T_{f^{-1}(p)}(df|_{f^{-1}(p)} \circ \omega_1, \dots, df|_{f^{-1}(p)} \circ \omega_r, df|_{f^{-1}(p)}^{-1}(v_1), \dots, df|_{f^{-1}(p)}^{-1}(v_s)).$$

Es claro que son aplicaciones lineales que pueden combinarse para formar aplicaciones lineales

$$f^* : \bigoplus_{s \geq 0} \tilde{\mathcal{T}}_s^0(W) \rightarrow \bigoplus_{s \geq 0} \tilde{\mathcal{T}}_s^0(V)$$

o bien

$$f^* : \bigoplus_{r,s \geq 0} \tilde{\mathcal{T}}_s^0(W) \longrightarrow \bigoplus_{r,s \geq 0} \tilde{\mathcal{T}}_s^0(V), \quad f_* : \bigoplus_{r,s \geq 0} \tilde{\mathcal{T}}_s^r(V) \longrightarrow \bigoplus_{r,s \geq 0} \tilde{\mathcal{T}}_s^0(W),$$

para el caso de un difeomorfismo, que además son homomorfismos de álgebras, es decir, que cumplen

$$f^*(F \otimes G) = f^*(F) \otimes f^*(G), \quad f_*(F \otimes G) = f_*(F) \otimes f_*(G).$$

Más aún, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$, $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$, y las retracciones y proyecciones de la identidad en una variedad V son las identidades en los espacios de tensores correspondientes. Esto implica que si f es un difeomorfismo entonces f^* y f_* son isomorfismos, y en tal caso $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$, que coincide a su vez con la restricción de f_* al álgebra de los tensores covariantes.

Observemos también que si $g \in C^\infty(W)$ entonces

$$f^*(g) = f \circ g, \quad f^*(dg) = d(f \circ g).$$

En particular $f^*(g)$ y $f^*(dg)$ son tensores diferenciables.

Más en general, si $T \in \mathcal{T}_s^0(W)$, para cada carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ de W tenemos que $T|_U$ es suma de tensores de la forma

$$g dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_s},$$

donde g y las coordenadas x^{i_j} son diferenciables, luego $f^*(T)|_{f^{-1}[U]}$ es suma de tensores de la forma

$$(f|_{f^{-1}[U]} \circ g) d(f|_{f^{-1}[U]} \circ x^{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(f|_{f^{-1}[U]} \circ x^{i_s}) \in \mathcal{T}_s^0(f^{-1}[U]).$$

Como los abiertos $f^{-1}[U]$ cubren V , concluimos que $f^*(T) \in \mathcal{T}_s^0(V)$, luego f^* se restringe a un homomorfismo de álgebras

$$f^* : \bigoplus_{s \geq 0} \mathcal{T}_s^0(W) \longrightarrow \bigoplus_{s \geq 0} \mathcal{T}_s^0(V).$$

Observemos que si V es abierto en W e $i : V \rightarrow W$ es la inclusión, entonces simplemente $i^*(T) = T|_V$.

Para las proyecciones tenemos que si $g \in C^\infty(V)$ entonces $f_*(g) = f^{-1} \circ g$, $f_*(dg) = d(f^{-1} \circ g)$, y si $X \in \mathfrak{X}(V)$ entonces $f_*(X)$ es campo el definido en 3.16. En efecto, con ambas definiciones llegamos a que si $\omega \in T_p(W)^*$, se cumple que

$$f_*(X)_p(\omega) = \omega(df|_{f^{-1}(p)}(X_{f^{-1}(p)})).$$

Ahora el mismo razonamiento que hemos empleado con la retracción implica que la proyección se restringe a un isomorfismo de álgebras

$$f_* : \bigoplus_{r,s \geq 0} \mathcal{T}_s^r(V) \longrightarrow \bigoplus_{r,s \geq 0} \mathcal{T}_s^0(W).$$

Ejemplo A menudo las retracciones se vuelven “invisibles” en la práctica si se usan los convenios de notación adecuados. Por ejemplo, en \mathbb{R}^3 tenemos definidas las funciones coordenadas $x, y, z \in \mathcal{T}_0^0(\mathbb{R}^3)$. Si ahora consideramos la inclusión $i : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, resulta que $i^*(x) = i \circ x = x|_{S^2}$, pero en la práctica podemos seguir escribiendo x, y, z para estas restricciones, considerándolas definidas sólo sobre S^2 . Observemos que no son lo mismo. En \mathbb{R}^3 , sabiendo el valor que toman x, y sobre un punto no podemos decir nada sobre el valor que toma z en dicho punto, pero, como elementos de $\mathcal{T}_0^0(S^2)$, las tres funciones satisfacen la relación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Del mismo modo, no son lo mismo $dx, dy, dz \in \mathcal{T}_1^0(\mathbb{R}^3)$ que sus retracciones $i^*(dx), i^*(dy), i^*(dz) \in \mathcal{T}_1^0(S^2)$. Concretamente, $i^*(dx) = dx|_{S^2}$, pero podemos seguir llamándola dx siguiendo el convenio de representar por x a $x|_{S^2}$. Ahora bien, cuando consideramos a dx, dy, dz como elementos de $\mathcal{T}_1^0(S^2)$ tenemos la relación¹

$$x dx + y dy + z dz = 0,$$

que es falsa en $\mathcal{T}_1^0(\mathbb{R}^3)$. Consideremos ahora el tensor

$$T = dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz \in \mathcal{T}_2^0(\mathbb{R}^3),$$

cuya interpretación geométrica es muy clara: para cada punto $p \in \mathbb{R}^3$, la forma bilineal T_p es el producto escalar en $T_p(\mathbb{R}^3)$. Nuevamente, podemos considerar que $i^*(T)$ viene dado por la misma expresión, sin más que entender ahora que x, y, z son las restricciones a S^2 de las funciones coordenadas. Considerando ahora las relaciones

$$\begin{aligned} dx &= \cos \theta \cos \phi d\theta - \sin \theta \sin \phi d\phi \\ dy &= \cos \theta \sin \phi d\theta + \sin \theta \cos \phi d\phi \\ dz &= -\sin \theta d\theta, \end{aligned}$$

obtenemos una expresión alternativa válida sobre el dominio de una carta de coordenadas esféricas:

$$T = d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\phi \otimes d\phi.$$

Esta expresión nos permite calcular el producto escalar de dos vectores tangentes cuando los tenemos expresados en términos de la base $\partial_\theta, \partial_\phi$.

Ahora consideremos la parametrización asociada a las coordenadas esféricas, es decir, la inversa de la carta:

$$X : \tilde{U} =]0, \pi[\times]0, 2\pi[\rightarrow S^2.$$

¹Por ejemplo, en un abierto en el que x, y formen una carta, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 = d1 &= d(x^2 + y^2 + z^2) = 2x dx + 2y dy + \partial_x(z^2) dx + \partial_y(z^2) dy = \\ &= 2x dx + 2y dy + 2z \partial_x z dx + 2z \partial_y z dy = 2x dx + 2y dy + 2z dz. \end{aligned}$$

Podemos considerar que la retracción $X^*(T) \in \mathcal{T}_2^0(\tilde{U})$ tiene la misma expresión

$$X^*(T) = d\theta \otimes d\theta + \text{sen}^2 \theta d\phi \otimes d\phi$$

si entendemos que ahora θ y ϕ son $X \circ \theta$ y $X \circ \phi$, es decir, las funciones coordenadas de \mathbb{R}^2 (pues $(\theta, \phi) = X^{-1}$, luego $\theta(X(u, v)) = u$ y $\phi(X(u, v)) = v$). Observemos que estas identificaciones son completamente naturales: si pensamos en los elementos de \tilde{U} como los pares posibles de coordenadas esféricas de los puntos de U , es natural llamar θ, ϕ tanto a las proyecciones $\theta, \phi : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ como a las coordenadas $\theta, \phi : U \rightarrow \mathbb{R}$. Lo que hemos observado es que, con estas identificaciones, T y $X^*(T)$ están determinados por la misma expresión formal, aunque interpretada de dos formas distintas. ■

Tensores sobre aplicaciones diferenciables En ocasiones vamos a necesitar un concepto de campo tensorial más general que el que hemos considerado hasta aquí:

Definición 3.23 Si $f : W \rightarrow V$ es una aplicación diferenciable, un *campo tensorial* de tipo (r, s) sobre f es una aplicación T que a cada punto $p \in W$ le hace corresponder un tensor $T_p \in \mathcal{T}_s^r(T_{f(p)}(V))$.

Representaremos por $\tilde{\mathcal{J}}_s^r(W, V)_f$ al conjunto de todos los campos tensoriales sobre f . Claramente tiene estructura de espacio vectorial real, y la suma directa

$$\tilde{\mathcal{J}}(W, V)_f = \bigoplus_{r,s} \tilde{\mathcal{J}}_s^r(W, V)_f$$

tiene estructura de álgebra unitaria con el producto tensorial definido puntualmente. Si $x : U \rightarrow \tilde{U}$ es una carta de V , $U_0 = f^{-1}[U]$, $T \in \tilde{\mathcal{J}}_s^r(W, V)_f$ y $p \in U_0$, entonces

$$T|_p = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}(p) \partial_{x_{i_1}}|_{f(p)} \otimes \cdots \otimes \partial_{x_{i_r}}|_{f(p)} \otimes dx^{j_1}|_{f(p)} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}|_{f(p)},$$

para ciertas funciones $T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} : U_0 \rightarrow \mathbb{R}$, a las que llamaremos *coordenadas* de T en la carta x . Diremos que T es diferenciable si lo son sus coordenadas respecto de cualquier carta.

Llamaremos $\mathcal{J}_s^r(W, V)_f$ al conjunto de los campos tensoriales diferenciables sobre f , que claramente es un \mathbb{R} -espacio vectorial y un $C^\infty(W)$ -módulo, y

$$\mathcal{J}(W, V)_f = \bigoplus_{r,s} \mathcal{J}_s^r(W, V)_f.$$

Definimos $\mathfrak{X}(W, V)_f = \mathcal{J}_0^1(W, V)_f$, $\Lambda^1(W, V)_f = \mathcal{J}_1^0(W, V)_f$.

Omitiremos la f cuando se trate de la inclusión. En estos términos, es claro que $\mathcal{J}(V) = \mathcal{J}(V, V)$.

Todos los resultados que hemos demostrado para tensores en una variedad V se generalizan trivialmente a tensores sobre una aplicación diferenciable arbitraria con meros cambios superficiales en las pruebas.² Hemos preferido dar los argumentos en el caso de una única variedad simplemente por no complicar la notación. Por ejemplo, el lema de localización identifica los tensores de $\mathcal{T}_s^r(W, V)_f$ con las aplicaciones multilineales

$$T : \Lambda^1(W, V)_f^r \times \mathfrak{X}(W, V)_f^s \longrightarrow C^\infty(W).$$

Formas diferenciales Las formas diferenciales son una clase particular de tensores que usaremos más adelante para extender el cálculo integral al contexto de las variedades diferenciales. Remitimos a la sección A.2 para una exposición del concepto análogo sobre espacios vectoriales que ahora vamos a extender al contexto de las variedades diferenciales.

Definición 3.24 Una k -forma diferencial en una variedad diferencial V es una aplicación ω que a cada $p \in V$ le hace corresponder un tensor $\omega_p \in A^k(T_p(V))$.

Representaremos por $\tilde{\Lambda}^k(V)$ el conjunto de todas las k -formas diferenciales en V . Claramente es un subespacio vectorial de $\tilde{\mathcal{T}}_k^0(V)$, y también un submódulo sobre el anillo de todas las funciones reales definidas sobre V (con la suma y el producto definidas también puntualmente). El conjunto

$$\tilde{\Lambda}(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \tilde{\Lambda}^k(V)$$

tiene estructura de álgebra unitaria no conmutativa con el producto exterior \wedge definido puntualmente.

Cada carta $x : U \longrightarrow \tilde{U}$ de V determina las formas diferenciales

$$dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} \in \tilde{\Lambda}^k(U), \quad \text{para } j_1 < \cdots < j_k.$$

En cada punto $p \in U$ constituyen una base de $A^k(T_p(V))$. Por consiguiente, si $\omega \in \tilde{\Lambda}^k(V)$, entonces

$$\omega|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \quad (3.2)$$

para unas funciones $\alpha_{i_1 \cdots i_k} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ unívocamente determinadas por ω . Concretamente,

$$\alpha_{i_1 \cdots i_k}(p) = \omega(\partial_{x_{i_1}}|_p, \dots, \partial_{x_{i_k}}|_p).$$

²Para definir las retracciones tenemos que partir de un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} w & \xrightarrow{f} & v \\ g \uparrow & & \uparrow h \\ w_0 & \xrightarrow{f_0} & v_0 \end{array}$$

pero no necesitaremos este hecho.

Diremos que una forma diferencial $\omega \in \tilde{\Lambda}^k(V)$ es *diferenciable* si sus coordenadas respecto de cualquier carta son diferenciables.

Como en el caso de tensores arbitrarios, para que ω sea diferenciable basta con que lo sean sus coordenadas respecto de las cartas de un atlas, porque si (U', y) es otra carta, $p \in U'$ y (U, x) es una carta alrededor de p del atlas indicado, podemos expresar

$$dx^i(p) = \frac{\partial x_i}{\partial y_1} \Big|_p dy^1|_p + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial y_n} \Big|_p dy^n|_p.$$

Al sustituir en el miembro derecho de (3.2) y desarrollar los productos exteriores obtenemos que los coeficientes $\beta_{i_1 \dots i_k}$ de ω en la nueva carta se obtienen a partir de los coeficientes en la inicial mediante sumas y productos por las derivadas parciales que aparecen en la igualdad anterior, por lo que son diferenciables en p .

Llamaremos $\Lambda^k(V)$ al espacio de las k -formas diferenciales diferenciables. Es claro que se trata de un espacio vectorial con las operaciones definidas puntualmente. Definimos el *álgebra de Grassmann* de V como la suma directa

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(V) = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(V).$$

Claramente es un álgebra con el producto exterior. A sus elementos los llamaremos simplemente *formas diferenciales*, es decir, que al hablar de formas diferenciales entenderemos que son diferenciables.

Tenemos que $\Lambda^0(V)$ es el conjunto de las funciones de clase C^∞ definidas sobre V . Si $f \in \Lambda^0(V)$ y $\omega \in \Lambda(V)$ escribiremos $f\omega$ en lugar de $f \wedge \omega$. Notemos que $(f\omega)(p) = f(p)\omega(p)$.

En el capítulo siguiente quedará claro qué información geométrica contienen las formas diferenciales, lo que a su vez nos permitirá entender por qué son relevantes en la geometría diferencial. De momento terminamos la descripción del álgebra básica de las formas diferenciales observando que las retracciones de formas diferenciales son formas diferenciales:

Retracciones de formas diferenciales Si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación diferenciable entre variedades diferenciales, se comprueba inmediatamente que la retracción de un tensor covariante antisimétrico es antisimétrica, por lo que f^* se restringe a un homomorfismo de álgebras

$$f^* : \tilde{\Lambda}(W) \rightarrow \tilde{\Lambda}(V).$$

Se siguen cumpliendo las relaciones $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ y $1^* = 1$, por lo que si f es un difeomorfismo entonces f^* es un isomorfismo. Además, si $g \in C^\infty(W)$ tenemos que

$$f^*(g) = f \circ g, \quad f^*(dg) = d(f \circ g),$$

por lo que $f^*(g)$ y $f^*(dg)$ son diferenciables. Como las formas g y dg generan localmente el álgebra $\Lambda(W)$ concluimos, como en el caso de tensores covariantes arbitrarios, que f^* se restringe a un homomorfismo de álgebras

$$f^* : \Lambda(W) \longrightarrow \Lambda(V),$$

que es un isomorfismo cuando f es un difeomorfismo. Más aún, es inmediato que en tal caso $(f^{-1})^*$ es la restricción a $\Lambda(V)$ de la protracción f_* , por lo que también tenemos un isomorfismo de álgebras $f_* : \Lambda(V) \longrightarrow \Lambda(W)$.

Formas sobre aplicaciones diferenciables Dejamos al lector la generalización obvia de las definiciones precedentes al caso de tensores sobre una aplicación diferenciable $f : W \longrightarrow V$, es decir, la definición del álgebra de Grassmann

$$\Lambda(W, V)_f = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k(W, V)_f.$$

3.3 La derivada de Lie

Hemos definido los vectores tangentes abstractos en un punto p de una variedad diferencial V como las derivaciones en el conjunto $C_p^\infty(V)$ de funciones diferenciables en un entorno de p . Ahora veremos que los campos de vectores tangentes $X \in \mathfrak{X}(V)$ pueden identificarse con las derivaciones en el espacio vectorial $C^\infty(V)$. Para ello damos un concepto general de derivación en un álgebra:

Definición 3.25 Si K es un cuerpo, una *derivación* en una K -álgebra unitaria A es una aplicación lineal $\mathcal{D} : A \longrightarrow A$ que cumpla la relación

$$\mathcal{D}(fg) = \mathcal{D}(f)g + f\mathcal{D}(g).$$

En estos términos sabemos que un espacio tangente $T_p(V)$ se identifica con el conjunto de las derivaciones del álgebra de gérmenes $G_p(V)$.

Observemos que la regla del producto implica que $\mathcal{D}(1) = 2\mathcal{D}(1)$, luego $\mathcal{D}(1) = 0$ y, por linealidad, todas las constantes de A tienen derivada nula (respecto de cualquier derivación).

La prueba del teorema 2.3 vale literalmente para demostrar que toda derivación en $C^\infty(V)$ es local, en el sentido de que si dos funciones coinciden en un abierto, sus derivadas también coinciden. Más aún, tenemos lo siguiente:

Teorema 3.26 Si U es un subconjunto abierto en una variedad diferencial V y $\mathcal{D} : C^\infty(V) \longrightarrow C^\infty(V)$ es una derivación, entonces existe una única derivación $\mathcal{D}|_U : C^\infty(U) \longrightarrow C^\infty(U)$ tal que, para todo $f \in C^\infty(V)$, se cumple que $(\mathcal{D}f)|_U = \mathcal{D}|_U(f|_U)$.

DEMOSTRACIÓN: Observemos en primer lugar que si $f, g \in C^\infty(V)$ cumplen $f|_U = g|_U$, entonces $(\mathcal{D}f)|_U = (\mathcal{D}g)|_U$. Por linealidad basta probar que si $f|_U = 0$ entonces $(\mathcal{D}f)|_U = 0$.

Dado $p \in U$, podemos tomar una función $r \in C^\infty(V)$ que valga 0 en un entorno de p y valga 1 en $V \setminus U$. Así $f = fr$, luego

$$(\mathcal{D}f)(p) = (\mathcal{D}f)(p)r(p) + f(p)(\mathcal{D}r)(p) = (\mathcal{D}f)(p) \cdot 0 + 0 \cdot (\mathcal{D}r)(p) = 0.$$

Ahora, observamos que si $f \in C^\infty(U)$ y $p \in U$, existe $\bar{f} \in C^\infty(V)$ que coincide con f en un entorno de p . Basta tomar una función $r \in C^\infty(V)$ que valga 1 en un entorno de p y que se anule en $V \setminus U$ y considerar $\bar{f} = fr$.

Dada $f \in C^\infty(U)$, para cada $p \in U$ tomamos una función $\bar{f} \in C^\infty(U)$ que coincida con f en un entorno de p y definimos $(\mathcal{D}|_U)(f)(p) = \mathcal{D}(\bar{f})(p)$. Observemos que la definición no depende de la elección de \bar{f} , pues si tomamos otra función en las mismas condiciones, ambas coinciden en un entorno de p , luego por la parte ya probada sus derivadas también coinciden en dicho entorno.

Es inmediato comprobar que $\mathcal{D}|_U$ es una derivación en $C^\infty(U)$, así como que se cumple la relación requerida. La unicidad también es clara, pues si \mathcal{D}^* es otra derivación que cumple lo mismo, para cada $f \in C^\infty(U)$ y cada $p \in U$ tomamos una función $\bar{f} \in C^\infty(V)$ que coincida con f en un entorno de p y tenemos que

$$\mathcal{D}^*(f)(p) = \mathcal{D}^*(\bar{f}|_U)(p) = \mathcal{D}(\bar{f})(p) = \mathcal{D}|_U(f)(p),$$

donde en la primera igualdad hemos usado que, como ya hemos probado, si dos funciones coinciden en un entorno de p , sus derivadas (respecto de cualquier derivación) también lo hacen. ■

Ahora ya podemos mostrar la relación global entre campos de vectores y las derivaciones:

Teorema 3.27 *Si V es una variedad diferencial, existe una biyección $X \mapsto \mathcal{L}_X$ entre los campos de vectores tangentes $X \in \mathfrak{X}(T)$ y las derivaciones de $C^\infty(V)$, dada por $\mathcal{L}_X(f)(p) = X_p(f) = df|_p(X_p)$.*

DEMOSTRACIÓN: Ciertamente, $\mathcal{L}_X(f) \in C^\infty(V)$, pues, dado $p \in V$, podemos tomar una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ alrededor de p , de modo que $X|_U = \sum_i a_i \partial_{x_i}$, para ciertas funciones $a^i \in C^\infty(U)$. Entonces

$$\mathcal{L}_X(f)|_U = \sum_i a^i \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^\infty(U).$$

El hecho de que cada X_p sea una derivación implica inmediatamente que \mathcal{L}_X también lo es.

Para probar que $X \mapsto \mathcal{L}_X$ es inyectiva basta ver que si un campo X cumple $X_p(f) = 0$ para toda $f \in C^\infty(V)$, entonces lo mismo vale para toda $f \in C_p^\infty(V)$.

Ello se debe a que si f está definida en un entorno U_0 de p , podemos tomar una función $g \in C^\infty(V)$ que valga 1 en un entorno de p y 0 en $V \setminus U_0$. Así, $fg \in C^\infty(V)$ y coincide con f en un entorno de p , luego $X_p(f) = X_p(fg) = 0$.

Suponemos ahora que $\mathcal{D} : C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(V)$ es una derivación y definimos $X_p \in T_p(V)$ mediante $X_p(f) = \mathcal{D}(f)$, donde $f \in C^\infty(V)$ es cualquier función que coincida con f en un entorno de p . (Acabamos de ver que siempre es posible encontrar tal f y el carácter local de las derivaciones hace que $X_p(f)$ no dependa de la elección de f .)

Tenemos así un campo vectorial $X : V \rightarrow TV$, pero falta probar que es diferenciable. Para ello fijamos un punto $p \in V$, tomamos una carta x alrededor de p y consideramos funciones $\bar{x}_i \in C^\infty(V)$ que coincidan con las funciones coordenadas x^i en un mismo entorno U_0 de p . Así

$$X|_{U_0} = \sum_i \mathcal{D}(\bar{x}^i)|_{U_0} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{U_0} \in \mathfrak{X}(U_0).$$

De la propia definición de X es inmediato que $\mathcal{L}_X = \mathcal{D}$. ■

Definición 3.28 Si V es una variedad diferencial y $X \in \mathfrak{X}(V)$ es un campo de vectores tangentes, la derivación \mathcal{L}_X dada por el teorema anterior se llama *derivada de Lie* asociada a X .

Puesto que, para cada punto $p \in V$ y cada $f \in C^\infty(V)$, tenemos que $\mathcal{L}_X(f)(p) = X_p(f)$, resulta natural escribir también $\mathcal{L}_X(f) = X(f)$, lo que en la práctica significa identificar cada campo X con su derivada de Lie.

De la propia definición se sigue también que si $U \subset V$ es un abierto, entonces $\mathcal{L}_X|_U = \mathcal{L}_{X|_U}$.

La relación $\mathcal{L}_X(f)_p = X_p(f) = df|_p(X_p)$ muestra que $\mathcal{L}_X(f)$ no depende realmente del campo X , sino únicamente del valor X_p , y permite interpretar la derivada de Lie como la derivada direccional de f en el punto p en la dirección del vector X_p . El flujo asociado al campo X nos permite llevar más lejos esta interpretación, pues claramente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(f)(p) &= X_p(f) = \Phi'_{X,p}(0)(f) = d\Phi_{X,p}|_0(\partial_t|_0)(f) = \frac{\partial(\Phi_{X,p} \circ f)}{\partial t} \Big|_0 \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\Phi_{X,p}(t)) - f(p)}{t}. \end{aligned}$$

Esto significa que $\mathcal{L}_X(f)(p)$ es la velocidad a la que va a variar f una partícula que fluya según el campo de velocidades X .

En el caso en que f está definida en un abierto de \mathbb{R}^n podemos tomar como X el campo constante igual a v , cuyo flujo es $\Phi_{X,p}(t) = p + tv$, y entonces obtenemos que

$$\mathcal{L}_X(f)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t},$$

que no es sino la definición usual de derivada direccional de f en la dirección de v .

Nos planteamos ahora la posibilidad de definir análogamente una derivada $\mathcal{L}_X(Y)_p \in T_p(V)$ de un campo vectorial $Y \in \mathfrak{X}(V)$, que indique la variación de Y en la dirección X_p . Lo “natural” sería definir

$$\mathcal{L}_X(Y)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_{\Phi_{X,p}(t)} - Y_p}{t},$$

pero sucede que esto no tiene sentido, ya que $Y_{\Phi_{X,p}(t)} \in T_{\Phi_{X,p}(t)}(V)$, $Y_p \in T_p(V)$ son vectores de espacios vectoriales distintos, luego no podemos restarlos. Una forma de arreglar este problema es devolver $Y_{\Phi_{X,p}(t)}$ a $T_p(V)$ usando la propia diferencial del flujo $d\Phi_{X,-t}|_{\Phi_X(t,p)} : T_{\Phi_X(t,p)}(V) \rightarrow T_p(V)$ y definir, pues:

$$\mathcal{L}_X(Y)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\Phi_{X,-t}|_{\Phi_X(t,p)}(Y_{\Phi_X(t,p)}) - Y_p}{t}. \quad (3.3)$$

Vamos a ver que así obtenemos ciertamente un concepto de interés, pero lo cierto es que esta introducción “por necesidad” de la diferencial del flujo no responde a lo que sería una forma “natural” de medir la variación del campo Y en una dirección dada. En el capítulo VI retomaremos este problema y pondremos de manifiesto que el hecho de que no tengamos ninguna forma natural de comparar dos vectores de espacios tangentes distintos —y que, por consiguiente, hayamos tenido que recurrir a la diferencial del flujo simplemente porque la teníamos a mano en este contexto— es un indicio de que el concepto de variedad diferencial que estamos considerando no es lo suficientemente potente como para generalizar todo el cálculo diferencial en \mathbb{R}^n , sino que a la larga será necesario dotar a las variedades diferenciales de alguna estructura adicional. No obstante, por esta misma razón, el mérito de la derivada de Lie de un campo vectorial definida mediante (3.3) es que proporciona una derivación útil definible en cualquier variedad diferencial, sin necesidad de ninguna estructura adicional.

Aunque podríamos usar (3.3) como definición de derivada de Lie de un campo vectorial, vamos a dar una definición alternativa más manejable (que en particular, no involucra el concepto de flujo, por lo que es válida incluso en variedades con frontera):

Definición 3.29 Si V es una variedad diferencial y $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$, definimos el *corchete de Lie* de X e Y como el campo vectorial que, para cada $p \in V$ y $f \in C_p^\infty(V)$, viene dado por

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)).$$

Para probar que ciertamente $[X, Y] \in \mathfrak{X}(V)$, es decir, que es diferenciable, basta calcular su expresión local en el dominio de una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$. Una aplicación rutinaria de las definiciones muestra que si

$$X|_U = \sum_i u^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y|_U = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

entonces

$$[X, Y]|_U = \sum_k \left(\sum_i \left(u^i \frac{\partial v^k}{\partial x_i} - v^i \frac{\partial u^k}{\partial x_i} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \in \mathfrak{X}(U), \quad (3.4)$$

lo que prueba la diferenciabilidad de $[X, Y]_p$. En particular vemos que

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0.$$

Podemos considerar al corchete de Lie como una operación interna en $\mathfrak{X}(V)$, pero hay que tener presente que no es asociativa. Sus propiedades básicas son que se trata de una forma bilineal (considerando a $\mathfrak{X}(V)$ como \mathbb{R} -espacio vectorial), antisimétrica, pues claramente

$$[X, Y] = -[Y, X],$$

y en lugar de la asociatividad cumple la llamada *identidad de Jacobi*:

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0.$$

(Notemos que los tres campos se permutan cíclicamente.)

La comprobación de la identidad de Jacobi es una mera rutina. Conviene probar, equivalentemente, que las derivadas de Lie correspondientes suman 0, es decir, que basta comprobar que la suma se anula sobre cualquier función $f \in C^\infty(V)$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} [[X, Y], Z](f) &= [X, Y](Z(f)) - Z([X, Y](f)) = \\ &= X(Y(Z(f))) - Y(X(Z(f))) - Z(X(Y(f)) - Y(X(f))) = \\ &= X(Y(Z(f))) - Y(X(Z(f))) - Z(X(Y(f))) + Z(Y(X(f))). \end{aligned}$$

Al desarrollar análogamente los otros dos corchetes y sumar se cancelan todos los términos.

Seguidamente probaremos que el corchete de Lie define a su vez una derivación en el espacio $\mathfrak{X}(V)$, pero en un sentido que aún no tenemos definido:

Definición 3.30 Si V es una variedad diferencial y \mathcal{D} es una derivación en $C^\infty(V)$, una *derivación* en $\mathfrak{X}(V)$ (con respecto a la derivación dada) es una aplicación lineal $\mathcal{D} : \mathfrak{X}(V) \rightarrow \mathfrak{X}(V)$ tal que

$$\mathcal{D}(fY) = \mathcal{D}(f)Y + f\mathcal{D}Y, \quad \text{para todo } f \in C^\infty(V), \quad Y \in \mathfrak{X}(V).$$

Puesto que toda derivación de $C^\infty(V)$ es de la forma \mathcal{L}_X , para cierto campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(V)$, podemos definir equivalentemente el concepto de derivación \mathcal{D} en $\mathfrak{X}(V)$ respecto de un campo $X \in \mathfrak{X}(V)$ con la condición

$$\mathcal{D}(fY) = X(f)Y + f\mathcal{D}Y.$$

Ahora observamos que si $X \in \mathfrak{X}(V)$, la aplicación $\mathcal{L}_X(Y) = [X, Y]$ es una derivación en $\mathfrak{X}(V)$ respecto de la derivada de Lie \mathcal{L}_X en $C^\infty(V)$, que recibe el nombre de *derivada de Lie* en $\mathfrak{X}(V)$ asociada a X .

En efecto, se cumple que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(fY)(g) &= [X, fY](g) = X(fY(g)) - fY(X(g)) = \\ &= X(f)Y(g) + fX(Y(g)) - fY(X(g)) = (\mathcal{L}_X(f)Y + f[X, Y])(g) = \\ &= (\mathcal{L}_X(f)Y + f\mathcal{L}_X(Y))(g). \end{aligned}$$

De la definición del corchete de Lie se sigue que $\mathcal{L}_X(Y) = -\mathcal{L}_Y(X)$. También conviene observar que, en términos de \mathcal{L}_X , la identidad de Jacobi que satisface el corchete de Lie admite una expresión más “familiar”:

$$\mathcal{L}_X[Y, Z] = [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z].$$

Otra expresión alternativa es

$$\mathcal{L}_{[X, Y]}Z = \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y Z) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X Z),$$

que, formalmente, podríamos resumir así: $\mathcal{L}_{[X, Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$.

Más adelante demostraremos que la derivada de Lie satisface la relación (3.3), pero antes conviene definir la derivada de Lie de tensores cualesquiera, pues de hecho (3.3) se generaliza al caso de tensores arbitrarios. Para ello observamos en primer lugar que la prueba del teorema 3.26 se adapta trivialmente para probar la versión siguiente:

Teorema 3.31 *Si U es un subconjunto abierto en una variedad diferencial V y $\mathcal{D} : \mathfrak{T}(V) \rightarrow \mathfrak{T}(V)$ es una derivación, entonces existe una única derivación $\mathcal{D}|_U : \mathfrak{T}(U) \rightarrow \mathfrak{T}(U)$ tal que, para todo tensor $T \in \mathfrak{T}(V)$, se cumple que $(\mathcal{D}T)|_U = \mathcal{D}|_U(T|_U)$.*

En particular, si dos tensores coinciden en un entorno de un punto, sus derivadas (respecto de cualquier derivación) también coinciden.

Veamos ahora un resultado general sobre existencia de derivaciones en el álgebra $\mathfrak{T}(V)$:

Teorema 3.32 *Sea V una variedad diferencial y supongamos definido un par de derivaciones*

$$\mathcal{D} : C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(V), \quad \text{y} \quad \mathcal{D} : \mathfrak{X}(V) \rightarrow \mathfrak{X}(V).$$

Entonces existe una única derivación $\mathcal{D} : \mathfrak{T}(V) \rightarrow \mathfrak{T}(V)$ que conserva el grado de varianza y covarianza de cada tensor homogéneo, que extiende a las derivaciones dadas y que conmuta con las contracciones de tensores.

DEMOSTRACIÓN: Veamos primero la unicidad. Si $\omega \in \Lambda^1(V)$, sea $X \in \mathfrak{X}(V)$, de modo que $\omega \otimes X \in \mathfrak{T}_1^1(V)$. Entonces³

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\omega(X)) &= \mathcal{D}(C_1^1(\omega \otimes X)) = C_1^1(\mathcal{D}(\omega \otimes X)) \\ &= C_1^1(\mathcal{D}(\omega) \otimes X + \omega \otimes \mathcal{D}(X)) = (\mathcal{D}\omega)(X) + \omega(\mathcal{D}X). \end{aligned}$$

Así pues,

$$(\mathcal{D}\omega)(X) = \mathcal{D}(\omega(X)) - \omega(\mathcal{D}X). \quad (3.5)$$

Según el lema de localización, esto determina a \mathcal{D} sobre $\Lambda^1(V)$.

Sea ahora $T \in \mathfrak{T}_s^r(V)$. Fijemos $X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(V)$ y $\omega^1, \dots, \omega^r \in \Lambda^1(V)$. Consideramos el tensor

$$T \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_s \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^r \in \mathfrak{T}_{2s}^{2r}(V)$$

y llamamos C a la composición de las contracciones $(i, s+i)$ y $(r+j, j)$. Como la derivación \mathcal{D} conmuta con C podemos calcular

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)) &= \mathcal{D}(C(T \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_s \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^r)) \\ &= C\left(\mathcal{D}T \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_s \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^r \right. \\ &\quad \left. + \sum_i T \otimes X_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{D}X_i \otimes \dots \otimes X_s \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^r \right. \\ &\quad \left. + \sum_j T \otimes X_1 \otimes \dots \otimes X_s \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \mathcal{D}\omega^j \otimes \dots \otimes \omega^r \right) \\ &= (\mathcal{D}T)(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) + \sum_i T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, \mathcal{D}X_i, \dots, X_s) \\ &\quad + \sum_j T(\omega^1, \dots, \mathcal{D}\omega^j, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s). \end{aligned}$$

Así pues, $\mathcal{D}T$ está determinada por la relación

$$(\mathcal{D}T)(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) = \mathcal{D}(T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)) \quad (3.6)$$

$$- \sum_i T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, \mathcal{D}X_i, \dots, X_s) - \sum_j T(\omega^1, \dots, \mathcal{D}\omega^j, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s).$$

Veamos ahora la existencia de \mathcal{D} . En primer lugar, definimos \mathcal{D} sobre $\Lambda^1(V)$ mediante (3.5). Esto es correcto por el lema de localización, pues es fácil ver que el miembro derecho es $C^\infty(V)$ -lineal. También es inmediato que, así definida, \mathcal{D} es una derivación.

Ahora definimos \mathcal{D} sobre $\mathfrak{T}_s^r(V)$ mediante (3.6). De nuevo es fácil comprobar que el miembro derecho es $C^\infty(V)$ -multilineal.

³En lo sucesivo identificamos cada tensor T con la aplicación \bar{T} definida antes del lema de localización, de modo que, por ejemplo $\omega(X) = \bar{\omega}(X) \in C^\infty(V)$.

Así tenemos definidas aplicaciones lineales $\mathcal{D}_s^r : \mathcal{T}_s^r(V) \rightarrow \mathcal{T}_s^r(V)$, las cuales determinan a su vez una única aplicación lineal $\mathcal{D} : \mathcal{T}(V) \rightarrow \mathcal{T}(V)$. La comprobación de que es una derivación es pura rutina. Por linealidad basta probar la fórmula del producto

$$\mathcal{D}(T_1 \otimes T_2) = \mathcal{D}(T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes \mathcal{D}(T_2)$$

cuando $T_1 \in \mathcal{T}_s^r(V)$ y $T_2 \in \mathcal{T}_{s'}^{r'}(V)$. Hay que tratar aparte los casos en que $T_1, T_2 \in C^\infty(V)$, o $T_1 \in C^\infty(V)$, $T_2 \in \mathfrak{X}(V)$ (en los que la fórmula se cumple por hipótesis) y el caso en que $T_1 \in C^\infty(V)$ y $T_2 \in \Lambda^1(V)$, pues entonces hay que usar (3.5). Para los casos restantes se usa (3.6).

Finalmente hay que comprobar que \mathcal{D} , así definido, conmuta con las contracciones. Para probar que $\mathcal{D}(C_j^i(T)) = C_j^i(\mathcal{D}(T))$, basta probar que, para toda carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$, se cumple $\mathcal{D}(C_j^i(T|_U)) = C_j^i(\mathcal{D}(T|_U))$, donde aquí \mathcal{D} es la derivación definida sobre U , pues es claro que $\mathcal{D}(C_j^i(T))|_U = \mathcal{D}(C_j^i(T|_U))$ y $C_j^i(\mathcal{D}(T))|_U = C_j^i(\mathcal{D}(T|_U))$. Equivalentemente, podemos suponer que la variedad V se puede cubrir con una única carta. La ventaja es que entonces, por linealidad, basta probar el teorema para tensores puros de la forma

$$T = f X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^s,$$

sobre los que podemos hacer actuar explícitamente las contracciones. En estas condiciones la comprobación es totalmente rutinaria. ■

Conviene recordar que la fórmula (3.6) nos proporciona una descripción explícita de la derivada determinada por el teorema anterior. Por ejemplo, si $T \in \mathcal{T}_2^0(V)$ se reduce a

$$\mathcal{D}(T)(X, Y) = \mathcal{D}(T(X, Y)) - T(\mathcal{D}X, Y) - T(X, \mathcal{D}Y).$$

Definición 3.33 Si V es una variedad diferencial y $X \in \mathfrak{X}(V)$, la derivación $\mathcal{L}_X : \mathcal{T}(V) \rightarrow \mathcal{T}(V)$ dada por el teorema anterior aplicado a las derivadas de Lie sobre $C^\infty(V)$ y $\mathfrak{X}(V)$ se llama también *derivada de Lie*.

Por construcción, se trata de la única derivación que conserva los grados de varianza y covarianza de los tensores, que conmuta con las contracciones y que extiende a los dos casos particulares que teníamos definidos previamente.

Pasamos ya a probar que la derivada de Lie satisface una versión general de la relación (3.3). Para ello estudiamos la derivación paramétrica de tensores:

Definición 3.34 Sea V una variedad diferencial sin frontera. Un *campo tensorial de tipo (r, s) dependiente del tiempo* en V es una aplicación T que a cada punto $(t, p) \in I \times V$ (donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto) le asigna un tensor $T_{t,p} \in \mathcal{T}_s^r(T_p(V))$.

Fijada una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ de V , podremos expresar

$$T|_{I \times U} = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \partial_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \partial_{x_{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s},$$

para ciertas funciones coordenadas $T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$.

Diremos que T es diferenciable si y sólo si todas sus coordenadas respecto de cualquier carta de V son diferenciables (para lo cual basta con que lo sean sus coordenadas respecto de un atlas de V). En lo sucesivo, cuando hablemos de tensores dependientes del tiempo nos referiremos siempre a campos tensoriales diferenciables en este sentido. Así, para cada instante $t \in I$ tenemos un tensor $T_t \in \mathcal{T}_s^r(V)$.

Observemos que si $\omega^1, \dots, \omega^r \in \Lambda^1(V)$ y $X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(V)$, entonces la función

$$(t, p) \mapsto T_{t,p}(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s)$$

es diferenciable (pues la expresión en coordenadas de T nos permite expresarla en un entorno de cada punto como suma de productos de funciones diferenciables), luego podemos considerar su derivada parcial

$$\partial_t T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) \in C^\infty(I \times V).$$

Si fijamos un valor de t , tenemos una función en $C^\infty(V)$, luego por el lema de localización $\partial_t T \in \mathcal{T}_s^r(V)$. Además, se trata de un campo tensorial diferenciable (respecto de t), pues su expresión en coordenadas es

$$\partial_t T|_{I \times U} = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} \partial_t T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \partial_{x_{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x_{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}.$$

Así pues, para cada tensor T dependiente del tiempo tenemos definida su derivada parcial respecto de T . Observemos que

$$\partial_t T_{t,p}(\omega^1, \dots, \omega^r, v_1, \dots, v_s) = \frac{\partial T_{t,p}(\omega^1, \dots, \omega^r, v_1, \dots, v_s)}{\partial t}.$$

Ahora podemos caracterizar la derivada de Lie:

Teorema 3.35 *Sea V una variedad diferencial sin frontera, sea X un campo vectorial en V dependiente del tiempo y sea $T \in \mathcal{T}_s^r(V)$. Entonces*

$$\mathcal{L}_{X_{t_0}} T = \partial_t \Phi_{X, t_0, t}^*(T)|_{t_0}.$$

DEMOSTRACIÓN: Observemos en primer lugar que $\Phi_{X, t_0, t}^*(T)$ es (en un entorno de cada punto) un tensor en V dependiente (diferenciabilmente) del tiempo. Si $p \in V$, sabemos que el flujo Φ_X está definido en un entorno $I \times J \times U$ de (t_0, t_0, p) y, para cada $t \in I$, determina un difeomorfismo

$$\Phi_{X, t_0, t} : V_{t_0, t} \longrightarrow V_{t, t_0} \subset V$$

entre entornos de $p \in U \subset V_{t_0, t}$ y $\Phi_{X, t}(p) \in V_{t, t_0}$, respectivamente. Esto hace que esté bien definida la retracción $\Phi_{X, t_0, t}^*(T) \in \mathcal{T}_s^r(U)$ y es fácil ver que es diferenciable respecto de t . (Es pura rutina comprobar que las coordenadas de $\Phi_{X, t_0, t}^*(T)$ en una carta son diferenciables en $I \times U$ a partir de la diferenciableidad de Φ_X y de T .) Por lo tanto, la derivada $\partial_t \Phi_{X, t_0, t}^*(T)$ está bien definida y es un tensor dependiente del tiempo (que al ser evaluado en t_0 da lugar a un tensor independiente del tiempo).

Llamemos $\bar{\mathcal{L}}T$ al tensor definido de este modo, que claramente es lineal en T , por lo que se extiende a una aplicación lineal $\bar{\mathcal{L}} : \mathcal{T}(V) \rightarrow \mathcal{T}(V)$, y vamos a probar que es una derivación que conserva el grado de varianza y covarianza de los tensores (esto es obvio), que coincide con la derivada de Lie $\mathcal{L}_{X_{t_0}}$ sobre funciones y campos vectoriales y que conmuta con las contracciones de tensores. El teorema 3.32 implicará entonces que $\bar{\mathcal{L}}$ es la derivada de Lie.

Si $f \in C^\infty(V)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(f)_p &= \left. \frac{\partial \Phi_{X,t_0,t}^*(f)(p)}{\partial t} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial f(\Phi_X(t_0, t, p))}{\partial t} \right|_{t_0} = \left. \frac{\partial (\Phi_{X,t_0,p} \circ f)}{\partial t} \right|_{t_0} \\ &= df|_p(\Phi'_{X,t_0,p}(t_0)) = df|_p(X_{t_0,p}) = X_{t_0}(f)_p = \mathcal{L}_{X_{t_0}}(f)_p. \end{aligned}$$

Además, puesto que

$$\begin{aligned} \Phi_{X,t_0,t}^*(df)|_p(v) &= df|_{f(p)}(d\Phi_{X,t_0,t}|_p(v)) = \\ &= d(\Phi_{X,t_0,t} \circ f)|_p(v) = d(\Phi_{X,t_0,t}^*(f))|_p(v), \end{aligned}$$

resulta que $\Phi_{X,t_0,t}^*(df) = d(\Phi_{X,t_0,t}^*(f))$ y, por consiguiente, al derivar queda

$$\bar{\mathcal{L}}(df) = \partial_t(\Phi_{X,t_0,t}^*(df))|_{t_0} = \partial_t(d\Phi_{X,t_0,t}^*(f))|_{t_0} = d\partial_t(\Phi_{X,t_0,t}^*(f))|_{t_0} = d\bar{\mathcal{L}}(f),$$

donde el intercambio entre $\partial_t|_{t_0}$ y d se justifica fácilmente a partir de la expresión en coordenadas de ambas operaciones.

Si $T_1 \in \mathcal{T}_{s_1}^{r_1}(V)$, $T_2 \in \mathcal{T}_{s_2}^{r_2}(V)$, entonces

$$\Phi_{X,t_0,t}^*(T_1 \otimes T_2) = \Phi_{X,t_0,t}^*(T_1) \otimes \Phi_{X,t_0,t}^*(T_2),$$

y aplicando la regla de la cadena a la composición de $t \mapsto (t, t)$ con

$$\Phi_{X,t_0,t_1}^*(T_1)_p(\omega^1, \dots, \omega^{r_1}, v_1, \dots, v_{s_1}) \Phi_{X,t_0,t_2}^*(T_2)_p(\eta^1, \dots, \eta^{r_2}, w_1, \dots, w_{s_2})$$

concluimos que

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(T_1 \otimes T_2) &= \partial_t(\Phi_{X,t_0,t}^*(T_1 \otimes T_2))|_{t_0} = \\ &= \partial_t(\Phi_{X,t_0,t}^*(T_1))|_{t_0} \otimes \Phi_{X,t_0,t_0}^*(T_2) + \Phi_{X,t_0,t_0}^*(T_1) \otimes \partial_t(\Phi_{X,t_0,t}^*(T_2))|_{t_0} = \\ &= \bar{\mathcal{L}}(T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes \bar{\mathcal{L}}(T_2). \end{aligned}$$

Esto prueba que $\bar{\mathcal{L}}$ es una derivación. Seguidamente probamos que conmuta con las contracciones. Es fácil comprobar que $\Phi_{X,t_0,t}^*(C_i^j(T)) = C_i^j(\Phi_{X,t_0,t}^*(T))$. De hecho, esto es válido para cualquier retracción asociada a cualquier difeomorfismo entre variedades. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}}(C_i^j(T)) &= \partial_t \Phi_{X,t_0,t}^*(C_i^j(T))|_{t_0} = \partial_t C_i^j(\Phi_{X,t_0,t}^*(T))|_{t_0} = \\ &= C_i^j(\partial_t \Phi_{X,t_0,t}^*(T)|_{t_0}) = C_i^j(\bar{\mathcal{L}}(T)), \end{aligned}$$

donde el intercambio entre $\partial_t|_{t_0}$ y la contracción C_j^i se justifica fácilmente a partir de la expresión en coordenadas de T .

Por último, si $Y \in \mathfrak{X}(V)$ y $f \in C^\infty(V)$, tenemos que

$$\begin{aligned} X_{t_0}(Y(f)) &= \bar{\mathcal{L}}(Y(f)) = \bar{\mathcal{L}}(C_1^1(Y \otimes df)) = C_1^1(\bar{\mathcal{L}}(Y \otimes df)) \\ &= C_1^1(\bar{\mathcal{L}}(Y) \otimes df + Y \otimes \bar{\mathcal{L}}(df)) = C_1^1(\bar{\mathcal{L}}(Y) \otimes df + Y \otimes d\bar{\mathcal{L}}(f)) \\ &= \bar{\mathcal{L}}(Y)(f) + Y(X_{t_0}(f)), \end{aligned}$$

luego $\bar{\mathcal{L}}(Y)(f) = X_{t_0}(Y(f)) - Y(X_{t_0}(f)) = [X_{t_0}, Y](f) = \mathcal{L}_{X_{t_0}}(Y)(f)$, luego $\bar{\mathcal{L}}$ coincide con $\mathcal{L}_{X_{t_0}}$ sobre campos vectoriales. ■

Si aplicamos el teorema anterior a un campo $X \in \mathfrak{X}(V)$ independiente del tiempo (tomando $X_{t,p} = X_p$), podemos hacer $t_0 = 0$ y queda que

$$\mathcal{L}_X T = \partial_t \Phi_{X,t}^*(T)|_0,$$

que claramente extiende a (3.3). Sin embargo, el enunciado general del teorema anterior nos permite conectar la derivada de Lie con una generalización al caso de tensores dependientes del tiempo:

Definición 3.36 Sea V una variedad diferencial sin frontera, y sean X, T un campo vectorial y un tensor de tipo (r, s) , respectivamente, dependientes del tiempo. Definimos

$$\mathcal{L}_{t,X}(T)_p = \partial_\tau(\Phi_{X,t,\tau}^*(T_\tau)_p)|_t,$$

que es otro tensor con el mismo grado de varianza y covarianza dependiente del tiempo.

El teorema siguiente afirma que la variación que experimenta T por unidad de tiempo en un punto p al desplazarlo sobre la curva integral de X que pasa por p en el instante t es la suma de la variación que experimenta T en p el instante t (sin desplazamiento) más la variación que experimentaría a lo largo de la curva integral de X_t que pasa por p en t si tanto X como T permanecieran constantes:

Teorema 3.37 En las condiciones de la definición anterior, se cumple que

$$\mathcal{L}_{t,X}(T) = \partial_t T_t + \mathcal{L}_{X_t}(T_t).$$

DEMOSTRACIÓN: Es pura rutina comprobar que la función

$$\Phi_{X,t,\tau_2}^*(T_{\tau_1})_p(\omega^1, \dots, \omega^r, v_1, \dots, v_s)$$

es diferenciable en (τ_1, τ_2) , luego, aplicando la regla de la cadena a su composición con $t \mapsto (t, t)$, resulta que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{t,X}(T)_p &= \partial_{\tau_1} \Phi_{X,t,t}^*(T_{\tau_1})_p|_t + \partial_{\tau_2} \Phi_{X,t,\tau_2}^*(T_t)_p|_t \\ &= \partial_{\tau_1} T_{\tau_1,p}|_t + \partial_{\tau_2} \Phi_{X,t,\tau_2}^*(T_t)_p|_t = \partial_t T|_p + \mathcal{L}_{X_t}(T_t)|_p, \end{aligned}$$

donde hemos usado el teorema anterior. ■

Ejemplo: La derivada total De momento vamos a interpretar la fórmula del teorema anterior únicamente para el caso en el que el tensor T es una función $f \in C^\infty(V)$. En tal caso la derivada de Lie dinámica recibe el nombre de *derivada total* de f respecto de X :

$$\frac{Df}{Dt} = \mathcal{L}_{t,X}(f) = \left. \frac{\partial f(t, \Phi_{X,t,\tau}(p))}{d\tau} \right|_t = \frac{\partial f}{\partial t} + X_t(f). \quad (3.7)$$

Por ejemplo, imaginemos que X es el campo de velocidades de un fluido y f representa la temperatura en cada punto y en cada instante. Imaginemos que el fluido se mueve por una tubería de modo que cada vez viene fluido más caliente, pero que cada partícula de fluido se enfría con el tiempo. Entonces la derivada parcial del último miembro será positiva, porque en cada punto la temperatura es cada vez mayor, pues cada vez el fluido viene más caliente, pero la derivada total será negativa, pues mide cómo varía la temperatura de cada partícula de fluido, y el fluido se está enfriando.

Un fluido se dice *incompresible* si su densidad ρ tiene derivada total nula, es decir, si

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + X(\rho) = 0,$$

(donde X es el campo de velocidades del fluido), lo cual se interpreta como que los cambios de densidad del fluido en cada punto se deben exclusivamente al movimiento del fluido, pero no a que éste se condense o se disperse. Esto sucede en particular si ρ es constante, en cuyo caso el fluido se dice *homogéneo*. ■

3.4 El corchete de Lie

Hemos introducido el corchete de Lie como mero paso intermedio para llegar hasta la derivada de Lie de un campo vectorial. Sin embargo, vamos a ver que se trata de una operación de interés en sí misma. Para probar un primer resultado necesitamos una consecuencia inmediata del teorema 3.17:

Teorema 3.38 *Si $f : V \rightarrow V$ es un difeomorfismo de una variedad diferencial sin frontera V en sí misma y $X \in \mathfrak{X}[V]$ es un campo vectorial, se cumple que $f_*(X) = X$ si y sólo si $\Phi_{X,t} \circ f = f \circ \Phi_{X,t}$ para todo t .*

DEMOSTRACIÓN: $f_*(X) = X$ es equivalente a $\Phi_{f_*(X),t} = \Phi_{X,t}$, luego, por 3.17, equivale también a que

$$\Phi_{X,t} \circ f = f \circ \Phi_{f_*(X),t} = f \circ \Phi_{X,t}, \quad \blacksquare$$

Teorema 3.39 *Si V es una variedad diferencial sin frontera y $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$, entonces $[X, Y] = 0$ si y sólo si $\Phi_{X,s} \circ \Phi_{Y,t} = \Phi_{Y,t} \circ \Phi_{X,s}$, para todo s, t .*

DEMOSTRACIÓN: Si los flujos conmutan, por el teorema anterior tenemos que $\Phi_{X,t}[Y] = Y$, pero, teniendo en cuenta que $\Phi_{X,t}^* = (\Phi_{X,-t})_*$, el teorema 3.35 implica que

$$[X, Y]_p = \mathcal{L}_X(Y)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_{X,-t})_*(Y)_p - Y_p}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_p - Y_p}{t} = 0.$$

Supongamos ahora que $[X, Y] = 0$. Para cada $p \in V$, sea $c : I \rightarrow T_p(V)$ la curva definida en un entorno de 0 por $c(s) = (\Phi_{X,s})_*(Y)_p$. Tomando cartas, es fácil ver que es diferenciable, y su derivada es

$$\begin{aligned} c'(s) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\Phi_{X,s+t})_*(Y)_p - (\Phi_{X,s})_*(Y)_p}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\Phi_{X,s+t}|_{\Phi_{X,-s-t}(p)}(Y_{\Phi_{X,-s-t}(p)}) - d\Phi_{X,s}|_{\Phi_{X,-s}(p)}(Y_{\Phi_{X,-s}(p)})}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\Phi_{X,s}|_{\Phi_{X,-s}(p)}(d\Phi_{X,t}|_{\Phi_{X,-s-t}(p)}(Y_{\Phi_{X,-s-t}(p)})) - d\Phi_{X,s}|_{\Phi_{X,-s}(p)}(Y_{\Phi_{X,-s}(p)})}{t} \\ &= d\Phi_{X,s}|_{\Phi_{X,-s}(p)} \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\Phi_{X,t}|_{\Phi_{X,-s-t}(p)}(Y_{\Phi_{X,-s-t}(p)}) - Y_{\Phi_{X,-s}(p)}}{t} \right) = \\ &= -d\Phi_{X,s}|_{\Phi_{X,-s}(p)} \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\Phi_{X,-t}|_{\Phi_{X,-s+t}(p)}(Y_{\Phi_{X,-s+t}(p)}) - Y_{\Phi_{X,-s}(p)}}{t} \right) = \\ &= \mathcal{L}_X(Y)_{\Phi_{X,-s}(p)} = [X, Y]_{\Phi_{X,-s}(p)} = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, c es constante, luego $\Phi_{X,s}[Y] = c(s) = c(0) = Y$, luego $\Phi_{X,s}$ conmuta con $\Phi_{Y,t}$ por el teorema anterior. ■

Así pues, $[X, Y] = 0$ equivale a que si, a partir de un punto p , nos movemos s unidades según el flujo de X y luego t unidades según el flujo de Y , llegamos al mismo punto que si nos movemos primero t unidades según Y y luego s unidades según X . En otras palabras, todo par de curvas diferenciables a trozos construidas de este modo forman un “rectángulo” curvilíneo sobre la variedad. Ahora veamos qué sucede si el corchete no se anula:

Consideremos una variedad diferencial sin frontera V , un punto $p \in V$, una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ alrededor de p y dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$ que en la carta considerada vengan dados por

$$X = \sum_i u^i \partial_{x_i}, \quad Y = \sum_i v^i \partial_{x_i}.$$

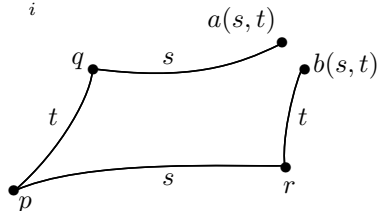
Consideramos ahora las funciones

$$a(s, t) = \Phi_X(s, \Phi_Y(t, p)),$$

$$b(s, t) = \Phi_Y(t, \Phi_X(s, p)),$$

de modo que $a(s, t) \in V$ es el punto a que

se llega avanzando t unidades por la línea de flujo de Y a partir de p , hasta



llegar a un punto q , y luego s unidades por la línea de flujo de X a partir de q , mientras que $b(s, t)$ se obtiene avanzando primero por el flujo de X hasta r y luego por el flujo de Y .

Sean $a^i(s, t) = x^i(a(s, t))$, $b^i(s, t) = x^i(b(s, t))$, $\tilde{u}^i = x^{-1} \circ u^i$, $\tilde{v}^i = x^{-1} \circ v^i$ y consideremos también las composiciones de los flujos con la carta, es decir:

$$\tilde{\phi}_X(s, x) = x(\Phi_X(s, x^{-1}(x))), \quad \tilde{\phi}_Y(t, x) = x(\Phi_Y(t, x^{-1}(x))).$$

De este modo

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_X}{\partial s} = \tilde{u}^i(\tilde{\phi}_X(s, x)), \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}_Y}{\partial t} = \tilde{v}^i(\tilde{\phi}_Y(t, x)).$$

Ahora nos armamos de paciencia para calcular las derivadas parciales de las funciones a^i de primer y de segundo orden. Para ello aplicamos la regla de la cadena a la expresión $a^i(s, t) = \tilde{\Phi}_X^i(s, \tilde{\Phi}_Y(t, x_0))$, donde $x_0 = x(p)$:

$$\frac{\partial a^i}{\partial s} = \frac{\partial \tilde{\Phi}_X^i}{\partial s} \Big|_{(s, \tilde{\Phi}_Y(t, x_0))} = \tilde{u}^i(\tilde{\Phi}_X(s, \tilde{\Phi}_Y(t, x_0))), \quad \text{luego} \quad \frac{\partial a^i}{\partial s} \Big|_{(0,0)} = \tilde{u}^i(x_0).$$

$$\frac{\partial a^i}{\partial t} = \sum_j \frac{\partial \tilde{\Phi}_X^i}{\partial x_j} \Big|_{(s, \tilde{\Phi}_Y(t, x_0))} \frac{\partial \tilde{\Phi}_Y^j}{\partial t} \Big|_{(t, x_0)} = \sum_j \frac{\partial \tilde{\Phi}_X^i}{\partial x_j} \Big|_{(s, \tilde{\Phi}_Y(t, x_0))} \tilde{v}^j(\tilde{\Phi}_Y(t, x_0)),$$

luego

$$\frac{\partial a^i}{\partial t} \Big|_{(0,0)} = \tilde{v}^i(x_0).$$

Aquí hemos usado que $\tilde{\Phi}_Y^i(0, x) = x^i$, por lo que las derivadas en $s = 0$ respecto de las variables x^j son 0 o 1 (y más adelante usaremos que todas las derivadas de orden 2 respecto de las variables x^j son nulas).

Pasamos a las derivadas de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 a^i}{\partial s^2} = \sum_j \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial x_j} \Big|_{\tilde{\Phi}_X(s, \tilde{\Phi}_Y(t, x_0))} \frac{\partial \tilde{\Phi}_X^j}{\partial s} \Big|_{(s, \tilde{\Phi}_Y(t, x_0))},$$

luego

$$\frac{\partial^2 a^i}{\partial s^2} \Big|_{(0,0)} = \sum_j \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial x_j} \Big|_{x_0} \tilde{u}^j(x_0).$$

$$\frac{\partial^2 a^i}{\partial s \partial t} = \sum_j \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial x_j} \Big|_{\tilde{\Phi}_X(s, \tilde{\Phi}_Y(t, x_0))} \sum_k \frac{\partial \tilde{\Phi}_X^j}{\partial x_k} \Big|_{(s, \tilde{\Phi}_Y(t, x_0))} \frac{\partial \tilde{\Phi}_Y^k}{\partial t} \Big|_{(t, x_0)},$$

luego

$$\frac{\partial^2 a^i}{\partial s \partial t} \Big|_{(0,0)} = \sum_j \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial x_j} \Big|_{x_0} \tilde{v}^j(x_0).$$

$$\frac{\partial^2 a^i}{\partial t^2} = \sum_j \left(\sum_k \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}^i}{\partial x_j \partial x_k} \Big|_{(s, \tilde{\Phi}_Y(t, x_0))} \frac{\partial \tilde{\Phi}_Y^k}{\partial t} \Big|_{(s, \tilde{\Phi}_Y(t, x_0))} \tilde{v}^j(\tilde{\Phi}_Y(t, x_0)) \right. \\ \left. + \frac{\partial \tilde{\Phi}^i}{\partial x_j} \Big|_{(s, \tilde{\Phi}_Y(t, x_0))} \sum_k \frac{\partial \tilde{v}^j}{\partial x_k} \Big|_{\tilde{\Phi}_Y(t, x_0)} \frac{\partial \tilde{\Phi}_Y^k}{\partial t} \Big|_{(t, x_0)} \right),$$

luego

$$\frac{\partial^2 a^i}{\partial t^2} \Big|_{(0,0)} = \sum_k \frac{\partial \tilde{v}^j}{\partial x_k} \Big|_{x_0} \tilde{v}^k(x_0).$$

Recapitulamos eliminando las composiciones con las cartas:

$$\frac{\partial a^i}{\partial s} \Big|_{(0,0)} = u^i(p), \quad \frac{\partial a^i}{\partial t} \Big|_{(0,0)} = v^i(p), \\ \frac{\partial^2 a^i}{\partial s^2} \Big|_{(0,0)} = \sum_j \frac{\partial u^i}{\partial x_j} \Big|_p u^j(p), \quad \frac{\partial^2 a^i}{\partial t^2} \Big|_{(0,0)} = \sum_j \frac{\partial v^j}{\partial x_j} \Big|_p v^j(p), \\ \frac{\partial^2 a^i}{\partial s \partial t} \Big|_{(0,0)} = \sum_j \frac{\partial u^i}{\partial x_j} \Big|_p v^j(p).$$

Ahora consideramos el desarrollo de Taylor [VC 2.9] de grado 2 de $a^i(s, t)$ alrededor de $(0, 0)$:

$$a^i(s, t) = a^i(0, 0) + \frac{\partial a^i}{\partial s} \Big|_{(0,0)} s + \frac{\partial a^i}{\partial t} \Big|_{(0,0)} t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a^i}{\partial s^2} \Big|_{(0,0)} s^2 + \frac{\partial^2 a^i}{\partial s \partial t} \Big|_{(0,0)} st + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a^i}{\partial t^2} \Big|_{(0,0)} t^2 \\ + r_{3,0}^i(s, t) s^3 + r_{2,1}^i(s, t) s^2 t + r_{1,2}^i(s, t) s t^2 + r_{0,3}^i(s, t) t^3,$$

donde las funciones r_{kl}^i son diferenciables en un entorno de $(0, 0)$. Concretamente:

$$a^i(s, t) = x^i(p) + u^i(p)s + v^i(p)t + \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial u^i}{\partial x_j} \Big|_p u^j(p) s^2 + \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial v^i}{\partial x_j} \Big|_p u^j(p) t^2 \\ + \sum_j \frac{\partial u^i}{\partial x_j} \Big|_p v^j(p) s t + r_{3,0}^i(s, t) s^3 + r_{2,1}^i(s, t) s^2 t + r_{1,2}^i(s, t) s t^2 + r_{0,3}^i(s, t) t^3.$$

Por otra parte, es claro que el desarrollo correspondiente para $b^i(s, t)$ se obtiene sin más que intercambiar u^i por v^i y s por t (con otras funciones de restos), por lo que

$$a^i(s, t) - b^i(s, t) = \sum_j \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} \Big|_p v^j(p) - \frac{\partial v^i}{\partial x_j} \Big|_p u^j(p) \right) s t \\ + \bar{r}_{3,0}^i(s, t) s^3 + \bar{r}_{2,1}^i(s, t) s^2 t + \bar{r}_{1,2}^i(s, t) s t^2 + \bar{r}_{0,3}^i(s, t) t^3,$$

pero el primer término es la coordenada i -ésima de $[X, Y]_p$, es decir:

$$a^i(s, t) - b^i(s, t) = [X, Y]_p^i st + \bar{r}_{3,0}^i(s, t)s^3 + \bar{r}_{2,1}^i(s, t)s^2t + \bar{r}_{1,2}^i(s, t)st^2 + \bar{r}_{0,3}^i(s, t)t^3.$$

En definitiva, hemos demostrado el teorema siguiente:

Teorema 3.40 *Sea V una variedad diferencial sin frontera, sea $p \in V$ y sean $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$ dos campos vectoriales. Consideramos las funciones*

$$a(s, t) = \Phi_X(s, \Phi_Y(t, p)), \quad b(s, t) = \Phi_Y(t, \Phi_X(s, p)),$$

definidas en un entorno de 0. Entonces, para toda carta x alrededor de p , las coordenadas de a y b cumplen:

$$x(a(s, t)) - x(b(s, t)) = dx|_p([X, Y]_p) st + \text{términos de grado } \geq 3.$$

En particular

$$dx|_p([X, Y]_p) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{x(a(s, s)) - x(b(s, s))}{s^2}.$$

El hecho de que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{x(a(s, s)) - x(b(s, s))}{s} = 0$$

se interpreta como que si formamos un “cuadrilátero” avanzando una misma distancia s primero siguiendo el campo X y luego el campo Y y viceversa, tomando s suficientemente pequeño podemos hacer que la diferencia entre las coordenadas de los puntos obtenidos sea inapreciable, pues, por ejemplo, si exigimos que el cociente tenga norma menor que 10^{-5} y representamos la figura correspondiente a una escala en la que la longitud s corresponda a 2cm, (con lo que la longitud en la figura se obtiene multiplicando la longitud real por $2/s$) entonces la discrepancia entre las coordenadas en la figura será inferior a 0.2 micras.

Así pues, los “cuadriláteros” formados de este modo a partir de dos campos con s suficientemente pequeño son siempre cerrados “en la práctica” (en el sentido de que los extremos de los dos caminos coinciden en una aproximación de primer orden), y las coordenadas del corchete de Lie son el coeficiente de s^2 en la expresión que da la diferencia. Por otro lado el teorema 3.39 afirma que si las coordenadas de a y b son indistinguibles también en una aproximación de segundo orden (para todo punto de partida p), entonces es que son iguales.

Planteamos ahora un problema cuya solución viene determinada por el corchete de Lie:

Definición 3.41 Si V es una variedad diferencial, diremos que unos campos vectoriales $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(V)$ son *independientes* si, para cada $p \in V$, los vectores $X_{1,p}, \dots, X_{k,p}$ son linealmente independientes en $T_p(V)$. Si V tiene dimensión n , un *sistema de referencia* en V es una n -tupla (X_1, \dots, X_n) de campos vectoriales independientes en V . Claramente, los vectores $X_{1,p}, \dots, X_{k,p}$ forman en tal caso una base de $T_p(V)$.

Son muchas las variedades sobre las que no es posible definir sistemas de referencia globales en este sentido, pero siempre existen sistemas de referencia locales (definidos en abiertos). De hecho, si $x : U \rightarrow \tilde{U}$ es una carta de V , tenemos que $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}$ es un sistema de referencia en U .

El problema que vamos a analizar es el de cuándo un sistema de referencia dado X_1, \dots, X_n es el asociado a una carta. Es evidente que no siempre se da el caso, pues una condición necesaria que tiene que cumplirse es que $[X_i, X_j] = 0$, ya que esta propiedad la cumplen los sistemas de referencia asociados a cartas. Lo que vamos a obtener es que esta condición necesaria es también suficiente.

El resultado más elemental sobre existencia de cartas cuyo sistema de referencia asociado cumpla una condición dada es el siguiente, según el cual no hay inconveniente en exigir que tome valores prefijados en un único punto:

Teorema 3.42 *Si V es una variedad diferencial, $p \in V$ y e_1, \dots, e_n es una base de $T_p V$, existe una carta x alrededor de p de manera que $x(p) = 0$ y $\partial_{x_1}|_p = e_1, \dots, \partial_{x_n}|_p = e_n$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $y : U \rightarrow \tilde{U}$ una carta alrededor de p tal que $y(p) = 0$ y pongamos que

$$e_i = \sum_j a_i^j \partial_{y_j}|_p.$$

Sea (b_i^j) la matriz inversa de (a_i^j) y sea $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ el isomorfismo cuya matriz en la base canónica es (b_i^j) . Entonces $x = y \circ h$ es otra carta de V cuyas coordenadas cumplen $x^j = \sum_i b_i^j y^i$. Por consiguiente, $y^j = \sum_i a_i^j x^i$, luego

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p = \sum_j \left. \frac{\partial y^j}{\partial x_i} \right|_p \left. \frac{\partial}{\partial y_j} \right|_p = \sum_j a_i^j \left. \frac{\partial}{\partial y_j} \right|_p = e_i,$$

luego la carta x cumple lo requerido. ■

También podemos prefijar un único campo vectorial:

Teorema 3.43 *Si V es una variedad diferencial, $p \in V$ y $X \in \mathfrak{X}(V)$ es un campo vectorial tal que $X_p \neq 0$, existe una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ alrededor de p de modo que $X|_U = \partial_{x_1}$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior existe una carta $y : U_0 \rightarrow \tilde{U}_0$ alrededor de p tal que $y(p) = 0$ y $\partial_{y_1}|_p = X_p$. El flujo Φ_X asociado a X está definido en un abierto de la forma $J^* \times U_1$, donde $J^* \subset \mathbb{R}$ es un entorno de 0 y U_1 es un entorno de p , que a su vez podemos restringir para que sea de la forma $U_1 = y^{-1}[J \times \tilde{U}_1]$, donde $J \subset J^*$ y $\tilde{U}_1 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ son entornos de 0. Consideramos la aplicación diferenciable $h : J \times \tilde{U}_1 \rightarrow J \times U_1$ dada por

$$h(y_1, \dots, y_n) = (y_1, y^{-1}(0, y_2, \dots, y_n)).$$

Llamamos y^1, \dots, y^n a las coordenadas cartesianas en $J \times \tilde{U}_1$, mientras que en $J \times U_1$ tenemos la carta $I \times y$, a cuyas coordenadas podemos llamar t, y^1, \dots, y^n .

Es inmediato que la relación entre ambas es $h \circ t = y^1$, $h \circ y^1 = 0$ y $h \circ y^i = y^i$, para $i > 1$, y de aquí se sigue que $dh|_a(\partial_{y_1}|_a) = \partial_t|_{h(a)}$, $dh|_a(\partial_{y_i}|_a) = \partial_{y_i}|_{h(a)}$, para $i > 1$ (basta aplicar ambos miembros a las funciones coordenadas).

Ahora consideramos $f = h \circ \Phi_X : J \times \tilde{U}_1 \rightarrow V$. Notemos que $f(0) = p$. Como $\Phi_{X,q}(t)$ es una curva integral de X , tenemos que

$$d\Phi_X|_{(t,q)}(\partial_t|_{(t,q)}) = \Phi'_{X,q}(t) = X_{\Phi_{X,q}(t)},$$

luego

$$df|_a(\partial_{y_1}|_a) = d\Phi_X|_{h(a)}(dh|_a(\partial_{y_1}|_a)) = d\Phi_X|_{h(a)}(\partial_t|_{h(a)}) = X_{\Phi_X(h(a))} = X_{f(a)}.$$

Para $i > 1$ tenemos que

$$d\Phi_X|_{(0,p)}(\partial_{x_i}|_{(0,p)})(y^j) = \left. \frac{\partial \Phi_X^j}{\partial y_i} \right|_{(0,p)} = \left. \frac{\partial y^j}{\partial y_i} \right|_{(0,p)},$$

donde hemos usado que $\Phi_X^j(0, q) = x^j(q)$, luego $d\Phi_X|_{(0,p)}(\partial_{y_i}|_{(0,p)}) = \partial_{y_i}|_p$ y, por consiguiente, $df|_0(\partial_{y_i}|_0) = \partial_{y_i}|_p$. Como también

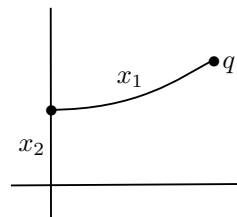
$$df|_0(\partial_{y_1}|_0) = X_{f(0)} = X_p = \partial_{y_1}|_p,$$

vemos que $df|_0$ transforma una base de $T_0(J_1 \times \tilde{U}_1)$ en una base de $T_p(V)$, luego se restringe a un difeomorfismo $f : \tilde{U} \rightarrow U$ en un entorno de 0 y su inversa $x = f^{-1} : U \rightarrow \tilde{U}$ es una carta alrededor de p . Si representamos por x^i a las coordenadas cartesianas en \tilde{U} (que hasta ahora representábamos por y^i), hemos probado que $df|_a(\partial_{x_1}|_a) = X_{f(a)}$, luego si $q \in U$ cumple $x(q) = a$, tenemos que

$$X_q(g) = X_{f(a)}(g) = df|_a(\partial_{x_1}|_a)(g) = \left. \frac{\partial(x^{-1} \circ g)}{\partial x_1} \right|_a = \left. \frac{\partial g}{\partial x_1} \right|_{x(q)},$$

luego $\partial_{x_1} = X$. ■

Notemos que la idea subyacente en la prueba del teorema anterior es simple: la carta x que hemos construido asigna a cada punto q las coordenadas que resultan de considerar la curva integral de X que llega hasta q desde un punto de coordenadas $(0, x_2)$ y tomar como coordenada x_1 el tiempo que tarda la curva en llegar a q . Así, todas las coordenadas son constantes sobre cada curva integral excepto la primera. El teorema siguiente se demuestra exactamente con el mismo argumento y la misma idea:



Teorema 3.44 Sea V una variedad diferencial sin frontera, sea $p \in V$ y sean X_1, \dots, X_k campos independientes definidos en un entorno de p . Si $[X_i, X_j] = 0$ para todos los índices $1 \leq i < j \leq k$, entonces existe una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ alrededor de p de modo que $\partial_{x_i} = X_i|_U$, para $i = 1, \dots, k$.

DEMOSTRACIÓN: Tomamos una carta $y : U_0 \rightarrow \tilde{U}_0$ alrededor de p tal que $y(p) = 0$ y $\partial_{y_i}|_p = X_{i,p}$ para $i = 1, \dots, k$. El flujo Φ_{X_1} está definido en un abierto de la forma $J_1^* \times U_1$, donde $J_1^* \subset \mathbb{R}$ es un entorno de 0 y U_1 es un entorno de p , que a su vez podemos restringir para que sea de la forma $U_1 = y^{-1}[J^k \times \tilde{U}_1]$, donde $J \subset J^*$ y $\tilde{U}_1 \subset \mathbb{R}^{n-k}$ son entornos de 0.

Similarmente, Φ_{X_2} está definido en un abierto $J_2^* \times U_2$, y restringiendo J podemos exigir que $U_2 = y^{-1}[J^k \times \tilde{U}_2]$ así como que $\Phi_{X_2}[J \times U_2] \subset U_1$. En general, tomamos abiertos $U_i = y^{-1}[J^k \times \tilde{U}_i]$ de modo que Φ_{X_i} esté definido en $J_i^* \times U_i$ y $\Phi_{X_i}[J \times U_i] \subset U_{i-1}$ (lo que supone reducir el intervalo J a cada paso). Esto nos permite definir aplicaciones diferenciables

$$\Phi_{X_i}^* : J^i \times U_i \rightarrow J^{i-1} \times U_{i-1}$$

mediante $\Phi_{X_i}^*(y_1, \dots, y_i, q) = (y_1, \dots, y_{i-1}, \Phi_{X_i}(y_i, q))$. Por otra parte, definimos la aplicación diferenciable $h : J^k \times \tilde{U}_k \rightarrow J^k \times U_k$ mediante

$$h(y_1, \dots, y_n) = (y_1, \dots, y_k, y^{-1}(0, \dots, 0, y_{k+1}, \dots, y_n)).$$

Sean y^1, \dots, y^n las coordenadas cartesianas en $J^k \times \tilde{U}_k$ y en $J^k \times U_k$ consideramos la carta $I \times \dots \times I \times y$, con coordenadas $t^1, \dots, t^k, y^1, \dots, y^n$. La relación entre ellas es que $h \circ t^i = y^i$, $h \circ y^i = 0$, para $i = 1, \dots, k$, mientras que $h \circ y^i = y^i$, para $i = k+1, \dots, n$. De aquí se sigue que $dh|_a(\partial_{y_i}|_a) = \partial_{t_i}|_{h(a)}$, para $1 \leq i \leq k$, y $dh|_a(\partial_{y_i}|_a) = \partial_{y_i}|_{h(a)}$, para $i > k$.

Ahora definimos $f = h \circ \Phi_{X_k}^* \circ \dots \circ \Phi_{X_1}^* : J^k \times \tilde{U}_1 \rightarrow V$, que claramente es una aplicación diferenciable y $f(0) = p$. Notemos que

$$f(a) = (\Phi_{X_k, a_k} \circ \dots \circ \Phi_{X_1, a_1})(y^{-1}(0, \dots, 0, a_{k+1}, \dots, a_n)).$$

Ahora tenemos que probar que $df|_a(\partial_{y_i}|_a) = X_{i, f(a)}$, para $1 \leq i \leq k$, y la clave es que, por la hipótesis sobre los corchetes de Lie, las aplicaciones Φ_{X_i, a_i} conmutan, por lo que f coincide con la aplicación definida análogamente, pero con Φ_{X_i} actuando en último lugar.

Más precisamente, si llamamos $f_0 = h$ y $f_{j+1} = f_j \circ \Phi_{X_{\sigma_j}}^*$, donde σ es cualquier permutación de $\{1, \dots, k\}$ con $\sigma(k) = i$, para $j < k$ tenemos que

$$d\Phi_{X_{\sigma_j}}^*|_{f_j(a)}(\partial_{t_j}|_{f_j(a)}) = \partial_{t_j}|_{f_{j+1}(a)},$$

pues la única función coordenada de $\Phi_{X_{\sigma_j}}^*$ que depende de t_j es la j -ésima, que es precisamente t_j . Por lo tanto, al final llegamos a que

$$df|_a(\partial_{y_i}|_a) = d\Phi_{X_i, a_i}|_{f_k(a)}(\partial_{t_i}|_{f_{k-1}(a)}) = X_{i, \Phi_{X_i}(a_i, f_{k-1}(a))} = X_{i, f(a)}.$$

El particular $df|_0(\partial_{y_i}|_0) = X_{i,p} = \partial_{y_i}|_p$. Finalmente, si $k < i \leq n$, tenemos que

$$d\Phi_{X_j}^*|_{(0, \dots, 0, p)}(\partial_{y_i}|_{(0, \dots, 0, p)}) = \partial_{y_i}|_{(0, \dots, 0, p)}$$

(con un cero menos al final), porque

$$\Phi_{X_j}^*(0, \dots, 0, y^{-1}(0, \dots, y_i, \dots, 0)) = (0, \dots, 0, y^{-1}(0, \dots, y_i, \dots, 0)),$$

luego todas las funciones coordenadas de $\Phi_{X_j}^*$ son independientes de y_i salvo la i -ésima, que es precisamente y_i . Por consiguiente, al componer las diferenciales, empezando con $dh|_0(\partial_{y_i}|_0) = \partial_{y_i}|_{(0,\dots,0,p)}$, llegamos a que $df|_0(\partial_{y_i}|_0) = \partial_{y_i}|_p$.

Esto prueba que $df|_0$ es un isomorfismo, luego f se restringe a un difeomorfismo en un entorno de 0, y podemos tomar su inverso $x : U \rightarrow \tilde{U}$ como carta de V alrededor de p . Llamamos ahora x^i a las coordenadas cartesianas en \tilde{U} , de modo que hemos probado que $df|_a(\partial_{x_i}|_a) = X_{i,f(a)}$. Además, si $q \in U$ cumple $x(q) = a$, tenemos que

$$X_{i,q}(g) = X_{i,f(a)}(g) = df|_a(\partial_{x_i}|_a)(g) = \left. \frac{\partial(x^{-1} \circ g)}{\partial x_i} \right|_a = \left. \frac{\partial g}{\partial x_i} \right|_{x(q)},$$

luego $\partial_{x_i} = X_i$. ■

Obviamente, la condición suficiente que proporciona el teorema anterior para que unos campos se extiendan al sistema de referencia asociado a una carta es también necesaria.

3.5 Derivaciones de formas diferenciales

Pasamos ahora a estudiar las derivaciones del álgebra de Grassmann, aunque la más relevante no es, de hecho, una derivación, sino una antiderivación, en el sentido siguiente:

Definición 3.45 Sea V una variedad diferencial. Una antiderivación en $\Lambda(V)$ es una aplicación lineal $\mathcal{D} : \Lambda(V) \rightarrow \Lambda(V)$ tal que

$$\mathcal{D}(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\mathcal{D}\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge \mathcal{D}\omega_2, \quad \text{para } \omega_1 \in \Lambda^p(V), \omega_2 \in \Lambda^q(V).$$

Una aplicación lineal $\mathcal{D} : \Lambda(V) \rightarrow \Lambda(V)$ es una *aplicación graduada* de grado m si se restringe a aplicaciones lineales $\mathcal{D} : \Lambda^k(V) \rightarrow \Lambda^{k+m}(V)$, donde hay que entender que $\Lambda^k(V) = 0$ si $k < 0$.

Vamos a definir tres derivaciones en el álgebra de Grassmann de una variedad (en realidad, dos antiderivaciones y una derivación):

La evaluación La evaluación es una antiderivación de grado -1 asociada a un campo vectorial:

Definición 3.46 Si V es una variedad diferencial y $X \in \mathfrak{X}(V)$ es un campo vectorial en V , definimos la *evaluación* en X o *multiplicación interior* por X como la aplicación lineal $i_X : \Lambda(V) \rightarrow \Lambda(V)$ dada por

$$i_X(\omega)(X_1, \dots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1}), \quad \text{para cada } \omega \in \Lambda^k(V).$$

Más precisamente, i_X es la única aplicación lineal que extiende a las aplicaciones lineales $i_X : \Lambda^k(V) \rightarrow \Lambda^{k-1}(V)$ definidas por la relación precedente,

donde hacemos uso del lema de localización, pues lo que hemos definido como $i_X(\omega)$ es en realidad una forma multilineal de $\mathfrak{X}(V)^{k-1}$ en $C^\infty(V)$, luego por el lema de localización determina un tensor, que claramente es alternado, es decir, una forma diferencial en V . En principio esto vale para $k > 0$, pero definimos $i_X(f) = 0$ para todo $f \in \Lambda^0(V)$.

Es claro que i_X no es más que la versión global de la evaluación definida en A.10 para espacios vectoriales. El teorema A.11 implica trivialmente que es una antiderivación.

La derivada de Lie La siguiente derivación es simplemente la derivada de Lie asociada a un campo $X \in \mathfrak{X}(V)$. En principio la tenemos definida sobre toda el álgebra tensorial de V , pero es fácil ver que se restringe a una derivación $\mathcal{L}_X : \Lambda(V) \rightarrow \Lambda(V)$ de grado 0. Concretamente, las fórmulas (3.5) y (3.6) de la prueba del teorema 3.32 se particularizan a

$$\mathcal{L}_X(\omega)(X_1, \dots, X_k) = X(\omega(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{i=1}^k \omega(X_1, \dots, \mathcal{L}_X X_i, \dots, X_k),$$

para toda $\omega \in \Lambda^k(V)$, y esta expresión muestra que $\mathcal{L}_X(\omega) \in \Lambda^k(V)$.

Más aún, para toda permutación $\sigma \in \Sigma_k$, a partir de la fórmula anterior se comprueba inmediatamente que $\mathcal{L}_X(\sigma\omega) = \sigma\mathcal{L}_X(\omega)$, de donde a su vez se sigue que \mathcal{L}_X es una derivación de $\Lambda(V)$, es decir, que cumple

$$\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = (\mathcal{L}_X\omega) \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X\eta. \quad (3.8)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) &= \mathcal{L}_X \left(\frac{1}{k! k'!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{k+k'}} (\text{sig } \sigma) \sigma(\omega \otimes \eta) \right) \\ &= \frac{1}{k! k'!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{k+k'}} (\text{sig } \sigma) \sigma \mathcal{L}_X(\omega \otimes \eta) \\ &= \frac{1}{k! k'!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{k+k'}} (\text{sig } \sigma) \sigma((\mathcal{L}_X\omega) \otimes \eta + \omega \otimes \mathcal{L}_X\eta) \\ &= (\mathcal{L}_X\omega) \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X\eta. \end{aligned}$$

Conviene observar que estos argumentos se aplican a cualquier derivación dada por el teorema 3.32 o, equivalentemente, para cualquier derivación de $\mathcal{T}(V)$ que conserve los grados de varianza y covarianza de los tensores homogéneos. Todas ellas se restringen a derivaciones de grado 0 de $\Lambda(V)$.

Otra relación que se comprueba sin dificultad a partir de la fórmula general dada por 3.32 es la siguiente:

$$i_{[X,Y]} = i_Y \circ \mathcal{L}_X - \mathcal{L}_X \circ i_Y. \quad (3.9)$$

La diferencial exterior Introducimos ahora la derivación más importante del álgebra exterior. Si V es una variedad diferencial y $f \in \Lambda^0(V) = C^\infty(V)$, tenemos que $df \in \Lambda^1(V)$. Vamos a probar que este operador diferencial se extiende a una antiderivación en $\Lambda(V)$ de grado 1. La idea básica es que vamos a definir la diferencial exterior de modo que

$$d(f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = df \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Esto no sirve como definición, pues, ni toda forma se puede expresar globalmente de este modo, ni localmente la expresión es única, pero observemos que esta “idea” tiene consecuencias globales. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} d(d(f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)) &= d(1 df \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) \\ &= d1 \wedge df \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = 0, \end{aligned}$$

por lo que la diferencial que vamos a definir deberá cumplir que $d \circ d = 0$. Más precisamente, vamos a probar que la diferencial usual $\Lambda^0(V) \rightarrow \Lambda^1(V)$ se extiende a una antiderivación de $\Lambda(V)$ unívocamente determinada por las condiciones del teorema siguiente:

Teorema 3.47 *Si V es una variedad diferencial, existe una única antiderivación $d : \Lambda(V) \rightarrow \Lambda(V)$ de grado 1 tal que $d \circ d = 0$ y, para $f \in \Lambda^0(V)$, se cumple que df es la diferencial de f en el sentido usual. Además, si dos formas coinciden en un entorno de un punto, sus diferenciales coinciden en el punto.*

DEMOSTRACIÓN: El carácter local de d se prueba por el argumento usual: Suponemos que ω se anula en un abierto U . Para cada $p \in U$ podemos tomar una función $f \in C^\infty(V)$ que se anule en un entorno de p y que valga 1 fuera de U . Entonces $\omega = f\omega$, luego

$$d\omega|_p = d(f\omega)|_p = df|_p \wedge \omega_p + f(p) \wedge d\omega|_p = df|_p \wedge 0 + 0 \wedge d\omega|_p = 0.$$

Ahora probamos que si existe la diferencial es única. Tomemos un punto $p \in V$ y sea (U, x) una carta alrededor de p . Tomemos una función $f \in C^\infty(V)$ que valga 1 en un entorno de p y se anule fuera de U .

Si $\omega \in \Lambda^k(V)$ entonces $\omega|_U$ se expresa como

$$\omega|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

para ciertas funciones $\omega_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(U)$.

La forma $f\omega$ coincide con ω en un entorno de p y sus coeficientes son las funciones $\bar{\omega}_{i_1 \dots i_k} = f\omega_{i_1 \dots i_k}$. Puesto que f se anula fuera de U , podemos considerar que $\bar{\omega}_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(V)$. Similarmente, las funciones $y^i = f x^i$ extendidas como 0 fuera de U son de clase C^∞ en V y coinciden con las x^i en un entorno de p . Por consiguiente dy^i coincide con dx^i en un entorno de p . Así pues, la forma $f\omega$ (y por consiguiente ω) coincide con la forma

$$\bar{\omega} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \bar{\omega}_{i_1 \dots i_k} dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}$$

en un entorno de p .

Ahora calculamos

$$d\bar{\omega} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d\bar{\omega}_{i_1 \dots i_k} \wedge dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}, \quad (3.10)$$

pues una simple inducción prueba que $d(dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}) = 0$ (pues se descompone en suma de productos con un factor $d(dy^j) = 0$). Teniendo en cuenta que la diferencial es local llegamos a que

$$d\omega|_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d\omega_{i_1 \dots i_k}(p) \wedge dx^{i_1}|_p \wedge \dots \wedge dx^{i_k}|_p. \quad (3.11)$$

Ahora bien, como las diferenciales de funciones son las usuales, el miembro derecho de la igualdad anterior es el mismo cualquiera que sea la función d que cumpla las propiedades del enunciado. En consecuencia la diferencial exterior es única.

Para probar la existencia partiremos de una expresión explícita que nos relacionará la diferencial exterior con la derivada de Lie.

Concretamente, vamos a ver que si definimos d sobre cada $\omega \in \Lambda^k(V)$ mediante

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_j (-1)^{j+1} X_j(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1})) \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

entonces se cumplen las propiedades del enunciado (el circunflejo indica que falta el término correspondiente). Para $k = 0$ esta definición debe entenderse como $df(X) = X(f)$, con lo que df es la diferencial usual, tal y como exige el enunciado.

Por el lema de localización es claro que $d\omega$, así definida, es ciertamente una forma diferencial de dimensión $k+1$. Extendemos d a $\Lambda(V)$ por linealidad. Probaremos que es una antiderivación indirectamente. Una comprobación rutinaria a partir de las definiciones nos da la *fórmula de Cartan*:

$$\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X \quad (3.13)$$

Ahora basta emplear el mismo razonamiento con el que probamos (3.8), pero usando la relación anterior en lugar de (3.9).

Para probar que $d \circ d = 0$ observamos en primer lugar que si $f \in \Lambda^0(V)$ entonces $d(df) = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned} d(df)(X, Y) &= X(df(Y)) - Y(df(X)) - df([X, Y]) \\ &= X(Y(f)) - Y(X(f)) - [X, Y](f) = 0. \end{aligned}$$

Como ya hemos observado al probar la unicidad, usando que d es una antiderivación se sigue que $d(dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k}) = 0$, para todas las funciones $y^i \in C^\infty(V)$, pero esto es lo único que hemos usado en la prueba de la

unicidad (y en la de que la diferencial exterior es local), luego sabemos que si ω es una forma arbitraria, en un entorno de cada punto p , la forma $d\omega$ coincide con una forma de tipo (3.10), luego en dicho entorno $d(d\omega)$ coincide con $d(d\bar{\omega})$, y ésta es nula por el mismo motivo que antes: porque al aplicar que d es una antiderivación se descompone en suma de productos con factores $d(d(y^j)) = 0$. ■

Conviene recordar la relación (3.13) que hemos obtenido en la prueba del teorema anterior. De ella, junto al hecho de que $d^2 = 0$, se sigue inmediatamente que

$$\mathcal{L}_X \circ d = d \circ \mathcal{L}_X. \quad (3.14)$$

Una última propiedad relevante de la diferencial exterior es que conmuta con las retracciones:

Teorema 3.48 *Si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación diferenciable entre variedades y $\omega \in \Lambda(W)$, entonces $f^*(d\omega) = df^*(\omega)$.*

DEMOSTRACIÓN: Por linealidad podemos suponer que $\omega \in \Lambda^k(W)$. La expresión (3.11) muestra que si $x : U \rightarrow \tilde{U}$ es una carta alrededor de un punto p , entonces $(d\omega)|_U = d(\omega|_U)$, e igualmente $f^*(d\omega)_p$ y $df^*(\omega)_p$ dependen únicamente de $\omega|_U$, luego no perdemos generalidad si suponemos que W puede cubrirse por una sola carta, con lo que, de nuevo por linealidad, podemos suponer que $\omega = g dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^k$. Pero entonces es claro que

$$f^*(d\omega) = d(f \circ g) \wedge d(f \circ x^1) \wedge \cdots \wedge d(f \circ x^k) = df^*(\omega). \quad \blacksquare$$

Capítulo IV

Variedades de Riemann

Observemos que una variedad diferencial como S^2 es difeomorfa a todas las esferas contenidas en \mathbb{R}^3 , y esto hace que sea imposible definir el área de S^2 a partir meramente de su estructura diferencial, pues si fuera posible, el área debería conservarse por difeomorfismos, pero S^2 es difeomorfa a esferas con áreas distintas. De hecho, a partir de la mera estructura diferencial de S^2 no podemos afirmar siquiera que S^2 sea esférica (salvo en un sentido puramente topológico), pues S^2 es difeomorfa a cualquier subvariedad de \mathbb{R}^3 que resulte de deformar suavemente una esfera.

Si pensamos en las variedades diferenciales como generalizaciones del concepto de espacio afín, las variedades de Riemann que vamos a presentar en este capítulo son la generalización análoga del concepto de espacio afín euclídeo, es decir, de un espacio afín en el que hemos fijado un producto escalar en su espacio vectorial asociado. Esto permite hablar de longitud de segmentos y amplitud de ángulos —en particular de perpendicularidad— lo cual a su vez permite definir muchos otros conceptos, como el de volumen de un subconjunto, etc.

Ahora bien, el desarrollo de la teoría de la relatividad hizo que cobrara relevancia la posibilidad de trabajar con una estructura algo más general que la de variedad de Riemann, a saber, con lo que se conoce como variedades semirriemannianas, que son el análogo a un espacio afín cuyo espacio vectorial asociado está dotado de una forma bilineal con propiedades un poco más débiles que las que exige la definición de producto escalar.

Remitimos al lector a la sección A.4 del apéndice A para una exposición de los resultados básicos sobre espacios vectoriales semieuclicídeos, que son precisamente la generalización que necesitamos de los espacios euclídeos.¹ Veremos que, con estos pocos preliminares, desarrollar la teoría de variedades de Riemann en el contexto más general de las variedades semirriemannianas —en la medida de lo posible, pues no toda la teoría es generalizable— no requiere apenas ningún esfuerzo adicional.

¹El último apartado, dedicado al elemento de volumen de un espacio semieuclicídeo, requiere la sección A.3, pero el lector puede, si lo desea, posponer temporalmente la lectura de estas partes.

4.1 Variedades semirriemannianas

Definición 4.1 Un *tensor métrico* de índice ν en una variedad diferencial sin frontera V de dimensión n es un tensor $g \in \mathcal{T}_2^0(V)$ tal que, para cada $p \in V$, se cumple que $g_p : T_p(V) \times T_p(V) \rightarrow \mathbb{R}$ es un producto escalar de rango n e índice ν . Los tensores métricos de índice 0 se llaman *métricas de Riemann*.

Una *variedad semirriemanniana* es un par (V, g) , donde V es una variedad diferencial sin frontera y g es un tensor métrico en V . Una *variedad de Riemann* es un par (V, g) donde g es una métrica de Riemann en V .

De este modo, si V es una variedad semirriemanniana, en cada espacio tangente $T_p(V)$ hay definido un producto escalar g_p , aunque a menudo lo representaremos con la notación

$$\langle v, w \rangle_p = g_p(v, w).$$

La norma de un vector tangente es entonces $\|v\|_p = \sqrt{|g_p(v, v)|}$.

En el caso de una variedad de Riemann, el producto escalar en cada espacio $T_p(V)$ nos permite hablar de ortogonalidad de vectores en el sentido de la geometría euclídea usual, y la norma se corresponde a su vez con el concepto de longitud de un vector. En el caso semirriemanniano, en cada espacio tangente tenemos una “geometría” más débil, pero veremos que en muchos casos será suficiente para que se sigan cumpliendo resultados básicos de la geometría riemanniana.

Representaremos por $G = (g_{ij})$ a la matriz de las coordenadas de g respecto de una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ de V , es decir, la matriz que cumple

$$g|_U = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

En particular $g_{ij} \in C^\infty(U)$. La matriz G es simétrica y tiene determinante no nulo en cada punto. Representaremos por g^{ij} a los coeficientes de la matriz G^{-1} . La fórmula para la matriz inversa prueba que también $g^{ij} \in C^\infty(U)$.

Ejemplo Si E es un espacio afín semieuclicídeo, es decir, un espacio afín en cuyo espacio vectorial asociado \vec{E} hay definido un producto escalar de rango máximo n e índice ν , podemos definir un tensor métrico en E de índice ν a través de los isomorfismos canónicos $\theta_p : T_p(E) \rightarrow \vec{E}$, a saber:

$$g_p(v, w) = \langle \theta_p(v), \theta_p(w) \rangle.$$

Si $x : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una carta asociada a un sistema de referencia ortonormal $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, entonces $\theta_p(\partial_{x^i}|_p) = \vec{e}_i$, de donde se sigue inmediatamente que

$$g = \sum_i \epsilon_i dx^i \otimes dx^i,$$

donde $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ es la signatura de \vec{E} , por lo que ciertamente el tensor g es diferenciable.

Por otro lado, de la propia definición del tensor métrico que sigue que los isomorfismos canónicos θ_p son isometrías entre espacios semieuclicídeos, y esto nos permite afirmar que g induce en cada espacio tangente abstracto $T_p(E)$ el producto escalar “correcto”, en el sentido de que el producto escalar de dos vectores abstractos coincide con el de los vectores “geométricos” que representan.

En particular, en lo sucesivo consideraremos siempre a \mathbb{R}^n como variedad semirriemanniana con este tensor métrico, que admite la expresión indicada respecto de las coordenadas cartesianas y, más en particular, tenemos definida una estructura de variedad de Riemann sobre \mathbb{R}^n , cuyo tensor métrico viene dado por

$$g = \sum_i dx^i \otimes dx^i.$$

A través del isomorfismo canónico $\theta_p : T_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$, cada producto g_p se transforma en el producto escalar usual

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n. \quad \blacksquare$$

Subvariedades Veamos ahora que las subvariedades de \mathbb{R}^m heredan su estructura métrica. Más en general:

Teorema 4.2 Si $f : V \rightarrow W$ es una inmersión entre variedades diferenciales sin frontera y $g \in \mathcal{T}_2^0(W)$ es una métrica de Riemann en W , entonces el tensor $f^*(g) \in \mathcal{T}_2^0(V)$ es una métrica de Riemann en V .

DEMOSTRACIÓN: Recordemos que la definición de la retracción es

$$f^*(g)_p(v_1, v_2) = g_{f(p)}(df|_p(v_1), df|_p(v_2))$$

y que, por definición de inmersión, $df|_p : T_p(V) \rightarrow T_{f(p)}(W)$ es un monomorfismo de espacios vectoriales. De aquí se sigue inmediatamente que $f^*(g)$ es un producto escalar definido positivo en $T_p(V)$. \blacksquare

Ejemplo En particular el teorema anterior se aplica cuando V es una subvariedad sin frontera de una variedad de Riemann W . Entonces la inclusión determina una métrica de Riemann $i^*(g)$ en V a partir de la de W , a la que llamaremos *restricción* de g a V .

En lo sucesivo consideraremos siempre como variedades de Riemann a las subvariedades de las variedades de Riemann considerando en ellas la restricción de la métrica.

De este modo, identificando $T_p(V)$ con un subespacio de $T_p(W)$ a través de la diferencial de la inclusión: $di|_p : T_p(V) \rightarrow T_p(W)$, tenemos que el producto escalar de $T_p(V)$ es la restricción del de $T_p(W)$, por lo que las nociones de perpendicularidad y longitud en $T_p(V)$ son las mismas que en $T_p(W)$.

Así, por ejemplo, en una subvariedad V de \mathbb{R}^m , la longitud de un vector de $T_p(V)$ y la ortogonalidad de dos vectores se corresponde con los conceptos geométricos usuales a través de la identificación de $T_p(V)$ con un subespacio de $T_p(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n$. \blacksquare

En el caso semirriemanniano, en lugar de un teorema tenemos una definición:

Definición 4.3 Sea W una variedad semirriemanniana y V una subvariedad sin frontera de W . Diremos que V es una *subvariedad semirriemanniana* de W si la retracción $i^*(g)$ del tensor métrico de W es un tensor métrico en V .

Sabemos que esto sucede si y sólo si $T_p(V) \cap T_p(V)^\perp = 0$ para todo $p \in V$, y en tal caso, con la identificación determinada por la diferencial de la inclusión di_p , tenemos que $T_p(V) = T_p(W) \oplus T_p(W)^\perp$, por lo que podemos considerar las proyecciones

$$\tan_p : T_p(V) \longrightarrow T_p(W), \quad \text{nor}_p : T_p(V) \longrightarrow T_p(W)^\perp$$

que nos dan la descomposición única de cada vector $v \in T_p(V)$ como

$$v = \tan_p(v) + \text{nor}_p(v).$$

La aplicación \tan_p es lo que se conoce habitualmente en geometría como la proyección ortogonal de $T_p(V)$ en $T_p(W)$.

En este punto conviene considerar el espacio $\mathfrak{X}(W, V)$ de los campos vectoriales en V definidos sobre la subvariedad W , así como su subespacio $\mathfrak{X}_V(W)^\perp$, formado por los campos $X \in \mathfrak{X}(W, V)$ tales que, para todo punto $p \in W$, se cumple que $X_p \in T_p(W)^\perp$. De este modo podemos definir las aplicaciones

$$\tan : \mathfrak{X}(W, V) \longrightarrow \mathfrak{X}(W), \quad \text{nor} : \mathfrak{X}(W, V) \longrightarrow \mathfrak{X}_V(W)^\perp$$

dadas por

$$\tan(X)_p = \tan_p(X_p), \quad \text{nor}(X)_p = \text{nor}_p(X_p).$$

Para que estas definiciones sean correctas tenemos que comprobar que el tensor $\tan(X)$ es diferenciable, para lo cual, en virtud del teorema del rango 1.14, alrededor de cada punto de W podemos tomar una carta de W y otra de V de modo que la lectura de la inclusión sea

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0).$$

Esto equivale a que si $x^1, \dots, x^m : U \longrightarrow \mathbb{R}$ son las coordenadas de la carta de V , entonces las de la carta de W son $x^1|_{U \cap W}, \dots, x^n|_{U \cap W}$, y las coordenadas x^{n+1}, \dots, x^m se anulan en W . A su vez, esto hace que $di|_p(\partial_{x_i}|_p) = \partial_{x_i}|_p$, para $i = 1, \dots, n$. En particular $\tan(\partial_{x_i}) = \partial_{x_i}$, para $i = 1, \dots, n$. En cambio, para $i = n+1, \dots, m$, tendremos que

$$\tan(\partial_{x_i}) = \sum_{j=1}^n a_i^j \partial_{x_j},$$

para ciertas funciones a_i^j que tenemos que probar que son diferenciables. Puesto que $\partial_{x_i}|_p - \sum_{j=1}^n a_i^j(p) \partial_{x_j}|_p \in T_p(W)^\perp$ en cada punto $p \in U \cap W$, se tiene que cumplir que

$$\left\langle \partial_{x_i}|_p - \sum_{j=1}^n a_i^j(p) \partial_{x_j}|_p, \partial_{x_k}|_p \right\rangle_p = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

o, equivalentemente,

$$g_{ik} - \sum_{j=1}^n a_i^j g_{jk} = 0, \quad i = n+1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n.$$

Por consiguiente, $a_i^j = \sum_{k=1}^n g_{ik} g^{kj}$ es diferenciable.

Con esto hemos probado que $\tan(\partial_{x_i}) \in \mathfrak{X}(W \cap U)$, para $i = 1, \dots, m$, y por linealidad lo mismo vale para $X|_{W \cap U}$, para todo campo $X \in \mathfrak{X}(W, V)$, luego de hecho $\tan(X) \in \mathfrak{X}(W)$.

A su vez, como $\text{nor}(X) = X - \tan(X)$, es claro que las coordenadas de $\text{nor}(X)$ son diferenciables (porque lo son las de X y las de $\tan(X)$), luego también $\text{nor}(X) \in \mathfrak{X}_V(W)^\perp$. ■

El teorema siguiente nos da la expresión en coordenadas de la retracción de un tensor métrico:

Teorema 4.4 *Sea $f : V \rightarrow W$ una inmersión de una variedad diferencial V en una variedad semirriemanniana W , sean $x : U \rightarrow \tilde{U}$, $y : U' \rightarrow \tilde{U}'$ cartas de V y W respectivamente tales que $f[U] \subset U'$ y sea J_x^y la matriz jacobiana de f respecto de dichas cartas, es decir, la matriz que contiene las derivadas*

$$\frac{\partial(f \circ y^j)}{\partial x_i}.$$

Entonces la relación entre las matrices G_x y G_y de las coordenadas de los tensores $f^*(g)$ y g , respectivamente, es

$$G_x = J_x^y (f \circ G_y) (J_x^y)^t.$$

DEMOSTRACIÓN: Por definición, si llamamos \bar{g}_{ij} a las coordenadas de $f^*(g)$ en la carta x ,

$$\bar{g}_{ij}(p) = g_p(df|_p(\partial_{x_i}|_p), df|_p(\partial_{x_j}|_p)),$$

donde

$$df|_p(\partial_{x_i}|_p) = \sum_{k=1}^m df|_p(\partial_{x_i}|_p)(y^k) \partial_{y^k}|_{f(p)} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial(f \circ y^k)}{\partial x_i} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y^k} \Big|_{f(p)},$$

luego

$$\bar{g}_{ij}(p) = \sum_{k,l=1}^m \frac{\partial(f \circ y^k)}{\partial x_i} \Big|_p g_{kl}(f(p)) \frac{\partial(f \circ y^l)}{\partial x_j} \Big|_p,$$

y esto es el término (i, j) de la matriz indicada en el enunciado. ■

En particular, si aplicamos el teorema anterior a la inclusión $i : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ de una subvariedad de \mathbb{R}^m en \mathbb{R}^m , considerando en \mathbb{R}^m las coordenadas cartesianas (con lo que el tensor métrico tiene matriz identidad), el tensor métrico de V en una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ tiene coordenadas

$$G_x = J_x J_x^t.$$

Si llamamos $X = x^{-1}$ a la parametrización asociada a la carta, resulta que $J_x = x \circ J_X$, donde J_X es la matriz jacobiana de $X : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$, pues, por definición,

$$\left. \frac{\partial y^j}{\partial x_i} \right|_p = \left. \frac{\partial X^j}{\partial x_i} \right|_{x(p)}.$$

Por consiguiente, la fila i -ésima de $J_x(p)$ es

$$\left. \frac{\partial X}{\partial x_i} \right|_{x(p)},$$

luego

$$g_{ij}(p) = \left. \frac{\partial X}{\partial x_i} \right|_{x(p)} \cdot \left. \frac{\partial X}{\partial x_j} \right|_{x(p)}. \quad (4.1)$$

Ejemplo Consideremos la carta en el hemisferio superior de S^2 dada por la proyección en las dos primeras componentes. Entonces

$$X(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}),$$

luego

$$\frac{\partial X}{\partial x} = (1, 0, -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}), \quad \frac{\partial X}{\partial y} = (0, 1, -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}),$$

luego las coordenadas de la métrica de S^2 respecto de esta carta son

$$g_{11} = \frac{1 - y^2}{1 - x^2 - y^2}, \quad g_{12} = g_{21} = \frac{xy}{1 - x^2 - y^2}, \quad g_{22} = \frac{1 - x^2}{1 - x^2 - y^2}. \quad \blacksquare$$

Productos Veamos ahora que el producto de variedades semirriemannianas adquiere estructura de variedad semirriemanniana de forma natural:

Teorema 4.5 Sean $\pi_i : V_1 \times V_2 \rightarrow V_i$ las proyecciones en un producto de variedades semirriemannianas. Entonces $V_1 \times V_2$ es una variedad semirriemanniana con la métrica dada por $g = \pi_{1\#}(g_1) + \pi_{2\#}(g_2)$. El índice de g es la suma de los índices de g_1 y g_2 , luego si V_1 y V_2 son variedades de Riemann, $V_1 \times V_2$ también lo es con este tensor métrico.

DEMOSTRACIÓN: Para cada punto $(p_1, p_2) \in V_1 \times V_2$, sabemos que podemos considerar que $T_{(p_1, p_2)}(V_1 \times V_2) = T_{p_1}(V_1) \oplus T_{p_2}(V_2)$ identificando $T_{p_i}(V_i)$ con un subespacio de $T_{(p_1, p_2)}(V_1 \times V_2)$ a través de las diferenciales de las inclusiones ι_{p_i} . Así, si $v_1, w_1 \in T_{p_1}(V_1)$, tenemos que

$$\begin{aligned} g_{(p_1, p_2)}(d\iota_{p_2}|_{p_1}(v_1), d\iota_{p_2}|_{p_1}(w_1)) &= \\ g_{1\ p_1}(d\pi_1|_{(p_1, p_2)}(d\iota_{p_2}|_{p_1}(v_1)), d\pi_1|_{(p_1, p_2)}(d\iota_{p_2}|_{p_1}(w_1))) & \\ + g_{2\ p_2}(d\pi_2|_{(p_1, p_2)}(d\iota_{p_2}|_{p_1}(v_1)), d\pi_2|_{(p_1, p_2)}(d\iota_{p_2}|_{p_1}(w_1))) &= g_{1\ p_1}(v_1, w_1), \end{aligned}$$

donde usamos que $\iota_{p_2} \circ \pi_1$ es la identidad y que $\iota_{p_2} \circ \pi_2$ es constante.

En términos de las identificaciones queda $g_{(p_1, p_2)}(v_1, w_1) = g_{1 p_1}(v_1, w_1)$. Igualmente vemos que $g_{(p_1, p_2)}(v_2, w_2) = g_{2 p_2}(v_2, w_2)$ (para $v_2, w_2 \in T_{p_2}(V_2)$), mientras que $g_{(p_1, p_2)}(v_1, v_2) = 0$.

Es claro entonces que, si fijamos cartas alrededor de p_1 y p_2 y tomamos la carta producto alrededor de (p_1, p_2) , la matriz de coordenadas de g es

$$\left(\begin{array}{c|c} G_1(p_1) & 0 \\ \hline 0 & G_2(p_2) \end{array} \right),$$

y es fácil ver que esta matriz define en cada espacio tangente un producto escalar de rango máximo e índice igual a la suma de los índices de los factores. ■

Sistemas de referencia ortonormales En general no es posible encontrar una carta x en una variedad semirriemanniana tal que el sistema de referencia $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}$ sea ortonormal en cada punto de su dominio, pero siempre es posible encontrar, en un entorno de cada punto, sistemas de referencia ortonormales, aunque no necesariamente asociados a una carta:

Teorema 4.6 *Si V es una variedad semirriemanniana y $p \in V$, existe un entorno U de p en el que está definido un sistema de referencia ortonormal $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(U)$ (en el sentido de que es ortonormal en cada punto).*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 3.42 existe un entorno conexo U de p en el que hay definido un sistema de referencia $Y_1, \dots, Y_n \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $Y_{1,p}, \dots, Y_{n,p}$ es una base ortonormal de $T_p(V)$. Sólo tenemos que aplicar a este sistema de referencia el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt:

Restringiendo U si es necesario, podemos exigir que $\|Y_1\| \neq 0$ en todos los puntos de U . Definimos $X_1 = \|Y_1\|^{-1}Y_1$, de modo que $X_{1,p} = Y_{1,p}$ y

$$\langle X_1, X_1 \rangle = \|Y_1\|^{-2} \langle Y_1, Y_1 \rangle = \|Y_1\|^{-2} \epsilon_1 \|Y_1\|^2 = \epsilon_1.$$

Aquí usamos que, por continuidad, el signo de $\langle Y_1, Y_1 \rangle$ tiene que ser constantemente igual al de $\langle Y_{1,p}, Y_{1,p} \rangle = \epsilon_1$.

Supongamos que hemos obtenido campos vectoriales X_1, \dots, X_k ortonormales, con $\langle X_i, X_i \rangle = \epsilon_i$ y de modo que $X_{i,p} = Y_{i,p}$. Entonces, si $k < n$, definimos

$$\bar{X}_{k+1} = Y_{k+1} - \epsilon_1 \langle Y_{k+1}, X_1 \rangle X_1 - \dots - \epsilon_k \langle Y_{k+1}, X_k \rangle X_k.$$

Así $\langle \bar{X}_{k+1}, X_i \rangle = 0$, para $i = 1, \dots, k$ y $\bar{X}_{k+1,p} = Y_{k+1,p}$, luego, restringiendo U si es preciso, podemos suponer que $\|\bar{X}_{k+1}\| \neq 0$ en todos los puntos de U , con lo que podemos definir $X_{k+1} = \|\bar{X}_{k+1}\|^{-1} \bar{X}_{k+1}$. Así se sigue cumpliendo que $\langle X_{k+1}, X_i \rangle = 0$, $X_{k+1,p} = Y_{k+1,p}$, y además $\langle X_{k+1}, X_{k+1} \rangle = \epsilon_{k+1}$.

De este modo, al cabo de n pasos obtenemos el sistema de referencia deseado. ■

Isometrías Presentamos ahora las aplicaciones que conservan los tensores métricos:

Definición 4.7 Una *isometría* entre dos variedades semirriemannianas V y W es un difeomorfismo $f : V \rightarrow W$ tal que $f^*(g_W) = g_V$ (donde g_V y g_W son los tensores métricos respectivos). Esto equivale a que para cada $p \in V$ se cumple que $df|_p : T_p(V) \rightarrow T_{f(p)}(W)$ es una isometría de espacios semieuclicídeos. Dos variedades semirriemannianas son *isométricas* si existe una isometría entre ellas.

Es claro que la composición de isometrías es una isometría, así como que la inversa de una isometría es una isometría. Dos variedades semirriemannianas isométricas en este sentido coinciden en todas aquellas propiedades definibles a partir de la estructura métrica.

Ejemplo Si $f : E \rightarrow F$ es una isometría entre espacios afines semieuclicídeos, es decir, una biyección afín cuya aplicación lineal asociada $\vec{f} : \vec{E} \rightarrow \vec{F}$ sea una isometría de espacios vectoriales semieuclicídeos, entonces f es también una isometría de variedades semirriemannianas. Basta tener en cuenta el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} T_p(E) & \xrightarrow{df|_p} & T_{f(p)}(F) \\ \theta_p \downarrow & & \downarrow \theta_{f(p)} \\ \vec{E} & \xrightarrow{\vec{f}} & \vec{F} \end{array}$$

en el que los otros tres isomorfismos son isometrías, luego $df|_p$ también lo es. ■

Ejercicio: Probar que si $f : V \rightarrow W$ es una isometría entre dos variedades semirriemannianas que se restringe a una biyección $f_0 : V_0 \rightarrow W_0$ entre dos subvariedades respectivas, entonces la restricción es una isometría.

Algunos resultados sobre isometrías son válidos también para una familia de aplicaciones un poco más general:

Definición 4.8 Una aplicación diferenciable $f : V \rightarrow W$ entre variedades semirriemannianas es una *isometría local* si para todo $p \in V$ se cumple que $df|_p : T_p(V) \rightarrow T_{f(p)}(W)$ es una isometría de espacios semieuclicídeos.

La diferencia es que ahora no pedimos que f sea un difeomorfismo. Obviamente toda isometría es una isometría local y, por el teorema de la aplicación inversa, toda isometría local se restringe a una isometría entre un entorno de cualquiera de sus puntos y un entorno de su imagen.

Ejemplo: Los espacios proyectivos Sea $\pi : S^n \rightarrow P^n(\mathbb{R})$ la proyección natural de la esfera en el espacio proyectivo que identifica cada par de puntos antípodas. La aplicación $I : S^n \rightarrow S^n$ dada por $I(x) = -x$ es una isometría (porque es la restricción de una isometría de \mathbb{R}^{n+1}), y se cumple que $I \circ \pi = \pi$.

Si $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ y $p_1, p_2 \in S^n$ son sus dos antiimágenes por π , por el teorema de la función inversa podemos tomar entornos U de p y U_i de p_i de modo que $\pi|_{U_i} : U_i \rightarrow U$ es un difeomorfismo. Claramente podemos exigir que $I|_{U_1} : U_1 \rightarrow U_2$ sea biyectiva y, de hecho, una isometría. Esto se traduce en que si transportamos mediante el isomorfismo $d\pi|_{p_1} : T_{p_1}(S^n) \rightarrow T_p(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ el producto escalar del primer espacio obtenemos el mismo producto escalar en el segundo que si partimos de p_2 en lugar de p_1 . Si llamamos g_p a este producto escalar, tenemos que $g \in \mathcal{T}_2^0(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$, pues, para cada punto p , se cumple que $g|_U = (\pi|_{U_i}^{-1})^*(g|_{U_i})$. Por lo tanto, g es una métrica de Riemann en el espacio proyectivo respecto de la cual todas las diferenciales $d\pi|_p$ son isometrías, luego π es una isometría local.

En lo sucesivo consideraremos siempre a $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ como variedad de Riemann con esta métrica. ■

No es frecuente que una variedad semirriemanniana admita cartas que sean isometrías, pero el teorema 3.42 nos da lo siguiente:

Teorema 4.9 *Si V es una variedad semirriemanniana y $p \in V$, existe una carta x alrededor de p tal que $\partial_{x_1}|_p, \dots, \partial_{x_n}|_p$ es una base ortonormal de $T_p(V)$. En particular, $dx|_p : T_p(V) \rightarrow T_{x(p)}(\mathbb{R}_s^n)$ es una isometría.*

Probamos ahora un resultado técnico que necesitaremos más adelante:

Teorema 4.10 *Sea V una variedad diferencial, $p \in V$ y $g \in \mathcal{T}_2^0(V)$ un tensor simétrico² tal que g_p sea un producto escalar euclídeo. Entonces existe un entorno U de p tal que $g|_U$ es una métrica de Riemann en U .*

DEMOSTRACIÓN: Sea $x : U_0 \rightarrow \tilde{U}_0$ una carta alrededor de p en las condiciones del teorema anterior. Sea (g_{ij}) la matriz de las coordenadas de g en dicha carta, de modo que $(g_{ij}(p))$ es la matriz identidad. Consideremos un entorno U de p en el que, para todo $q \in U$, se cumpla

$$|g_{ii}(q) - 1| < \frac{1}{2}, \quad |g_{ij}(q)| < \frac{1}{2n^2}, \quad \text{para } i \neq j.$$

Así, si existiera un $v \in T_q(V)$ no nulo tal que $g_q(v, v) \leq 0$, dividiéndolo entre la máxima de sus coordenadas (respecto de la base asociada a x) podemos exigir que éstas cumplan $|v^i| \leq 1$ y que para una de ellas sea $|v^{i_0}| = 1$. Tenemos que

$$\sum_i g_{ii}(q)(v^i)^2 + \sum_{i \neq j} g_{ij}(q)v^i v^j \leq 0,$$

luego

$$\frac{1}{2} < g_{i_0, i_0}(q) \leq \sum_i g_{ii}(q)(v^i)^2 \leq \sum_{i \neq j} |g_{ij}(q)| |v^i| |v^j| \leq n^2 \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2},$$

contradicción. Por lo tanto $g_q(v, v) > 0$ para todo $v \neq 0$, lo que prueba que g_q tiene rango n y signatura 0. ■

²Esto significa que $g_q(v, w) = g_q(w, v)$, para todo $q \in V$ y todos los vectores $v, w \in T_q(V)$.

4.2 Orientación de variedades

Remitimos al primer apartado de la sección A.3 para recordar el concepto de orientación en un espacio vectorial y su relación con los tensores antisimétricos.

En una variedad diferencial V podemos considerar una orientación en cada espacio tangente $T_p(V)$, y la cuestión que vamos a estudiar aquí es si podemos hacerlo “diferenciabilmente”, es decir, de modo que podamos tomar cartas $x_U \rightarrow \tilde{U}$ de V “orientadas”, en el sentido de que todas las bases ordenadas $\partial_{x_1}|_p, \dots, \partial_{x_n}|_p$ estén orientadas, para todos los puntos $p \in U$. Obviamente, siempre podríamos tomar por definición como orientación de $T_p(V)$ la que tiene a $\partial_{x_1}|_p, \dots, \partial_{x_n}|_p$ por base orientada, pero el problema que surge es si es posible elegir un atlas de V en el que no haya cartas que estipulen orientaciones opuestas en un mismo espacio tangente.

Más precisamente, sabemos que si $x : U_1 \rightarrow \tilde{U}_1$ e $y : U_2 \rightarrow \tilde{U}_2$ son dos cartas de una variedad V alrededor de un mismo punto p , la matriz de cambio de base entre $\partial_{x_1}|_p, \dots, \partial_{x_n}|_p$ y $\partial_{y_1}|_p, \dots, \partial_{y_n}|_p$ es la matriz jacobiana de $x^{-1} \circ y$ en el punto $x(p)$, luego ambas bases tendrán la misma orientación si el determinante jacobiano es positivo. Esto nos lleva a las definiciones siguientes:

Definición 4.11 Un *atlas orientado* en una variedad diferencial V es un atlas de V tal que si x, y son dos de sus cartas, el difeomorfismo $x^{-1} \circ y$ tiene determinante jacobiano positivo en todos los puntos de su dominio. Una *orientación* de V es un atlas orientado maximal respecto de la inclusión.

La prueba del teorema 1.9 se adapta fácilmente para probar esta variante sobre atlas orientados:

Teorema 4.12 *Todo atlas orientado en una variedad diferencial V se extiende a una única orientación en V .*

Concretamente, la orientación determinada por un atlas orientado \mathcal{A} consta de las cartas x de V tales que para toda carta y de \mathcal{A} se cumple que $x^{-1} \circ y$, $y^{-1} \circ x$ son difeomorfismos con determinante jacobiano positivo en todos los puntos de su dominio.

Definición 4.13 Una variedad diferencial es *orientable* si admite una orientación. Una *variedad diferencial orientada* es un par (V, \mathcal{O}) , donde V es una variedad diferencial³ y \mathcal{O} es una orientación de V . Las cartas de \mathcal{O} se llaman *cartas orientadas* de (V, \mathcal{O}) .

Observemos que si \mathcal{A} es un atlas orientado en una variedad diferencial V , una carta x de V está orientada (respecto de la orientación determinada por \mathcal{A}) si

³En realidad, los conceptos de “atlas orientado” y “orientación” tienen sentido sobre espacios topológicos arbitrarios, por lo que podríamos definir alternativamente una variedad diferencial orientada como un par (V, \mathcal{O}) , donde V es un espacio topológico de Hausdorff con una base numerable y \mathcal{O} es una orientación en V . En tal caso (V, \mathcal{O}) se convierte en una variedad diferencial con la única estructura diferencial que extiende a \mathcal{O} .

para toda carta y de \mathcal{A} se cumple que el difeomorfismo $x^{-1} \circ y$ tiene determinante jacobiano positivo en todos los puntos de su dominio (pues esto implica que el difeomorfismo inverso también tiene determinante jacobiano positivo).

Si V es una variedad orientada y $p \in V$, consideraremos a $T_p(V)$ como espacio vectorial orientado con la orientación en la que las bases de la forma $\partial_{x_1}|_p, \dots, \partial_{x_n}|_p$ son positivas, para todas las cartas orientadas x de V alrededor de p . Ya hemos observado que esto sucederá con todas las cartas orientadas si y sólo si sucede con una de ellas.

En estos términos, una carta x de V está orientada si y sólo si las bases $\partial_{x_1}|_p, \dots, \partial_{x_n}|_p$ están orientadas, para todo punto $p \in U$, pues esto equivale a que si y es una carta orientada de V alrededor de p el determinante jacobiano de $x^{-1} \circ y$ sea positivo en p .

Diremos que un difeomorfismo $f : V \rightarrow W$ entre variedades diferenciales orientadas es un *difeomorfismo orientado* si para cada $p \in V$ se cumple que el isomorfismo $df|_p : T_p(V) \rightarrow T_p(W)$ conserva la orientación, es decir, transforma bases orientadas en bases orientadas. Es fácil ver que esto equivale a que el determinante jacobiano de las lecturas de f respecto de cartas orientadas de V y W sea positivo en todos los puntos.

Veamos ahora cómo expresar la orientación de una variedad en términos de formas diferenciales. Conviene dar una definición:

Definición 4.14 Un *elemento de volumen orientado* en una variedad diferencial V de dimensión n es una forma diferencial en $\Lambda^n(V)$ que no se anula en ningún punto.

El nombre de “elemento de volumen” se explica parcialmente por los resultados de la sección A.3, que en la sección siguiente extenderemos demostrando que cada elemento de volumen orientado determina una medida de Borel (una posible definición de volumen) en V .

Teorema 4.15 Una variedad diferencial V de dimensión n es orientable si y sólo si tiene un elemento de volumen orientado $\omega \in \Lambda^n(V)$. En tal caso, existe una única orientación en V tal que las bases orientadas de cada espacio $T_p(V)$ son las que cumplen $\omega_p(v_1, \dots, v_n) > 0$, y toda orientación de V puede determinarse de este modo a partir de un elemento de volumen orientado.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que V es orientable y fijemos una orientación en V formada por cartas $x_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i$, para ciertos índices $i \in I$. Sea $\{\phi_i\}_{i \in I}$ una partición de la unidad subordinada, de acuerdo con el teorema 1.21. La forma $\omega_i = \phi_i dx_{i1} \wedge \dots \wedge dx_{in}$, definida en principio sobre U_i , se extiende a una forma diferenciable en V que se anula fuera de U_i .

Como los soportes de las funciones ϕ_i forman una familia localmente finita, podemos definir $\omega = \sum_{i \in I} \omega_i \in \Lambda^n(V)$. Veamos que no se anula en ningún punto.

Dado $p \in V$, fijamos una carta x_i alrededor de p . Si x_j es cualquier otra carta que no se anule en p , tenemos que

$$\omega_j = \phi_j dx_j^1 \wedge \cdots \wedge dx_j^n = \alpha \phi_j dx_i^1 \wedge \cdots \wedge dx_i^n,$$

donde $\alpha \in C^\infty(U_i \cap U_j)$ es el determinante jacobiano de $x_i^{-1} \circ x_j$, luego en particular $\alpha(p) > 0$ y también $\phi_j(p) > 0$, luego ω_p es una suma finita de múltiplos positivos de $dx_i^1 \wedge \cdots \wedge dx_i^n$, luego $\omega_p \neq 0$. Más concretamente, $\omega_p(\partial_{x_1}|_p, \dots, \partial_{x_n}|_p) > 0$, para toda carta orientada de V alrededor de p . A su vez, esto implica que $\omega_p(v_1, \dots, v_n) > 0$ para toda base orientada v_1, \dots, v_n de $T_p(V)$.

Recíprocamente, si $\omega \in \Lambda^n(V)$ es un elemento de volumen orientado, podemos considerar el conjunto \mathcal{A} formado por todas las cartas $x : U \rightarrow \tilde{U}$ de V que cumplen $\omega_p(\partial_{x_1}|_p, \dots, \partial_{x_n}|_p) > 0$ para todo $p \in U$. Veamos en primer lugar que \mathcal{A} es un atlas, es decir, que todo punto $p \in V$ tiene una carta en \mathcal{A} .

En efecto, siempre podemos tomar una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ alrededor de p con U conexo. Entonces $\omega|_U = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ para cierta $f \in C^\infty(U)$ que no se anula en U . Si $f(p) < 0$, componiendo x con $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$ obtenemos una nueva carta respecto de la cual f se sustituye por $-f$ en la expresión local de ω , luego podemos suponer que $f(p) > 0$ y, por conexión, $f(q) > 0$ para todo $q \in U$.

Es claro que \mathcal{A} es un atlas orientado, pues si $x : U \rightarrow \tilde{U}$ e $y : U' \rightarrow \tilde{U}'$ son dos cartas alrededor de un mismo punto p , tenemos que

$$\omega_p|_{U \cap U'} = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = f' dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$$

con $f(p), f'(p) > 0$, pero $f(p)f'(p)^{-1} > 0$ es el determinante jacobiano de la función $x^{-1} \circ y$ en p . ■

Así pues, una forma de determinar una orientación en una variedad diferencial V de dimensión n es fijar un elemento de volumen orientado $\omega \in \Lambda^n(V)$. Cualquier otra forma $\eta \in \Lambda^n(V)$ cumple $\eta = f\omega$, para cierta $f \in C^\infty(V)$. Que η sea un elemento de volumen orientado equivale a que f no se anule en ningún punto, y en tal caso η determina la misma orientación que ω si y sólo si $f(p) > 0$ en todo $p \in V$, pues esto equivale a que ambas formas determinan la misma orientación en cada espacio tangente.

En la prueba del teorema anterior hemos usado un argumento de conexión que conviene destacar:

Teorema 4.16 *Una variedad diferencial conexa orientable tiene exactamente dos orientaciones.*

DEMOSTRACIÓN: Si $\omega, \eta \in \Lambda^n(V)$ son formas que no se anulan en ningún punto, entonces $\eta = f\omega$, para cierta $f \in C^\infty(V)$ que no se anula en ningún punto. Como V es conexa, o bien $f > 0$ en todos los puntos o bien $f < 0$ en todos los puntos, por lo que η determina la misma orientación que ω o bien la misma orientación que $-\omega$, luego sólo hay dos orientaciones en V , las asociadas a $\pm\omega$. ■

La misma línea de razonamiento del teorema anterior implica que si V es orientable y tiene n componentes conexas, entonces admite exactamente 2^n orientaciones distintas. Si V tiene infinitas componentes conexas entonces tiene infinitas orientaciones posibles.

En el caso de hipersuperficies en una variedad semirriemanniana existe otra caracterización útil de la orientabilidad:

Teorema 4.17 *Sea V una variedad semirriemanniana orientable y W una hipersuperficie en V (es decir, una subvariedad semirriemanniana de una dimensión menos). Entonces W es orientable si y sólo si existe $N \in \mathfrak{X}_V(W)^\perp$ tal que $\|N_p\|_p = 1$, para todo $p \in W$. Si W es conexa sólo existen dos tensores N en estas condiciones.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos que si $p \in W$ entonces $\dim T_p(W)^\perp = 1$, luego existen exactamente dos vectores en $T_p(W)^\perp$ de norma 1, digamos $\pm v$. Ahora bien, si tenemos fijadas orientaciones en $T_p(W)$ y $T_p(V)$, sólo uno de estos dos vectores tiene la propiedad adicional de que si v_1, \dots, v_{n-1} es una base orientada de $T_p(W)$, entonces v, v_1, \dots, v_{n-1} es una base orientada de $T_p(V)$. Notemos que esta propiedad no depende de la elección de la base v_1, \dots, v_{n-1} , pues si tomamos otra, digamos v'_1, \dots, v'_{n-1} , la matriz de cambio de base entre v, v_1, \dots, v_{n-1} y v, v'_1, \dots, v'_{n-1} es de la forma

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

donde $(*)$ es la matriz de cambio de base entre v_1, \dots, v_{n-1} y v'_1, \dots, v'_{n-1} , luego el determinante es positivo.

Veamos (sin suponer la orientabilidad de W) que para todo $q \in W$ existe un abierto conexo $U \subset W$ que contiene a q en el que hay definido un campo $N \in \mathfrak{X}_V(U)^\perp$ tal que $\|N_p\| = 1$ para todo $p \in U$, es decir, que la condición del enunciado se cumple siempre localmente.

Según hemos visto tras la definición 4.3 (para probar la diferenciabilidad de los campos $\tan(X)$), podemos tomar cartas de W y V alrededor de q con dominios $U \cap W$ y U , respectivamente, de modo que para cada $p \in U \cap W$ se cumple que $\partial_{x_1}|_p, \dots, \partial_{x_{n-1}}|_p$ es una base de $T_p(W)$ y $\partial_{x_1}|_p, \dots, \partial_{x_n}|_p$ es una base de $T_p(V)$. En particular $\partial_{x_n}|_p \notin T_p(W)$, luego $N^* = \text{nor}(\partial_{x_n}) \in T_V(W)^\perp$ no se anula en ningún punto. Basta tomar $N = N^*/\|N^*\|$, que está definido en $U \cap W$. Restringiendo este dominio podemos exigir que sea conexo.

Ahora, suponiendo que W es orientable (y fijando orientaciones en V y en W), cambiando N por $-N$ si es necesario, podemos suponer que N_q tiene la propiedad de que al completarlo con una base orientada de $T_q(W)$ forma una base orientada de $T_q(V)$. Concretamente, si x e y son cartas orientadas de W

y V alrededor de q , respectivamente, tenemos que el determinante de la matriz de cambio de coordenadas de $N, \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_{n-1}}$ a $\partial_{y_1}, \dots, \partial_{y_n}$ es positivo en q , luego por continuidad en un entorno U de q , luego N tiene esta propiedad de orientación en todos los puntos de U .

Equivalentemente, hemos probado que si definimos N_q como el único vector unitario de $T_q(W)^\perp$ que al completarlo con una base orientada de $T_q(W)$ forma una base orientada de $T_q(V)$, entonces N se restringe a un campo vectorial (diferenciable) en un entorno de cada punto q , luego N es diferenciable y cumple lo requerido por el enunciado.

Recíprocamente, si existe N y $\omega \in \Lambda^n(V)$ es un elemento de volumen orientado, entonces $\omega|_W \in \Lambda^n(W, V)$ y es fácil ver que la evaluación $i_N(\omega|_W)$ es un elemento de volumen orientado en W .

Es fácil ver que si hubiera más de dos posibilidades para N , también podríamos definir de este modo más de dos elementos de volumen orientados para W , lo cual es imposible si W es conexo. ■

Ejemplos 1) Toda variedad diferencial cubrible con una sola carta es orientable, pues podemos tomar dicha carta como único elemento de un atlas orientado. En particular \mathbb{R}^n es orientable, y tomaremos como orientación canónica en \mathbb{R}^n la asociada a las coordenadas cartesianas. Más en general, lo mismo se aplica a todos los abiertos de \mathbb{R}^n y de H^n .

2) Por el mismo motivo todo espacio afín E es orientable, pero en este caso no tenemos ningún criterio para seleccionar una orientación canónica. Al ser conexo, E tiene exactamente dos orientaciones, y lo máximo que podemos decir es que se corresponden con las dos orientaciones (como espacio vectorial) de su espacio vectorial asociado \vec{E} .

En efecto, cada punto $P \in E$ y cada base orientada $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ de \vec{E} determina una carta $x : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de E de modo que la base orientada $\partial_{x_1}|_q, \dots, \partial_{x_n}|_q$ se corresponde a través del isomorfismo canónico θ_q con la base $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, luego en general podemos decir que las bases orientadas de $T_q(E)$ son las bases que se corresponden por θ_q con bases orientadas de \vec{E} . De este modo determinamos dos orientaciones en E y, como sabemos que sólo hay dos, concluimos que son todas.

3) Si V es una variedad orientable de dimensión n y W es una subvariedad de la misma dimensión, entonces W también es orientable. En particular lo son todos los abiertos con frontera de \mathbb{R}^n , como la bola cerrada \bar{B}^n .

En efecto, basta tener en cuenta que la restricción a W de un elemento de volumen de V es un elemento de volumen de W .

Cuando tengamos fijada una orientación en V consideraremos a sus subvariedades de la misma dimensión como variedades orientadas con la restricción del elemento de volumen que determina la orientación de V (éste no es único, pero es inmediato que si dos determinan la misma orientación en V , sus restricciones también determinan la misma orientación).

4) Si V es una variedad orientable de dimensión $n \geq 2$ con frontera no vacía, entonces ∂V es también una variedad orientable.

Vamos a probar esto al tiempo que damos un convenio (arbitrario) para seleccionar una orientación en ∂V a partir de una orientación en V .

DEMOSTRACIÓN: Dado un punto $p \in \partial V$, podemos tomar una carta cúbica alrededor de p , es decir, de la forma $x : U \rightarrow]-1, 0] \times]-1, 1[^{n-1}$, con $x(p) = 0$. Podemos exigir que sea una carta orientada, pues en caso contrario la cambiamos por $x'(p) = (x_1(p), \dots, x_{n-1}(p), -x_n(p))$ y así conseguimos una orientación distinta. (Y como U es conexo, una de estas dos orientaciones tiene que ser la orientación determinada por la orientación de V).

Sabemos que la aplicación $y : \partial U \rightarrow]-1, 1[^{n-1}$ dada por

$$y(p) = (x_2(p), \dots, x_n(p))$$

es una carta de ∂V y claramente las cartas construidas de este modo forman un atlas. Vamos a ver que está orientado. Para ello consideramos dos cartas cúbicas orientadas $x : U \rightarrow \tilde{U}$ y $x' : U' \rightarrow \tilde{U}'$ alrededor de dos puntos de ∂V y las cartas $y : \partial U \rightarrow U^*$, $y' : \partial U' \rightarrow \partial U'^*$ que inducen sobre ∂V . Llamemos $g = x^{-1} \circ x'$, que sabemos que es un difeomorfismo con determinante jacobiano positivo en todo punto.

Como g transforma puntos frontera en puntos frontera, cumple que

$$g(0, x_2, \dots, x_n) = (0, x'_2, \dots, x'_n),$$

luego, si x es un punto frontera de su dominio, entonces $g_1(x) = 0$, y esto no se modifica si variamos las coordenadas x_i , para $i > 1$, luego

$$\left. \frac{\partial g_1}{\partial x_i} \right|_x = 0, \quad i = 2, \dots, n.$$

Por consiguiente,

$$J_g(x) = \left(\begin{array}{c|ccc} a & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & A \end{array} \right).$$

Por otra parte, si $h < 0$, entonces $g(h, x_2, \dots, x_n) \in]-1, 0[\times]-1, 1[^{n-1}$, luego $g_1(h, x_2, \dots, x_n) < 0$, luego

$$a = \left. \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \right|_x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_1(h, x_2, \dots, x_n)}{h} > 0.$$

Notemos que la derivada no puede ser nula, o $J_g(x)$ tendría una columna nula. Por último, es claro que A es la matriz jacobiana de $y^{-1} \circ y'$, luego concluimos que $|A| = a|J_g(x)| > 0$, como había que probar. ■

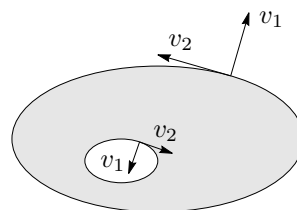
En lo sucesivo, cuando V sea una variedad orientada, consideraremos siempre en ∂V la orientación dada por la construcción precedente. El convenio arbitrario que subyace en la construcción se esconde en una elección aparentemente

inofensiva, y es que hemos considerado cartas cúbicas cuya primera coordenada varía en $] -1, 0]$. Si hubiéramos partido de cartas con primera coordenada en $[0, 1[$ habríamos definido la orientación opuesta a la que hemos dado.

Esta elección tiene una interpretación geométrica clara: fijado $x \in] -1, 1[$, la curva $\alpha :] -1, 0] \rightarrow V$ dada por $\alpha(t) = x^{-1}(t, x)$ se acerca a la frontera a medida que aumenta t , lo cual se traduce en que el vector tangente abstracto $\partial_{x_1}|_p$ representa a un vector en $p \in \partial V$ que apunta hacia afuera de V . Por ello:

La orientación en ∂V inducida por la orientación de V es la que hace que una base de $T_p(\partial V)$ esté orientada si al anteponerle un vector de $T_p(V)$ que apunte hacia afuera de V se convierte en una base orientada de $T_p(V)$.

Ejemplo La figura muestra una variedad diferencial orientada V en \mathbb{R}^2 y dos bases de $T_p(V)$ en dos puntos frontera. El vector v_1 se ha elegido para que apunte hacia afuera de la variedad, y el $v_2 \in T_p(\partial V)$ de modo que la base v_1, v_2 esté orientada en \mathbb{R}^2 (con el convenio usual de que las bases orientadas en el plano son las que para moverse del primer vector al segundo por el ángulo más corto hay que girar en sentido antihorario). Por definición, esto hace que los vectores v_2 sean bases orientadas de los correspondientes espacios $T_p(\partial V)$. En la práctica las bases orientadas son las que marcan una dirección de avance por ∂V que deja a V a la izquierda. A su vez, esto se traduce en un giro en sentido antihorario por la frontera exterior y en sentido horario por las fronteras de los agujeros. ■



Continuamos con los ejemplos de orientación de variedades:

5) Como la bola cerrada \bar{B}^{n+1} es orientable por 3), ahora 4) implica que también lo es su frontera S^n , y la orientación canónica es aquella para la que las bases orientadas de cada espacio $T_p(S^n)$ son las que al anteponerles un vector que apunte hacia afuera de la bola se convierten en bases orientadas de \mathbb{R}^{n+1} .

6) El producto de variedades orientables es orientable. La *orientación producto* se define como la determinada por el atlas orientado formado por los productos de cartas orientadas.

Esto es correcto, pues si $x_1 \times y_1$ y $x_2 \times y_2$ son productos de cartas orientadas en una variedad producto, la matriz jacobiana de $(x_1 \times y_1)^{-1} \circ (x_2 \times y_2)$ es

$$\left(\begin{array}{c|c} J_x & 0 \\ \hline 0 & J_y \end{array} \right),$$

donde J_x es la matriz jacobiana de $x_1^{-1} \circ x_2$ y J_y la de $y_1^{-1} \circ y_2$. Por lo tanto, si ambas tienen determinante positivo, lo mismo le sucede a la matriz completa. Esto prueba que los productos de cartas orientadas forman un atlas orientado. ■

7) Si V es una variedad diferencial, el fibrado de tangentes TV es siempre una variedad orientable.

En efecto, basta observar que las cartas con las que hemos definido la estructura diferencial de TV forman un atlas orientado. En efecto, hablamos de cartas de la forma

$$\bar{x}(p, v) = (x_1(p), \dots, x_n(p), dx_1|_p(v), \dots, dx_n|_p(v)),$$

donde x es una carta de V . Si y es otra carta, entonces la matriz jacobiana de $\bar{x}^{-1} \circ \bar{y}$ es de la forma

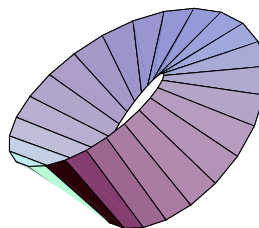
$$\left(\begin{array}{c|c} J & * \\ \hline 0 & J \end{array} \right),$$

donde J es la matriz jacobiana de $x^{-1} \circ y$. Por consiguiente el determinante jacobiano es $|J|^2 > 0$. ■

Ejemplo: La cinta de Möbius El hecho de que hayamos definido el concepto de variedad orientable sugiere que existen variedades que no lo son, y así es en efecto.

Un ejemplo lo proporciona la cinta de Möbius M definida en la sección 7.1 de [An]. Si fuera orientable, por 4.17 existiría una función continua $N : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ que a cada punto de V le asignara un vector normal a $T_p(V)$. Sin embargo, en [An] razonamos que no puede existir tal función N .

El teorema 5.48, más adelante, probará que los espacios proyectivos $P^{2n}(\mathbb{R})$ tampoco son orientables. ■



4.3 Integración en variedades diferenciales

Esta sección requiere como preliminares los contenidos de la segunda parte de la sección A.3 (y el final de la sección A.4). La generalización inmediata de estos hechos al contexto de las variedades diferenciales es que todo elemento de volumen orientado ω en una variedad diferencial orientable V determina una orientación y una medida en cada espacio tangente $T_p(V)$, mientras que en una variedad de Riemann orientada podemos seleccionar un elemento de volumen orientado en particular:

Definición 4.18 Si V es una variedad semirriemanniana orientada, definimos su *elemento de volumen orientado* como la forma diferencial $dm \in \Lambda^n(V)$ que a cada $p \in V$ le asigna el tensor $dm_p = e^1 \wedge \dots \wedge e^n$, donde e^1, \dots, e^n es la base dual de cualquier base ortonormal de $T_p(V)$.

En realidad, para que esta definición sea correcta es necesario justificar que dm es diferenciable, pero esto es consecuencia del teorema A.22, según

el cual, si $x : U \rightarrow \tilde{U}$ es una carta orientada alrededor de un punto p , entonces los tensores $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}$ proporcionan una base orientada de cada espacio $T_q(V)$, luego

$$dm|_U = \sqrt{|\det G|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

y esta expresión (teniendo en cuenta que el determinante de G no se anula) prueba la diferenciabilidad de dm . En una variedad de Riemann el valor absoluto es redundante en la expresión anterior.

En definitiva, en una variedad semiriemanniana orientada, el elemento de volumen dm determina en cada espacio tangente $T_p(V)$ su orientación y su medida de Lebesgue, mientras que en una variedad diferencial orientable no tenemos un único elemento de volumen orientado destacado, sino una infinidad de ellos, sin que ninguno sea distinguible del resto.

La generalización no trivial al caso de variedades diferenciales de la situación en el caso de los espacios vectoriales consiste en demostrar que cada elemento de volumen orientado en una variedad diferencial V no sólo determina una medida en cada espacio $T_p(V)$, sino también una medida en la propia variedad V .

Integración de formas diferenciales Recordemos que $\tilde{\Lambda}^k(V)$ es el espacio vectorial de las k -formas diferenciales en V , no necesariamente diferenciables. Si $\omega \in \tilde{\Lambda}^k(V)$ y $x : U \rightarrow \tilde{U}$ es una carta de V , entonces $\omega|_U$ se descompone en forma única como

$$\omega|_U = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

para ciertas funciones coordenadas $\alpha_{i_1 \dots i_k} : U \rightarrow \mathbb{R}$, y hemos definido las formas diferenciables como aquellas cuyas coordenadas en cualquier carta son diferenciables. Del mismo modo podemos definir las formas continuas como aquellas cuyas coordenadas en cualquier carta son continuas (y por el mismo argumento empleado en el caso diferenciable, de hecho basta con que sean continuas sus coordenadas respecto de las cartas de un atlas).

Por otra parte, definimos el *soporte* de una forma $\omega \in \tilde{\Lambda}^k(V)$ como la clausura

$$\text{sop } \omega = \overline{\{p \in V \mid \omega_p \neq 0\}}.$$

Llamaremos $\tilde{\Lambda}_c^k(V)$ al espacio vectorial de las k -formas diferenciales continuas de soporte compacto, e igualmente $\Lambda_c^k(V)$ será el subespacio de las k -formas diferenciales diferenciables de soporte compacto.

Es fácil ver que el producto exterior de formas continuas (resp. diferenciables) con soporte compacto tiene también soporte compacto, por lo que las sumas directas

$$\tilde{\Lambda}_c(V) = \bigoplus_{k \geq 0}^n \tilde{\Lambda}_c^k(V), \quad \Lambda_c(V) = \bigoplus_{k \geq 0}^n \Lambda_c^k(V)$$

son subálgebras de $\tilde{\Lambda}(V)$ y $\Lambda(V)$, respectivamente.

El mismo argumento con el que hemos probado que la retracción por una aplicación diferenciable de una forma diferencial diferenciable es diferenciable muestra que la retracción de una forma diferencial continua es continua, aunque la compacidad del soporte no tiene por qué conservarse. No obstante, lo que sí que se cumple es que si $f : V \rightarrow W$ es un difeomorfismo entre variedades diferenciales, entonces la retracción $f^* : \tilde{\Lambda}(W) \rightarrow \tilde{\Lambda}(V)$ se restringe a isomorfismos de álgebras

$$f^* : \tilde{\Lambda}_c(W) \rightarrow \tilde{\Lambda}_c(V), \quad f^* : \Lambda_c(W) \rightarrow \Lambda_c(V).$$

En efecto, es inmediato comprobar que si $\omega \in \tilde{\Lambda}^k(W)$ se cumple la relación $\text{sop } f^*(\omega) = f^{-1}[\text{sop } \omega]$.

Con esto estamos en condiciones de definir la integral de una forma diferencial continua con soporte compacto.

Consideremos primero el caso en que V es un abierto con frontera en \mathbb{R}^n y que $\omega \in \tilde{\Lambda}_c^n(V)$. Entonces $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, para cierta función continua $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ con soporte compacto (donde x^i son las coordenadas cartesianas). En particular f es integrable Lebesgue, por lo que podemos definir

$$\int_V \omega = \int_V f dm,$$

donde m es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n .

Ahora observamos que el teorema de cambio de variable tiene un enunciado especialmente simple en términos de formas diferenciales:

Teorema 4.19 (de cambio de variable) *Sea $g : U \rightarrow V$ un difeomorfismo orientado entre abiertos con frontera de \mathbb{R}^n . Entonces, si $\omega \in \tilde{\Lambda}_c^n(V)$, se cumple que*

$$\int_V \omega = \int_U g^*(\omega).$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos en primer lugar que U y V son abiertos en \mathbb{R}^n . Sea $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$. Entonces $g^*(\omega) = (g \circ f) dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_n$, donde g_i es la i -ésima función coordenada de g . Podemos ver a g como una carta de U , de modo que $\partial_{x_1}|_p, \dots, \partial_{x_n}|_p$ y $\partial_{g_1}|_p, \dots, \partial_{g_n}|_p$ son dos bases de $T_p(U)$, y la matriz de cambio de base es la matriz jacobiana $J_g(p)$. El teorema A.9 implica entonces que

$$dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_n = (\det J_g) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = |\det J_g| dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

luego el teorema de cambio de variables [An 6.35] nos da que

$$\int_V \omega = \int_V f dm = \int_U (g \circ f) |\det J_g| dm = \int_U (g \circ f) dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_n = \int_U g^*(\omega).$$

Si U y V son abiertos con frontera, entonces son difeomorfos a abiertos de H^n , y es claro que la frontera de un abierto de H^n es nula para la medida de Lebesgue (porque está contenida en ∂H^n , que claramente lo es), luego en virtud del teorema [An 4.39] también ∂U y ∂V son nulas.

Si cambiamos U y V por los abiertos $U' = U \setminus \partial U$ y $V' = V \setminus \partial V$ en \mathbb{R}^n , ya no es necesariamente cierto que f tenga soporte compacto en V' , pero lo importante es que f es integrable en V' por serlo en V . Como las fronteras son nulas, todas las integrales consideradas valen lo mismo en los abiertos con o sin su frontera, luego el teorema sigue siendo cierto. ■

Notemos que para deshacernos del valor absoluto que aparece en el teorema de cambio de variable para funciones hemos tenido que suponer que difeomorfismo es orientado, y ésa es la razón última por la que necesitamos trabajar con variedades orientadas.

Si en el teorema anterior suponemos que el determinante jacobiano de g es negativo en todo punto, entonces la conclusión es que

$$\int_V \omega = - \int_U g^*(\omega).$$

Teorema 4.20 *Si V es una variedad diferencial orientada de dimensión n , existe una única aplicación lineal*

$$\int_V : \tilde{\Lambda}_c^n(V) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que para todo $\omega \in \tilde{\Lambda}_c^n(V)$ cuyo soporte esté contenido en el dominio de una carta orientada (U, x) de V , se cumple que

$$\int_V \omega = \int_{\tilde{U}} x^{-1*}(\omega).$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos en primer lugar que ω tiene su soporte contenido en el dominio de una carta orientada $x : U \longrightarrow \tilde{U}$, y observemos que

$$\int_{\tilde{U}} x^{-1*}(\omega)$$

no depende de la elección de x , es decir, que si el soporte de ω también está contenido en el dominio de otra carta orientada $y : U' \longrightarrow \tilde{U}'$ entonces

$$\int_{\tilde{U}} x^{-1*}(\omega) = \int_{\tilde{U}'} y^{-1*}(\omega).$$

En efecto, basta considerar $W = x[U \cap U']$, $W' = y[U \cap U']$ y el difeomorfismo orientado $f = x^{-1} \circ y : W \longrightarrow W'$. Como $\text{sop } \omega \subset U \cap U'$, tenemos que $\text{sop } y^{-1*}(\omega) \subset W'$. Por lo tanto, si llamamos $i : W' \longrightarrow \tilde{U}'$ a la inclusión, tenemos que

$$\int_{\tilde{U}'} y^{-1*}(\omega) = \int_{W'} y^{-1*}(\omega)|_{W'} = \int_{W'} i^*(y^{-1*}(\omega)) = \int_{W'} (i \circ y^{-1})^*(\omega).$$

Por el teorema de cambio de variable, de aquí pasamos a que

$$\int_{\tilde{U}'} y^{-1*}(\omega) = \int_W f^*((i \circ y^{-1})^*(\omega)) = \int_W (i \circ x^{-1})^*(\omega) = \int_W x^{-1*}(\omega)|_W,$$

donde hemos usado que $f \circ i \circ y^{-1} = i \circ x^{-1}$, donde ahora i representa la inclusión $i : W \rightarrow \tilde{U}$. Por último, como también se cumple que $\text{sop } x^{-1*}(\omega) \subset W$, concluimos la igualdad que pretendíamos probar.

Así pues, para formas con soporte contenido en un abierto coordenado, podemos definir $\int_V \omega$ como indica el enunciado sin que la definición dependa de la carta orientada considerada.

Consideremos ahora $\omega \in \tilde{\Lambda}_c^n(V)$ arbitraria y consideremos un atlas orientado \mathcal{A} de V . Por el teorema 1.21 existe una partición de la unidad $\{\phi_i\}_{i \in I}$ subordinada al cubrimiento formado por los dominios de las cartas del atlas. Entonces

$$\omega = \sum_{i \in I} \phi_i \omega,$$

donde, en un entorno de cada punto, la suma tiene todos los sumandos nulos salvo un número finito de ellos. Además el soporte de cada forma $\phi_i \omega$ está contenido en el de ω , luego es compacto, pero además tenemos que está contenido en el dominio de la carta i -ésima del atlas. Observemos que si el operador integral que queremos definir tiene que ser lineal, la única definición posible es

$$\int_V \omega = \sum_{i \in I} \int_V \phi_i \omega,$$

donde las integrales del segundo miembro están definidas, pues tienen su soporte contenido en un abierto coordenado. Ahora bien, tenemos que probar que esta definición no depende de la elección del atlas orientado ni de la partición de la unidad. Para ello tomamos otro atlas \mathcal{A}' y otra partición de la unidad subordinada $\{\psi_j\}_{j \in J}$. Entonces:

$$\sum_{i \in I} \int_V \phi_i \omega = \sum_{i \in I} \int_V \sum_{j \in J} \phi_i \psi_j \omega = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \int_V \sum_{j \in J} \phi_i \psi_j \omega,$$

donde hemos usado que el operador \int_V , definido sobre formas con soporte en cada abierto coordenado U_i , es claramente lineal, así como que, por compacidad, el soporte de $\phi_i \omega$ puede cubrirse por un número finito de abiertos en los que sólo un número finito de funciones ψ_j son no vacíos, luego la suma para $j \in J$ que aparece en las igualdades precedentes puede sustituirse por una suma sobre un subconjunto finito de J .

Si partimos de $\sum_{j \in J} \int_V \psi_j \omega$ llegamos a la misma expresión, por lo que

$$\sum_{i \in I} \int_V \phi_i \omega = \sum_{j \in J} \int_V \psi_j \omega$$

y podemos tomar cualquier expresión de esta forma como definición de $\int_V \omega$. La linealidad del operador integral es inmediata. ■

Observemos que la integral que acabamos de definir depende de la orientación prefijada en V . Concretamente, si llamamos V^+ a la variedad V con la

orientación dada y V^- a V con la orientación opuesta (la que asigna a cada espacio tangente la orientación opuesta), entonces

$$\int_{V^-} \omega = - \int_{V^+} \omega.$$

Esto se debe a que si $x : U \rightarrow \tilde{U}$ e $y : U' \rightarrow \tilde{U}'$ son cartas con orientaciones opuestas que contienen al soporte de ω , el mismo argumento dado en la prueba del teorema anterior muestra que

$$\int_{\tilde{U}} x^{-1*}(\omega) = - \int_{\tilde{U}'} y^{-1*}(\omega),$$

donde el signo negativo aparece porque ahora aplicamos el teorema de cambio de variable a un difeomorfismo con determinante jacobiano negativo en todo punto. A partir de aquí (teniendo en cuenta la construcción de $\int_V \omega$) se sigue inmediatamente la relación indicada.

En general V puede tener más orientaciones, pero si es conexa entonces éstas son todas las posibilidades, que se reducen, pues, a que un cambio de orientación en V se traduce en un cambio de signo en la integral.

La integral que acabamos de definir cumple el teorema de cambio de variable:

Teorema 4.21 (de cambio de variable) *Sea $g : V \rightarrow W$ un difeomorfismo orientado entre variedades diferenciales orientadas de dimensión n . Entonces, si $\omega \in \tilde{\Lambda}_c^n(W)$, se cumple que*

$$\int_W \omega = \int_V g^*(\omega).$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos un atlas orientado de W formado por cartas $x_j : U_j \rightarrow \tilde{U}_j$ y sea $\{\phi_j\}_{j \in J}$ una partición de la unidad subordinada.

Sea $U'_j = g^{-1}[U_j]$, $g_j = g|_{U'_j} : U'_j \rightarrow U_j$, $y_j = g_j \circ x_j$ y $\psi_j = g_j \circ \phi_j$. El hecho de que g conserve la orientación se traduce en que las aplicaciones $y_j : U'_j \rightarrow \tilde{U}_j$ forman un atlas orientado de V , y claramente $\{\psi_j\}_{j \in J}$ es una partición de la unidad subordinada. Entonces, aplicando el teorema de cambio de variable para abiertos con frontera de \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned} \int_W \omega &= \sum_{j \in J} \int_W \phi_j \omega = \sum_{j \in J} \int_{\tilde{U}_j} (x_j^{-1})^*(\phi_j \omega) = \\ &= \sum_{j \in J} \int_{\tilde{U}'_j} (y_j^{-1} \circ g_j \circ x_j)^*((x_j^{-1})^*(\phi_j \omega)) = \sum_{j \in J} \int_{\tilde{U}'_j} (y_j^{-1} \circ g_j)^*(\phi_j \omega) = \\ &= \sum_{j \in J} \int_{\tilde{U}'_j} (y_j^{-1})^*((g_j)^*(\phi_j)(g_j)^*(\omega)) = \sum_{j \in J} \int_{\tilde{U}'_j} (y_j^{-1})^*(\psi_j g^*(\omega)) = \\ &= \sum_{j \in J} \int_V \psi_j g^*(\omega) = \int_V g^*(\omega). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Veamos finalmente que las integrales de formas que hemos definido pueden verse como integrales de ciertas funciones respecto de ciertas medidas:

Teorema 4.22 *Sea V una variedad diferencial orientable de dimensión n y $\omega \in \Lambda^n(V)$ un elemento de volumen orientado. Entonces existe una única medida de Borel regular μ_ω en V tal que, para toda función $f \in \tilde{\Lambda}_c^0(V)$, se cumple*

$$\int_V f\omega = \int_V f d\mu_\omega,$$

donde la integral de la izquierda se calcula considerando en V la orientación definida por ω .

DEMOSTRACIÓN: Sólo tenemos que aplicar el teorema de representación de Riesz [An 6.3]. Para ello definimos el operador lineal $T : \tilde{\Lambda}_c^0(V) \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$T(f) = \int_V f\omega,$$

Si $f \geq 0$, entonces $T(f) \geq 0$, pues, por la construcción del operador integral,

$$T(f) = \sum_{i \in I} \int_V \phi_i f\omega = \sum_{i \in I} \int_{U_i} \phi_i f g_i dx_i^1 \wedge \cdots \wedge dx_i^n,$$

donde $g_i > 0$ en todos los puntos de U_i , porque la carta x_i está orientada respecto de la orientación definida por ω . Entonces

$$\int_V \phi_i f g_i dx_i^1 \wedge \cdots \wedge dx_i^n = \int_{\tilde{U}_i} (x^{-1} \circ \phi_i)(x^{-1} \circ f)(x^{-1} \circ g_i) dm \geq 0,$$

luego también $T(f) \geq 0$. El teorema de Riesz nos da la medida requerida. ■

En ocasiones la variedad V tendrá ya una orientación prefijada y no será razonable pedir que la integral de una forma ω se calcule respecto a la propia orientación determinada por ω . Si integramos ω respecto a una orientación prefijada, $V = \bigcup_k V_k$ es la descomposición de V en componentes conexas (que necesariamente son abiertas y en cantidad numerable) y $\delta_k = \pm 1$ según que la orientación de ω coincida o difiera de la de V en V_k , la relación del teorema anterior debe sustituirse por

$$\int_V f\omega = \sum_k \delta_k \int_{V_k} f d\mu_\omega.$$

Si la variedad V es conexa, esto se reduce a que

$$\int_V f\omega = \pm \int_V f d\mu_\omega,$$

donde el signo es positivo o negativo según que la orientación de ω coincida o difiera de la de V .

Definición 4.23 Una n -forma $\eta \in \tilde{\Lambda}^n(V)$ es *integrable* respecto de un elemento de volumen orientado ω si $\eta = f\omega$ con f integrable respecto de μ_ω , y en tal caso definimos

$$\int_V \eta = \sum_k \delta_k \int_{V_k} f d\mu_\omega,$$

donde V_k son las componentes conexas de V y $\delta_k = \pm 1$ según si la orientación de ω coincide o difiere en V_k de la orientación de V .

Observemos que, en el caso en que V tiene infinitas componentes conexas, la integral así definida es finita de todos modos, pues

$$\sum_k \left| \delta_k \int_{V_k} f d\mu_\omega \right| \leq \sum_k \int_{V_k} |f| d\mu_\omega = \int_V |f| d\mu_\omega,$$

luego la serie es absolutamente convergente.

Notemos que si ω determina la orientación de V la definición anterior se reduce a la relación

$$\int_V f\omega = \int_V f d\mu_\omega,$$

para toda función f integrable respecto de μ_ω .

Ahora podemos enunciar y demostrar el teorema de cambio de variable en toda su generalidad:

Teorema 4.24 (de cambio de variable) Sea $g : V \rightarrow W$ un difeomorfismo orientado entre variedades diferenciales orientadas. Sea $\omega \in \Lambda^n(W)$ un elemento de volumen orientado y $\eta \in \tilde{\Lambda}^n(V)$ una forma diferencial integrable respecto de ω . Entonces $g^*(\eta)$ es integrable respecto de $g^*(\omega)$ y

$$\int_W \eta = \int_V g^*(\eta).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\omega' = g^*(\omega)$, que claramente es un elemento de volumen orientado en V . Para cada conjunto de Borel $A \subset W$, definimos

$$\mu(A) = \mu_{\omega'}(g^{-1}[A]).$$

Como g es un homeomorfismo, es claro que μ es una medida de Borel regular en W . Su definición equivale a que

$$\int_W \chi_A d\mu = \int_V \chi_{g^{-1}[A]} d\mu_{\omega'} = \int_V (g \circ \chi_A) d\mu_{\omega'}.$$

La linealidad de la integral hace que la relación

$$\int_W f d\mu = \int_V (g \circ f) d\mu_{\omega'}.$$

valga también para funciones simples, y a su vez para funciones medibles no negativas (usando que todas ellas son límite puntual de sucesiones crecientes de funciones simples y aplicando el teorema de la convergencia monótona). A su vez, esto implica que el resultado es cierto cuando f es integrable (expresando f como diferencia de funciones no negativas). Notemos que el razonamiento prueba que si f es integrable respecto de μ , entonces $g \circ f$ es integrable respecto de $\mu_{\omega'}$.

En particular la igualdad es válida para $f \in \tilde{\Lambda}_c^n(W)$, pero entonces, considerando en V y W las orientaciones definidas por ω' y ω , respectivamente,

$$\int_W f d\mu = \int_V (g \circ f) d\mu_{\omega'} = \int_V (g \circ f) \omega' = \int_V g^*(f\omega) = \int_W f\omega = \int_W f d\mu_{\omega}.$$

Ahora, por la unicidad del teorema de Riesz, tiene que ser $\mu = \mu_{\omega}$, luego hemos probado que

$$\int_W f d\mu_{\omega} = \int_V (g \circ f) d\mu_{\omega'}$$

para toda función f integrable respecto de ω . Esto implica que

$$\int_W f\omega = \int_V (g \circ f) \omega' = \int_V g^*(f\omega).$$

Aquí consideramos en V y en W sus orientaciones prefijadas, lo cual requiere descomponer las integrales en sumas sobre las componentes conexas con los signos ajustados debidamente. Como g conserva la orientación, los ajustes en un miembro se corresponden con los ajustes en el otro.

Ahora basta observar que toda $\eta \in \tilde{\Lambda}^n(V)$ integrable respecto de ω es de la forma $\eta = f\omega$, con f integrable respecto de μ_{ω} . ■

Como consecuencia:

Teorema 4.25 *Si V es una variedad diferencial orientada y ω es un elemento de volumen orientado en V , entonces los conjuntos nulos respecto de μ_{ω} son los definidos en 2.26.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $A \subset V$ un conjunto arbitrario, que podemos cubrir con una cantidad numerable de abiertos coordenados. Claramente, A será nulo respecto de μ_{ω} o en el sentido de 2.26 si y sólo si lo es su intersección con cada uno de ellos, y por lo tanto es fácil ver que basta probar que si un conjunto A está contenido en el dominio de una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ (que podemos suponer conexo), entonces A es nulo respecto de μ_{ω} si y sólo si $x[A]$ es nulo para la medida de Lebesgue.

Sea $\omega|_U = h dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Entonces A es nulo respecto de μ_{ω} si y sólo si su función característica χ_A es integrable y tiene integral nula en U . Esto equivale a que la forma $\chi_A h dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ sea integrable y tenga integral nula. Por el teorema de cambio de variable esto equivale a que $x^*(\chi_A h) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ sea

integrable y tenga integral nula en \tilde{U} , lo que a su vez equivale a que $\chi_{x[A]}(x^{-1} \circ h)$ sea integrable (respecto de la medida de Lebesgue) y

$$\int_{x[A]} (x^{-1} \circ h) dm = 0.$$

Ahora bien, el integrando tiene signo constante en \tilde{U} y no se anula, luego esto equivale a que $x[A]$ sea nulo para la medida de Lebesgue. ■

En particular, todas las medidas μ_ω tienen la misma σ -álgebra de conjuntos medibles (la formada por uniones de conjuntos de Borel y conjuntos nulos), por lo que, del mismo modo que ya en 2.26 hablábamos de conjuntos nulos en una variedad sin especificar ninguna medida, ahora podemos hablar igualmente de *conjuntos medibles* en una variedad diferencial, entendiendo que nos referimos a los conjuntos medibles para cualquiera de las medidas μ_ω .

Ejemplo Sea $f :]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ el cambio a coordenadas polares, dado por $f(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$. Entonces

$$\begin{aligned} f^\#(dx \wedge dy) &= d(f \circ x) \wedge d(f \circ y) = d(\rho \cos \theta) \wedge d(\rho \sin \theta) \\ &= (\cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta) \wedge (\sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta) = \rho d\rho \wedge d\theta, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $d\rho \wedge d\rho = d\theta \wedge d\theta = 0$ y que $d\theta \wedge d\rho = -d\rho \wedge d\theta$.

El teorema anterior muestra entonces que si U es un abierto en \mathbb{R}^2 , entonces

$$\int_U g(x, y) dx \wedge dy = \int_{f^{-1}[U]} g(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \wedge d\theta,$$

que no es sino la versión con orientación del teorema de cambio de variables para las coordenadas polares. Eliminando la orientación obtenemos:

$$\int_U g(x, y) dx dy = \int_{f^{-1}[U]} g(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta,$$

que es la forma usual del cambio de variables a coordenadas polares y que aquí la hemos obtenido sin más que aplicar formalmente las propiedades de las formas diferenciales, es decir, sustituyendo las expresiones

$$dx = \cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta, \quad dy = \sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta$$

en $dx \wedge dy$ y operando con las reglas del álgebra exterior. Ahora bien, si alguien intenta —sin justificación alguna—, sustituir las diferenciales en $dx dy$ y operar con las reglas “usuales” para un producto asociativo y conmutativo obtiene:

$$dx dy = \sin \theta \cos \theta d\rho^2 - \rho^2 \sin \theta \cos \theta d\theta^2 + \rho(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\rho d\theta,$$

que es un completo sinsentido. Vemos, pues, que el álgebra exterior es “el álgebra correcta” para la manipulación de diferenciales. ■

Interpretación geométrica de las medidas μ_ω Cada elemento de volumen orientado ω en una variedad diferencial V define una medida μ_ω en V y una medida μ_{ω_p} en cada espacio tangente $T_p(V)$. Vamos a mostrar la relación entre ellas, lo cual nos dará la interpretación geométrica de μ_ω .

Consideremos una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ de una variedad V sobre un dominio conexo U , y sea $p \in U$. Podemos considerar la diferencial

$$T_p V \xrightarrow{dx|_p} T_{x(p)} \tilde{U} \xrightarrow{\theta_{x(p)}} \mathbb{R}^n.$$

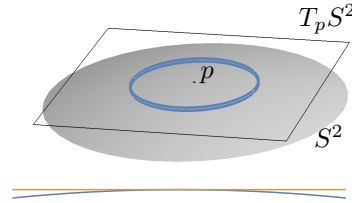
La composición $y = dx|_p \circ \theta_{x(p)}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales que podemos tomar como carta de $T_{x(q)}V$. Concretamente,

$$\begin{aligned} y(\partial_{x_i}|_p) &= \theta_{x(q)}(dx|_p(\partial_{x_i}|_p)) = ((dx|_p(\partial_{x_i}|_p))(x^j))_j \\ &= (\partial_{x_i}|_p(x \circ x^j))_j = (\partial_{x_i}|_p(x^j)) = e_i, \end{aligned}$$

donde e_i es el vector i -ésimo de la base canónica en \mathbb{R}^n .

De este modo, la aplicación $\pi_p : U \rightarrow T_p V$ dada por $\pi_p = x \circ y^{-1}$ es un difeomorfismo de U en un abierto de $T_p(V)$ que a cada $q \in U$ le asigna el punto de $T_p V$ cuyas coordenadas respecto de la base $\partial_{x_1}|_p, \dots, \partial_{x_n}|_p$ son $x(q)$, es decir, las mismas que las de q respecto de la carta prefijada.

Por ejemplo, si x es la proyección de semiesfera superior de S^2 sobre las dos primeras coordenadas y $p = (0, 0, 1)$, entonces π es la proyección vertical de S^2 en el plano tangente. La figura superior muestra un disco en S^2 alrededor de p y su imagen en $T_p S^2$. La figura inferior muestra los perfiles del disco esférico en S^2 y del disco plano en $T_p S^2$.



En realidad, si consideramos a V como variedad abstracta, tenemos que V y $T_p V$ sólo están relacionados algebraicamente, y no podemos decir que estén “próximos” en ningún sentido geométrico, salvo por el hecho de que cuando consideramos a V como subvariedad de un \mathbb{R}^m (cosa que siempre podemos hacer en virtud del teorema de Whitney), entonces sí que podemos identificar a $T_p V$ con una variedad afín que “se confunde” con V en un entorno de p , tal y como muestra la figura. En este contexto podemos decir que cada conjunto de Borel $A \subset V$ “se confunde” con $\pi_p[A]$ si A está en un entorno suficientemente pequeño de p .

Ahora vamos a demostrar que, en cualquier caso, las medidas $\mu_\omega(A)$ y $\mu_{\omega_p}(\pi_p[A])$ “se confunden” cuando el conjunto A se toma en un entorno suficientemente pequeño de p , donde “se confunden” no puede interpretarse como que meramente “se parecen”, pues es obvio que a medida que reducimos el entorno de p ambas medidas tienden a 0, luego se van a parecer entre sí. Lo que vamos a probar es que el error relativo que cometemos al aproximar $\mu_\omega(A)$ por $\mu_{\omega_p}(\pi_p[A])$ tiende a 0.

Para ello observamos en primer lugar que si $\omega|_U = h dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, entonces $\omega_p = h(p) dx^1|_p \wedge \cdots \wedge dx^n|_p$ y la medida μ_{ω_p} que ω determina en $T_p V$ es, por definición, la que al paralelepípedo $P(\partial_{x_1}|_p, \dots, \partial_{x_n}|_p)$ le asigna el volumen $|h(p)|$. Por lo tanto, se trata de la dada por

$$\mu_{\omega_p}(B) = |h(p)| m(y[B]).$$

Por consiguiente, $\mu_{\omega_p}(\pi_p[A]) = |h(p)| m(y[\pi_p[A]]) = |h(p)| m(x[A])$.

Por otra parte, usando que U es conexo, con lo que h tiene signo constante en U , tenemos que

$$\begin{aligned} \mu_{\omega}(A) &= \int_U \chi_A |h| dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \\ &= \int_{\tilde{U}} \chi_{x[A]} |x^{-1} \circ h| dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int_{x[A]} |x^{-1} \circ h| dm. \end{aligned}$$

Con estas expresiones ya podemos probar:

Teorema 4.26 *Sea x una carta con dominio conexo U en una variedad diferencial orientable V , sea $p \in U$ y sea $\omega \in \Lambda^n(V)$ un elemento de volumen orientado en V . Entonces, para cada $\epsilon > 0$ existe un entorno abierto $U_0 \subset U$ de p tal que si $A \subset U_0$ es un conjunto medible no nulo, se cumple que*

$$\frac{|\mu_{\omega}(A) - \mu_{\omega_p}(\pi_p[A])|}{\mu_{\omega}(A)} < \epsilon.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\omega|_U = h dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Como las medidas no dependen del signo de h , podemos suponer que $h > 0$ en U . Como h es continua en p , existe un entorno U_0 de p tal que todo $q \in U_0$ cumple que $|h(q) - h(p)| < \epsilon h(p)$.

Así, si $A \subset U_0$ es medible no nulo,

$$\begin{aligned} |\mu_{\omega}(A) - \mu_{\omega_p}(\pi_p[A])| &= \left| \int_{x[A]} (x^{-1} \circ h) dm - h(p) \int_{x[A]} dm \right| \leq \\ &= \int_{x[A]} |(x^{-1} \circ h) - h(p)| dm \leq \epsilon h(p) m(x[A]) = \epsilon \mu_{\omega_p}(\pi_p[A]). \end{aligned}$$

Así pues, el cociente

$$\frac{|\mu_{\omega}(A) - \mu_{\omega_p}(\pi_p[A])|}{\mu_{\omega_p}(\pi_p[A])}$$

está arbitrariamente cerca de 0 cuando A se toma en un entorno de p suficientemente pequeño. El denominador no es el de la expresión del enunciado, pero ahora basta observar que esto equivale a que $\mu_{\omega}(A)/\mu_{\omega_p}(\pi_p[A])$ esté arbitrariamente cerca de 1 cuando A se toma en un entorno de p suficientemente pequeño, lo cual a su vez equivale a que lo esté el cociente $\mu_{\omega_p}(\pi_p[A])/\mu_{\omega}(A)$, lo cual equivale a que $\frac{\mu_{\omega}(A) - \mu_{\omega_p}(\pi_p[A])}{\mu_{\omega}(A)}$ esté arbitrariamente próximo a 0 cuando A se toma en un entorno de p suficientemente pequeño. ■

Observemos que en la prueba del teorema anterior se ve que el cociente

$$\frac{\mu_\omega(A)}{m(x[A])}$$

tiende a $|h(p)|$ cuando A se toma en entornos arbitrariamente pequeños de p , luego μ_{ω_p} determina a $\omega|_U$ salvo el signo, luego determina las medidas μ_{ω_p} (que tampoco dependen del signo de $\omega|_U$). Ahora vamos a probar un resultado “global” que en particular demuestra que las medidas μ_{ω_p} determinan μ_ω .

Teorema 4.27 *Sea V una variedad diferencial orientada, sea $\omega \in \Lambda^n(V)$ un elemento de volumen orientado, sea x una carta de V con dominio conexo U y sea $K \subset U$ un conjunto compacto. Consideremos una distancia en U que induzca su topología.⁴ Entonces, para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\{A_i\}_{i=1}^m$ es una partición de K formada conjuntos medibles de diámetro menor que δ y elegimos en ellos puntos $p_i \in A_i$, entonces*

$$|\mu_\omega(K) - \sum_{i=1}^m \mu_{\omega_{p_i}}(\pi_{p_i}[A_i])| < \epsilon.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\omega|_U = h dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$. Como en la prueba del teorema anterior, no perdemos generalidad si suponemos que $h > 0$. Como $h|_K$ es uniformemente continua, existe un $\delta > 0$ tal que si $p, q \in K$ cumplen $d(p, q) < \delta$, entonces $|h(p) - h(q)| < \epsilon/(m(x[K]) + 1)$.

Dada una partición de K en las condiciones del enunciado (es fácil ver que siempre existen tales particiones), calculamos:

$$\begin{aligned} |\mu_\omega(A_i) - \mu_{\omega_{p_i}}(\pi_{p_i}[A_i])| &= \left| \int_{x[A_i]} (x^{-1} \circ h) dm - h(p_i) m(x[A_i]) \right| = \\ \left| \int_{x[A_i]} ((x^{-1} \circ h) - h(p_i)) dm \right| &\leq \int_{x[A_i]} |(x^{-1} \circ h) - h(p_i)| dm \leq \frac{m(x[A_i]) \epsilon}{m(x[K]) + 1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |\mu_\omega(K) - \sum_{i=1}^m \mu_{\omega_{p_i}}(\pi_{p_i}[A_i])| &= \left| \sum_{i=1}^m (\mu_\omega(A_i) - \mu_{\omega_{p_i}}(\pi_{p_i}[A_i])) \right| \\ &\leq \frac{m(x[K])}{m(x[K]) + 1} \epsilon < \epsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Es fácil generalizar el teorema anterior al caso en que el compacto K no está contenido en un abierto coordenado, cubriéndolo en tal caso con un número finito de ellos. Concluimos que las medidas μ_{ω_p} determinan la medida μ_ω de cualquier subconjunto compacto de V y, por regularidad, la de todo subconjunto medible de V .

⁴El abierto U es obviamente metrizable, pues es homeomorfo a un abierto con frontera en \mathbb{R}^n , aunque, de hecho, sabemos por el teorema de Whitney que toda variedad diferencial V es metrizable como espacio topológico.

Así, podemos expresar el teorema anterior diciendo que μ_ω es la única medida que, cuando, en un entorno suficientemente pequeño de cada $p \in V$, identificamos las coordenadas respecto de una carta con las coordenadas respecto a su base asociada de $T_p V$, entonces μ_ω se confunde con μ_{ω_p} .

Teorema 4.28 Sean V_1, V_2 dos variedades diferenciales orientables (al menos una de ellas sin frontera), consideremos dos elementos de volumen orientados $\omega_i \in \Lambda^m(V_i)$ y sean $\pi_i : V_1 \times V_2 \rightarrow V_i$ las proyecciones. Entonces la forma $\omega_1 \wedge \omega_2 = \pi_{1\#}(\omega_1) \wedge \pi_{2\#}(\omega_2) \in \Lambda^{m+n}(V_1 \times V_2)$ es un elemento de volumen orientado cuya medida asociada es el producto de las medidas μ_{ω_i} .

DEMOSTRACIÓN: Dado un punto $(p_1, p_2) \in V_1 \times V_2$, tomamos dos cartas $x : U_1 \rightarrow \tilde{U}_1, y : U_2 \rightarrow \tilde{U}_2$ alrededor de p_1 y p_2 , respectivamente, de modo que

$$\omega_1|_{U_1} = h_1 dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \quad \omega_2|_{U_2} = h_2 dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^m.$$

Una carta alrededor de (p_1, p_2) es $x \times y$, donde las coordenadas de $x \times y$ son $x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^m$, entendiendo que aquí x^i es $p_1 \circ x^i$ e y^i es $p_2 \circ y^i$. Entonces

$$\pi_{1\#}(\omega_1)|_{U_1 \times U_2} = (\pi_1 \circ h_1) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \quad \pi_{2\#}(\omega_2)|_{U_1 \times U_2} = (\pi_2 \circ h_2) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^m.$$

Por lo tanto,

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)|_{U_1 \times U_2} = (\pi_1 \circ h_1)(\pi_2 \circ h_2) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \wedge dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^m$$

no se anula en ningún punto de $U_1 \times U_2$. Esto prueba que $\omega = \omega_1 \wedge \omega_2$ es un elemento de volumen orientado. Falta probar que si $A_1 \subset V_1$ y $A_2 \subset V_2$ son conjuntos de Borel, entonces $\mu_\omega(A_1 \times A_2) = \mu_{\omega_1}(A_1)\mu_{\omega_2}(A_2)$.

Es claro que podemos descomponer A_i en unión numerable de conjuntos de Borel disjuntos dos a dos contenidos cada uno en un abierto coordenado conexo, y es fácil ver a partir de ahí que no perdemos generalidad si suponemos que $A_i \subset U_i$, para $i = 1, 2$, con U_i conexo. Entonces

$$\begin{aligned} \mu_\omega(A_1 \times A_2) &= \int_{U_1 \times U_2} \chi_{A_1 \times A_2}(\pi_1 \circ |h_1|)(\pi_2 \circ |h_2|) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \wedge dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^m \\ &= \int_{\tilde{U}_1 \times \tilde{U}_2} (\pi_1 \circ x^{-1} \circ (\chi_{A_1} |h_1|))(\pi_2 \circ y^{-1} \circ (\chi_{A_2} |h_2|)) dx_1 \cdots dx_n dy_1 \cdots dy_m \\ &= \left(\int_{\tilde{U}_1} (x^{-1} \circ \chi_{A_1} |h_1|) dx_1 \cdots dx_n \right) \left(\int_{\tilde{U}_2} (y^{-1} \circ \chi_{A_2} |h_2|) dy_1 \cdots dy_m \right) \\ &= \left(\int_{U_1} \chi_{A_1} |h_1| dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \right) \left(\int_{U_2} \chi_{A_2} |h_2| dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^m \right) = \mu_{\omega_1}(A_1)\mu_{\omega_2}(A_2). \end{aligned}$$

■

Integración en variedades semirriemannianas Todos los resultados precedentes sobre integración de formas diferenciales valen para variedades diferenciales orientables cualesquiera, sin suponer en ellas ninguna métrica, salvo la definición del elemento de volumen orientado de una variedad semirriemanniana orientada, el cual a su vez determina una medida en la variedad:

Definición 4.29 Llamaremos *medida de Lebesgue* en una variedad semirriemanniana orientada V como la medida m en V asociada a su elemento de volumen orientado dm .

De acuerdo con la definición 4.23, esto significa que si $A \subset V$ es un subconjunto medible y f es una función integrable en A (respecto de la medida de Lebesgue m), entonces la expresión $\int_A f dm$ puede interpretarse⁵ indistintamente como la integral de la función f respecto de la medida m o como la integral de la forma diferencial $f dm$.

Recordemos que la expresión en coordenadas del elemento de volumen orientado de una variedad semirriemanniana es

$$dm|_U = \sqrt{|\det G|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

En particular, el elemento de volumen de \mathbb{R}^n es

$$dm = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

y la integral de una forma diferencial $f dm$ es simplemente la integral de Lebesgue de f , por lo que la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n en el sentido de la definición anterior es simplemente la medida de Lebesgue usual.

Teorema 4.30 Sean V_1, V_2 dos variedades semirriemannianas orientadas y sean $\pi_i : V_1 \times V_2 \rightarrow V_i$ las proyecciones. Si los elementos de volumen de V_1 y V_2 son dm_1 y dm_2 , respectivamente, entonces el elemento de volumen de $V_1 \times V_2$ es $dm_1 \wedge dm_2 = \pi_{1\#}(dm_1) \wedge \pi_{2\#}(dm_2)$, con lo que la medida de Lebesgue de $V_1 \times V_2$ es el producto de las medidas de Lebesgue de los factores.

DEMOSTRACIÓN: Sean x e y cartas orientadas de V_1 y V_2 , respectivamente. Entonces

$$dm_1 = \sqrt{|\det G_1|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n_1}, \quad dm_2 = \sqrt{|\det G_2|} dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^{n_2},$$

y $\pi_{1\#}(dm_1), \pi_{2\#}(dm_2)$ tienen esta misma expresión si entendemos que x^i es $\pi_1 \circ x^i$ y que y^i es $\pi_2 \circ y^i$. En la prueba del teorema 4.5 hemos visto que la matriz G de las coordenadas de la métrica de $V_1 \times V_2$ respecto de la carta $x \times y$ cumple

$$\det G = \det G_1 \det G_2,$$

⁵Esto justifica la notación dm para el elemento de volumen orientado, pero es importante entender que es una mera notación formal, sin que pueda interpretarse como que dm sea la diferencial de ninguna forma de $\Lambda^{n-1}(V)$, lo cual es falso.

luego el tensor métrico es

$$\sqrt{|\det G_1|} \sqrt{|\det G_2|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n_1} \wedge dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^{n_2} = dm_1 \wedge dm_2.$$

La relación entre las medidas de Lebesgue la da el teorema 4.28. ■

Ejemplo Como aplicación vamos a dar una prueba alternativa de [An 7.26]. Para ello consideramos el difeomorfismo

$$f :]0, +\infty[\times S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

dado por $f(r, x) = rx$.

Tomemos una carta orientada $x : U \longrightarrow \tilde{U}$ de S^{n-1} y la identidad como carta de $]0, +\infty[$. Entonces $I \times x$ es una carta de $]0, +\infty[\times S^{n-1}$ y $x^* = f^{-1} \circ (I \times x)$ es una carta de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ definida sobre el abierto

$$U^* = \{p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mid p/\|p\| \in U\},$$

que a cada punto $p \in U^*$ le asigna las coordenadas $r = \|p\|$ y $x^i(p) = x^i(p/\|p\|)$. Así, f transforma cada punto de $]0, +\infty[\times U$ en el punto de U^* con las mismas coordenadas respecto de las cartas que estamos considerando. Por lo tanto, si ω es una forma diferencial en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, las expresiones coordenadas de $\omega|_{U^*}$ y $f_{\#}(\omega)|_{]0, +\infty[\times U}$ son formalmente idénticas, interpretando r, x^1, \dots, x^{n-1} como las funciones coordenadas de una u otra carta.

Observamos ahora que las parametrizaciones $X = x^{-1}$ e $Y = (x^*)^{-1}$ satisfacen la relación

$$Y(r, x_1, \dots, x_{n-1}) = rX(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

La matriz jacobiana de Y es

$$J_Y = \begin{pmatrix} X^1 & \cdots & X^n \\ r \frac{\partial X^1}{\partial x_1} & \cdots & r \frac{\partial X^n}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ r \frac{\partial X^1}{\partial x_{n-1}} & \cdots & r \frac{\partial X^n}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix},$$

y ahora observamos que, como $X \cdot X = 1$ en todos los puntos, al derivar queda que $X \cdot \frac{\partial X}{\partial x_i} = 0$, por lo que

$$J_Y J_Y^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & r^2 J_X J_X^t & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

luego

$$\det(J_Y J_Y^t) = r^{2(n-1)} \det(J_X J_X^t),$$

o también:

$$\det G_{x^*} = r^{2(n-1)} \det G_x.$$

Por consiguiente, la relación entre los elementos de volumen dm de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $d\sigma$ de S^{n-1} es

$$dm = r^{n-1} \sqrt{\det G_x} dr \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} = r^{n-1} dr \wedge d\sigma.$$

Notemos que esta igualdad es en realidad $f^*(dm) = r^{n-1} dr \wedge d\sigma$. Hemos probado esta relación para los puntos de $]0, +\infty[\times S^{n-1}$ cubiertos por la carta que hemos tomado, pero como estas cartas cubren todo el producto, la igualdad vale para todo punto.

Esto implica que si h es una función integrable en \mathbb{R}^n , entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} h(r, x_1, \dots, x_{n-1}) dm &= \int_{]0, +\infty[\times S^{n-1}} h(r, x_1, \dots, x_{n-1}) r^{n-1} dm \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_{S^{n-1}} h(r, x_1, \dots, x_{n-1}) d\sigma \right) r^{n-1} dr. \end{aligned} \quad (4.2)$$

En otras palabras, si identificamos \mathbb{R}^n con $]0, +\infty[\times S^{n-1}$, la medida de Lebesgue se identifica con el producto de la medida asociada al elemento de longitud orientado $r^{n-1} dr$ en \mathbb{R} y la medida de Lebesgue en S^{n-1} . En particular, podemos aplicar el teorema de Fubini, que nos asegura que si h es positiva y existe la integral doble del miembro derecho, entonces h es integrable en \mathbb{R}^n . ■

4.4 Longitudes de arcos

Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow V$ una inmersión regular en una variedad de Riemann. Esto significa que α es una parametrización de una subvariedad C de V . Llamemos $t = \alpha^{-1}$ a la carta correspondiente. Es claro entonces que $\partial_t|_p = \alpha'(t(p))$ y la matriz del tensor métrico de C en esta carta se reduce a $\langle \partial_t, \partial_t \rangle = \|\alpha'(t)\|^2$. Por consiguiente, la longitud de C es

$$\int_C \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Ahora bien, esta expresión tiene sentido en un contexto mucho más general:

Definición 4.31 Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow V$ un arco diferenciable a trozos en una variedad semirriemanniana V . Definimos la *longitud* de α como

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|_{\alpha(t)} dt.$$

Notemos que el integrando no está definido en los puntos donde α no es diferenciable, pero la integral lo está igualmente. (En la práctica podemos calcularla como la suma de las integrales en los intervalos donde α es diferenciable.)

Hemos visto que si α es una inmersión regular en una variedad de Riemann entonces $L(\alpha)$ es la longitud de su imagen. Si pensamos en $\alpha(t)$ como la posición de una partícula en función del tiempo, $L(\alpha)$ es el espacio que recorre. Si α es un arco regular, entonces es localmente una inmersión regular, luego podemos dividirlo en un número finito de arcos que son inmersiones regulares, y $L(\alpha)$ es la suma de sus longitudes, luego es igualmente el espacio recorrido por la partícula o, equivalentemente, sigue siendo la longitud del arco en el sentido geométrico natural. Igualmente se razona en el caso en que α sea un arco regular a trozos.

Notemos también que en el caso en que V sea una subvariedad de \mathbb{R}^m (considerada como variedad de Riemann con la métrica inducida), sabemos que $\alpha'(t)$ se corresponde con la derivada de α en el sentido usual como aplicación $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ y, a través de dicha identificación, la norma se corresponde también con la norma usual, por lo que la longitud que acabamos de definir es la misma definida en [IC 2.13], y el teorema [IC 2.14] nos da una justificación alternativa de que se corresponde con la longitud en el sentido geométrico usual.

No vamos a entrar en una justificación de que la definición anterior también se corresponde con la longitud geométrica natural cuando α es simplemente diferenciable a trozos, pero la idea es que los tramos en los que la derivada se anula (es decir, en los que la partícula está parada) no contribuyen a la integral que calcula la longitud.

Finalmente, la definición vale formalmente para arcos en variedades semi-riemannianas, aunque aquí el concepto de longitud se aleja ya de la noción geométrica, pues un arco no constante puede tener longitud 0 si su derivada es siempre isótropa.

Las reparametrizaciones monótonas de un arco —es decir, las reparametrizaciones cuyo cambio de parámetro tiene derivada de signo constante— tienen la misma longitud, pues si una aplicación $t : [u, v] \rightarrow [a, b]$ tiene derivada con signo constante, entonces⁶

$$L(t \circ \alpha) = \int_u^v \|t'(s)\alpha'(t(s))\| ds = \int_u^v |t'(s)| \|\alpha'(t(s))\| ds = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = L(\alpha).$$

En particular $L(\alpha) = L(-\alpha)$, y también es claro que

$$L(\alpha_1 \cup \alpha_2) = L(\alpha_1) + L(\alpha_2).$$

⁶Como t no es necesariamente biyectiva no podemos aplicar el teorema de cambio de variable, pero podemos usar directamente la regla de Barrow, pues si $F(t)$ es una primitiva de $\|\alpha'(t)\|$, entonces $F(t(s))$ es una primitiva de $t'(s)\|\alpha'(t(s))\|$, y si la derivada es negativa t es decreciente, luego $t(u) = b$ y $t(v) = a$ y

$$\int_u^v |t'(s)| \|\alpha'(t(s))\| ds = -(F(t(v)) - F(t(u))) = F(b) - F(a) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Una curva diferenciable a trozos $\alpha : I \rightarrow V$ en una variedad semirriemanniana está *parametrizada por [la longitud de] el arco* si $\|\alpha'(t)\| = 1$ donde está definida. Esto hace que $L(\alpha|_{[t_1, t_2]}) = t_2 - t_1$, de modo que cada unidad de avance del parámetro se corresponde con una unidad de avance de la curva.

Toda curva $\alpha : I \rightarrow V$ tal que $\|\alpha'(t)\|$ no se anule en ningún punto (en particular, toda curva regular en una variedad de Riemann) puede reparametrizarse para que quede parametrizada por el arco, pues la función $s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du$ es estrictamente creciente, por lo que tiene inversa $t(s)$ tal que $t'(s) = 1/\|\alpha'(t(s))\|$, y esto hace que $\alpha(t(s))$ esté parametrizada por el arco.

Observemos también que si $f : V \rightarrow W$ es una isometría entre variedades semirriemannianas y $\alpha : [a, b] \rightarrow V$ es un arco diferenciable, también lo es $\beta = \alpha \circ f : [a, b] \rightarrow W$, y además

$$\beta'(t) = d\beta|_t(\partial_t|_t) = df|_{\alpha(t)}(d\alpha|_t(\partial_t|_t)) = df|_{\alpha(t)}(\alpha'(t)).$$

Y como $df|_{\alpha(t)}$ es una isometría, tenemos que $\|\beta'(t)\|_{\beta(t)} = \|\alpha'(t)\|_{\alpha(t)}$, de donde $L(\alpha \circ f) = L(\alpha)$.

El elemento de longitud El tensor métrico de una variedad semirriemanniana V está determinado por el elemento de longitud ds^2 que a cada $p \in V$ le asigna la forma cuadrática en $T_p(V)$ dada por

$$ds^2|_p(v) = \langle v, v \rangle_p.$$

En efecto, basta observar que

$$\langle v + w, v + w \rangle_p = \langle v, v \rangle_p + \langle w, w \rangle_p + 2\langle v, w \rangle,$$

por lo que

$$\langle v, w \rangle_p = \frac{1}{2}(ds^2|_p(v + w) - ds^2|_p(v) - ds^2|_p(w)).$$

La expresión en coordenadas es

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.3)$$

donde el producto de diferenciales es el definido puntualmente.

Por ejemplo, el elemento de longitud de \mathbb{R}_ν^n es

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - \dots - (dx^\nu)^2 + (dx^{\nu+1})^2 + \dots + (dx^n)^2.$$

El nombre de “elemento de longitud” se debe a que la longitud de un arco diferenciable a trozos $\alpha(t)$ contenido en el dominio de una carta x , entonces

$$\alpha'(t) = \sum_i \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde $x^i(t) = x^i(\alpha(t))$, y la longitud de α se obtiene integrando la raíz cuadrada de

$$ds^2(\alpha'(t)) dt^2 = \sum_{ij} g_{ij}(\alpha(t)) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} dt^2 = \sum_{ij} g_{ij}(t) dx^i dx^j.$$

Así, si en (4.3) reinterpretamos g_{ij} como $g_{ij}(\alpha(t))$ y x^i como $x^i(\alpha(t))$, tenemos que $L(\alpha)$ se obtiene integrando $ds = \sqrt{ds^2}$.

4.5 Dualidad

Traducimos ahora al contexto de las variedades semirriemannianas la teoría de dualidad que en la sección A.5 se desarrolla sobre espacios vectoriales.

Si V es una variedad semirriemanniana, por las observaciones previas al lema de localización 3.22, tenemos que el tensor métrico se identifica con una aplicación $C^\infty(V)$ -bilineal $g : \mathfrak{X}(V) \times \mathfrak{X}(V) \rightarrow C^\infty(V)$. En lugar de $g(X, Y)$ escribiremos también $\langle X, Y \rangle$.

Ahora, si fijamos un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(V)$, podemos definir una aplicación lineal $\flat X : \mathfrak{X}(V) \rightarrow C^\infty(V)$ mediante $\flat X(Y) = \langle X, Y \rangle$, la cual, a través del lema de localización, se identifica con un tensor $\flat X \in \Lambda^1(V)$, determinado por que, para todo $Y \in \mathfrak{X}(V)$ y todo $p \in V$, se cumple que

$$\flat X_p(Y_p) = \langle X_p, Y_p \rangle_p. \quad (4.4)$$

El hecho de que el producto escalar tenga rango máximo se traduce en que así obtenemos un isomorfismo:

Teorema 4.32 *Si V es una variedad semirriemanniana $\flat : \mathfrak{X}(V) \rightarrow \Lambda^1(V)$ es un isomorfismo de $C^\infty(V)$ -módulos.*

DEMOSTRACIÓN: De la relación (4.4) se sigue inmediatamente que la aplicación es $C^\infty(V)$ -lineal. Además, si $\flat X = 0$, para todo $p \in V$ se cumple que $\langle X_p, Y_p \rangle_p = 0$, para todo campo $Y \in \mathfrak{X}(V)$, pero todo $v \in T_p(V)$ puede expresarse en la forma $v = Y_p$, para cierto Y , luego lo que tenemos es que $\langle X_p, v \rangle_p = 0$, para todo $v \in T_p(V)$, es decir, que $X_p \in T_p(V)^\perp = 0$, luego $X = 0$, y esto implica que la aplicación es inyectiva.

Por otra parte, si $\omega \in \Lambda^1(V)$, para cada $p \in V$ tenemos que $\omega_p \in T_p(V)^*$, luego por A.17 existe un $X_p \in T_p(V)$ tal que $\phi_p(X_p) = \omega_p$, es decir, que, para todo $v \in T_p(V)$ se cumple que $\omega_p(v) = \langle X_p, v \rangle$.

Así tenemos definido un tensor $X \in \tilde{\mathfrak{T}}_0^1(V)$ y, si probamos que es diferenciable, tendremos que $\flat X_p(Y_p) = \langle X_p, Y_p \rangle_p = \omega_p(Y_p)$, luego $\overline{\flat X} = \bar{\omega}$ y, por el lema de localización $\flat X = \omega$, lo que probará que la aplicación es suprayectiva.

Ahora bien, si $x : U \rightarrow \tilde{U}$ es una carta de V y

$$\omega|_U = \sum_i \omega_i dx^i, \quad X|_U = \sum_i u^i \partial_{x_i},$$

para cada $p \in U$ tenemos que

$$\omega_j = \omega_p(\partial_{x_j}|_p) = \langle X_p, \partial_{x_j}|_p \rangle_p = \sum_i u^i g_{ij},$$

luego necesariamente⁷ $u^j = \sum_i \omega_i g^{ij}$, y esto prueba que $u^j \in C^\infty(V)$, luego concluimos que $X \in \mathfrak{X}(V)$. ■

Representaremos por $\sharp : \Lambda^1(V) \rightarrow \mathfrak{X}(V)$ al isomorfismo inverso del dado por el teorema anterior.

Conviene destacar que en la prueba hemos encontrado la expresión en coordenadas del campo dual de un campo $\omega \in \Lambda^1(V)$, a saber,

$$\text{si } \omega|_U = \sum_i \omega_i dx^i, \quad \text{entonces} \quad \sharp\omega|_U = \sum_{ij} \omega_i g^{ij} \partial_{x_j}.$$

Similarmente se comprueba que

$$\text{si } X|_U = \sum_i u^i \partial_{x_i}, \quad \text{entonces} \quad \flat X|_U = \sum_{ij} u^i g_{ij} dx^j.$$

El gradiente Por ejemplo, si U es un abierto en \mathbb{R}^n y $f \in C^\infty(U)$, el gradiente de f se define como el campo vectorial

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \in \mathfrak{X}(U).$$

Sin embargo, esta definición no es generalizable a una variedad diferencial arbitraria, ya que las derivadas parciales dependen de la carta elegida, de modo que si pretendiéramos definir

$$\nabla f|_U = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

nos encontraríamos con que cartas distintas definen campos vectoriales distintos para la misma función f , y si la variedad no puede cubrirse por una única carta, no habría siquiera forma de elegir consistentemente las cartas para tener un único campo ∇f definido sobre toda la variedad.

Por el contrario, sí que tenemos definida la diferencial $df \in \Lambda^1(V)$, y para cada carta x se cumple que

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i.$$

Esto hace que en una variedad semiriemanniana sí que podamos definir el gradiente de una función:

⁷Recordemos que g^{ij} son los coeficientes de la matriz inversa de (g_{ij}) .

Definición 4.33 Si V es una variedad semirriemanniana y $f \in C^\infty(V)$, definimos su *gradiente* como el campo vectorial dual $\nabla f = \sharp df \in \mathfrak{X}(V)$.

Por definición, esto significa que si $X \in \mathfrak{X}(V)$,

$$\langle \nabla f(p), X_p \rangle_p = \sharp(\nabla f)_p(X_p) = df|_p(X_p) = X_p(f).$$

Según las observaciones posteriores al teorema 4.32, si $x : U \rightarrow \tilde{U}$ es una carta de V , la expresión en coordenadas del gradiente es

$$\nabla f|_U = \sum_j \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Observemos que si U es un abierto de \mathbb{R}^n entonces g^{ij} es la matriz identidad, por lo que $\nabla f|_U$ es simplemente el vector de las derivadas parciales de f , luego esta definición generaliza a la usual en \mathbb{R}^n .

La dirección de máximo crecimiento Si V es una variedad diferencial, $f \in C^\infty(V)$ y $p \in V$, entonces $df|_p(v)$ es la derivada direccional de f en la dirección de v , es decir, que si α es cualquier curva que pasa por $\alpha(t_0) = p$ con derivada v , entonces

$$df|_p(v) = df|_p(\alpha'(t_0)) = (\alpha \circ f)'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha(t_0 + h)) - f(p)}{h}$$

indica la variación de f por cada unidad de avance sobre α . En el caso en que V es una variedad de Riemann y $\|v\| = 1$, tenemos que

$$df|_p(v) = \langle \nabla f(p), v \rangle = \|\nabla f(p)\| \|v\| \cos \alpha = \|\nabla f(p)\| \cos \alpha.$$

Si suponemos que $\|\nabla f(p)\| \neq 0$, la dirección v para la que esta expresión es máxima es la que cumple $\alpha = 0$, es decir,

$$v = \frac{1}{\|\nabla f(p)\|} \nabla f(p).$$

Este vector v recibe el nombre de *dirección de máximo crecimiento* de f en p , y cumple que $df|_p(v) = \|\nabla f(p)\|$. En conclusión:

El gradiente de una función en un punto (si no es nulo) indica la dirección en la que la función crece más rápidamente (ante desplazamientos por curvas de velocidad unitaria), y su norma es el incremento que experimenta la función por cada unidad de avance en la dirección de máximo crecimiento.

Es claro que la *dirección de máximo decrecimiento* de f (en el sentido obvio) en un punto p es la opuesta a la dirección de máximo crecimiento. ■

Cambios de tipo en tensores Extendemos ahora a variedades semirriemannianas los isomorfismos de cambio de tipo definidos en el segundo apartado de la sección A.5, que nos permiten subir y bajar índices en las coordenadas de los tensores:

Si V es una variedad semirriemanniana y $1 \leq a \leq r$, $1 \leq b \leq s+1$, podemos definir una operación

$$\downarrow_b^a : \mathcal{T}_s^r(V) \longrightarrow \mathcal{T}_{s+1}^{r-1}(V)$$

mediante

$$\begin{aligned} (\downarrow_b^a T)(\omega^1, \dots, \omega^{r-1}, X_1, \dots, X_{s+1}) = \\ T(\omega^1, \dots, \omega^{a-1}, \flat X_b, \omega^a, \dots, \omega^{r-1}, X_1, \dots, X_{b-1}, X_{b+1}, \dots, X_{s+1}). \end{aligned}$$

Claramente se trata de una aplicación $C^\infty(V)$ -lineal. Además, si $X \in \mathcal{T}_0^1(V)$, entonces

$$(\downarrow_1^1 X)(Y) = X(Y^*) = \flat Y(X) = \langle X, Y \rangle = \flat X(Y),$$

luego $\downarrow_1^1 X = \flat X$ es la operación que ya teníamos definida.

Similarmente, para $1 \leq a \leq r+1$ y $1 \leq b \leq s$, podemos definir

$$\uparrow_b^a : \mathcal{T}_s^r(V) \longrightarrow \mathcal{T}_{s-1}^{r+1}(V)$$

mediante

$$\begin{aligned} (\uparrow_b^a T)(\omega^1, \dots, \omega^{r+1}, X_1, \dots, X_{s-1}) = \\ T(\omega^1, \dots, \omega^{a-1}, \omega^{a+1}, \dots, \omega^{r+1}, X_1, \dots, X_{b-1}, \sharp \omega^a, X_{b+1}, \dots, X_{s+1}), \end{aligned}$$

que también es $C^\infty(V)$ -lineal y cumple $(\uparrow_1^1)(\omega) = \sharp \omega$.

Obviamente, la relación entre estas aplicaciones y las aplicaciones análogas definidas en A.5 es que

$$(\downarrow_b^a T)_p = \downarrow_b^a T_p, \quad (\uparrow_b^a T)_p = \uparrow_b^a T_p.$$

Esto permite traducir trivialmente los resultados para espacios semieuclicídeos a resultados análogos para variedades semirriemannianas. Por ejemplo, ahora es inmediato que las aplicaciones \downarrow_b^a y \uparrow_b^a son isomorfismos mutuamente inversos, así como que sus expresiones en coordenadas, por ejemplo para $T \in \mathcal{T}_2^2(V)$, son

$$(\downarrow_2^1 T)_{jkl}^i = \sum_m g_{km} T_{jl}^{mi}.$$

(En general, el nuevo índice m se pone en la posición contravariante a de T y en la g la m se acompaña del índice covariante b .) Para $T \in \mathcal{T}_3^1(V)$ tenemos que

$$(\uparrow_2^1 T)_{kl}^{ij} = \sum_m g^{im} T_{kml}^j.$$

(El nuevo índice m se pone en la posición covariante b de T y en la g la m se acompaña del índice covariante a .)

Ejemplo Si $T : \mathfrak{X}(V)^s \longrightarrow \mathfrak{X}(V)$ es una aplicación $C^\infty(V)$ -multilineal y la identificamos con un tensor de tipo $(1, s)$, entonces el tensor $(\downarrow_1^1 T)$ está determinado por la relación

$$(\downarrow_1^1 T)(V, X_1, \dots, X_s) = \langle V, T(X_1, \dots, X_s) \rangle. \quad \blacksquare$$

El operador de Hodge En una variedad semirriemanniana orientada V , el operador de Hodge definido en A.23 define puntualmente un operador:

$$* : \tilde{\Lambda}^k(V) \longrightarrow \tilde{\Lambda}^{n-k}(V)$$

entre los espacios de formas diferenciales no necesariamente diferenciables, que obviamente es un homomorfismo de módulos (sobre el anillo de todas las funciones reales definidas en V). Veamos que se restringe a un homomorfismo de $C^\infty(V)$ -módulos

$$* : \Lambda^k(V) \longrightarrow \Lambda^{n-k}(V).$$

Tenemos que probar que si $\omega \in \Lambda^k(V)$, entonces $*\omega$ es diferenciable. Para ello fijamos un punto $p \in V$ y un sistema de referencia ortonormal E_1, \dots, E_n definido en un entorno U de p (de acuerdo con el teorema 4.6), que podemos suponer orientado. Entonces las formas $E^i = \epsilon_i E_i^*$ constituyen el sistema de referencia dual, en el sentido de que $E^i(E_j) = \delta_i^j$. Podemos expresar

$$\omega|_U = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} E^{i_1} \wedge \dots \wedge E^{i_k},$$

donde $\omega_{i_1 \dots i_k} = \omega|_U(E_{i_1}, \dots, E_{i_k})$ son funciones diferenciables. Entonces

$$(*\omega)|_U = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} * (E^{i_1} \wedge \dots \wedge E^{i_k}),$$

y, según el teorema A.24, tenemos que

$$*(E^{i_1} \wedge \dots \wedge E^{i_k}) = \pm E^{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge E^{i_n} \in \Lambda^{n-k}(U),$$

luego también $(*\omega)|_U \in \Lambda^{n-k}(U)$, luego $*\omega \in \Lambda^{n-k}(V)$. Así pues:

Definición 4.34 Si V es una variedad semirriemanniana orientada, el *operador estrella de Hodge* es el isomorfismo $* : \Lambda(V) \longrightarrow \Lambda(V)$ dado por $(*\omega)_p = *(\omega_p)$.

Acabamos de probar que, en efecto, $*\omega \in \Lambda(V)$, claramente es $C^\infty(V)$ -lineal, y que es un isomorfismo se deduce de la propiedad c) del teorema siguiente, que afirma que su inverso en cada espacio $\Lambda^k(V)$ es $(-1)^{\nu+k(n-k)}*$. El teorema siguiente es consecuencia inmediata de su análogo A.26:

Teorema 4.35 Si V es una variedad semirriemanniana orientada de índice ν y dm es su elemento de volumen orientado, el operador de Hodge cumple las propiedades siguientes:

1. $*1 = dm$.
2. $*(dm) = (-1)^\nu$.
3. $**\omega = (-1)^{\nu+k(n-k)}\omega$, para $\omega \in \Lambda^k(V)$.
4. $\langle \omega | *\eta \rangle = (-1)^{k(n-k)} \langle *\omega | \eta \rangle$, para $\omega \in \Lambda^k(V)$, $\eta \in \Lambda^{n-k}(V)$.
5. $\langle *\omega | *\eta \rangle = (-1)^\nu \langle \omega | \eta \rangle$.

En las últimas propiedades el producto escalar es el definido puntualmente. Por último, el teorema A.28 nos da inmediatamente el resultado siguiente:

Teorema 4.36 *Si V es una variedad semirriemanniana orientada con elemento de volumen orientado dm y $X \in \mathfrak{X}(V)$, entonces $i_X(dm) = *(bX)$.*

Esto implica que la aplicación $\mathfrak{X}(V) \rightarrow \Lambda^{n-1}(V)$ dada por $X \mapsto i_X(dm)$ es un isomorfismo de $C^\infty(V)$ -módulos, pues su inversa es $\omega \mapsto (-1)^{\nu+n-1} \sharp * \omega$. En el capítulo siguiente veremos la relevancia de este isomorfismo.

4.6 Aplicaciones conformes

Terminamos este capítulo introduciendo las aplicaciones entre variedades de Riemann que no conservan necesariamente las distancias, pero sí los ángulos entre vectores. En primer lugar las introducimos en vectoriales, para generalizarlas después a variedades semirriemannianas:

Definición 4.37 Un isomorfismo $f : V \rightarrow W$ entre espacios vectoriales euclídeos es una *aplicación conforme* si conserva los ángulos entre vectores, es decir, si cuando $v, v' \in V$ son vectores no nulos, se cumple que

$$\frac{\langle f(v), f(v') \rangle}{\|f(v)\| \|f(v')\|} = \frac{\langle v, v' \rangle}{\|v\| \|v'\|}.$$

Observemos que esto sucede si y sólo si $f = \alpha g$, donde $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $g : V \rightarrow W$ es una isometría.

En efecto, es fácil ver que si se cumple esta condición, entonces f es conforme. Suponemos ahora que f es conforme y consideramos una base ortonormal e_1, \dots, e_n de V . Llamemos $f_i = f(e_i)$. Entonces f_1, \dots, f_n es una base ortogonal de W . Además, si $1 < k \leq n$, tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\langle e_1, e_1 + e_k \rangle}{\|e_1\| \|e_1 + e_k\|} = \frac{\langle f_1, f_1 + f_k \rangle}{\|f_1\| \|f_1 + f_k\|} = \frac{\|f_1\|^2}{\|f_1\| \sqrt{\|f_1\|^2 + \|f_k\|^2}},$$

de donde $\|f_1\| = \|f_k\|$. Si llamamos α a la norma común de todos los vectores f_k , entonces $g = f/\alpha$ transforma una base ortonormal en una base ortonormal, luego es una isometría.

Esta caracterización de las aplicaciones conformes de un espacio euclídeo puede tomarse como definición en el caso semieuclicídeo. A su vez, de aquí obtenemos la definición siguiente en el caso de aplicaciones entre variedades diferenciales:

Una aplicación diferenciable $f : V \rightarrow W$ entre variedades semirriemannianas es una *aplicación conforme* si existe $h \in C^\infty(V)$ que no se anula en ningún punto y, para todo $p \in V$ y todo par de vectores no nulos $v, v' \in T_p(V)$, se cumple que

$$\langle df|_p(v), df|_p(v') \rangle = h^2(p) \langle v, v' \rangle.$$

Notemos que la diferenciabilidad de h se cumple necesariamente (aunque no la exijamos en la definición). En efecto, si se cumple la definición con una h no necesariamente diferenciable, vemos que $df|_p$ transforma una base ortonormal de $T_p(V)$ en una base ortogonal de $T_{f(p)}(W)$, luego en particular $df|_p$ es biyectiva, luego se restringe a un difeomorfismo de un entorno V_0 de p en un entorno W_0 de $f(p)$. Podemos suponer que V_0 es el dominio de una carta x tal que $\|\partial_{x_1}\|$ no se anula en ningún punto, y entonces podemos tomar a $y = f^{-1} \circ x$ como carta alrededor de $f(p)$ en W_0 . Claramente

$$h = \|\partial_{y_1}\| / \|\partial_{x_1}\|,$$

luego h es diferenciable en p .

De aquí se sigue a su vez que una aplicación diferenciable f es conforme si y sólo si cada $df|_p : T_p(V) \rightarrow T_{f(p)}(W)$ es una aplicación conforme entre espacios semieuclídeos.

En efecto, si $df|_p/\alpha_p$ es una isometría, basta tomar $h(p) = |\alpha_p|$, y la implicación opuesta se prueba análogamente.

Es obvio que la composición de aplicaciones conformes es conforme.

Una *transformación conforme* $f : V \rightarrow W$ entre dos variedades semirriemannianas es un difeomorfismo conforme (lo que implica claramente que f^{-1} también es una transformación conforme).

Así, las transformaciones conformes entre variedades de Riemann son los difeomorfismos que conservan los ángulos entre vectores, pero no necesariamente sus longitudes, por lo que constituyen una clase más general que las isometrías.

Por ejemplo, como las isometrías conservan la curvatura, no puede existir una isometría entre un abierto en S^n y un abierto en \mathbb{R}^n . En cambio, sí que existen transformaciones conformes entre abiertos esféricos y abiertos planos:

La proyección estereográfica Ya estudiamos la proyección estereográfica bidimensional al final de las secciones [An 2.5] y [G A.1]. En [G A.20] probamos esencialmente que la proyección estereográfica bidimensional es conforme. Ahora vamos a probarlo en general.

Recordemos que la proyección estereográfica n -dimensional es la aplicación $\pi : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (donde $N = (0, \dots, 0, 1)$) que a cada punto p le asigna el punto de \mathbb{R}^n que resulta de eliminar la última coordenada nula de la intersección de la recta Np con el hiperplano $x_{n+1} = 0$. Explícitamente:

$$\pi(x) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n),$$

y

$$\pi^{-1}(y) = \frac{1}{\|y\|^2 + 1}(2y_1, \dots, 2y_n, \|y\|^2 - 1).$$

Teorema 4.38 *La proyección estereográfica $\pi : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación conforme.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos tomar a π como carta de S^n . Vamos a calcular la expresión en esta carta de la métrica de la esfera. Para ello llamaremos $X = \pi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{N\}$. Un cálculo rutinario nos da la matriz jacobiana de la inclusión $i : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ en estas cartas (que no es sino JX):

$$\frac{1}{(\|y\|^2 + 1)^2} \begin{pmatrix} 2(\|y\|^2 + 1) - 4y_1^2 & -4y_1y_2 & \cdots & -4y_1y_n & 4y_1 \\ -4y_2y_1 & 2(\|y\|^2 + 1) - 4y_2^2 & & -4y_2y_n & 4y_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -4y_ny_1 & -4y_ny_2 & \cdots & 2(\|y\|^2 + 1) - 4y_n^2 & 4y_n \end{pmatrix}.$$

Multipliéndola por su traspuesta obtenemos que $G = 4(\|y\|^2 + 1)^{-2}I$. Esto significa que, si $\pi(x) = y$, la diferencial $d\pi^{-1}|_y$ transforma la base ortonormal de $T_y\mathbb{R}^n$ correspondiente a las coordenadas cartesianas en una base ortogonal de T_xS^n cuyos vectores tienen todos norma $2(\|y\|^2 + 1)^{-1}$, luego

$$\frac{1}{2}(\|y\|^2 + 1)d\pi^{-1}|_y$$

es una isometría y, por consiguiente, π^{-1} es una transformación conforme, luego su inversa también. ■

Transformaciones de Möbius Igual que hemos definido la proyección estereográfica $\pi : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ podemos definir $\pi_- : S^n \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ proyectando desde el polo sur $S = -N$ en lugar de hacerlo desde N . Obviamente también es conforme. Como $\pi(N) = 0 = \pi_-(S)$, resulta que la composición

$$J = \pi^{-1} \circ \pi_- : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

también es conforme, y es fácil ver que viene dada por

$$J(y) = \frac{y}{\|y\|^2}.$$

Conviene comprobar directamente que cumple la definición de aplicación conforme. Concretamente, si $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, es fácil ver que

$$dJ(\partial_{y_i}) = \frac{\|y\|^2 - 2y_i^2}{\|y\|^4} \frac{\partial}{\partial y_i} - \sum_{j \neq i} \frac{2y_iy_j}{\|y\|^4} \frac{\partial}{\partial y_j},$$

luego

$$\langle dJ(\partial_{y_i}), dJ(\partial_{y_i}) \rangle = \frac{1}{\|y\|^4} = \frac{1}{\|y\|^4} \langle \partial_{y_i}, \partial_{y_i} \rangle.$$

También se puede comprobar que $\langle dJ(\partial_{y_i}), dJ(\partial_{y_j}) \rangle = 0$, para $i \neq j$, pero esto lo sabemos indirectamente, pues sabemos que J es conforme. Lo que nos ha proporcionado el cálculo es la relación concreta

$$\langle dJ|_y(v), dJ|_y(v') \rangle = (1/\|y\|^2)^2 \langle v, v' \rangle.$$

Llamemos ahora $\mathbb{R}_\infty^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ a la compactificación de Alexandroff de \mathbb{R}^n . En la sección [An 2.5] demostramos que la proyección estereográfica π se extiende a un homeomorfismo $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}_\infty^n$ mediante $\pi(N) = \infty$. Lo mismo se aplica obviamente a π_- , esta vez con $\pi_-(S) = \infty$, por lo que, considerando ambas extensiones, la definición de J proporciona ahora un homeomorfismo $J : \mathbb{R}_\infty^n \rightarrow \mathbb{R}_\infty^n$ tal que $J(0) = \infty$, $J(\infty) = 0$. Notemos que $J = J^{-1}$.

Consideremos en \mathbb{R}_∞^n la estructura analítica y a su vez el tensor métrico que convierten a π en una isometría.

Como π y π_- constituyen un atlas de S^n , las composiciones

$$I = \pi^{-1} \circ \pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad J = \pi^{-1} \circ \pi_- : \mathbb{R}_\infty^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

constituyen un atlas de \mathbb{R}_∞^n , y las dos son transformaciones conformes (la identidad trivialmente, y J porque es composición de una isometría con una transformación conforme).

El hecho de que la identidad sea una carta de \mathbb{R}_∞^n equivale a que la estructura diferencial de \mathbb{R}^n como subvariedad de \mathbb{R}_∞^n es la usual. No sucede lo mismo con la métrica, pero lo único que nos importa realmente es que un difeomorfismo entre dos abiertos de \mathbb{R}_∞^n será conforme si y sólo si sus lecturas respecto de las cartas I, J lo son en el sentido usual como aplicaciones entre abiertos de \mathbb{R}^n . En particular, un difeomorfismo entre dos abiertos de \mathbb{R}^n es conforme en el sentido usual si y sólo si lo es considerando los abiertos como abiertos de \mathbb{R}_∞^n .

En suma, ahora podemos hablar de transformaciones conformes⁸ entre abiertos de \mathbb{R}_∞^n en un sentido que extiende al usual entre abiertos de \mathbb{R}^n .

En particular, ahora podemos decir que $J : \mathbb{R}_\infty^n \rightarrow \mathbb{R}_\infty^n$ es conforme en todo su dominio, pues su conformidad en 0 equivale a que $J \circ J^{-1}$ sea conforme alrededor de 0, lo cual es trivial, e igualmente sucede con la conformidad en ∞ .

Teorema 4.39 *Toda semejanza $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se extiende a una transformación conforme $f : \mathbb{R}_\infty^n \rightarrow \mathbb{R}_\infty^n$ mediante $f(\infty) = \infty$.*

DEMOSTRACIÓN: Según [G 5.20], toda semejanza es composición de una isometría y una homotecia, luego basta probar el teorema en ambos casos. A su vez, toda isometría es composición de una traslación y una isometría lineal, luego también podemos tratar ambos casos por separado. En ambos casos es evidente que una isometría es conforme en \mathbb{R}^n . El único problema es demostrar que lo es en ∞ .

⁸Más en general, puede definirse el concepto de *atlas conforme* en un espacio topológico como un atlas en el que las aplicaciones $x \circ y^{-1}$, para dos cualesquiera de sus cartas, es una transformación conforme, y a su vez una *variedad conforme* como un espacio topológico (de Hausdorff con una base numerable) dotado de un atlas conforme maximal. Entonces podemos definir las aplicaciones conformes entre dos variedades conformes exactamente igual que se definen las aplicaciones diferenciables entre variedades diferenciales. En estos términos, lo que hemos hecho ha sido dotar a \mathbb{R}_∞^n de estructura de variedad conforme mediante el atlas formado por las cartas I, J , de modo que la estructura conforme de \mathbb{R}^n como subvariedad conforme de \mathbb{R}_∞^n coincide con la derivada de su métrica usual.

El caso de la isometría lineal es simple, pues

$$J(f(J(y))) = J\left(\frac{f(y)}{\|f(y)\|^2}\right) = \frac{f(y)/\|f(y)\|^2}{\|f(y)/\|f(y)\|^2\|^2} = f(y).$$

Si $f(y) = y + a$ es una traslación, entonces

$$J(f(J(y))) = J\left(\frac{y}{\|y\|^2} + a\right) = \|y\|^2 \frac{y + \|y\|^2 a}{\|y + \|y\|^2 a\|^2}.$$

Como $\|y + \|y\|^2 a\|^2 = \langle y + \|y\|^2 a, y + \|y\|^2 a \rangle = \|y\|^2 + \|y\|^4 \|a\|^2 + 2\|y\|^2 \langle y, a \rangle$, la expresión se reduce a

$$J(f(J(y))) = \frac{y + \|y\|^2 a}{1 + \|y\|^2 \|a\|^2 + 2\langle y, a \rangle}.$$

A partir de aquí es una simple rutina calcular la matriz jacobiana, que tiene una expresión sofisticada, pero que en 0 se reduce a la matriz identidad, por lo que f es conforme en ∞ .

Una homotecia es de la forma $f(y) = a + r(y - a)$, luego se expresa como composición de traslaciones y una homotecia de centro 0. Por la parte ya probada podemos restringirnos a este caso, es decir, que podemos suponer que $f(y) = ry$, con $r > 0$ (pues la homotecia de razón -1 es una isometría). Ahora basta calcular:

$$J(f(J(y))) = J\left(\frac{ry}{\|ry\|^2}\right) = \frac{y/r \|y\|^2}{\|y/r \|y\|^2\|^2} = ry,$$

luego es una homotecia, luego es conforme en 0. ■

En [G A.2] demostramos que la proyección estereográfica (extendida a S^n) hace corresponder las hiperesferas de S^n con las esferas y los hiperplanos de \mathbb{R}_∞^n , donde un hiperplano en \mathbb{R}_∞^n se define como la unión de un hiperplano de \mathbb{R}^n con $\{\infty\}$. Por ello se definen las *hiperesferas* de \mathbb{R}_∞^n como las esferas y los hiperplanos en este sentido. Así la proyección estereográfica hace corresponder las hiperesferas de S^n con las de \mathbb{R}_∞^n .

La *inversión* $J_{p,r} : \mathbb{R}_\infty^n \rightarrow \mathbb{R}_\infty^n$ respecto de la esfera de centro $p \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ se define como

$$J_{p,r}(y) = p + \frac{r^2(y - p)}{\|y - p\|^2},$$

entendiendo que $J_{p,r}(0) = \infty$ y $J_{p,r}(\infty) = 0$, mientras que la *inversión* respecto de un hiperplano es la simetría respecto a él en el sentido usual (extendida a \mathbb{R}_∞^n según el teorema anterior). Así tenemos definida la inversión respecto a cualquier hiperesfera de \mathbb{R}_∞^n .

Notemos que $J = J_{0,1}$, y que $J_{p,r}(y) = p + r^2 J(y - p)$, luego

$$J_{p,r} = T_{-p} \circ J \circ H_{0,r^2} \circ T_p,$$

donde T_{-p} y T_p son traslaciones y H_{0,r^2} la homotecia de centro 0 y razón r^2 . Esto implica que todas las inversiones son transformaciones conformes (las inversiones respecto a hiperplanos lo son porque son semejanzas).

Por consiguiente, la restricción $J_{p,r} : \mathbb{R}_\infty^n \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ cumple

$$\begin{aligned}
 \langle dJ_{p,r}|_y(v), dJ_{p,r}|_y(v') \rangle &= \langle dT_p|_{r^2 J(y-p)}(dH_{0,r^2}|_{J(y-p)}(dJ|_{y-p}(dT_{-p}|_y(v))), \\
 &\quad dT_p|_{r^2 J(y-p)}(dH_{0,r^2}|_{J(y-p)}(dJ|_{y-p}(dT_{-p}|_y(v')))) \rangle \\
 &= \langle dH_{0,r^2}|_{J(y-p)}(dJ|_{y-p}(dT_{-p}|_y(v))), \\
 &\quad dH_{0,r^2}|_{J(y-p)}(dJ|_{y-p}(dT_{-p}|_y(v'))) \rangle \\
 &= r^4 \langle dJ|_{y-p}(dT_{-p}|_y(v)), dJ|_{y-p}(dT_{-p}|_y(v')) \rangle \\
 &= \frac{r^4}{\|y-p\|^4} \langle dT_{-p}|_y(v), dT_{-p}|_y(v') \rangle \\
 &= \frac{r^4}{\|y-p\|^4} \langle v, v' \rangle.
 \end{aligned}$$

Más en general, en [G A.6] definimos el grupo $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ de las *transformaciones de Möbius* de \mathbb{R}^n como el grupo generado por las semejanzas y las inversiones respecto de esferas. En [G A.10] probamos que también está generado por las inversiones respecto de hiperesferas. En [G A.8] caracterizamos las transformaciones de Möbius como las biyecciones de \mathbb{R}_∞^n en sí mismo que transforman hiperesferas en hiperesferas.

El teorema siguiente es ahora inmediato:

Teorema 4.40 *Las transformaciones de Möbius son transformaciones conformes de \mathbb{R}_∞^n en sí mismo.*

Lo que no es inmediato es que las transformaciones de Möbius son las únicas transformaciones conformes de \mathbb{R}_∞^n en sí mismo, pero no estamos en condiciones de probarlo ahora. Volveremos sobre este problema en la sección 7.5.

Conviene distinguir entre transformaciones de Möbius *directas* o *inversas* según si conservan o invierten la orientación. El conjunto $\mathcal{M}_0(\mathbb{R}^n)$ de las transformaciones de Möbius directas es un subgrupo de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 4.41 *Las inversiones son transformaciones de Möbius inversas.*

DEMOSTRACIÓN: Las inversiones respecto de hiperplanos son reflexiones, luego invierten la orientación. En el caso de las inversiones respecto de esferas basta considerar J , puesto que cualquier otra se obtiene de J mediante composición con transformaciones directas.

Ahora bien, como $J|_{S^n}$ es la identidad, si $p \in S^n$ tenemos que $dJ|_p|_{T_p(S^n)}$ es la identidad, es decir, que $dJ|_p$ fija a todos los vectores de $T_p(S^n)$. Por otra parte, la restricción de J a la semirrecta $\{\alpha p \mid \alpha > 0\}$ viene dada por $\alpha p \mapsto \alpha^{-1}p$, de donde se sigue que $dJ|_p(\partial_\alpha|_p) = -\partial_\alpha|_p$. Si formamos una base de $T_p(\mathbb{R}^n)$ añadiendo a una base de $T_p(S^n)$ el vector $\partial_\alpha|_p$ (normal a este espacio), tenemos que $dJ|_p$ fija a todos los vectores de la base menos al último, por lo que invierte la orientación. Por conexión, si J invierte la orientación en un punto, lo hace en todos. ■

Esto se traduce en que una transformación de Möbius es directa o inversa según si puede expresarse como producto de un número par o impar de inversiones, respectivamente. (En [G A.12] tomamos esto como definición en el caso particular $n = 2$.)

Terminamos con un resultado que necesitaremos en la sección 7.5:

Teorema 4.42 *Si dos transformaciones de Möbius coinciden en un abierto, entonces son iguales.*

DEMOSTRACIÓN: Sean T_1 y T_2 dos transformaciones de Möbius y sea U la unión de todos los abiertos en los que coinciden. Por hipótesis es un abierto no vacío, y queremos probar que $U = \mathbb{R}_\infty^n$. En caso contrario, como \mathbb{R}_∞^n es conexo, existe un punto $p \in \partial U$. Por continuidad $T_1(p) = T_2(p) = q$.

Basta probar que $J_{p,1} \circ T_1 \circ J_{q,1} = J_{p,1} \circ T_2 \circ J_{q,1}$, pero se trata de dos transformaciones de Möbius que coinciden en $J_{p,1}[U]$ y que fijan a ∞ . Por lo tanto, se trata de dos semejanzas en \mathbb{R}^n , y todo abierto contiene un conjunto afínmente independiente, luego son la misma semejanza. ■

Capítulo V

El cálculo vectorial

En el capítulo VIII de [An] probamos el teorema de la divergencia, del cual extrajimos varias consecuencias y aplicaciones relevantes. Aquí vamos a demostrar un resultado mucho más general, el teorema de Stokes (generalizado), que es el resultado fundamental de lo que se conoce como “cálculo vectorial” o “análisis vectorial”. Empezamos discutiendo algunos conceptos necesarios para sacarle partido.

5.1 La integral curvilínea

Las únicas formas diferenciales que pueden integrarse en una variedad diferencial de dimensión n son las de orden n , por lo que tal vez el lector se pregunte “para qué sirven” las formas diferenciales de orden inferior. La respuesta es que esencialmente “sirven” para ser integradas en subvariedades de la dimensión correspondiente. Aquí vamos a considerar el caso de las 1-formas:

Definición 5.1 Sea V una variedad diferencial, sea $\alpha : [a, b] \rightarrow V$ un arco regular y sea $\omega \in \Lambda^1(V)$. Definimos la *integral curvilínea* de ω a lo largo de α como

$$\int_{\alpha} \omega = \int_{[a,b]} \alpha^*(\omega) = \int_a^b \omega_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) dt.$$

Si la imagen de α está contenida en una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ y

$$\omega|_U = F_1 dx^1 + \cdots + F_n dx^n,$$

entonces

$$\begin{aligned} \alpha^*(\omega) &= (\alpha \circ F_1) d(\alpha \circ x)^1 + \cdots + (\alpha \circ F_n) d(\alpha \circ x)^n \\ &= (\alpha \circ F_1) \frac{dx^1}{dt} dt + \cdots + (\alpha \circ F_n) \frac{dx^n}{dt} dt = (\alpha \circ F) \cdot \alpha' dt, \end{aligned}$$

donde ahora estamos representando $\alpha \circ x^i$ como $x^i(t)$. Por lo tanto

$$\int_{\alpha} \omega = \int_a^b F(\alpha(t)) \alpha'(t) dt.$$

Ejemplo Si $V = \mathbb{R}^2$ y $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow V$ es la parametrización de la circunferencia $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, entonces

$$\int_{\alpha} -y dx + x dy = \int_0^{2\pi} (-\sin t(-\sin t) + \cos t \cos t) dt = 2\pi. \quad \blacksquare$$

El teorema 4.24 implica que la integral curvilínea no depende de la parametrización del arco salvo por la orientación, es decir, que si $s : [u, v] \rightarrow [a, b]$ es un cambio de parámetro regular (es decir, una función diferenciable con derivada no nula en todo punto), entonces

$$\int_{\alpha} \omega = \pm \int_{s \circ \alpha} \omega,$$

donde el signo es el de la derivada de α .

Si $\alpha : [a, b] \rightarrow V$ es un arco regular a trozos, de modo que existe una partición $a = t_0 < \dots < t_m = b$ tal que $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ es regular, podemos definir

$$\int_{\alpha} \omega = \sum_{i=1}^m \int_{\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}} \omega$$

y es claro que $\int_{\alpha} : \Lambda^1(V) \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación lineal independiente de la parametrización de α salvo por la orientación. Además:

$$\int_{-\alpha} \omega = - \int_{\alpha} \omega, \quad \int_{\alpha \cup \beta} \omega = \int_{\alpha} \omega + \int_{\beta} \omega.$$

El teorema siguiente se reduce a la regla de Barrow cuando $V = [a, b]$ y α es la identidad en V :

Teorema 5.2 Sea V una variedad diferencial, $\alpha : [a, b] \rightarrow V$ un arco regular a trozos y $f \in C^{\infty}(V)$. Entonces

$$\int_{\alpha} df = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)).$$

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que $\alpha^*(df) = d(\alpha \circ f) = (\alpha \circ f)' dt$ y aplicar la regla de Barrow. \blacksquare

En particular, si α es un arco cerrado, es decir, tal que $\alpha(a) = \alpha(b)$, se tiene que cumplir que $\int_{\alpha} df = 0$. Esto demuestra, por ejemplo, que la forma $\omega = -y dx + x dy$ no es de la forma df , para ninguna función f , pues hemos visto que su integral sobre una circunferencia no es 0.

Ejemplo En realidad hay una forma más sencilla de llegar a la misma conclusión, y es observar que $d\omega = -dy \wedge dx + dx \wedge dy = 2 dx \wedge dy \neq 0$, mientras que si fuera $\omega = df$ tendríamos que $d\omega = d(df) = 0$. No obstante, esta condición necesaria para que una forma ω sea de la forma df (que cumpla $d\omega = 0$) no es en general suficiente.

Para comprobarlo consideramos las coordenadas polares ρ, θ en \mathbb{R}^2 , que están definidas sobre todo el plano menos cualquier semirrecta prefijada de origen en el punto $(0, 0)$. De las relaciones

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \theta$$

se sigue inmediatamente que

$$dx = \cos \theta d\rho - \rho \operatorname{sen} \theta d\theta, \quad dy = \operatorname{sen} \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta,$$

y despejando resulta que

$$d\theta = -\frac{\operatorname{sen} \theta}{\rho} dx + \frac{\cos \theta}{\rho} dy = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Esta relación vale en todos los puntos de \mathbb{R}^2 menos una semirrecta, pero la forma

$$\omega = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

está definida en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, y el hecho de que restringida a un entorno de cada punto sea de la forma $\omega|_U = d\theta$ implica que $d\omega = 0$, pero, teniendo en cuenta que $x^2 + y^2$ vale 1 sobre la circunferencia unidad $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, resulta que

$$\int_{\alpha} \omega = \int_{\alpha} (-y dx + x dy) = 2\pi,$$

según hemos calculado antes. Por consiguiente, esta forma $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ no es la diferencial de ninguna función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ a pesar de que $d\omega = 0$. Hemos visto que sí que es localmente de la forma $d\theta$, pero para una función θ definida en un entorno de cada punto distinta en cada caso, ya que el argumento θ no puede definirse (como función continua) en todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. ■

Ahora es fácil generalizar [An 5.33]:

Teorema 5.3 *Si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación diferenciable entre dos variedades diferenciales y $df = 0$, entonces f es constante en cada componente conexa de V .*

DEMOSTRACIÓN: Sean $p, q \in V$ dos puntos en la misma componente conexa. Por 2.23 existe un arco regular a trozos $\alpha : [a, b] \rightarrow V$ tal que $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$. Entonces

$$f(q) - f(p) = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) = \int_a^b d(\alpha \circ f) = 0,$$

pues $d(\alpha \circ f)|_t = df|_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = 0$. Por lo tanto $f(p) = f(q)$. ■

La versión que hemos probado de la regla de Barrow para la integral curvilínea implica que la integral de una forma de tipo df no depende del arco sobre el que se integra, sino únicamente de sus extremos, pero conviene dar el argumento en un contexto más general:

Teorema 5.4 Sea V una variedad diferencial y $\omega \in \Lambda^1(V)$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. Si α, β son arcos regulares a trozos en V con los mismos extremos $p, q \in V$, entonces $\int_{\alpha} \omega = \int_{\beta} \omega$.
2. Si α es un arco cerrado regular a trozos en V , entonces $\int_{\alpha} \omega = 0$.
3. Existe $f \in C^{\infty}(V)$ tal que $\omega = df$. Si V es conexa, f está unívocamente determinada salvo suma de una constante.

DEMOSTRACIÓN: La equivalencia entre 1) y 2) se sigue fácilmente de la equivalencia

$$\int_{\alpha} \omega = \int_{\beta} \omega \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\alpha \cup -\beta} \omega = 0.$$

Notemos que todo arco cerrado se puede expresar en la forma $\alpha \cup -\beta$, para dos arcos α y β con los mismos extremos.

3) \Rightarrow 2) es la consecuencia de la regla de Barrow que hemos señalado antes del enunciado. La única parte no trivial es 1) \Rightarrow 3). No perdemos generalidad si suponemos que V es conexa, pues en caso contrario podemos construir una f para cada una de sus componentes conexas y todas ellas determinan una función en V que cumple lo requerido. Fijemos $p_0 \in V$ y, para cada $p \in V$, definimos $f(p) = \int_{\alpha} \omega$, donde α es cualquier arco regular a trozos que una p_0 con p . Por 1) tenemos que la definición no depende de la elección de α . Vamos a probar que f cumple lo requerido.

Dado $p \in V$, tomemos una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ alrededor de p tal que $x(p) = 0$ y \tilde{U} sea convexo. Sea $X = x^{-1}$ la parametrización de U asociada a x . Pongamos que $\omega|_U = F_1 dx^1 + \cdots + F_n dx^n$. Sea α un arco regular a trozos que una p_0 con p y sea $K = \int_{\alpha} \omega$. Si $q \in U$ y $x(q) = a$, tenemos que el arco $\beta_a : [0, 1] \rightarrow U$ dado por $\beta_a(t) = X(ta)$ es regular y une p con q . Por lo tanto

$$f(q) = \int_{\alpha \cup \beta_a} \omega = K + \int_{\beta_a} \omega.$$

La función f será diferenciable en U si y sólo si $X \circ f$ es diferenciable en \tilde{U} , pero

$$f(X(x)) = K + \int_{\beta_x} \sum_i F_i dx^i = K + \sum_i \int_0^1 \tilde{F}_i(tx) x_i dt,$$

donde $\tilde{F}_i = X \circ F_i$. Es claro entonces que $X \circ f$ es diferenciable, así como que

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|_p &= \left. \frac{\partial (X \circ f)}{\partial x_k} \right|_0 = \sum_i \int_0^1 \left(\sum_j \left. \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial x_j} \right|_0 \cdot 0 + \tilde{F}_i(0) \left. \frac{dx^i}{dx_k} \right|_0 \right) dt \\ &= \int_0^1 F_k(p) dt = F_k(p). \end{aligned}$$

Esto implica a su vez que $df|_U = \omega$. La unicidad de f se debe a que si $df = 0$ (en una variedad conexa) entonces f es constante. En efecto, en general (sin suponer la conexión) lo que podemos afirmar es que f es constante en un entorno de cada punto p , pues si $x : U \rightarrow \tilde{U}$ es una carta alrededor de p con \tilde{U} conexo, tenemos que las derivadas parciales de $x^{-1} \circ f$ son nulas en \tilde{U} , luego $x^{-1} \circ f$ es constante (por [An 5.33]), luego f es constante en U . Y, finalmente, es fácil ver que una función localmente constante en un espacio conexo es constante. ■

La integral curvilínea que acabamos de introducir tiene gran importancia en la física, pero no en términos de formas diferenciales, sino en términos de campos vectoriales. Para sustituir las formas por campos necesitamos considerar una variedad semirriemanniana y aplicar la dualidad que hemos desarrollado en el capítulo anterior:

Definición 5.5 Sea $\alpha : [a, b] \rightarrow V$ un arco regular en una variedad semirriemanniana y $X \in \mathfrak{X}(V)$, definimos la *circulación* de X sobre α como

$$\int_{\alpha} \flat X = \int_{[a,b]} \alpha^*(\flat X) = \int_a^b \langle X_{\alpha(t)}, \alpha'(t) \rangle dt.$$

Nota En el caso de que V sea una variedad de Riemann podemos descomponer unívocamente

$$X_{\alpha(t)} = f(t)U(t) + N(t),$$

donde $U(t) = \alpha'(t)/\|\alpha'(t)\|$ es el vector unitario tangente a α (en el sentido de avance) y $N_t \perp \alpha'(t)$, con lo que

$$\int_{\alpha} \flat X = \int_a^b \frac{f(t)}{\|\alpha'(t)\|} \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle dt = \int_a^b f(t) \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b f(t) ds,$$

donde $ds = \|\alpha'(t)\| dt$ es el elemento de longitud de α . Así pues, la circulación de un campo vectorial X sobre un arco α no es más que la integral sobre α (respecto de su elemento de longitud) de la componente tangencial de $X_{\alpha(t)}$. ■

Si la imagen de α está contenida en el dominio de una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ y

$$X|_U = F^1 \partial_{x_1} + \dots + F^n \partial_{x_n},$$

entonces

$$\int_{\alpha} \flat X = \int_a^b \sum_{ij} g_{ij}(\alpha(t)) F^i(\alpha(t)) dx^j,$$

donde hay que entender que $x^j(t) = x^j(\alpha(t))$ y que $dx^j = \frac{dx^j}{dt} dt$.

En este contexto local es útil representar el elemento de circulación (es decir, la forma diferencial $\flat X|_U$) como

$$\vec{F} \cdot d\vec{x} = \sum_{ij} g_{ij} F^i dx^j,$$

donde el miembro izquierdo indica que el miembro derecho es “formalmente” el producto escalar de los “vectores” $\vec{F} = (F^1, \dots, F^n)$ y $d\vec{x} = (dx^1, \dots, dx^n)$.

En particular, cuando $V = \mathbb{R}^n$, la expresión de la circulación en coordenadas cartesianas es

$$\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{\alpha} F^1 dx^1 + \cdots + F^n dx^n.$$

Puesto que la circulación de un campo vectorial no es más que la integral curvilínea de una forma diferencial, todos los resultados que hemos probado para la integral curvilínea son válidos para la circulación de un campo vectorial. Observemos que la condición $X^* = df$ equivale a $X = \nabla f$, por lo que la regla de Barrow 5.2 es en este caso:

$$\int_{\alpha} \flat \nabla f = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)).$$

Diremos que un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(V)$ es *conservativo* si $\flat X$ cumple cualquiera de las condiciones equivalentes del teorema 5.4, es decir, si su circulación sobre un arco depende únicamente de sus extremos, lo cual equivale a que $X = \nabla P$, para una cierta función $P \in C^{\infty}(V)$ unívocamente determinada salvo una constante, a la que llamaremos *función potencial* de X .

Nota Conviene observar que podemos definir la integral curvilínea de 1-formas¹ $\omega \in \Lambda^1(V)_{\alpha}$ y, por consiguiente, la circulación de campos $X \in \mathfrak{X}(V)_{\alpha}$. En efecto, basta tomar como definición:

$$\int_{\alpha} \omega = \int_a^b \omega_t(\alpha'(t)) dt, \quad \text{con lo que} \quad \int_{\alpha} \flat X = \int_a^b \langle X_t, \alpha'(t) \rangle dt,$$

y así si $\omega \in \Lambda^1(V)$ se cumple que $\int_{\alpha} \omega = \int_{\alpha} (\alpha \circ \omega)$, y si $X \in \mathfrak{X}(V)$, también $\int_{\alpha} \flat X = \int_{\alpha} \flat(\alpha \circ X)$. ■

La interpretación más importante de la circulación de un campo a lo largo de una trayectoria proviene de la física, concretamente del concepto de “trabajo” que introdujimos en la sección [IC 5.4] y que vamos a presentar de nuevo en términos de la circulación de un campo:

Ejemplo: Trabajo y energía Supongamos que $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ indica la posición en cada instante t de un móvil de masa m , de modo que en cada instante t actúa sobre él una fuerza $F(t)$ (sin perjuicio de que sobre él puedan actuar además otras fuerzas). De este modo, $F \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)_{\alpha}$ y la circulación W de F sobre α recibe el nombre de *trabajo* realizado por F sobre el móvil.

Para entender el significado físico del trabajo observamos en primer lugar que si sobre un móvil actúan varias fuerzas, el trabajo realizado por la suma de todas ellas es la suma de los trabajos realizados por cada una de ellas. Llamemos entonces F a la fuerza resultante que actúa sobre el móvil en cada instante t (es decir, la suma de todas las fuerzas que actúan sobre él).

En segundo lugar recordamos que la circulación depende únicamente de la componente tangencial del campo F , que será de la forma $F = maU$, donde

¹En el caso de arcos, abreviamos $\Lambda^1(V)_{\alpha} = \Lambda^1([a, b], V)_{\alpha}$, e igualmente para los demás espacios tensoriales.

$U(t) = \alpha'(t)/\|\alpha'(t)\|$ es el vector tangente unitario de α y a es la derivada del módulo v de la velocidad del móvil. Así

$$dW|_t = \vec{F} \cdot d\vec{x} = ma ds = ma\|\alpha'(t)\| dt = mav dt = mv dv.$$

Nos gustaría integrar ambos miembros, pero para ello necesitaríamos considerar a v como variable independiente, lo que equivale a tomarla como parámetro de α y esto no siempre será posible. Pese a ello, el resultado que se obtiene de integrar formalmente la igualdad anterior es correcto. Para probarlo definimos

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2.$$

Entonces

$$\frac{dE_c}{dt} = mva = \frac{dW(t)}{dt},$$

donde $W(t)$ representa a la circulación de F en el intervalo $[a, t]$. De aquí se sigue que

$$W = W(b) = \Delta E_c = E_c(b) - E_c(a).$$

La magnitud E_c recibe el nombre de *energía cinética* del móvil, y lo que hemos probado es que el trabajo total ejercido sobre un móvil es igual al incremento de la energía cinética que éste experimenta.

Supongamos ahora que $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto y que $\alpha : [a, b] \rightarrow U$ es la trayectoria de un móvil sometido a dos fuerzas: una arbitraria $F \in \mathfrak{X}(U)_\alpha$ y otra determinada por un campo de fuerzas conservativo determinado por una función potencial $-E_p \in C^\infty(U)$ (notemos que estamos llamando E_p a la función potencial cambiada de signo y nos referiremos a $E_p(x)$ como la *energía potencial* del campo en el punto x). Entonces el campo conservativo es $-\nabla E_p$ y el trabajo que realiza entre $t = a$ y $t = b$ es

$$-\Delta E_p = -(E_p(b) - E_p(a)).$$

Si llamamos W al trabajo realizado por la fuerza F (entre $t = a$ y $t = b$), el trabajo total es $W - \Delta E_p = \Delta E_c$, luego

$$W = \Delta E_p + \Delta E_c = \Delta E,$$

donde $E(t) = E_c(t) + E_p(\alpha(t))$ es la *energía total* o *energía mecánica* del móvil en el instante t .

Vemos así que el trabajo realizado por la fuerza F es igual a la variación de la energía total del cuerpo.

En realidad podemos concluir algo ligeramente más general: si sobre un cuerpo que se mueve por la trayectoria α actúan fuerzas conservativas G_1, \dots, G_r y fuerzas no (necesariamente conservativas) F_1, \dots, F_s , entonces todo el razonamiento anterior es aplicable a la suma $F = F_1 + \dots + F_s$ de las fuerzas no

conservativas y a la suma $G = G_1 + \cdots + G_r$ de los campos de fuerza conservativos, que es claramente un campo conservativo que admite como energía potencial la suma de las energías potenciales de los campos considerados.

La conclusión es entonces que el trabajo realizado por la suma de las fuerzas no (necesariamente) conservativas que actúan sobre un móvil es igual a la variación de su energía mecánica (definida como la suma de su energía cinética más la energía potencial de todas las fuerzas conservativas). En particular, si sobre un cuerpo sólo actúan fuerzas conservativas, su energía mecánica permanece constante.

También conviene observar que la energía potencial respecto de un campo conservativo está definida salvo una constante, pero como en el principio de conservación de la energía mecánica que acabamos de demostrar sólo interviene el incremento de energía potencial, el valor que elijamos para esta constante es irrelevante. ■

5.2 El flujo de un campo vectorial

En [An 8.2] definimos el flujo de un campo vectorial a través de una hipersuperficie en \mathbb{R}^n , y explicamos su interpretación en términos de la dinámica de fluidos sin justificarla debidamente. En este capítulo estaremos en condiciones de justificar dicha interpretación, pero de momento necesitamos algunos resultados previos.

Como consecuencia del teorema 4.36 hemos visto que toda $n-1$ -forma en una variedad semiriemanniana orientada V puede expresarse en la forma $i_X(dm)$, para cierto campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(V)$. El teorema siguiente nos permitirá interpretar esta representación:

Teorema 5.6 *Sea V una variedad de semiriemanniana orientada, sea W una hipersuperficie orientada, sea $N \in \mathfrak{X}_V(W)^\perp$ la determinación del vector normal unitario a W que induce su orientación² y sean $dm, d\sigma$ los elementos de volumen orientados de V y W , respectivamente. Entonces, para todo campo $X \in \mathfrak{X}(V)$ se cumple que*

$$i_X(dm)|_W = \langle X, N \rangle d\sigma.$$

DEMOSTRACIÓN: Descomponemos

$$X|_W = \tan(X|_W) + \text{nor}(X|_W).$$

Si $p \in W$, como $T_p(W)^\perp$ tiene dimensión 1, tiene que ser $\text{nor}(X|_W)_p = f(p)N_p$, para cierta función $f : W \rightarrow \mathbb{R}$. Concretamente, multiplicando por N_p obtenemos que $f(p) = \langle X_p, N_p \rangle$, luego en definitiva

$$X|_W = T + \langle X|_W, N \rangle N, \quad \text{con } T \in \mathfrak{X}(W).$$

²Se trata del tensor dado por 4.17, determinado por que $N_p \in T_p(W)^\perp$, $\|N_p\| = 1$ y si lo anteponeamos a una base orientada de $T_p(W)$ obtenemos una base orientada de $T_p(V)$.

Así pues, si $p \in W$ y e_1, \dots, e_{n-1} es una base ortonormal de $T_p(W)$, tenemos que

$$\begin{aligned} i_X(dm)_p(e_1, \dots, e_{n-1}) &= dm|_p(X_p, e_1, \dots, e_{n-1}) \\ &= dm|_p(T_p, e_1, \dots, e_{n-1}) + \langle X_p, N_p \rangle dm|_p(N_p, e_1, \dots, e_{n-1}) \\ &= \langle X_p, N_p \rangle = \langle X_p, N_p \rangle d\sigma|_p(e_1, \dots, e_{n-1}). \end{aligned}$$

Aquí hemos usado que $dm|_p(X_p, e_1, \dots, e_{n-1}) = 0$ porque sus n argumentos están en $T_p(W)$, luego son linealmente dependientes. Por otra parte, $dm|_p, d\sigma|_p$ toman el valor 1 sobre las bases ortonormales orientadas. ■

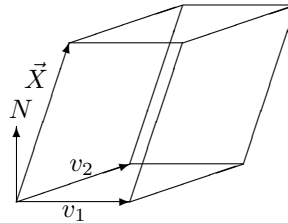
Definición 5.7 Sea V una variedad semirriemanniana orientada, sea dm su elemento de volumen orientado y sea $X \in \mathfrak{X}(V)$ un campo vectorial. El *elemento de flujo* de X es la $n-1$ -forma $i_X(dm)$. Si W es una hipersuperficie orientada y N es la determinación del vector normal unitario a W que induce su orientación, el *flujo* de X a través de W es la integral

$$\Phi_W(X) = \int_W i_X(dm)|_W = \int_W \langle X, N \rangle d\sigma.$$

Notemos que el elemento de flujo puede no ser integrable (y entonces el flujo no está definido). Lo será, por ejemplo, si la subvariedad W es compacta.

Recordamos ahora la interpretación del flujo que presentamos tras [An 8.2] en el caso en que X es el campo de velocidades de un fluido. Consideremos un punto $p \in W$ y un paralelepípedo $P(v_1, \dots, v_{n-1})$ en $T_p(W)$ lo suficientemente pequeño como para que pueda identificarse con una porción de W . Suponemos también que el campo X en los puntos de dicha región es indistinguible de X_p .

Entonces, el fluido que en un instante se encuentra en el paralelepípedo, al cabo de una unidad de tiempo se encontrará en el paralelepípedo que resulta de trasladarlo una distancia X_p , luego el volumen de fluido que ha atravesado el paralelepípedo en ese tiempo es el volumen del paralelepípedo $P(X_p, v_1, \dots, v_{n-1})$. Lo podemos calcular como la superficie de su base por su altura, que es $\langle X_p, N_p \rangle$ (donde el signo será positivo o negativo según que el fluido avance en el sentido marcado por N o en el contrario). El resultado es



$$dm_p(X_p, v_1, \dots, v_{n-1}) = \langle X_p, N_p \rangle d\sigma_p(v_1, \dots, v_{n-1}),$$

que es precisamente el elemento de flujo (y esto muestra el contenido geométrico del teorema 5.6). Esta interpretación del elemento de flujo nos lleva a la siguiente interpretación del flujo:

En las condiciones de la definición anterior, si X es el campo de velocidades de un fluido, el flujo $\Phi_W(X)$ es el volumen neto de fluido que atraviesa la variedad W por unidad de tiempo, entendiendo que el volumen que la atraviesa en el sentido de N cuenta positivamente y el que la atraviesa en sentido inverso cuenta negativamente.

Por ejemplo, si W es la frontera de un abierto U y N apunta hacia afuera de U , entonces el flujo es la diferencia entre el volumen de fluido que entra y el que sale de U por unidad de tiempo.

Ejemplo Para entender adecuadamente el enunciado anterior hay que tener en cuenta que el volumen de un fluido puede cambiar con el tiempo. Consideremos el caso más simple, determinado por el campo $X = x \partial_x$ en \mathbb{R}^3 y la subvariedad $W = \{1\} \times B_1((0, 0))$. Resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = 0, \quad x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0$$

resulta que el grupo uniparamétrico generado por X es

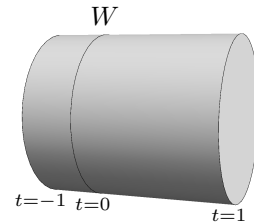
$$\Phi(t, x_0, y_0, z_0) = (x_0 e^t, y_0, z_0).$$

Así, las partículas de fluido que en el instante $t = -1$ se encuentran en el círculo $\{e^{-1}\} \times B_1(0, 0)$, al cabo de un segundo están en W , luego el fluido que atraviesa W en un segundo es un cilindro de altura $1 - e^{-1}$, cuyo volumen es $\pi(1 - e^{-1}) = 1.99 \text{ m}^3$. Sin embargo, tras cruzar W , pasan a ocupar un cilindro de altura $e^1 - 1$, luego su volumen es $\pi(e - 1) = 5.4 \text{ m}^3$. Lo que sucede es que el fluido se mueve cada vez más rápidamente, por lo que su volumen está en expansión constante.

Pero entonces ¿A qué nos referimos al hablar del volumen que ha atravesado W en ese segundo? En estos términos la pregunta no tiene sentido, pero en general vemos que, en h segundos cruzan W un total de $\pi(1 - e^{-h}) \text{ m}^3$ de fluido, que después del cruce ocupan $Q(h) = \pi(e^h - 1) \text{ m}^3$.

Por consiguiente, el flujo medio por segundo es de $\pi e^{-h}/h \text{ m}^3/\text{s}$ antes del cruce, que se convierten en $\pi e^h/h \text{ m}^3/\text{s}$ después del cruce. Por lo tanto, el flujo instantáneo volumen por segundo es

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi(e^h - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi(1 - e^{-h})}{h} = \left. \frac{dQ}{dh} \right|_0 = \pi \text{ m}^3/\text{s}.$$



Así calculamos el volumen que realmente está cruzando W en cada instante, sin tener en cuenta la expansión que se está produciendo antes y después del cruce, y éste es precisamente el valor que proporciona el flujo: puesto que $N = \partial_x$, tenemos que

$$\int_W \langle X, N \rangle d\sigma = \int_W d\sigma = \pi \text{ m}^3/\text{s}.$$

En general, cuando hablamos del volumen que atraviesa una superficie por unidad de tiempo nos referimos a la derivada respecto del tiempo del volumen que ha atravesado (o atravesará) la superficie en h unidades de tiempo. ■

En un apéndice al final de este capítulo demostramos con rigor la interpretación hidrodinámica del flujo. No obstante, en la práctica nunca necesitaremos este hecho, sino que esta interpretación simplemente nos ayudará a formarnos una imagen geométrica de los resultados en los que interviene el concepto de flujo.

La expresión en coordenadas del elemento de flujo es muy simple:

Teorema 5.8 Sea V una variedad semirriemanniana orientada, consideremos una carta orientada $x : U \rightarrow \tilde{U}$ y sea G la matriz de coordenadas del tensor métrico. Sea $X \in \mathfrak{X}(V)$, con expresión en coordenadas $X|_U = \sum_i F^i \partial_{x_i}$. Entonces el elemento de flujo de X es

$$i_X(dm)|_U = \sum_i (-1)^{i-1} F^i \sqrt{|\det G|} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $\Delta = \sqrt{|\det G|}$. El elemento de volumen es $dm = \Delta dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$. Basta probar por inducción sobre m que

$$i_X(\Delta dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m) = \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} F^i \Delta dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^m.$$

Para ello, a su vez, basta tener en cuenta que i_X es una antiderivación y que $i_X(dx^i) = dx^i(X) = F^i$. ■

Observemos que este teorema se aplica globalmente a \mathbb{R}^n con las coordenadas cartesianas y $\Delta = 1$.

5.3 El teorema de Stokes

El teorema 5.2 generaliza la regla de Barrow al contexto de la integral curvilínea en una variedad diferencial. Ahora vamos a generalizarla a dimensiones superiores. Observemos que para funciones de una variable puede enunciarse así:

$$\int_{[a,b]} df = f(b) - f(a),$$

yo lo que viene a decir es que la integral en la variedad diferencial $[a, b]$ de una forma diferencial de tipo df se reduce a un cálculo que depende de la restricción de la función f a $\partial[a, b] = \{a, b\}$.

Empezaremos generalizando este hecho al caso en que el intervalo $[a, b]$ se sustituye por un cubo en \mathbb{R}^n y a continuación pasaremos al caso de una variedad diferencial arbitraria.

Definición 5.9 Un n -cubo es un conjunto de la forma

$$C = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n],$$

donde $a_i < b_i$ son números reales. La frontera (topológica) de C en \mathbb{R}^n está formada por la unión de los $2n$ conjuntos

$$\begin{aligned} C_i^0 &= [a_1, b_1] \times \cdots \times \{a_i\} \times \cdots \times [a_n, b_n], \\ C_i^1 &= [a_1, b_1] \times \cdots \times \{b_i\} \times \cdots \times [a_n, b_n], \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

a los que llamaremos *caras* del cubo.

Una forma diferencial en un cubo C es simplemente una forma diferencial definida en un abierto de \mathbb{R}^n que contenga a C . Consideraremos a dicho abierto como variedad orientada, tomando a la identidad como carta orientada (con lo que la base canónica de \mathbb{R}^n está orientada). En particular tenemos definida la integral de una n -forma sobre un n -cubo.

Si ω es una $n - 1$ -forma en un cubo C , donde $n > 1$, vamos a definir la integral de ω sobre ∂C . Para ello comenzamos definiendo la integral sobre cada cara. Consideramos primero una forma de tipo

$$\omega(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n.$$

La integral de ω sobre la cara C_j^k (para $j = 1, \dots, n$ y $k = 0, 1$) se define como igual a 0 si $j \neq i$ y en caso contrario mediante

$$\begin{aligned} \int_{C_i^0} \omega &= \int_{\tilde{C}_i} f(x_1, \dots, a_i, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n, \\ \int_{C_i^1} \omega &= \int_{\tilde{C}_i} f(x_1, \dots, b_i, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n, \end{aligned}$$

donde $\tilde{C}_i = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \dots \times [a_n, b_n]$.

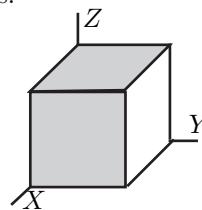
Una $n - 1$ -forma arbitraria se descompone de forma única en suma de n formas del tipo anterior (en cada una de las cuales falta un dx^i distinto). Definimos su integral sobre la cara C_i^k como la suma de las integrales de estas n formas. Así tenemos definida $\int_{C_i^k} \omega$ para cualquier $n - 1$ -forma sobre C . La integral es obviamente lineal en ω . Finalmente definimos

$$\int_{\partial C} \omega = \sum_{i=1}^n (-1)^i \left(\int_{C_i^0} \omega - \int_{C_i^1} \omega \right).$$

Conviene entender por qué es ésta la definición correcta de integral sobre ∂C . Pensemos por ejemplo en un cubo tridimensional. Según la fórmula las integrales sobre caras opuestas se suman con signos opuestos.

Concretamente tienen signo positivo las dos que en la figura aparecen sombreadas más la situada sobre el plano XZ , que no se ve. Nuestra intención es tratar al cubo como si fuese una variedad con frontera. No lo es a causa de que la frontera tiene aristas donde no es diferenciable, pero a efectos de la integración esto no va a afectar porque las aristas tienen área nula. La orientación que debemos imponer a la frontera en analogía con las variedades es la inducida por el vector normal que apunta hacia fuera del cubo. Supongamos que queremos integrar una forma de tipo $f(x, y, z) dx \wedge dz$. Es claro que sólo van a influir las caras con y constante, pues dx es nula en las caras con x constante y dz es nula en las caras con z constante.

Para integrar la forma sobre C_y^1 (la cara que en la figura queda a la derecha) consideramos la carta $X(x, z) = (x, y_0, z)$. La base asociada en el plano tangente de cada punto es $X_x = (1, 0, 0)$, $X_z = (0, 0, 1)$, y por consiguiente el producto



vectorial $X_x \times X_z = (0, -1, 0)$ completa la base hasta una base ordenada de \mathbb{R}^3 , pero este vector apunta hacia dentro del cubo, luego la carta es negativa y la integral es

$$\int_{C_y^1} f dx \wedge dz = - \int_C f(x, y_0, z) dx dz,$$

y el signo corresponde con el que hemos establecido en la definición. En cambio, si la integral es sobre la cara opuesta, ahora el vector $(0, -1, 0)$ que completa ordenadamente la base sí que apunta hacia fuera del cubo, luego la carta es positiva y no hay que cambiar el signo, tal y como indica la definición.

Mediante este tipo de razonamientos es posible justificar que la definición que hemos dado hace que la integral sobre ∂C sea la correcta respecto a la orientación de las caras inducida por la orientación usual del interior del cubo, es decir, la que hace positiva una base de una cara si al añadirle *como primer vector* uno que apunte hacia fuera del cubo obtenemos una base positiva de \mathbb{R}^n . De todos modos esto no es muy importante, pues sólo vamos a usar las integrales sobre cubos como un paso previo a la prueba del teorema de Stokes sobre variedades orientadas.

Ejercicio: Representar gráficamente la orientación de la frontera de un cuadrado según la definición que hemos dado.

Si definimos la integral de una 0-forma sobre la frontera de un 1-cubo (es decir, de una función f sobre los extremos de un intervalo $C = [a, b]$), como

$$\int_{\partial C} f = f(b) - f(a),$$

el teorema siguiente tiene sentido para $n = 1$ y entonces no es más que la regla de Barrow:

Teorema 5.10 (Teorema de Stokes para un cubo) *Sea C un n -cubo y ω una $n - 1$ -forma diferencial en C . Entonces*

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega.$$

DEMOSTRACIÓN: Según acabamos de comentar, el caso $n = 1$ es simplemente la regla de Barrow. Supongamos, pues $n > 1$. Por la linealidad de la integral y de la diferencial es suficiente probar el teorema cuando la forma es

$$\omega(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Por definición la integral de ω es nula sobre todas las caras de C excepto C_i^k , para $k = 0, 1$. Así pues, $\int_{\partial C} \omega$ es igual a

$$(-1)^i \int_{Q_i} (f(x_1, \dots, a_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, b_i, \dots, x_n)) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n,$$

donde Q_i es el cubo que resulta de eliminar el i -ésimo intervalo de C .

Por otro lado,

$$\begin{aligned} d\omega &= df \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \\ &= (-1)^{i-1} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\int_C d\omega = (-1)^{i-1} \int_C \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \cdots dx_n.$$

Por el teorema de Fubini podemos integrar primero respecto a dx_i , para lo cual aplicamos la regla de Barrow y queda

$$(-1)^{i-1} \int_{Q_i} (f(x_1, \dots, b_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, a_i, \dots, x_n)) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n,$$

que coincide con la integral sobre la frontera. \blacksquare

Teorema 5.11 (Teorema de Stokes generalizado) *Sea V una variedad diferencial orientada de dimensión $n > 1$ y ω una $n - 1$ -forma en V de soporte compacto. Entonces*

$$\int_V d\omega = \int_{\partial V} \omega.$$

DEMOSTRACIÓN: Vamos a definir para cada punto $p \in V$ un entorno V_p en V . Si p es un punto interior tomamos una carta orientada $x : U \rightarrow \tilde{U}$ alrededor de p cuya imagen sea una bola abierta en \mathbb{R}^n . Tomamos un cubo $C_p \subset \tilde{U}$ que contenga en su interior a $x(p)$ y llamamos V_p a la antiimagen por x del interior de C_p (que obviamente es un entorno de p en V).

Si $p \in \partial V$ tomamos una carta orientada $x : U \rightarrow \tilde{U}$ de modo que

$$\tilde{U} =]-2, 0] \times]-2, 2[^{n-1}$$

$x(p) = (0, \dots, 0)$ y los puntos de $\partial V \cap U$ sean exactamente los que cumplan $x_1 = 0$. Así x induce una carta orientada en ∂V .

Llamamos $C_p = [-1, 0] \times [-1, 1]^{n-1}$, que es un entorno de 0 en \tilde{U} y llamamos V_p a la antiimagen por x del interior de C_p , es decir, de $] -1, 0] \times] -1, 1]^{n-1}$, que es un entorno de p en V .

Los abiertos V_p cubren el soporte de ω , que por hipótesis es compacto, luego existe un subcubrimiento finito formado por abiertos V_{p_1}, \dots, V_{p_r} . Tomemos una partición de la unidad h_1, \dots, h_r (de la unión de estos abiertos) subordinada al cubrimiento. Puesto que cada h_i se anula fuera de V_{p_i} , podemos considerar que $h_i \in C^\infty(V)$, aunque $h_1 + \dots + h_r = 1$ sólo es cierto sobre los abiertos V_{p_i} , y en particular sobre el soporte de ω .

Sea $\omega_i = h_i \omega$, que claramente es una $n - 1$ -forma con soporte compacto contenido en V_{p_i} . El complementario del soporte de ω_i es un abierto donde ω_i

se anula, luego lo mismo le ocurre a $d\omega_i$, luego $d\omega_i$ también tiene el soporte contenido en V_{p_i} . Además $\omega = \omega_1 + \cdots + \omega_r$, luego

$$\int_V d\omega = \sum_{i=1}^r \int_V d\omega_i = \sum_{i=1}^r \int_{V_{p_i}} d\omega_i, \quad \int_{\partial V} \omega = \sum_{i=1}^r \int_{\partial V} \omega_i = \sum_{i=1}^r \int_{\partial V_{p_i}} \omega_i.$$

Por consiguiente basta probar que

$$\int_{V_{p_i}} d\omega_i = \int_{\partial V_{p_i}} \omega_i,$$

con lo que hemos reducido el problema al caso local en que el soporte de la forma está contenido en el dominio de una carta. Por simplificar la notación eliminaremos los subíndices, que son ya innecesarios. Hemos de probar que

$$\int_{V_p} d\omega = \int_{\partial V_p} \omega|_{\partial V_p}, \quad (5.1)$$

donde ω es una $n-1$ -forma con soporte compacto contenido en V_p .

Tenemos que V_p está contenido en el dominio U de la carta x , y ∂V_p está contenido en el dominio de la carta (orientada) y de ∂U que resulta de eliminar la primera coordenada, que en ∂U es constante igual a 0. Precisamente por esto $dx_1|_{\partial U} = 0$.

Si p es un punto interior de V , entonces el miembro derecho de (5.1) es 0 (pues $\partial V_p = \emptyset$). Por otra parte, el soporte de $x^{-1*}(\omega)$ está contenido en el interior del cubo C_p , luego $x^{-1*}(\omega)$ es nula en ∂C_p , luego el teorema de cambio de variable y el teorema de Stokes para un cubo nos dan que

$$\int_{V_p} d\omega = \int_{C_p} dx^{-1*}(\omega) = \int_{\partial C_p} x^{-1*}(\omega) = 0.$$

Esto prueba (5.1) en este caso, luego a partir de aquí suponemos que $p \in \partial V$. Por linealidad podemos suponer además que

$$\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

con lo que

$$x^{-1*}(\omega) = (x^{-1} \circ f) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

donde ahora las funciones coordenadas son las de \tilde{U}_p . Aplicamos igualmente el teorema de cambio de variable y el teorema de Stokes para un cubo al miembro izquierdo de (5.1), pero además observamos que $x^{-1*}(\omega)$ tiene el soporte contenido en $x[V_p] =]-1, 0] \times]-1, 1[^{n-1}$, lo que significa que $x^{-1*}(\omega)$ es nula sobre todas las caras de C_p salvo quizá $(C_p)_1^1$. Por consiguiente:

$$\int_{V_p} d\omega = \int_{C_p} dx^{-1*}(\omega) = \int_{\partial C_p} x^{-1*}(\omega) = \int_{(C_p)_1^1} x^{-1*}(\omega).$$

Por otra parte, la carta y transforma ∂V_p en la cara $(C_p)_1^1$ del cubo, luego, si $i = 1$,

$$\int_{\partial V_p} \omega = \int_{(C_p)_1^1} f(x^{-1}(0, x_2, \dots, x_n)) dx_2 \cdots dx_n = \int_{(C_p)_1^1} x^{-1*}(\omega),$$

(la última igualdad por definición de integral sobre una cara). Pero esto sigue siendo cierto si $i \neq 1$, ya que en tal caso ω es nula en ∂V_p (porque $dx_1|_{U_p} = 0$) y el miembro derecho es nulo por definición. Esto termina la prueba de (5.1). ■

En particular, la integral de una forma $d\omega$ con soporte compacto en una variedad sin frontera es necesariamente nula.

5.4 Casos particulares del teorema de Stokes

La versión general del teorema de Stokes que hemos probado engloba muchas fórmulas clásicas y en esta sección presentamos algunas de ellas. Cada una está asociada a un operador diferencial:

5.4.1 La divergencia

Definición 5.12 Sea V una variedad diferencial y $\Omega \in \Lambda^n(V)$ un elemento de volumen orientado. La *divergencia* respecto de Ω de un campo $X \in \mathfrak{X}(V)$ es la única función $\operatorname{div} X \in C^\infty(V)$ que cumple $\mathcal{L}_X \Omega = \operatorname{div} X \Omega$.

Si V es una variedad semiriemanniana orientada, cuando hablemos de la divergencia de un campo vectorial se entenderá que es la definida respecto de su elemento de volumen orientado dm . No obstante, conviene observar que en realidad la divergencia no depende de la orientación, pues en un entorno de cada punto sólo hay dos orientaciones opuestas, y si cambiamos Ω por $-\Omega$ en la ecuación que define la divergencia, ésta queda inalterada.

Enseguida demostraremos que la divergencia definida en [An 8.3] es un caso particular de la que acabamos de definir, pero antes veremos que el teorema de Stokes incluye el teorema de la divergencia como caso particular. Para ello nos basaremos en la fórmula de Cartan (3.13):

$$\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X.$$

Teniendo en cuenta que $d(dm) = 0$ (porque $\Lambda^{n+1}(V) = 0$), resulta que

$$\operatorname{div} X dm = d(i_X(dm)),$$

es decir, que $\operatorname{div} X dm$ es la diferencial del elemento de flujo de X , por lo que podemos aplicar el teorema de Stokes:

Teorema 5.13 (Teorema de la divergencia) *Sea V una variedad semirriemanniana orientada, sea N la determinación del vector normal unitario en ∂V que induce la orientación de ∂V y consideremos un campo $X \in \mathfrak{X}(V)$ con soporte compacto. Entonces*

$$\int_V \operatorname{div} X \, dm = \int_{\partial V} \langle X, N \rangle \, d\sigma,$$

donde dm y $d\sigma$ son los elementos de volumen orientados de V y ∂V , respectivamente.

Observemos que, de acuerdo con la forma en que hemos definido la orientación de la frontera de una variedad orientable, el vector N es el vector normal que apunta hacia fuera de V .

Mostramos ahora la expresión en coordenadas de la divergencia:

Teorema 5.14 *Sea V una variedad semirriemanniana, consideremos una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ y sea G la matriz del producto escalar en dicha carta. Consideremos un campo $X \in \mathfrak{X}(V)$, con expresión en coordenadas $X|_U = \sum_i F^i \partial_{x_i}$. Entonces*

$$\operatorname{div} X|_U = \frac{1}{\sqrt{|\det G|}} \sum_i \frac{\partial(\sqrt{|\det G|} F^i)}{\partial x_i}.$$

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $\Delta = \sqrt{|\det G|}$. Fijamos una orientación en V (lo cual no afecta a la divergencia) respecto a la cual la carta esté orientada. Por el teorema 5.8 tenemos que

$$i_X(dm)|_U = \sum_i (-1)^{i-1} \Delta F^i dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

luego

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X \, dm &= d(i_X(dm)) = \sum_i (-1)^{i-1} d(\Delta F^i) \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \sum_i (-1)^{i-1} \frac{\partial(\Delta F^i)}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \sum_i \frac{\partial(\Delta F^i)}{\partial x_i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \sum_i \frac{1}{\Delta} \frac{\partial(\Delta F^i)}{\partial x_i} \Delta dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \\ &= \frac{1}{\Delta} \sum_i \frac{\partial(\Delta F^i)}{\partial x_i} dm|_U. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

En particular, para el caso en que V es un abierto en \mathbb{R}^n , la expresión en coordenadas cartesianas se reduce a

$$\operatorname{div} X = \sum_i \frac{\partial F^i}{\partial x_i},$$

que es la definición [An 8.3].

Hemos definido la divergencia implícitamente, a través de una ecuación, pero el operador de Hodge nos da una expresión explícita:

Teorema 5.15 Si V es una variedad semirriemanniana orientada de índice ν y $X \in \mathfrak{X}(V)$, entonces

$$\operatorname{div} X = (-1)^\nu * d * \flat X.$$

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 4.36 tenemos que $\operatorname{div} X \, dm = d * \flat X$, luego $\operatorname{div} X * dm = * d * \flat X$ y ahora basta tener en cuenta que $*dm = (-1)^\nu$. ■

La divergencia en hidrodinámica Supongamos que \vec{v} es el campo de velocidades de un fluido en una variedad de Riemann V (no necesariamente estacionario, es decir, que puede depender del tiempo). Sea $\rho(t, p)$ la densidad del fluido en el punto p en el instante t .

Sea $p \in V$ y sea $B \subset V$ una subvariedad diferencial compacta de la misma dimensión que contenga a p en su interior (por ejemplo, la antiimagen por una carta de una bola cerrada). El teorema de la divergencia nos da que

$$\int_B \operatorname{div} \rho_t \vec{v}_t \, dm = \int_{\partial B} i_{\rho_t \vec{v}_t} (dm).$$

En el apéndice de este capítulo demostramos que la integral de la derecha (el flujo de $\rho_t \vec{v}_t$ sobre ∂B) es la masa neta de fluido que sale de B por unidad de tiempo en el instante t . Por otra parte, dado $\epsilon > 0$, podemos tomar un entorno U de p tal que todo $q \in U$ cumpla

$$|\operatorname{div} \rho_t \vec{v}_t(q) - \operatorname{div} \rho_t \vec{v}_t(p)| < \epsilon,$$

con lo que, si $B \subset U$,

$$(\operatorname{div} \rho_t \vec{v}_t(p) - \epsilon)m(B) \leq \int_B \operatorname{div} \rho_t \vec{v}_t \, dm \leq (\operatorname{div} \rho_t \vec{v}_t(p) + \epsilon)m(B),$$

y por consiguiente

$$\operatorname{div} \rho_t \vec{v}_t(p) = \lim_{B \rightarrow p} \frac{1}{m(B)} \int_{\partial B} i_{\rho_t \vec{v}_t} (dm),$$

donde el límite se interpreta como que el cociente dista de $\operatorname{div} \rho_t \vec{v}_t(p)$ menos de cualquier ϵ prefijado si B está contenido en un entorno de p suficientemente pequeño.

Por consiguiente, $\operatorname{div} \vec{v}_t$ representa la “divergencia” (la diferencia) entre la masa que sale y la masa que entra en un entorno de p por unidad de tiempo y de volumen, en el sentido de que, si consideramos un entorno B suficientemente pequeño y un incremento de tiempo Δt suficientemente pequeño, la diferencia entre la masa que sale y la que entra en B en el tiempo Δt partiendo del instante t es aproximadamente $m(B)\Delta t \operatorname{div} \vec{v}_t$, donde el error de la aproximación tiende a 0 cuando Δt tiende a 0 y B “tiende” a p .

Por otra parte, la variación de la masa de fluido contenida en B es

$$\frac{d}{dt} \int_B \rho \, dm = \int_B \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dm.$$

Sea

$$\psi_B(p) = \frac{1}{m(B)} \left(\int_B \frac{\partial \rho}{\partial t} dm + \int_B \operatorname{div} \rho \vec{v} dm \right).$$

Así, $\psi_B(p)m(B)$ es el aumento de la masa de fluido en B por unidad de tiempo menos la cantidad de masa que entra en B a través de ∂B por unidad de tiempo (sumar la que sale equivale a restar la que entra). Por consiguiente $\psi_B(p)$ es la cantidad de masa que se crea en B por unidad de tiempo y de volumen (la masa que aparece en B sin entrar por su frontera). Ahora, un argumento análogo al empleado anteriormente muestra que

$$\psi(p) = \lim_{B \rightarrow p} \psi_B(p) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_p + \operatorname{div} \rho \vec{v}(p), \quad (5.2)$$

luego $\psi(p)$ representa la cantidad de fluido que se crea alrededor de p por unidad de tiempo y de volumen. La ecuación

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} = \psi - \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (5.3)$$

se denomina *ecuación de continuidad de la hidrodinámica*, que ya discutimos en la sección [An 8.2], y expresa la conservación de la masa. La fórmula³ (5.5) nos da una expresión alternativa:

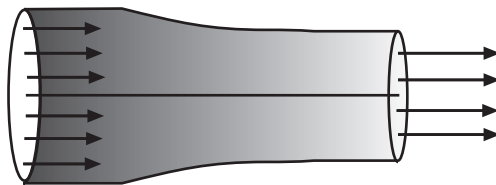
$$\psi = \langle \nabla \rho, \vec{v} \rangle + \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v},$$

donde $D\rho/Dt$ es la derivada total de la densidad, según la fórmula (3.7), en la que hemos sustituido $\vec{v}_t(\rho) = d\rho(\vec{v}_t) = \langle \nabla \rho, \vec{v} \rangle$.

Los puntos donde $\psi > 0$ se llaman *fuentes* (son puntos donde aparece fluido) y los puntos donde $\psi < 0$ se llaman *sumideros* (en los cuales desaparece fluido).

Para fluidos incompresibles (en los que $D\rho/Dt = 0$), la ecuación de continuidad se reduce a que $\psi = \rho \operatorname{div} \vec{v}$. Si el fluido es homogéneo con densidad $\rho = 1$, entonces la divergencia de \vec{v} en un punto indica la masa —o, equivalentemente, el volumen— de fluido que se crea o se destruye en dicho punto por unidad de masa y de volumen. Si además no hay fuentes ni sumideros, la ecuación de continuidad se reduce a $\operatorname{div} \vec{v} = 0$.

Ejemplo Supongamos que un fluido homogéneo entra en un tubo con velocidad constante v_0 y éste se estrecha (o se ensancha), de modo que su sección pasa de tener un área A_0 a tener un área A_1 . Vamos a calcular la velocidad de salida v_1 .



³Por conveniencia la demostramos en la sección siguiente, para agruparla con otras fórmulas relacionadas, pero la demostración se basa únicamente en la expresión para la divergencia que proporciona el teorema 5.15.

Para ello consideramos el fragmento de tubo V que aparece en la figura y aplicamos que, como $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, el flujo a través de su frontera debe ser nulo. La velocidad del fluido será tangente a la superficie del tubo, luego los únicos puntos de la frontera donde el flujo de \vec{v} será no nulo serán los puntos de las secciones de entrada y salida S_0 y S_1 . En la sección de entrada \vec{v} tiene la dirección opuesta al vector normal unitario \vec{n} que apunta hacia afuera de V , luego $\vec{v} \cdot \vec{n} = -v_0$, mientras que en la sección de salida es $\vec{v} \cdot \vec{n} = v_1$. Por consiguiente,

$$A_0 v_0 = \int_{S_0} v_0 d\sigma = \int_{S_1} v_1 d\sigma = A_1 v_1.$$

La relación entre las velocidades de entrada y salida es, pues,

$$v_1 = \frac{A_0}{A_1} v_0.$$

En particular, el fluido acelera cuando el tubo se estrecha. ■

Veamos algunos ejemplos más de aplicación del teorema de la divergencia:

Ejemplo El campo $F(x) = x$ en \mathbb{R}^n cumple $\operatorname{div} F = n$, luego el teorema de la divergencia nos da una fórmula para el volumen n -dimensional V encerrado por una superficie S :

$$V = \frac{1}{n} \int_S i_x(dm).$$

Destacamos los casos particulares $n = 2$ y $n = 3$. El área de una figura plana limitada por una curva C es

$$A = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx.$$

El volumen de una región del espacio limitado por una superficie S es

$$V = \frac{1}{3} \int_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy.$$

Por ejemplo, la elipse de semiejes a y b admite la parametrización $x = a \cos t$, $y = b \sin t$. Por consiguiente su área es

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (ab \cos^2 t + ab \sin^2 t) dt = \pi ab.$$

Ejemplo Consideremos el campo $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dado por ■

$$F(x) = \frac{x}{r},$$

para un $r > 0$. Sobre los puntos de la esfera de centro 0 y radio r coincide con el vector normal unitario de la misma, luego $\langle F, N \rangle = 1$. Así pues, el teorema de la divergencia nos da que el área de la esfera vale

$$\int_S d\sigma = \int_S \langle F, N \rangle d\sigma = \int_B \operatorname{div} F dm = \int_B \frac{n+1}{r} dm = (n+1)v_{n+1}r^n = \sigma_n r^n,$$

donde B es la bola de centro 0 y radio r y v_{n+1} es el volumen de la bola unitaria de dimensión $n + 1$. Obtenemos de nuevo la relación $\sigma_n = (n + 1)v_{n+1}$, que ya habíamos obtenido en el capítulo anterior. ■

5.4.2 El rotacional

La versión clásica del teorema de Stokes se aplica a superficies en \mathbb{R}^3 , aunque podemos generalizarla ligeramente:

Definición 5.16 Si V es una variedad semirriemanniana orientada tridimensional y $X \in \mathfrak{X}(V)$. Definimos el *rotacional* de X como $\text{rot } X = \sharp * d\flat X$.

Observemos que $\flat X \in \Lambda^1(V)$, luego $d\flat X \in \Lambda^2(V)$, luego $\sharp d\flat X \in \Lambda^1(V)$ y, por consiguiente, $\text{rot } X \in \mathfrak{X}(V)$.

Así, según el teorema 4.36, tenemos que el elemento de flujo del rotacional es

$$*\flat \text{rot } X = ** d\flat X = (-1)^\nu d\flat X,$$

con lo que el teorema de Stokes se particulariza al teorema siguiente:

Teorema 5.17 (Teorema de Stokes) *Sea V una variedad semirriemanniana orientada tridimensional de índice ν , sea S una subvariedad orientada, sea $d\sigma$ su elemento de volumen orientado, sea N la determinación del vector normal unitario a S que induce su orientación y $X \in \mathfrak{X}(V)$ un campo vectorial con soporte compacto. Entonces*

$$\int_S \langle \text{rot } X, N \rangle d\sigma = (-1)^\nu \int_{\partial S} \flat X.$$

En el caso en que V es un abierto en \mathbb{R}^3 la fórmula se reduce a

$$\int_S \langle \text{rot } X, N \rangle d\sigma = \int_{\partial S} X \cdot d\vec{x}.$$

He aquí la expresión en coordenadas del rotacional:

Teorema 5.18 *Sea V una variedad semirriemanniana orientada tridimensional, consideremos una carta orientada $x : U \rightarrow \tilde{U}$, y sea G la matriz del producto escalar en dicha carta. Sea $X \in \mathfrak{X}(V)$ un campo vectorial con expresión en coordenadas $X|_U = F^1 \partial_{x_1} + F^2 \partial_{x_2} + F^3 \partial_{x_3}$. Entonces*

$$\text{rot } X = \sqrt{|\det G|} \sum_{i_3} \delta_{i_3} \sum_{j_1 j_2 j_3} \left(\frac{\partial F_{j_2}}{\partial x_{j_1}} - \frac{\partial F_{j_1}}{\partial x_{j_2}} \right) g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} g^{i_3 j_3} \frac{\partial}{\partial x_{i_3}},$$

donde $i_1 < i_2$ son los índices distintos de i_3 y $\delta_1 = \delta_3 = 1$, $\delta_2 = -1$.

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar bajamos el índice de X , para obtener $\flat X|_U = F_1 dx^1 + F_2 dx^2 + F_3 dx^3$, En segundo lugar calculamos

$$\begin{aligned} d\flat X &= \frac{\partial F_1}{\partial x_2} dx^2 \wedge dx^1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} dx^3 \wedge dx^1 + \frac{\partial F_2}{\partial x_1} dx^1 \wedge dx^2 \\ &+ \frac{\partial F_2}{\partial x_3} dx^3 \wedge dx^2 + \frac{\partial F_3}{\partial x_1} dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial F_3}{\partial x_2} dx^2 \wedge dx^3 \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \right) dx^1 \wedge dx^3 \\ &+ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx^1 \wedge dx^2. \end{aligned}$$

Ahora aplicamos el teorema A.25 para calcular el operador de Hodge:

$$*d\flat X = \sqrt{|\det G|} (\omega^{23} dx^1 - \omega^{13} dx^2 + \omega^{12} dx^3),$$

donde

$$\omega_{i_1 i_2} = \frac{\partial F_{i_2}}{\partial x_{i_1}} - \frac{\partial F_{i_1}}{\partial x_{i_2}}, \quad \omega^{i_1 i_2} = \sum_{j_1 j_2} \left(\frac{\partial F_{j_2}}{\partial x_{j_1}} - \frac{\partial F_{j_1}}{\partial x_{j_2}} \right) g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2}.$$

Por lo tanto:

$$*d\flat X = \sqrt{|\det G|} \sum_{j_3} \delta_{j_3} \sum_{j_1 j_2} \left(\frac{\partial F_{j_2}}{\partial x_{j_1}} - \frac{\partial F_{j_1}}{\partial x_{j_2}} \right) g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} dx^{j_3},$$

donde $\delta_1 = \delta_3 = 1$, $\delta_2 = -1$ y, para cada $j_3 = 1, 2, 3$, llamamos $i_1 < i_2$ a los dos índices complementarios. Por último, al subir el índice j_3 llegamos a la expresión el enunciado. ■

De la propia definición de rotacional se sigue que los rotacionales de un campo respecto de dos orientaciones opuestas son campos opuestos. En particular, la expresión del teorema anterior calculada con cartas de orientaciones opuestas da lugar a vectores opuestos.

Si V es un abierto en \mathbb{R}^3 , la expresión del teorema anterior en coordenadas cartesianas se reduce a

$$\begin{aligned} \text{rot } X &= \sum_{i_3} \delta_{i_3} \left(\frac{\partial F^{i_2}}{\partial x_{i_1}} - \frac{\partial F^{i_1}}{\partial x_{i_2}} \right) \frac{\partial}{\partial x_{i_3}} = \\ &\left(\frac{\partial F^3}{\partial x_2} - \frac{\partial F^2}{\partial x_3} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} - \left(\frac{\partial F^3}{\partial x_1} - \frac{\partial F^1}{\partial x_3} \right) \frac{\partial}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial F^2}{\partial x_1} - \frac{\partial F^1}{\partial x_2} \right) \frac{\partial}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Si pasamos de vectores abstractos a vectores “geométricos” y cambiamos los índices 1, 2, 3 por x, y, z , la expresión del rotacional (ahora para un campo vectorial $F : V \rightarrow \mathbb{R}^3$) se reduce a

$$\text{rot } F = \left(\frac{\partial F^z}{\partial y} - \frac{\partial F^y}{\partial z}, \frac{\partial F^z}{\partial x} - \frac{\partial F^x}{\partial z}, \frac{\partial F^y}{\partial x} - \frac{\partial F^x}{\partial y} \right).$$

Una regla mnemotécnica para esta expresión es

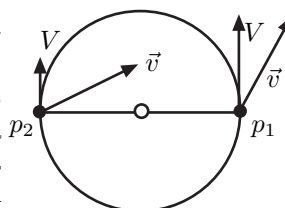
$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F^x & F^y & F^z \end{vmatrix},$$

donde e_1, e_2, e_3 es la base canónica de \mathbb{R}^3 . Al desarrollar formalmente el determinante por la primera fila se obtiene la expresión precedente (pero si se intenta desarrollar por otra fila o por cualquier columna obtenemos un sinsentido, porque no se trata de un auténtico determinante).

Ejercicio: Deducir directamente la expresión para el rotacional de un campo vectorial en un abierto de \mathbb{R}^3 usando el teorema A.24 en lugar de A.25.

El rotacional en hidrodinámica Supongamos que \vec{v} es el campo de velocidades de un fluido (que puede depender del tiempo). Esto significa que si liberamos una partícula de masa despreciable en un punto p el fluido la arrastrará con velocidad $\vec{v}(p)$. Supongamos ahora que en el fluido situamos una bolita sujeta por una varilla rígida a un eje, respecto al cual puede girar a lo largo de una circunferencia de radio r .⁴ Es claro que si la bolita se encuentra en el punto p el fluido la hará moverse con velocidad igual a la proyección de $\vec{v}(p)$ sobre la recta tangente a la circunferencia en p , pues la componente normal de la velocidad será cancelada por las fuerzas que mantienen rígida a la varilla que sujeta la bola.

Imaginemos ahora que el eje sujeta a la varilla por el centro y que ésta tiene una bolita en cada brazo. Si éstas se encuentran en los puntos p_1 y p_2 , entonces su velocidad (que en módulo ha de ser la misma para ambas a causa de la rigidez de la varilla) estará determinada por los vectores $\vec{v}(p_1)$ y $\vec{v}(p_2)$. Al igual que en el caso anterior en realidad dependerá sólo de las proyecciones $V(p_1)$ y $V(p_2)$ de dichos vectores sobre las rectas tangentes respectivas. Por ejemplo, en el caso indicado en la figura, donde $\|V(p_1)\| = 2$ y $\|V(p_2)\| = 1$, la velocidad resultante será el promedio⁵ de ambas: la varilla girará en sentido contrario a las agujas del reloj con velocidad $(2 - 1)/2 = 1/2$.



Supongamos ahora que en vez de una varilla tenemos un molinillo con n aspas. Entonces el módulo de la velocidad resultante será

$$\frac{1}{n} \vec{v}(p_1) \vec{r}(p_1) + \cdots + \frac{1}{n} \vec{v}(p_n) \vec{r}(p_n),$$

⁴En esta clase de situaciones suponemos siempre que los objetos que introducimos son instrumentos de medida ideales, es decir, que son afectados por el fluido pero que éste no es afectado por ellos.

⁵Se trata de un problema de conservación de la cantidad de movimiento. De hecho es equivalente al siguiente: dos cuerpos de la misma masa se aproximan frontalmente de modo que sus velocidades son v_1 y v_2 . Si tras el choque se mueven conjuntamente, ¿a qué velocidad lo hacen? La respuesta es que la cantidad de movimiento del sistema es $mv_1 + mv_2$ al principio y $2mv$ al final. Igualando resulta que $v = (v_1 + v_2)/2$. El fluido comunica una cantidad de movimiento a las bolitas y la varilla se limita a unificar las velocidades sin alterar la cantidad de movimiento.

donde $\vec{\tau}$ es el vector tangente unitario a la circunferencia. Equivalentemente podemos escribir

$$\frac{1}{2\pi r} \left(\frac{2\pi r}{n} \vec{v}(p_1) \vec{\tau}(p_1) + \cdots + \frac{2\pi r}{n} \vec{v}(p_n) \vec{\tau}(p_n) \right),$$

donde r es el radio de la circunferencia. Esto equivale a considerar la circunferencia dividida en n partes iguales de longitud $\Delta s = 2\pi r/n$, multiplicar la longitud de cada parte por el valor de $\vec{v} \cdot \vec{\tau}$ en uno de sus puntos, sumar y luego dividir el resultado entre la longitud completa de la circunferencia. Finalmente, si en lugar de un molinillo ponemos una ruedecita de radio r , la velocidad que le imprimirá el fluido vendrá dada por

$$v = \frac{1}{2\pi r} \int_C \vec{v} \cdot \vec{\tau} ds = \frac{1}{2\pi r} \int_C \vec{v} \cdot d\vec{x}$$

La velocidad v corresponde a una velocidad angular $\omega_r = v/r$. Así pues,

$$\omega_r = \frac{1}{2\pi r^2} \int_C \vec{v} \cdot d\vec{x} = \frac{1}{2\pi r^2} \int_S (\text{rot } \vec{v}) N d\sigma$$

Si llamamos S al disco cuya frontera es C y N es un vector unitario normal al mismo, dado $\epsilon > 0$, existe un entorno U de p tal que

$$|(\text{rot } \vec{v})(p)N - (\text{rot } \vec{v})(x)N| < \epsilon$$

para todo $x \in U$. Si tomamos r suficientemente pequeño para que la rueda esté contenida en U , entonces

$$((\text{rot } \vec{v})(p)N - \epsilon)\pi r^2 \leq \int_S (\text{rot } \vec{v})N d\sigma \leq ((\text{rot } \vec{v})(p)N + \epsilon)\pi r^2.$$

Por lo tanto

$$|(\text{rot } \vec{v})(p)N - 2\omega_r| \leq \epsilon,$$

para todo r suficientemente pequeño, luego

$$(\text{rot } \vec{v})(p)N = 2 \lim_{r \rightarrow 0} \omega_r.$$

Así pues, la velocidad angular que adquirirá la rueda es (aproximadamente) la mitad de la proyección del rotacional sobre el eje de giro. En particular el rotacional indica la dirección en que hemos de situar el eje para que la velocidad de rotación sea máxima. ■

5.4.3 El laplaciano

El operador laplaciano introducido en [An 5.49] puede generalizarse como sigue a variedades semiriemannianas arbitrarias:

Definición 5.19 Si V es una variedad semirriemanniana y $f \in C^\infty(V)$, definimos su *laplaciano* como

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f = (-1)^\nu * d * df \in C^\infty(V).$$

A partir de las expresiones en coordenadas del gradiente y de la divergencia se obtiene inmediatamente la del laplaciano:

Teorema 5.20 Sea V una variedad semirriemanniana, consideremos una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ y sea G la matriz del producto escalar en dicha carta. Entonces, para toda $f \in C^\infty(V)$,

$$\Delta f|_U = \frac{1}{\sqrt{|\det G|}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{|\det G|} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right).$$

En particular, cuando V es un abierto en \mathbb{R}^n esta expresión se reduce a la que en [An 5.49] tomamos como definición:

$$\Delta f = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Si V es orientable y S es una hipersuperficie orientable en V y N es la determinación del vector normal unitario que induce su orientación, definimos la derivada direccional de $f \in C^\infty(V)$ respecto de N como

$$\frac{df}{dN} = df(N) = \langle \nabla f, N \rangle \in C^\infty(S).$$

El teorema de la divergencia implica inmediatamente el resultado siguiente:

Teorema 5.21 Si V es una variedad semirriemanniana orientable, sea N la determinación del vector normal unitario a ∂V que determina su orientación y sea $f \in C^\infty(V)$ una función con soporte compacto. Entonces

$$\int_V \Delta f \, dm = \int_{\partial V} \frac{df}{dN} \, d\sigma,$$

donde dm y $d\sigma$ son los elementos de volumen orientados de V y ∂V , respectivamente.

Ahora podemos demostrar las dos primeras fórmulas de Green (véase la sección [An 8.3] en el contexto más general de las variedades semirriemannianas orientables. Consideremos para ello la fórmula

$$\operatorname{div}(g\nabla f) = \langle \nabla f, \nabla g \rangle + g\Delta f,$$

que es un caso particular de la fórmula⁶ (5.5). Al aplicar el teorema de la divergencia obtenemos, bajo las mismas hipótesis del teorema anterior (donde

⁶Como ya hemos señalado, por conveniencia demostramos esta fórmula en la sección siguiente, si bien su prueba depende únicamente del teorema 5.15

ahora $f, g \in C^\infty(V)$ son funciones con soporte compacto) la conocida como *primera fórmula de Green*:

$$\int_V g \Delta f \, dm + \int_V \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, dm = \int_{\partial V} g \frac{df}{dN} \, d\sigma.$$

Si intercambiamos los papeles de f y g y restamos ambas fórmulas resulta la *segunda fórmula de Green*:

$$\int_V (g \Delta f - f \Delta g) \, dm = \int_{\partial V} \left(g \frac{df}{dN} - f \frac{dg}{dN} \right) \, d\sigma.$$

Observemos que para el caso de variedades sin frontera las integrales sobre ∂V son nulas.

En [An 5.49] definimos las funciones armónicas en un abierto de \mathbb{R}^n como las funciones que cumplen $\Delta f = 0$. Ahora esta definición es válida en cualquier variedad semiriemanniana. El teorema siguiente generaliza ligeramente al teorema [An 8.10], pues no requiere que las funciones estén definidas más allá de la variedad con frontera considerada (lo que en [An 8.10] es Ω):

Teorema 5.22 *Si dos funciones armónicas en una variedad de Riemann compacta y conexa V coinciden en $\partial V \neq \emptyset$, entonces son iguales.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $f, g \in C^\infty(V)$ dos funciones armónicas que coincidan en ∂V . Entonces $h = f - g$ también es armónica y $h|_{\partial V} = 0$. Aplicando la primera fórmula de Green a $f = g = h$ obtenemos que

$$\int_V \langle \nabla h, \nabla h \rangle \, dm = 0,$$

y como el integrando (en una variedad de Riemann) es ≥ 0 , tiene que ser idénticamente nulo, luego $\nabla h = 0$ (por 5.3). Esto implica que h es constante, y si $\partial V \neq \emptyset$, necesariamente $h = 0$, luego $f = g$. ■

Notemos que el argumento del teorema anterior prueba también que las funciones armónicas en las variedades compactas y conexas sin frontera son constantes.

La ecuación del calor Presentamos ahora la ecuación del calor en el contexto de las variedades semiriemannianas. Recordemos para ello que la temperatura T de un cuerpo es una magnitud que mide la velocidad media de las partículas microscópicas que lo forman, mientras que la cantidad de calor Q se corresponde con su energía cinética. La relación entre ambas es que $Q = \int_V c \rho T \, dm$, donde ρ es la densidad del cuerpo (función de la posición), dm es el elemento de volumen (no de masa) y c es una constante llamada *calor específico*, que depende de la naturaleza del cuerpo. Podemos suponer que c y ρ dependen sólo de la posición, mientras que Q y T dependerán también del tiempo, y se plantea el problema de determinar esta dependencia, esto es, de determinar cómo se transmite el calor a través de un cuerpo.

Según indicábamos en [An], el modelo más simple al respecto es la *ley de Fourier*, que postula que el calor es como un fluido que se mueve hacia el punto más frío posible. La dirección en la que la temperatura disminuye más rápidamente es $-\nabla T$, luego, más específicamente, lo que afirma la ley de Fourier es que flujo neto de calor por la frontera de una región acotada B es el flujo del campo $-k\nabla T$:

$$\int_{\partial B} \langle -k\nabla T, N \rangle d\sigma,$$

donde k es una constante llamada *conductividad térmica*, que depende del material por el que se transmite el calor y representa la proporción entre la rapidez con que varía la temperatura y la cantidad de calor que escapa por unidad de superficie y de tiempo.

A partir de aquí, el mismo razonamiento formal que nos ha llevado hasta la ecuación de continuidad —cambiando ahora $\rho\vec{v}$ por $-k\nabla T$ y la densidad del fluido ρ por la densidad de calor ρcT — nos da la *ecuación del calor*:

$$k\Delta T + \psi = c\rho \frac{\partial T}{\partial t},$$

donde la función ψ (que determina el calor generado en cada punto por unidad de tiempo y de volumen) representa las fuentes y sumideros de calor. En ausencia de fuentes y sumideros y llamando *difusividad térmica* al cociente $\alpha = k/c\rho$, la ecuación del calor se reduce a

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\Delta T.$$

La primera fórmula de Green nos permite probar la unicidad de la solución bajo ciertas condiciones. Nuevamente, este teorema generaliza ligeramente a [An 8.11], pues no requiere que la función T esté definida más allá de $V \times [0, b[$:

Teorema 5.23 *Sea V una variedad de Riemann orientable, sea N la determinación del vector normal unitario a ∂V que determina su orientación y sea $T : V \times [0, b[\rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable que cumpla:*

Ecuación del calor $\Delta T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}.$

Condición inicial $T(x, 0) = 0$ para todo $x \in V$.

Condiciones de frontera Para cada punto $x \in \partial V$ y cada $t \geq 0$, o bien

$$T(x, t) = 0, \text{ o bien } \frac{dT}{dN} = 0.$$

Entonces $T = 0$.

Esto implica que si tenemos dos soluciones T_1 y T_2 de la ecuación del calor sobre V que satisfagan la misma condición inicial $T_i(x, 0) = f(x)$, para todo $x \in V$ y las mismas condiciones de frontera $T_i(x, t) = g(x, t)$ o bien $\frac{dT_i}{dN} = g(x, t)$ para todo $x \in \partial V$, entonces $T_1 = T_2$. Basta aplicar el teorema a $T = T_1 - T_2$.

Esto significa que la evolución en el tiempo de la temperatura de un cuerpo está completamente determinada por la temperatura de su superficie, o también por el flujo de calor que se produce a través de ésta.

DEMOSTRACIÓN: Llamemos

$$J(t) = \int_V \frac{1}{2} T^2 dm,$$

de modo que, aplicando la ecuación del calor y la primera fórmula de Green con $f = g = T$, obtenemos

$$J'(t) = \int_V T \frac{\partial T}{\partial t} dm = \alpha \int_V T \Delta T dm = \int_{\partial V} T \frac{dT}{dn} d\sigma - \int_V \langle \nabla T \nabla T \rangle dm,$$

pero la primera integral del último término es nula por hipótesis, luego

$$\frac{dJ}{dt} = - \int_V \langle \nabla T \nabla T \rangle dm.$$

Esto implica que $J'(t) \leq 0$ y, por la condición inicial, $J(0) = 0$ luego, para todo $t \geq 0$, se cumple $J(t) \leq 0$, pero la propia definición de J muestra que $J(t) \geq 0$, luego tiene que ser $J(t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Pero entonces $T^2(x, t) = 0$ para todo x y todo $t \geq 0$, luego $T = 0$. ■

5.4.4 El operador nabla

Recapitemos los operadores diferenciales que hemos definido hasta ahora sobre una variedad semirriemanniana V y sus expresiones en coordenadas respecto de una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ de V y en el caso particular de las coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^n :

El gradiente El gradiente de una función $f \in C^\infty(V)$ se define como

$$\nabla f = \sharp df \in \mathfrak{X}(V).$$

Su expresión en coordenadas es

$$\nabla f|_U = \sum_j \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

La divergencia La divergencia de un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(V)$ viene dada por

$$\operatorname{div} X = (-1)^\nu * d * \flat X,$$

donde el operador de Hodge exige elegir una orientación en V , pero ésta es irrelevante porque, como el operador aparece dos veces, un cambio de orientación da lugar a dos cambios de signo que se cancelan mutuamente. Por ello no hace falta que la variedad V sea orientable, ya que la definición puede aplicarse localmente y todo punto de una variedad diferencial tiene un entorno orientable.

La expresión en coordenadas es

$$\operatorname{div} X|_U = \frac{1}{\sqrt{|\det G|}} \sum_i \frac{\partial(\sqrt{|\det G|} F^i)}{\partial x_i},$$

que para las coordenadas cartesianas y $F = (F^1, \dots, F^n)$ se reduce a:

$$\operatorname{div} F = \sum_i \frac{\partial F^i}{\partial x_i}.$$

El rotacional El rotacional de un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(V)$ (donde ahora V es una variedad semirriemanniana tridimensional orientada) es

$$\operatorname{rot} X = \sharp * d\flat X \in \mathfrak{X}(V),$$

$$\operatorname{rot} X = \sqrt{|\det G|} \sum_{i_3} \delta_{i_3} \sum_{j_1 j_2 j_3} \left(\frac{\partial F_{j_2}}{\partial x_{j_1}} - \frac{\partial F_{j_1}}{\partial x_{j_2}} \right) g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} g_{i_3 j_3} \frac{\partial}{\partial x_{i_3}},$$

donde $i_1 < i_2$ son los índices distintos de i_3 y $\delta_1 = \delta_3 = 1$, $\delta_2 = -1$. En el caso de las coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^3 la expresión se reduce a

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F^x & F^y & F^z \end{vmatrix}.$$

El laplaciano El laplaciano de una función $f \in C^\infty(V)$ es

$$\Delta f = (-1)^\nu * d * df \in C^\infty(V),$$

$$\Delta f|_U = \frac{1}{\sqrt{|\det G|}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{|\det G|} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right), \quad \Delta f = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Las expresiones de estos operadores en coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^n se recuerdan más fácilmente si introducimos, como mera regla mnemotécnica, el “vector nablá”

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right),$$

de modo que la notación ∇f para el gradiente puede verse como el producto del “vector nablá” por el escalar f . En estos términos, la divergencia de un campo $F = (F^1, \dots, F^n)$ puede representarse por

$$\operatorname{div} F = \nabla F,$$

donde ahora tenemos un “producto escalar” de dos “vectores”. Similarmente, podemos expresar

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F,$$

que se interpreta como el “producto vectorial” de dos “vectores”.

Por último, el laplaciano sería

$$\Delta f = (\nabla \cdot \nabla)f = \nabla^2 f.$$

Consideremos las relaciones siguientes (válidas en cualquier variedad semi-riemanniana tridimensional):

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} X = 0, \quad \operatorname{rot} \nabla f = 0.$$

Es fácil probarlas:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} X = (-1)^\nu * d * \flat * dbX = (-1)^\nu * d * * dbX = * d dbX = 0.$$

(Más conceptualmente: la divergencia de un campo es la diferencial de su elemento de flujo, pero el elemento de flujo del rotacional de X es $(-1)^\nu dbX$, y así se juntan dos diferenciales, luego el resultado es nulo.) Por otra parte:

$$\operatorname{rot} \nabla f = \flat * d \flat * df = \flat * ddf = \flat * 0 = 0.$$

(Equivalentemente, el rotacional de un campo conservativo es nulo.)

Si las expresamos en términos del “vector nabra” se convierten en

$$\nabla(\nabla \times X) = 0, \quad \nabla \times (\nabla f) = 0,$$

que son propiedades válidas cuando los factores ∇ y X son auténticos vectores y f es un escalar.

Por otra parte, muchas propiedades de estos tres operadores diferenciales (válidas en variedades arbitrarias) se expresan de forma mucho más simétrica en términos del “vector nabra”, como es el caso de las reglas siguientes para derivar productos:

$$\nabla(fg) = g(\nabla f) + f(\nabla g) \quad (5.4)$$

$$\nabla(fX) = (\nabla f)X + f(\nabla X) \quad (5.5)$$

$$\nabla \times (fX) = (\nabla f \times X) + f(\nabla \times X) \quad (5.6)$$

$$\nabla(X \times Y) = Y(\nabla \times X) - X(\nabla \times Y) \quad (5.7)$$

Todas se demuestran sin dificultad:

$$\nabla(fg) = \flat(d(fg)) = \flat(gdf + fdg) = g\flat df + f\flat dg = g\nabla f + f\nabla g.$$

Para la segunda igualdad tenemos:

$$\begin{aligned} \nabla(fX) &= (-1)^\nu * d * \flat(fX) = (-1)^\nu * d(f * \flat X) = (-1)^\nu * (df \wedge \flat X + f d * \flat X) \\ &= (-1)^\nu * \langle df | \flat X \rangle dm + f \nabla X = \langle df, \flat X \rangle * + f \nabla X = \langle \nabla f, X \rangle + f \nabla X. \end{aligned}$$

Y para variedades tridimensionales:

$$\nabla \times (fX) = \flat * d \flat(fX) = \flat * d(f \flat X) = \flat * (df \wedge \flat X + f d \flat X) = (\nabla f \times X) + f(\nabla \times X),$$

donde hemos usado la relación $X \times Y = \flat * (\flat X \wedge \flat Y)$ (definición A.29).

Usamos esto mismo en la prueba de la última igualdad:

$$\begin{aligned}\nabla(X \times Y) &= (-1)^\nu * d * b \# * (bX \wedge bY) = *d(bX \wedge bY) = *(dbX \wedge bY - bX \wedge dbY) \\ &= (-1)^\nu * (bY \wedge * * dbX) - (-1)^\nu (bX \wedge * * dbY) = \\ &(-1)^\nu * (\langle bY | *dbX \rangle dm - \langle bX | dbY \rangle dm) = \langle bY, b\#dbX \rangle^* - \langle bX, b\#dbY \rangle^* \\ &= \langle Y, \nabla \times X \rangle - \langle X, \nabla \times Y \rangle. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Terminamos con otras dos fórmulas integrales que se deducen del teorema de Stokes:

Teorema 5.24 *Sea $V \subset \mathbb{R}^3$ una variedad compacta de dimensión 3 contenida en un abierto U . Sea $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial definido en un entorno de $V \cup \partial V$. Entonces*

$$\int_V \text{rot } F \, dm = \int_{\partial V} (n \times F) \, d\sigma,$$

donde n es el vector normal a ∂V que apunta hacia fuera de V .

DEMOSTRACIÓN: Tomamos un vector constante $v \in \mathbb{R}^3$ arbitrario y calculamos

$$\begin{aligned}v \cdot \int_V \text{rot } F \, dm &= \int_V v \cdot \text{rot } F \, dm = \int_V \text{div}(F \times v) \, dm \\ &= \int_{\partial V} (F \times v) \cdot n \, d\sigma = v \cdot \int_{\partial V} (n \times F) \, d\sigma,\end{aligned}$$

donde en el segundo paso hemos usado la identidad (5.7) simplificada en el caso en que $W = v$ es constante, a continuación el teorema de la divergencia y en el último paso la asociatividad entre el producto escalar y vectorial. El hecho de que la igualdad obtenida valga para todo v implica que v es cancelable. \blacksquare

Teorema 5.25 *Sea S una superficie compacta orientable definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^3$ y sea $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar. Entonces*

$$\int_{\partial S} \phi \, d\vec{r} = \int_S n \times \nabla \phi \, d\sigma.$$

DEMOSTRACIÓN: Aplicamos el teorema de Stokes al campo $F = \phi v$, donde v es un vector arbitrario. Así tenemos que

$$\left(\int_{\partial S} \phi \, d\vec{r} \right) \cdot v = \int_S (\nabla \phi \times v) \cdot n \, d\sigma = \left(\int_S n \times \nabla \phi \, d\sigma \right) \cdot v,$$

donde hemos aplicado la identidad (5.6) para el caso en que $\vec{G} = \vec{v}$ es constante y la asociatividad del producto escalar y vectorial. Como v es arbitrario podemos cancelarlo. \blacksquare

5.4.5 Coordenadas ortogonales

Entre las sencillas expresiones de los operadores diferenciales (gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano) en las coordenadas cartesianas de \mathbb{R}^n y las complejas expresiones en sistemas de coordenadas arbitrarios se encuentra el término medio de las expresiones en coordenadas ortogonales, es decir, respecto de cartas con la propiedad de que los campos $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}$ son ortogonales dos a dos en cada punto.

Consideramos, pues, una variedad de Riemann V y en ella fijamos una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ tal que $g_{ij} = \langle \partial_{x_i}, \partial_{x_j} \rangle = 0$ siempre que $i \neq j$. Llamaremos

$$h_i = \sqrt{g_{ii}} = \|\partial_{x_i}\|,$$

de modo que los campos

$$e_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, e_n = \frac{1}{h_n} \frac{\partial}{\partial x_n}$$

constituyen un sistema de referencia ortonormal sobre U .

Por simplicidad expresamos las fórmulas siguientes en el caso $n = 3$, pero la expresión general se extrapola fácilmente. Todas ellas se obtienen inmediatamente sin más que particularizar las fórmulas generales que ya conocemos:

El tensor métrico es

$$h_1^2 dx^1 \otimes dx^1 + h_2^2 dx^2 \otimes dx^2 + h_3^2 dx^3 \otimes dx^3.$$

Equivalentemente, el elemento de longitud es

$$ds = \sqrt{h_1^2(dx^1)^2 + h_2^2(dx^2)^2 + h_3^2(dx^3)^2}$$

y el elemento de volumen es

$$dm = h_1 h_2 h_3 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Si $f \in C^\infty(U)$ y $X = F^1 e_1 + F^2 e_2 + F^3 e_3$, entonces⁷

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{1}{h_1} e_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{1}{h_2} e_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{1}{h_3} e_3, \\ \operatorname{div} X &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial(F^1 h_2 h_3)}{\partial x_1} + \frac{\partial(h_1 F^2 h_3)}{\partial x_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 F^3)}{\partial x_3} \right), \\ \operatorname{rot} X &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 e_1 & h_2 e_2 & h_3 e_3 \\ \partial_{x_1} & \partial_{x_2} & \partial_{x_3} \\ h_1 F^1 & h_2 F^2 & h_3 F^3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

⁷Para el rotacional, notemos que las coordenadas respecto de ∂_{x_i} son F^i/h_i y al bajar el índice multiplicamos por h_i^2 , con lo que resulta $h_i F^i$.

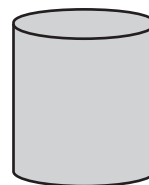
$$\Delta f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \right).$$

He aquí algunos ejemplos concretos:

Coordenadas		
Cartesianas	$x = x, y = y, z = z$	$h_1 = h_2 = h_3 = 1$
Esféricas	$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \phi$	$h_r = 1$
	$y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$	$h_\phi = r$
	$z = r \cos \theta$	$h_\theta = r \operatorname{sen} \theta$
Cilíndricas	$x = r \cos \theta$	$h_r = 1$
	$y = r \operatorname{sen} \theta$	$h_\theta = r$
	$z = z$	$h_z = 1$

5.5 El teorema de Stokes con singularidades

Observemos que el teorema de Stokes para un cubo (el teorema 5.10) no es un caso particular del teorema de Stokes generalizado, pues un cubo no se ajusta a la definición que hemos dado de variedad con frontera (a causa de sus aristas). El hecho de que el teorema de Stokes valga para cubos hace sospechar que vale para variedades (en algún sentido de la palabra) más generales que las que estamos considerando aquí. Efectivamente, es frecuente que en aplicaciones a la física se haga uso del teorema sobre —por ejemplo— un cilindro de altura finita, que tampoco es una variedad con frontera a causa de las dos circunferencias que bordean sus “tapas”. Podríamos considerar como variedad con frontera al cilindro menos dichas circunferencias, pero esto no ayuda en mucho, pues si tenemos una 2-forma definida en un entorno del cilindro su restricción al cilindro menos las circunferencias no tiene necesariamente soporte compacto (y nos gustaría, pese a ello, justificar la fórmula de Stokes en este caso). Conviene introducir algunos conceptos.



Definición 5.26 Sea $S \subset \mathbb{R}^m$ una subvariedad de dimensión n sin frontera. Sea $F(S) = \overline{S} \setminus S$. Diremos que un punto $p \in F(S)$ es un *punto frontera regular* de S si existe una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ de \mathbb{R}^m alrededor de p de modo que $S \cap U$ está formado por los puntos de coordenadas $x_{n+1} = \dots = x_m = 0$, $x_n < 0$, mientras que los puntos de $F(S) \cap U$ son los de coordenadas $x_n = x_{n+1} = \dots = x_m = 0$. Llamaremos ∂S al conjunto de puntos frontera regulares de S .

Obviamente $S \cup \partial S$ es una variedad con frontera. El conjunto $F(S) \setminus \partial S$ es cerrado en \mathbb{R}^m . Sus puntos se llaman *puntos frontera singulares*.

Por ejemplo, si S es un cilindro abierto en \mathbb{R}^3 , sus puntos frontera singulares son los de las dos circunferencias que limitan sus tapas. Nuestra intención es probar el teorema de Stokes para una subvariedad $S \subset \mathbb{R}^m$ cuyos puntos frontera singulares formen un conjunto pequeño en el sentido de la teoría de la medida.

A su vez, la idea es modificar cada forma en un entorno suficientemente pequeño del conjunto de puntos singulares para que sea aplicable el teorema de Stokes que conocemos y después hacer un paso al límite.

Una *sucesión fundamental* de entornos de un cerrado $E \subset \mathbb{R}^m$ es una familia de abiertos $\{W_k\}_{k=1}^{\infty}$ que contienen a E tal que si V es un abierto y $E \subset V$, entonces $W_k \subset V$ para todo k suficientemente grande.

Sea E el conjunto de puntos singulares de una subvariedad $S \subset \mathbb{R}^m$ y supongamos que $\{W_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión fundamental de entornos de E . Para cada k , tomemos una función g_k que se anule en un entorno de E y valga 1 fuera de W_k . De este modo, si ω es una $n-1$ -forma definida en un entorno de S , la forma $g_k\omega$ coincide con ω salvo en W_k y tiene soporte compacto en $S \cup \partial S$, luego podemos aplicarle el teorema de Stokes:

$$\int_{\partial S} g_k \omega = \int_S d(g_k \omega) = \int_S g_k d\omega + \int_S dg_k \wedge \omega. \quad (5.8)$$

El paso siguiente es tomar límites cuando k tiende a infinito, y el punto más delicado es estudiar el comportamiento del último término. Recogemos en una definición todo lo que necesitamos:

Definición 5.27 Sean E un subconjunto cerrado de \mathbb{R}^m y $S \subset \mathbb{R}^m$ una subvariedad sin frontera de dimensión n . Diremos que E es *despreciable* para S si existe un abierto W en \mathbb{R}^m que contiene a E y una sucesión fundamental $\{W_k\}_{k=1}^{\infty}$ de entornos de E tales que $\overline{W}_k \subset W$ y una sucesión $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ de funciones diferenciables en W tales que

1. $0 \leq g_k \leq 1$, g_k se anula en un entorno de E y vale 1 fuera de W_k .
2. Si $\omega \in \Lambda^{n-1}(W)$, entonces $dg_k \wedge \omega$ es integrable en $W \cap S$ y, si μ_k es la medida signada en S definida por su integral, entonces

$$\lim_k |\mu_k|(W \cap S) = 0.$$

Con esta definición es fácil probar:

Teorema 5.28 Sea $S \subset \mathbb{R}^m$ una subvariedad de dimensión n sin frontera. Sea ω una $n-1$ -forma en un abierto de \mathbb{R}^m que contenga a \overline{S} y tal que la intersección con \overline{S} del soporte de ω sea compacta. Supongamos:

1. Si E es la intersección del conjunto de puntos frontera singulares de S con el soporte de ω , entonces E es despreciable para S .
2. Las formas $d\omega$ en S y ω en ∂S son integrables.

Entonces

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega.$$

DEMOSTRACIÓN: Sean W , $\{W_k\}_{k=1}^\infty$ y $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ según la definición de conjunto despreciable. Notemos que las funciones g_k se pueden considerar definidas en \mathbb{R}^m . Entonces $g_k\omega$ es nula en un entorno de E , de donde se sigue fácilmente que el soporte de su restricción a $S \cup \partial S$ es compacto. Aplicando el teorema de Stokes a esta variedad con frontera obtenemos (5.8). Ahora notamos que

$$\left| \int_{\partial S} \omega - \int_{\partial S} g_k \omega \right| = \left| \int_{\partial S} (1 - g_k) \omega \right| \leq \int_{W_k \cap \partial S} d|\mu_\omega| = |\mu_\omega|(W_k \cap \partial S),$$

donde μ_ω es la medida definida por la integral de ω . Puesto que la intersección de los conjuntos $W_k \cap \partial S$ es vacía y las medidas son finitas, el teorema [An 8.20] nos da que

$$\lim_k \int_{\partial S} g_k \omega = \int_{\partial S} \omega.$$

(Podemos suponer que los conjuntos W_k son decrecientes.) Igualmente se llega a que

$$\lim_k \int_S g_k d\omega = \int_S d\omega.$$

Finalmente:

$$\left| \int_S dg_k \wedge \omega \right| \leq \int_{S \cap W} d|\mu_k| = |\mu_k|(W \cap S),$$

y por la definición de conjunto despreciable el último término tiende a 0. Tomando límites en (5.8) obtenemos la fórmula del enunciado. ■

Evidentemente, este teorema es de escaso valor sin una caracterización aceptable de los conjuntos despreciables. Es claro que todo subconjunto cerrado de un conjunto despreciable para una variedad S es también despreciable.

Teorema 5.29 Sean E y F dos subconjuntos compactos despreciables para una variedad $S \subset \mathbb{R}^n$ sin frontera. Entonces $E \cup F$ también es despreciable.

DEMOSTRACIÓN: Sean W , $\{W_k\}_{k=1}^\infty$, $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ según la definición de conjunto despreciable (para E) y sean W' , $\{W'_k\}_{k=1}^\infty$, $\{g'_k\}_{k=1}^\infty$ los análogos para F . Basta tomar

$$W'' = W \cup W', \quad W''_k = W_k \cup W'_k, \quad g''_k = g_k g'_k.$$

Es claro que estos conjuntos y funciones prueban que $E \cup F$ es despreciable. Para la última condición observamos que

$$d(g_k g'_k) \wedge \omega = g'_k dg_k \wedge \omega + g_k dg'_k \wedge \omega. \quad \blacksquare$$

Enunciamos el teorema siguiente en el caso en que la variedad S es un abierto en \mathbb{R}^n porque es el de mayor interés en la práctica, pero afinando un poco el argumento se generaliza a abiertos en variedades arbitrarias.

Teorema 5.30 Sea S un abierto en \mathbb{R}^n y E un subconjunto compacto de \mathbb{R}^n tal que⁸ existe un cubo cerrado Q de dimensión $m \leq n - 2$ y una aplicación diferenciable $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde U es un entorno de Q y $h[Q] = E$. Entonces E es despreciable para S .

⁸En el caso $n = 2$ el teorema se cumple si E consta de un solo punto. Algunos razonamientos han de ser sustituidos por otros más simples.

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar observamos que podemos suponer que $m = n - 2$, pues en caso contrario la aplicación f se puede componer con la proyección desde un cubo de dimensión superior. Así mismo, componiendo con una aplicación lineal podemos suponer que $Q = [0, 1]^{n-2}$

Un sistema fundamental de entornos de E lo forman los conjuntos

$$W_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, E) < 2/k\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Consideramos concretamente la distancia inducida por $\|\cdot\|_\infty$ en \mathbb{R}^n . Tomemos una función diferenciable $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ que se anule sobre los puntos con $\|x\|_\infty \leq 1/2$ y valga 1 sobre los puntos con $\|x\|_\infty \geq 1$. Para cada natural $k > 0$ sea $\phi_k(x) = \phi(kx)$. Si C es una cota de las derivadas parciales de ϕ en \mathbb{R}^n , es claro que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se cumple $\|D_i \phi_k(x)\|_\infty \leq kC$. Observemos que la cota C sólo depende de n .

Sea $I = \{l \in \mathbb{Z}^n \mid d(l/2k, E) \leq 1/k\}$. Claramente se trata de un conjunto finito. Definimos

$$g_k(x) = \prod_{l \in I} \phi_k \left(x - \frac{l}{2k} \right).$$

La función g_k es de clase C^∞ . Veamos que se anula en un entorno de E , concretamente en el de los puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que $d(x, E) < 1/4k$. Dado uno de estos puntos x , existe $l \in \mathbb{Z}^n$ tal que $d(x, l/2k) \leq 1/2k$ (la coordenada l_i es la parte entera de $2kx_i$).

Claramente $d(l/2k, E) < 1/k$, luego $l \in I$ y $\phi_k(x - l/2k) = 0$, y en consecuencia $g_k(x) = 0$, como queríamos probar.

Veamos ahora que g_k vale 1 fuera de W_k . En efecto, si $d(x, E) \geq 2/k$ y $l \in I$, es decir, $d(l/2k, E) \leq 1/k$, entonces $d(x, l/2k) > 1/k$, luego $\phi_k(x - l/2k) = 1$ y así $g_k(x) = 1$.

El motivo de toda esta construcción es garantizar que las funciones g_k cumplen una condición adicional, y es que sus derivadas parciales están acotadas por $C_1 k$, donde C_1 es una constante que sólo depende de n . En efecto, tomemos un punto $x \in \mathbb{R}^n$ alrededor del cual las derivadas de g_k no sean idénticamente nulas, lo que implica que $\|x - l_0/2k\|_\infty \leq 1/k$ para un cierto $l_0 \in I$. De los factores que componen g_k , todos serán nulos en un entorno de x excepto a lo sumo los correspondientes a vectores $l \in I$ tales que $\|x - l/2k\|_\infty \leq 1/k$, pero entonces $\|l - l_0\|_\infty \leq 4$, y es fácil ver que hay a lo sumo 9^n puntos así. Al derivar g_k obtenemos una suma de 9^n términos, cada uno de los cuales es un producto de la derivada de una función $\phi_k(x - l/2k)$ por otras funciones de este tipo sin derivar. Éstas están acotadas por 1 y la primera por Ck , luego cada derivada de g_k está acotada por $C_1 k$, donde C_1 es una constante que sólo depende de n .

Tomando $W = \mathbb{R}^n$ tenemos comprobada la condición a) de la definición de conjunto despreciable.

Consideremos ahora una $n - 1$ -forma ω en \mathbb{R}^n . Será de la forma

$$\omega = \sum_{j=1}^n f_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Entonces $dg_k \wedge \omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, donde la función

$$f = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} f_j D_j g_k$$

está acotada por $C_2 k$, y la constante C_2 sólo depende de n (las funciones f_j se acotan en $\overline{W_1}$). Puesto que f tiene soporte compacto, la n -forma $dg_k \wedge \omega$ es integrable en \mathbb{R}^n y determina la medida dada por $\mu_k(A) = \int_A f dm$. Entonces

$$|\mu_k|(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} |f| dm \leq C_2 k m(W_k). \quad (5.9)$$

Ahora estimaremos la medida de W_k para concluir que la expresión anterior tiende a 0 cuando k tiende a infinito. Dividimos el cubo Q en k^{n-2} cubos de lado $1/k$. Como las normas en \mathbb{R}^n son equivalentes, la distancia euclídea entre dos puntos del mismo cubo está acotada por C_3/k , para una cierta constante k . Aplicando el teorema del valor medio a cada función coordenada de h concluimos que si u y v están en el mismo cubo, entonces $\|h(u) - h(v)\|_\infty \leq C_4/k$. Si $x \in W_k$, entonces x dista menos de $2/k$ de un punto de E , el cual dista menos de C_4/k de la imagen del centro de uno de los k^{n-2} cubos, luego W_k está contenido en la unión de k^{n-2} bolas de radio C_5/k (para cualquier norma, por ejemplo la euclídea), luego

$$m(W_k) \leq k^{n-2} \frac{C_6}{k^n} = \frac{C_6}{k^2},$$

donde las constantes C_3, \dots, C_6 dependen de n, f y ω , pero no de k . Conectando esto con (5.9) llegamos a que $|\mu_k|(\mathbb{R}^n) \leq C_7/k$, que tiende a 0 con k . ■

En vista de lo anterior tenemos la versión siguiente del teorema de Stokes, que incluye como caso particular el de los cubos que ya habíamos probado:

Teorema 5.31 (Teorema de Stokes con singularidades) *Sea S un abierto en \mathbb{R}^n tal que el conjunto de puntos singulares de su frontera sea unión de un número finito de imágenes de cubos cerrados de dimensión $\leq n - 2$ por aplicaciones diferenciables. Sea ω una $n - 1$ -forma definida en un entorno de \overline{S} tal que la intersección con \overline{S} de su soporte sea compacta y las formas ω y $d\omega$ sean integrables en S y ∂S respectivamente. Entonces*

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega.$$

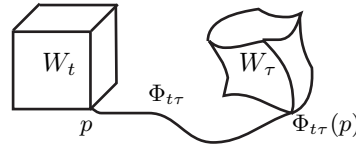
Este teorema justifica en particular todas las aplicaciones del teorema de la divergencia que hicimos en [An] sobre dominios con singularidades en su frontera.

5.6 El teorema de transporte

En 3.36 hemos definido la derivada de Lie de un tensor dependiente del tiempo y, en el caso de una función, la hemos interpretado en el contexto de la

hidrodinámica, distinguiendo entre la derivada parcial de una función respecto del tiempo, que mide la variación de la función en un punto dado, y su derivada total, que mide la variación sobre cada partícula de fluido, teniendo en cuenta su movimiento. Ahora interpretaremos del mismo modo la derivada de Lie de una forma diferencial dependiente del tiempo.

Para ello consideramos una variedad diferencial sin frontera V en la que hemos fijado un campo vectorial X_t dependiente del tiempo, que podemos interpretar como el campo de velocidades de un fluido. Si fijamos ahora una subvariedad diferencial W de clausura compacta (que en esta discusión preliminar supondremos de la misma dimensión que V por simplicidad, pero luego trataremos el caso general), podemos interpretarla de dos formas: o bien como que hemos seleccionado una región fija del espacio que está siendo atravesada por el fluido, o bien como que hemos seleccionado una porción de fluido en un instante t que está moviéndose a través de V . En el segundo caso, a través de W (y del instante inicial t) estamos determinando la aplicación $\tau \mapsto W_\tau = \Phi_{X,t,\tau}[W]$, que asigna a cada instante τ la posición de W en ese momento.



La figura ilustra el caso en que W es un abierto en forma de cubo en \mathbb{R}^3 .

Consecuentemente, si nos planteamos cómo varía con el tiempo alguna propiedad de W , esto puede interpretarse de dos formas distintas: o bien como la variación de la propiedad en W como región fija del espacio, o bien su variación sobre la porción de fluido que en un instante dado estaba en W .

Por ejemplo, si consideramos el volumen, es claro que el volumen de W como región fija del espacio es constante, pero el volumen de W_τ puede variar con el tiempo, ya que este puede expandirse o concentrarse. En cambio, con la masa sucede lo contrario: la masa contenida en W como región fija del espacio podrá variar según cuánto fluido entre y salga de W , mientras que la masa de W_τ será constante salvo que, en su movimiento, W atraviese fuentes o sumideros de fluido. Por último, la cantidad de calor contenida en W puede aumentar si el fluido que entra en W está más caliente que el fluido que sale, y esto no contradice con que la cantidad de calor de W_τ pueda estar disminuyendo si el fluido se está enfriando con el tiempo.

La definición siguiente formula con precisión esta distinción:

Definición 5.32 Sea V una variedad diferencial sin frontera, sea X_t un campo vectorial en V dependiente del tiempo, ω_t una k -forma diferencial en V , también dependiente del tiempo, y W una subvariedad orientada de dimensión k con clausura compacta. Es claro que $W_\tau = \Phi_{X,t,\tau}[W]$ es claramente una subvariedad orientable de V , en la que consideramos la orientación que convierte al

difeomorfismo $\Phi_{X,t,\tau} : W \rightarrow W_\tau$ en un difeomorfismo orientado. Definimos la *derivada total*

$$\frac{D}{Dt} \int_W \omega_t = \frac{d}{d\tau} \int_{\Phi_{X,t,\tau}[W]} \omega_\tau \Big|_t,$$

por oposición a la derivada parcial

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_W \omega_t$$

en la que el recinto de integración W se mantiene fijo.

En primer lugar observamos que el teorema [An 5.27] sobre intercambio de derivadas con integrales es válido en este contexto más general:

Teorema 5.33 *Sea V una variedad diferencial y W una subvariedad orientable de dimensión k de clausura compacta. Sea ω_t una k -forma diferencial en V dependiente del tiempo. Entonces*

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_W \omega_t = \int_W \partial_t \omega.$$

DEMOSTRACIÓN: Para cada punto $p \in \bar{W}$, tomamos un abierto coordenado U_p de V alrededor de p y a su vez tomamos otro tal que $p \in U'_p \subset \bar{U}'_p \subset U_p$. Por la compacidad de \bar{W} podemos cubrir la clausura por un número finito de abiertos coordenados U'_i . Tomamos una partición de la unidad $\{f_i\}_{i=1}^m$ subordinada al cubrimiento. Así

$$\int_W \omega_t = \sum_i \int_{W \cap U'_i} f_i \omega_t.$$

A su vez, $f_i \omega_t$ es suma de un número finito de formas

$$f_i g_{i_1, \dots, i_k, t} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

En definitiva

$$\begin{aligned} \int_W \omega_t &= \sum_i \sum_{i_1 < \dots < i_k} \int_{W \cap U'_i} f_i g_{i_1, \dots, i_k, t} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_i \sum_{i_1 < \dots < i_k} \int_{x_i[W \cap U'_i]} \tilde{f}_i \tilde{g}_{i_1, \dots, i_k, t}^* dx_{i_1} \dots dx_{i_k}, \end{aligned}$$

donde las tildes indican la composición con la parametrización asociada a la carta, y las funciones \tilde{g}^* coinciden con \tilde{g} en cada componente conexas de $W \cap U'_i$ según si la orientación de W coincide o no con la inducida por $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$. Por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_W \omega_t = \sum_i \sum_{i_1 < \dots < i_k} \int_{x_i[W \cap U'_i]} \tilde{f}_i \frac{\partial \tilde{g}_{i_1, \dots, i_k, t}^*}{\partial t} dx_{i_1} \dots dx_{i_k},$$

donde hemos aplicado el teorema [An 5.27], lo cual es posible aunque $x_i[W \cap U'_i]$ no sea compacto, porque el integrando es una función continua en su clausura compacta, contenida en $x_i[U'_i]$, y esto basta para que el argumento de la prueba sea válido. Al deshacer la descomposición de la integral llegamos a que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_W \omega_t &= \sum_i \sum_{i_1 < \dots < i_k} \int_{W \cap U'_i} f_i \frac{\partial g_{i_1, \dots, i_k, t}}{\partial t} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_i \int_{W \cap U'_i} f_i \partial_t \omega = \int_W \partial_t \omega. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

El teorema de transporte afirma que la derivada total también puede intercambiarse con la integral, pero aplicando al integrando la derivada de Lie:

Teorema 5.34 (Teorema de transporte) *Sea V una variedad diferencial sin frontera, sea X_t un campo vectorial en V dependiente del tiempo, sea ω_t una k -forma diferencial en V , también dependiente del tiempo, y W una subvariedad orientada de dimensión k con clausura compacta. Entonces*

$$\frac{D}{Dt} \int_W \omega_t = \int_W \mathcal{L}_{t, X}(\omega) = \frac{\partial}{\partial t} \int_W \omega_t + \int_W \mathcal{L}_{X_t} \omega_t.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $W_\tau = \Phi_{X, t, \tau}[W]$. Por el teorema de cambio de variable,

$$\int_{W_\tau} \omega_\tau = \int_W \Phi_{X, t, \tau}^*(\omega_\tau),$$

y ahora que el dominio de integración es fijo podemos aplicar el teorema anterior:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_W \omega_t &= \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{W_\tau} \omega_\tau \Big|_t = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_W \Phi_{X, t, \tau}^*(\omega_\tau) \Big|_t = \\ &= \int_W \partial_\tau \Phi_{X, t, \tau}^*(\omega_t) \Big|_t = \int_W \mathcal{L}_{t, X}(\omega). \end{aligned}$$

La segunda igualdad del enunciado es el teorema 3.37. \blacksquare

Si W es compacta podemos aplicar el teorema de Stokes y obtenemos una versión alternativa del teorema de transporte:

Teorema 5.35 (Teorema de transporte) *Sea V una variedad diferencial sin frontera, sea X_t un campo vectorial en V dependiente del tiempo, sea ω_t una k -forma diferencial en V , también dependiente del tiempo, y W una subvariedad compacta orientada de dimensión k . Entonces*

$$\frac{D}{Dt} \int_W \omega_t = \frac{\partial}{\partial t} \int_W \omega_t + \int_W i_{X_t}(d\omega_t) + \int_{\partial W} i_{X_t}(\omega_t).$$

DEMOSTRACIÓN: Basta tener en cuenta la fórmula de Cartan:

$$\mathcal{L}_{X_t}\omega_t = i_{X_t}(d\omega_t) + di_{X_t}\omega_t,$$

y aplicar el teorema de Stokes. ■

Si W tiene la misma dimensión n que V , el término intermedio de la expresión dada por el teorema anterior desaparece, pues $d\omega_t$ es una $n+1$ -forma, luego es nula. Si además V es una variedad semirriemanniana orientada obtenemos la versión clásica del teorema de transporte:

Teorema 5.36 (Teorema de transporte de Reynolds) *Sea V una variedad semirriemanniana orientada, sea dm su elemento de volumen orientado y sea X_t un campo vectorial en V dependiente del tiempo. Consideremos una función $f \in C^\infty(I \times V)$ en V dependiente del tiempo (donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo) y una subvariedad compacta⁹ W de la misma dimensión que V . Entonces*

$$\frac{D}{Dt} \int_W f_t dm = \frac{\partial}{\partial t} \int_W f_t dm + \int_{\partial W} f_t \langle X_t, N \rangle d\sigma = \int_W \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f_t X_t) \right) dm,$$

donde $d\sigma$ es el elemento de volumen orientado de ∂W y N es la determinación del vector normal unitario que induce su orientación.

DEMOSTRACIÓN: Basta tener en cuenta que

$$i_{X_t}(f_t dm)|_{\partial W_t} = f_t i_{X_t}(dm)|_{W_t} = f_t \langle X_t, N \rangle d\sigma.$$

La segunda igualdad la proporciona el teorema de Stokes. ■

Por ejemplo, haciendo $f_t = 1$ concluimos lo siguiente:

Teorema 5.37 *Sea V una variedad semirriemanniana orientada sin frontera, sea dm su elemento de volumen orientado y sea X_t un campo vectorial en V dependiente del tiempo. Consideremos una subvariedad compacta W de la misma dimensión que V . Entonces*

$$\frac{Dm(W)}{Dt} = \int_W \operatorname{div}(X_t) dm.$$

En particular, la condición necesaria y suficiente para que el flujo de X_t conserve el volumen es que $\operatorname{div} X_t = 0$.

(La condición es necesaria porque si se conserva el volumen el teorema de transporte de Reynolds implica que la integral de la divergencia sobre cualquier subvariedad W en las condiciones del teorema es nula, lo cual implica a su vez que la divergencia es nula.)

⁹En el caso en que V es un abierto en \mathbb{R}^n , basta con que W sea un abierto acotado que satisfaga las condiciones del teorema de Stokes con singularidades.

Por otra parte, si tomamos como f la densidad ρ del fluido, la ecuación de continuidad afirma que el integrando del último término del teorema de Reynolds es la función ψ definida en (5.2), que representa la cantidad de fluido creada por unidad de tiempo y de volumen y, en efecto, lo que afirma el teorema en este caso es que

$$\frac{D(M(W))}{Dt} = \int_W \psi_t(x) dm,$$

y el término izquierdo representa la variación de la masa de fluido contenida en W teniendo en cuenta su desplazamiento. Observemos que al desplazar W según el flujo, en el recinto móvil no entra ni sale fluido, y lo que expresa esta fórmula es que la variación de masa sólo puede deberse a la creación o destrucción de fluido en su interior, es decir, a la presencia de fuentes o sumideros de fluido.

En ausencia de fuentes y sumideros, la derivada total de la masa es nula, y el término intermedio del teorema de Reynolds afirma entonces que

$$\int_{\partial W} \langle \rho_t X_t, N \rangle d\sigma = -\frac{\partial m(W)}{\partial t},$$

es decir, que el flujo del campo $\rho_t X_t$ por ∂W es igual a la disminución de masa de W (considerado fijo) por unidad de tiempo (es decir, la masa de fluido que sale de W por unidad de tiempo).

Otro caso particular del teorema de transporte es el que nos da una fórmula para la derivada del flujo de un campo vectorial sobre una hipersuperficie:

Teorema 5.38 *Sea V una variedad de Riemann orientada, sean X_t, Y_t dos campos vectoriales en V dependientes del tiempo y sea W una hipersuperficie compacta orientada y N la determinación del vector normal unitario que induce su orientación. Entonces*

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_W \langle Y_t, N \rangle d\sigma &= \int_W (\langle \partial_t Y, N \rangle + \langle \mathcal{L}_{X_t}(Y_t), N \rangle + \operatorname{div} X_t \langle Y_t, N \rangle) d\sigma \\ &= \int_W \langle \partial_t Y, N \rangle d\sigma + \int_W \operatorname{div} Y_t \langle X_t, N \rangle d\sigma + \int_{\partial W} i_{X_t}(i_{Y_t}(dm)). \end{aligned}$$

donde la derivada total se calcula respecto del flujo determinado por X .

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema de transporte 5.34 tenemos que

$$\frac{D}{Dt} \int_W i_{Y_t}(dm) = \frac{\partial}{\partial t} \int_W i_{Y_t}(dm) + \int_W \mathcal{L}_{X_t}(i_{Y_t}(dm)).$$

Es fácil ver que derivar el primer integrando equivale a derivar Y_t . Para el segundo término usamos la fórmula (3.9):

$$\mathcal{L}_X(i_Y(dm)) = i_{[X,Y]}(dm) + i_Y(\mathcal{L}_X(dm)) = i_{\mathcal{L}_X(Y)}(dm) + i_Y(\operatorname{div} X dm),$$

con lo que

$$\frac{D}{Dt} \int_W i_{Y_t}(dm) = \int_W (i_{\partial_t Y}(dm) + i_{\mathcal{L}_{X_t}(Y_t)}(dm) + i_{Y_t}(\operatorname{div} X_t dm)),$$

que equivale a la primera igualdad del enunciado. Alternativamente, podemos usar la fórmula de Cartan (3.13):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(i_Y(dm)) &= i_X(di_Y(dm)) + di_X(i_Y(dm)) \\ &= i_X(\operatorname{div} Y dm) + di_X(i_Y(dm)), \end{aligned}$$

con lo que resulta la segunda igualdad del enunciado. ■

En el caso en que la variedad V es tridimensional, el tercer término de la segunda fórmula del teorema anterior admite una expresión más simple, sin más que tener en cuenta que $i_{X_t}(i_{Y_t}(dm)) = \sharp(Y_t \times X_t)$ (por A.30, véanse las observaciones finales tras el teorema). Cuando V es un abierto en \mathbb{R}^3 podemos escribir también $i_{X_t}(i_{Y_t}(dm)) = \sharp(Y_t \times X_t) = (\vec{Y}_t \times X_t) \cdot d\vec{x}$ y la fórmula para la derivada total del flujo por una superficie de una función \vec{F} respecto a un campo de velocidades \vec{v} es

$$\frac{D}{Dt} \int_W \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_W \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} \cdot \vec{n} d\sigma + \int_W (\operatorname{div} \vec{F})(\vec{v} \cdot \vec{n}) d\sigma + \int_{\partial W} (\vec{F} \times \vec{v}) \cdot d\vec{x}. \quad (5.10)$$

5.7 La cohomología de De Rham

Si tenemos una integral de la forma $\int_V \omega$ y queremos reducirla a una integral en ∂V mediante el teorema de Stokes, necesitamos expresar $\omega = d\eta$, para cierta $n-1$ -forma η , lo cual no siempre es posible. No es éste el único contexto en el que resulta fundamental determinar si una k -forma dada es o no la diferencial de una $k-1$ -forma. Por ejemplo, un campo vectorial X será conservativo si y sólo si $X = \nabla f$, para cierta función f , lo cual equivale a que $\flat X = df$, es decir, a que una 1-forma sea la diferencial de cierta 0-forma.

Para analizar este problema conviene introducir los conceptos siguientes:

Definición 5.39 Sea V una variedad diferencial y $\omega \in \Lambda^k(V)$. Se dice que la forma ω es *cerrada* si $d\omega = 0$, y se dice que es *exacta* si existe $\eta \in \Lambda^{k-1}(V)$ tal que $\omega = d\eta$.

Así, lo que estamos planteando es el problema de determinar si una k -forma dada es exacta, y lo primero que observamos es que una condición necesaria para ello es que sea cerrada, pues si $\omega = d\eta$, entonces $d\omega = dd\eta = 0$.

El conjunto $Z^k(V)$ de todas las k -formas cerradas es un subespacio vectorial de $\Lambda^k(V)$ y el conjunto $F^k(V)$ de todas las k -formas exactas es un subespacio vectorial de $Z^k(V)$. (Notemos que $Z^n(V) = \Lambda^n(V)$, mientras que $F^0(V) = 0$.) Los espacios cociente

$$H^k(V) = Z^k(V)/F^k(V)$$

se llaman *grupos de cohomología de De Rham* de V . (Es costumbre llamarlos grupos, aunque son espacios vectoriales.)

En estos términos, la propiedad de que todas las k -formas cerradas de una variedad V sean exactas equivale a que $H^k(V) = 0$.

Ejemplos En el ejemplo tras el teorema 5.2 mostramos una 1-forma diferencial cerrada en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ que no es exacta. Así pues, $H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \neq 0$.

Si V es una variedad compacta orientable sin frontera, su elemento de volumen dm es un ejemplo de n -forma cerrada no exacta. Es cerrada porque $\Lambda^{n+1}(V) = 0$, y no es exacta porque el teorema de Stokes implica que las n -formas exactas tienen integral nula. Por lo tanto, $H^n(V) \neq 0$. ■

Si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación diferenciable, el teorema 3.48 nos da que $df^*(\omega) = f^*(d\omega)$, de donde se sigue que f^* se restringe a una aplicación lineal

$$f^* : Z^k(W) \rightarrow Z^k(V)$$

que además cumple que $f^*[F^k(W)] \subset F^k(V)$, luego f^* induce una aplicación lineal

$$\bar{f}^* : H^k(W) \rightarrow H^k(V).$$

Es obvio que $(\overline{f \circ g})^* = \bar{g}^* \circ \bar{f}^*$, así como que la identidad en una variedad induce la aplicación identidad entre sus grupos de cohomología, luego si f es un difeomorfismo entonces \bar{f}^* y \bar{f}^{-1*} son aplicaciones mutuamente inversas, luego \bar{f}^* es un isomorfismo. Así pues, variedades difeomorfas tienen grupos de cohomología isomorfos.

Trivialmente, no podemos aspirar a que se cumpla $H^0(V) = 0$. En concreto:

Teorema 5.40 Si V es una variedad diferencial con un número finito m de componentes conexas, entonces $\dim H^0(V) = m$.

DEMOSTRACIÓN: Como $F^0(V) = 0$, tenemos que $H^0(V) \cong Z^0(V)$, y basta tener en cuenta el teorema 5.3, según el cual las funciones $f \in Z^0(V)$ son las constantes en cada componente conexa de V . Por lo tanto, $Z^0(V) \cong \mathbb{R}^m$. ■

El lema de Poincaré Vamos a dar una condición suficiente para que una variedad diferencial V cumpla $H^k(V) = 0$ para $k = 1, \dots, n$.

Dados dos números reales $a < b$, definimos el operador integral

$$I_a^b : \Lambda^k(\mathbb{R} \times V) \rightarrow \Lambda^k(V)$$

como la aplicación que a cada $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R} \times V)$ le asigna

$$I_a^b(\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \int_a^b \iota_{t*}(\omega)_p(v_1, \dots, v_k) dt,$$

donde $\iota_t : V \rightarrow \mathbb{R} \times V$ es la inclusión $\iota_t(p) = (t, p)$.

Veamos que, en efecto, $I_a^b(\omega) \in \Lambda^k(V)$. Claramente es una k -forma diferencial. Sólo tenemos que comprobar que es diferenciable.

Un hecho que usaremos en varias ocasiones es que si $p \in V$ y $x : U \rightarrow \tilde{U}$ es una carta alrededor de p , entonces $I_a^b(\omega)|_U = I_a^b(\omega|_{\mathbb{R} \times U})$, pues, de hecho, para calcular $I_a^b(\omega)_p$ sólo se usa $\omega|_{[a,b] \times \{p\}}$.

Por ejemplo, esto nos permite ahora suponer que ω está definida en $\mathbb{R} \times U$, y por consiguiente que se expresa como suma de k -formas de tipo

$$\eta = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

con $i_1 < \cdots < i_k$, donde admitimos la posibilidad de que $i_1 = 0$ con el convenio de que $x^0 = t$. Si aparece dt , entonces $\iota_{t^*}(\eta) = 0$ y el término no contribuye en nada. En caso contrario

$$\iota_{t^*}(\eta)(p)(v_1, \dots, v_k) = f(t, p)(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k})(v_1, \dots, v_k),$$

luego

$$I_a^b(\eta)(p)(v_1, \dots, v_k) = \left(\int_a^b f(t, p) dt \right) (dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k})(v_1, \dots, v_k),$$

y en definitiva

$$I_a^b(\eta) = \left(\int_a^b f dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Ahora es inmediato que $I_a^b(\eta)$ es diferenciable, luego $I_a^b(\omega)$ también.

Evidentemente I_a^b es lineal. Veamos que conmuta con la diferencial exterior, es decir, que $d \circ I_a^b = I_a^b \circ d$.

Sea $p \in V$ y x una carta alrededor de p . Nuevamente, como tanto la diferencial como el operador integral dependen sólo de la restricción de ω al dominio de la carta $I \times x$, no perdemos generalidad si trabajamos con una forma en este dominio y, más aún, por linealidad podemos tomarla de tipo

$$\omega = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Si $i_1 = 0$, es decir, si ω contiene a dt , entonces $d\omega$ se expresará como suma de formas, todas ellas con dt , luego tanto si hacemos actuar primero la diferencial como el operador integral, obtenemos la forma nula. Supongamos, pues, que ω no contiene a dt . Entonces, tanto en un orden como en otro, llegamos a

$$\sum_{i \neq i_j} \left(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i} dt \right) dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

donde la suma recorre todos los índices distintos de i_1, \dots, i_k (notemos que si $k = n$ ambos miembros de la igualdad que queremos probar son la aplicación nula). ■

Ahora probamos la relación fundamental:

$$\iota_{b^*} - \iota_{a^*} = d \circ i_{\partial_t} \circ I_a^b + i_{\partial_t} \circ I_a^b \circ d.$$

Puesto que el operador integral conmuta con la diferencial, podemos escribir el segundo miembro como $(d \circ i_{\partial_t} + i_{\partial_t} \circ d) \circ I_a^b$. Por el argumento habitual podemos restringirnos al dominio de una carta y trabajar con una forma

$$\omega = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

A su vez hemos de distinguir si aparece dt o no. Si no aparece tenemos que $d(i_{\partial_t}(\omega)) = 0$ y

$$i_{\partial_t}(d\omega) = \frac{\partial f}{\partial t} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Al aplicar I_a^b obtenemos

$$\left(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial t} dt \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = (\iota_b \circ f - \iota_a \circ f) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \iota_{b*}(\omega) - \iota_{a*}(\omega).$$

Supongamos ahora que $\omega = f dt \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$. Entonces

$$d\omega = - \sum_{i \neq i_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} dt \wedge dx^i \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

luego

$$i_{\partial_t}(d\omega) = - \sum_{i \neq i_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

y

$$d(i_{\partial_t}(\omega)) = \sum_{i \neq i_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} + \frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Al sumar estos dos términos nos queda sólo el último sumando de la última igualdad y, como tiene dt , al aplicar I_a^b queda la forma nula. Pero también es claro que $\iota_{b*}(\omega) - \iota_{a*}(\omega) = 0$, pues $\iota_{t*}(dt) = 0$. ■

Para mostrar el interés de la fórmula que hemos probado introducimos el concepto siguiente:

Definición 5.41 Dos aplicaciones diferenciables $f, g : V_1 \rightarrow V_2$ entre dos variedades diferenciables son *homotópicas* si existe una aplicación diferenciable $H : [0, 1] \times V_1 \rightarrow V_2$ tal que, para todo $p \in V_1$, se cumpla

$$H(0, p) = f(p), \quad H(1, p) = g(p).$$

Se dice que la aplicación H es una *homotopía* entre f y g .

En otras palabras, dos aplicaciones son homotópicas si una se puede transformar en la otra mediante una gradación diferenciable. Veamos que la homotopía es una relación de equivalencia.

En efecto, es fácil ver que es una relación reflexiva y simétrica. Para probar la transitividad consideramos tres aplicaciones diferenciables $f_1, f_2, f_3 : V_1 \rightarrow V_2$ y dos homotopías $H_1, H_2 : [0, 1] \times V_1 \rightarrow V_2$ entre f_1, f_2 y f_2, f_3 , respectivamente. Tomamos $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ diferenciable tal que $g|_{[0, 1/4]} = 0$ y $g|_{[1/2, 1]} = 1$. Así, una homotopía entre f_1 y f_3 viene dada por

$$H(t, p) = \begin{cases} H_1(g(t + 1/4), p) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ H_2(g(t - 1/2), p) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La clave está en que H es diferenciable en cada punto $(1/2, p)$ porque en un cierto entorno coincide con $H(t, p) = f_2(p)$.

Teorema 5.42 *Si $f, g : V_1 \rightarrow V_2$ son dos aplicaciones diferenciables homotópicas, entonces las aplicaciones inducidas $\bar{f}^*, \bar{g}^* : H^k(V_2) \rightarrow H^k(V_1)$ son iguales.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $H : [0, 1] \times V_1 \rightarrow V_2$ una homotopía entre f y g . Entonces $\iota_0 \circ H = f$, $\iota_1 \circ H = g$, luego

$$g^* - f^* = H^* \circ (\iota_1^* - \iota_0^*) = d \circ H^* \circ i_{\partial_t} \circ I_0^1 + H^* \circ i_{\partial_t} \circ I_0^1 \circ d,$$

donde hemos usado que la retracción H^* conmuta con la diferencial exterior. Por lo tanto, si $\omega \in Z^k(V_2)$, tenemos que

$$g^*(\omega) - f^*(\omega) = d(I_0^1(i_{\partial_t}(H^*(\omega)))) \in F^k(V_1),$$

luego $\bar{g}^*([\omega]) = \bar{f}^*([\omega])$. ■

Definición 5.43 Una variedad diferencial V es *contractible* si la aplicación identidad $I : V \rightarrow V$ es homotópica a una función constante.

Teorema 5.44 (Lema de Poincaré) *Si V es una variedad diferencial contractible de dimensión n , entonces $H^k(V) = 0$, para $k = 1, \dots, n$.*

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que si $c : V \rightarrow V$ es constante y $k > 0$, entonces $\bar{c}^* = 0$, mientras que $\bar{I}^* : H^k(V) \rightarrow H^k(V)$ es la identidad. Pero si la identidad es la aplicación nula, es que $H^k(V) = 0$. ■

Ejemplos Observemos que \mathbb{R}^n es contractible, pues una homotopía entre la identidad y la aplicación constante igual a 0 es $H(t, p) = tp$.

La restricción de esta misma homotopía prueba que una bola abierta o cerrada de centro en el origen de coordenadas es contractible, luego cualquier variedad difeomorfa a una bola abierta o cerrada tiene grupos de cohomología triviales (salvo para $k = 0$).

Si V es una variedad compacta orientable sin frontera de dimensión n , hemos probado que $H^n(V) \neq 0$, luego V no es contractible. Por el mismo motivo, tampoco lo es $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. ■

La cohomología de las esferas En este apartado probaremos lo siguiente:

Teorema 5.45 *Se cumple:*

$$\dim H^k(S^n) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, n, \\ 0 & \text{si } 1 \leq k \leq n-1. \end{cases}$$

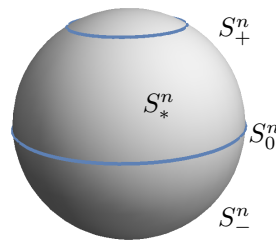
Consideramos la descomposición siguiente de S^n :

$$S_+^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \geq 0\},$$

$$S_-^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \leq \sqrt{3}/2\},$$

$$S_*^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid 0 \leq x_{n+1} \leq \sqrt{3}/2\},$$

$$S_0^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} = 0\}.$$



La proyección estereográfica transforma S_-^n en una bola cerrada de \mathbb{R}^n , por lo que $H^k(S_-^n) = 0$ para $k \geq 1$. Lo mismo vale para S_+^n , pero en este caso consideramos la proyección $\pi : S_+^n \rightarrow \bar{B}^n$ que elimina la última coordenada de cada punto. Así tenemos además que

$$\pi[S_*^n] = \bar{B}_0^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 1/2 \leq \|x\| \leq 1\}.$$

Es claro que S_0^n es difeomorfo a S^{n-1} , por lo que sus grupos de cohomología son isomorfos. Para determinar la cohomología de S_*^n consideramos la inclusión $i : S_0^n \rightarrow S_*^n$ y la aplicación $j : S_*^n \rightarrow S_0^n$ dada por $j(x) = \pi_0(x)/\|\pi_0(x)\|$, donde π_0 es la proyección dada por $\pi_0(x) = (x_1, \dots, x_n, 0)$. Estas aplicaciones inducen aplicaciones lineales

$$\bar{i}_* : H^k(S_*^n) \rightarrow H^k(S_0^n), \quad \bar{j}_* : H^k(S_0^n) \rightarrow H^k(S_*^n).$$

Vamos a probar que son mutuamente inversas, con lo que ambas serán isomorfismos. Como $i \circ j = I$, también $\bar{j}_* \circ \bar{i}_* = I$. Por otra parte, $j \circ i = j$, considerando ahora a j como aplicación $j : S_*^n \rightarrow S_*^n$. Se cumple que j es homotópica a la identidad en S_*^n , pues una homotopía es

$$H(t, x) = \left((1-t)\pi(x) + t \frac{\pi(x)}{\|\pi(x)\|}, \sqrt{1 - \left\| (1-t)\pi(x) + t \frac{\pi(x)}{\|\pi(x)\|} \right\|^2} \right).$$

El teorema 5.42 implica entonces que $\bar{i}_* \circ \bar{j}_* = \bar{j}_*$ es también la identidad, luego en efecto \bar{i}_* y \bar{j}_* son isomorfismos. En particular, los grupos de cohomología de S_*^n son isomorfos a los de S_0^n , luego a los de S^{n-1} .

Por último, necesitamos un resultado auxiliar sobre extensión de formas diferenciales:

Teorema 5.46 *Para cada forma $\omega \in \Lambda^k(S_*^n)$, existe $\omega^* \in \Lambda^k(S_+^n)$ tal que $\omega^*|_{S_*^n} = \omega$ y $d\omega^*|_{S_*^n} = d\omega$.*

DEMOSTRACIÓN: Teniendo en cuenta que la proyección $\pi : S_+^n \rightarrow \bar{B}^n$ es un difeomorfismo que transforma S_*^n en \bar{B}_0^n , basta probar el resultado para \bar{B}^n y \bar{B}_0^n , pues es claro que usando el isomorfismo $\pi_* : \Lambda^k(\bar{B}^n) \rightarrow \Lambda^k(S_+^n)$ podemos transportarlo al caso que nos interesa.

Consideramos las coordenadas cartesianas en \bar{B}^n y \bar{B}_0^n . Pongamos que

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Por el teorema 1.22 cada función f_{i_1, \dots, i_k} se extiende a un abierto que contiene al compacto \bar{B}_0^n . Es claro que podemos tomar el mismo para todas las funciones, y exigir que sea de la forma

$$A = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{2} - \epsilon < \|p\| < 1 + \epsilon\}.$$

Ahora basta tomar una función diferenciable $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = 0$ para $x < 1/2 - 2\epsilon/3$ y $h(x) = 1$ para $x > 1/2 - \epsilon/3$. El teorema [An 5.14] nos da la existencia de tal función. Así, la forma

$$\omega^* = \sum_{i_1 < \dots < i_k} h f_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

entendiendo que es nula en $B_{1/2-2\epsilon/3}(0)$, es diferenciable y cumple claramente lo pedido, pues coincide con (una extensión de) ω en un abierto. ■

Ahora ya estamos en condiciones de determinar inductivamente la dimensión de los grupos $H^k(S^n)$. Consideramos en primer lugar el caso $k = 1$ (de modo que $n \geq 2$):

Si $\omega \in \Lambda^1(S^n)$ es cerrada, también lo son $\omega|_{S_+^n}$ y $\omega|_{S_-^n}$, luego $\omega|_{S_+^n} = df_+$ y $\omega|_{S_-^n} = df_-$, para ciertas funciones $f_{\pm} \in C^\infty(S_{\pm}^n)$ porque sabemos que $H^1(S_{\pm}^n) = 0$. Entonces $f_0 = f_-|_{S_*^n} - f_+|_{S_*^n}$ cumple que $df_0 = \omega|_{S_*^n} - \omega|_{S_*^n} = 0$ y S_*^n es conexo, luego f_0 es constante. La función $f_+^* = f_+ + f_0 \in C^\infty(S_+^n)$ sigue cumpliendo $df_+^* = \omega|_{S_+^n}$ y además $f_+^*|_{S_*^n} = f_+|_{S_*^n} + f_0 = f_-|_{S_*^n}$. Por lo tanto, las funciones f_+^* y f_- se extienden a una función $f \in C^\infty(S^n)$ tal que $df = \omega$.

Ahora probamos por inducción sobre n que $H^k(S^n) = 0$ para $1 \leq k \leq n-1$. Si $n = 2$ necesariamente $k = 1$ y ya está probado. Supongamos que el resultado es cierto para $n-1$ y tomemos $1 \leq k \leq n-1$ y sea $\omega \in \Lambda^k(S^n)$ una forma cerrada. Podemos suponer $k > 1$ porque el caso $k = 1$ ya está probado.

Las formas $\omega|_{S_{\pm}^n}$ son también cerradas, luego $\omega|_{S_+^n} = d\eta_+$ y $\omega|_{S_-^n} = d\eta_-$, para ciertas formas $\eta_{\pm} \in \Lambda^{k-1}(S_{\pm}^n)$. Entonces $\eta_0 = \eta_-|_{S_*^n} - \eta_+|_{S_*^n} \in \Lambda^{k-1}(S_*^n)$ cumple que $d\eta_0 = 0$, y $H^{k-1}(S_*^n)$ es isomorfo a $H^{k-1}(S^{n-1})$, que es nulo por hipótesis de inducción. Por lo tanto $\eta_0 = d\eta_1$, para cierta forma $\eta_1 \in \Lambda^{k-2}(S_*^n)$. Por el teorema anterior podemos extenderla a una forma $\eta_1^* \in \Lambda^{k-2}(S_+^n)$, de modo que $\eta_+^* = \eta_+ + d\eta_1^*$ sigue cumpliendo $d\eta_+^* = \omega|_{S_+^n}$ y además ahora tenemos que $\eta_+^*|_{S_*^n} = \eta_+|_{S_*^n} + d\eta_1 = \eta_-|_{S_*^n}$. Por consiguiente η_+^* y η_- se extienden a una forma $\eta \in \Lambda^{k-1}(S^n)$ tal que $d\eta = \omega$.

El caso $k = n$ es más delicado. Demostramos primero lo siguiente:

Teorema 5.47 Una forma $\omega \in \Lambda^n(S^n)$ es exacta si y sólo si $\int_{S^n} \omega = 0$.

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema de Stokes sabemos que las formas exactas tienen integral nula. Probaremos el recíproco por inducción sobre n .

Para $n = 1$ consideramos $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $\alpha(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Sea $\omega \in \Lambda^1(S^1)$ y sea $\alpha^*(\omega) = h dt$, para cierta $h \in C^\infty(\mathbb{R})$. Como $\alpha|_{]x, x+1[}$ es un difeomorfismo que cubre todo S^1 salvo un conjunto nulo de dos puntos, tenemos que

$$\int_{S^1} \omega = \int_x^{x+1} h(t) dt.$$

Si la integral es nula, entonces la función

$$g(x) = \int_0^x h(t) dt$$

es diferenciable en \mathbb{R} y periódica con periodo 1. Es claro entonces que la función $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(\alpha(x)) = g(x)$ está bien definida y es diferenciable. Además,

$$\alpha^*(df) = d(\alpha \circ f) = dg = h dt = \alpha^*(\omega),$$

y como α es un difeomorfismo local, esto implica que $df|_p = \omega(p)$ para todo $p \in S^1$, luego $\omega = df$.

Supongamos que el teorema se cumple para $n-1$ y sea $\omega \in \Lambda^n(S^n)$ una forma con integral nula. Como toda n -forma es cerrada, $\omega|_{S_+^n} = d\eta_+$ y $\omega|_{S_-^n} = d\eta_-$, porque ambas subvariedades tienen cohomología trivial. Además, por el teorema de Stokes, si llamamos $\bar{S}_+^n = \{x \in S^n \mid x_n \leq 0\}$, tenemos que

$$0 = \int_{S^n} \omega = \int_{S_+^n} \omega + \int_{\bar{S}_+^n} \omega = \int_{S_+^n} \eta_+ - \int_{S_0^n} \eta_-,$$

donde el signo negativo se debe a que la orientación que \bar{S}_+^n induce en su frontera S_0^n es la opuesta a la que induce S_+^n .

Así pues, la forma $\eta_0 = \eta_-|_{S_0^n} - \eta_+|_{S_0^n} \in \Lambda^{n-1}(S_0^n)$ cumple que $\eta_0|_{S_0^n}$ tiene integral nula, pero S_0^n es difeomorfa a S^{n-1} , luego por hipótesis de inducción $\eta_0|_{S_0^n}$ es exacta. Ahora bien, $\eta_0|_{S_0^n} = i_*(\eta_0)$ y si su clase de cohomología $[\eta_0|_{S_0^n}] = \bar{i}_*([\eta_0])$ es nula, también $[\eta_0] = 0$, porque \bar{i}_* es un isomorfismo, luego $\eta_0 = d\eta_1$, para cierta $\eta_1 \in \Lambda^{n-2}(S_0^n)$. Por el teorema 5.46 podemos extenderla a $\eta_1^* \in \Lambda^{n-2}(S_+^n)$, de modo que $d\eta_1^*|_{S_0^n} = \eta_0$.

A su vez, podemos considerar $\eta_+^* = \eta_+ + d\eta_1^* \in \Lambda^{n-1}(S_+^n)$, que sigue cumpliendo que $d\eta_+^* = \omega|_{S_+^n}$, pero además $\eta_+^*|_{S_0^n} = \eta_+|_{S_0^n} + \eta_-|_{S_0^n} - \eta_+|_{S_0^n} = \eta_-|_{S_0^n}$. Por consiguiente, η_+^* y η_-^* se extienden a una forma $\eta \in \Lambda^{n-1}(S^n)$, que claramente cumple $d\eta = \omega$. ■

Esto significa que el operador $\int : \Lambda^n(S^n) \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada n -forma le asigna su integral en S^n es una aplicación lineal (claramente suprayectiva, pues como S^n es orientable tiene elementos de volumen orientados, con integral no

nula) cuyo núcleo es precisamente el subespacio $F^n(S^n)$ de las formas exactas. Por el teorema de isomorfía tenemos un isomorfismo

$$\int : H^n(S^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

que a cada clase de cohomología le asigna la integral de cualquiera de sus elementos. Este isomorfismo prueba que $\dim H^n(S^n) = 1$, que era lo único que quedaba por probar.

La cohomología de los espacios proyectivos En este apartado probaremos el teorema siguiente:

Teorema 5.48 *Se cumple:*

$$\dim H^k(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \text{ o } k = n \text{ es impar,} \\ 0 & \text{si } 1 \leq k \leq n-1 \text{ o } k = n \text{ es par.} \end{cases}$$

En particular, esto implica que los espacios proyectivos $\mathbb{P}^{2n}(\mathbb{R})$ no son orientables, pues ya hemos visto que toda variedad compacta orientable sin frontera tiene un elemento de volumen orientado y, por consiguiente, $H^n(V) \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN: Consideramos la proyección canónica $\pi : S^n \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, que es un difeomorfismo local, es decir, que se restringe a un difeomorfismo en un entorno de cada punto, luego las diferenciales $d\pi|_p$ son isomorfismos. Consideramos también la aplicación $J : S^n \longrightarrow S^n$ dada por $J(p) = -p$, que es un difeomorfismo con la propiedad de que $J \circ J = I$ y $J \circ \pi = \pi$.

Tenemos que $J^* : \Lambda^k(S^n) \longrightarrow \Lambda^k(S^n)$ es un isomorfismo tal que $J^* \circ J^* = I$. Definimos

$$\Lambda_+^k(S) = \{\omega \in \Lambda^k(S^n) \mid J^*(\omega) = \omega\}.$$

Veamos que $\pi^* : \Lambda^k(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \longrightarrow \Lambda_+^k(S^n)$ es un isomorfismo.

Si $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$, como $J \circ \pi = \pi$, se cumple que $\pi^* \circ J^* = \pi^*$, luego $J^*(\pi^*(\omega)) = \pi^*(\omega)$, luego $\pi^*(\omega) \in \Lambda_+^k(S^n)$.

Si $\pi^*(\omega) = 0$ y $v_1, \dots, v_k \in T_{\pi(p)}(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$, entonces

$$0 = \pi^*(\omega)|_p(d\pi|_p^{-1}(v_1), \dots, d\pi|_p^{-1}(v_k)) = \omega_{\pi(p)}(v_1, \dots, v_k),$$

luego $\omega_{\pi(p)} = 0$, luego $\omega = 0$, y esto prueba que π^* es inyectiva.

Tomemos ahora $\omega \in \Lambda_+^k(S^n)$ y veamos que tiene antiimagen por π^* . Si $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, tomamos $q \in S^n$ tal que $\pi(q) = p$ y, para $v_1, \dots, v_k \in T_p(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$, definimos

$$\eta_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_q(d\pi|_q^{-1}(v_1), \dots, d\pi|_q^{-1}(v_k))$$

Observemos que η_p no depende de la elección de q , pues la única alternativa, es decir, el único punto de S^n distinto de q que tiene imagen p es $J(q)$, y la

igualdad $J \circ \pi = \pi$ se traduce en que $dJ|_q \circ d\pi|_q = d\pi|_q$. Además, como $\omega \in \Lambda_+^k(S^n)$, tenemos que $J^*(\omega) = \omega$, lo que se traduce en que

$$\begin{aligned} \omega_q(d\pi|_q^{-1}(v_1), \dots, d\pi|_q^{-1}(v_k)) &= J^*(\omega)|_q(d\pi|_q^{-1}(v_1), \dots, d\pi|_q^{-1}(v_k)) = \\ &= \omega|_{J(q)}(dJ_q(d\pi|_q^{-1}(v_1)), \dots, dJ_q(d\pi|_q^{-1}(v_k))) = \\ &= \omega|_{J(q)}(d\pi|_{J(q)}^{-1}(v_1), \dots, d\pi|_{J(q)}^{-1}(v_k)), \end{aligned}$$

como había que probar.

Claramente, η , así definida, es una k -forma diferencial en $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, pero para asegurar que $\eta \in \Lambda^k(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ falta ver que es diferenciable. Ahora bien, si tomamos $p \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ y $\pi(q) = p$, podemos tomar un entorno U de q tal que $\pi|_U : U \rightarrow \pi[U]$ es un difeomorfismo, y entonces $\eta|_{\pi[U]} = \pi_U^*(\omega|_U) \in \Lambda^k(\pi[U])$.

Por último, si $v_1, \dots, v_k \in T_p(S^n)$, tenemos que

$$\omega_q(v_1, \dots, v_k) = \eta_{\pi(q)}(d\pi|_q(v_1), \dots, d\pi|_q(v_k)) = \pi^*(\eta)_q(v_1, \dots, v_k),$$

luego $\omega = \pi^*(\eta)$.

Como la retracción conmuta con la diferencial exterior, tenemos que π^* se restringe a un isomorfismo $\pi^* : Z^k(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \rightarrow Z_+^k(S^n)$, donde llamamos $Z_+^k(S^n) = \Lambda_+^k(S^n) \cap Z^k(S^n)$, que a su vez cumple

$$\pi^*[F^k(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))] = F_+^k(S^n) = \Lambda_+^k(S^n) \cap F^k(S^n).$$

Por consiguiente,

$$H^k(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \cong H_+^k(S^n) = Z_+^k(S^n)/F_+^k(S^n).$$

Ahora bien, la aplicación $Z_+^k(S^n) \rightarrow H^k(S^n)$ dada por $\omega \mapsto [\omega]$ tiene por núcleo a $F_+^k(S^n)$, luego induce un monomorfismo $H_+^k(S^n) \rightarrow H^k(S^n)$.

Esto ya implica que $H^k(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \cong H_+^k(S^n) = 0$ para $1 \leq k \leq n-1$, y también sabemos que $H^0(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) = 1$ por el teorema 5.40. Sólo falta calcular $H^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ o, equivalentemente, $H_+^n(S^n)$ que, al ser un subespacio de $H^n(S^n)$, sólo puede tener dimensión 0 o 1.

Sea $N \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+1})$ el campo dado por $N = \sum_i x^i \partial_{x_i}$, de modo que $N|_{S^n}$ es el vector normal unitario que determina la orientación de la esfera. Consideremos $J : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dado por $J(x) = -x$, que se restringe al difeomorfismo J que estamos considerando en S^n . Es fácil ver entonces que $dJ|_p(N_p) = N_{J(p)}$.

Sea $dm = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n+1}$ el elemento de volumen orientado de \mathbb{R}^{n+1} . Claramente $J^*(x^i) = -x^i$, luego $J^*(dx^i) = d(J^*(x^i)) = -dx^i$, y de aquí se sigue que $J^*(dm) = (-1)^{n+1} dm$.

Por otra parte, $d\sigma = i_N(dm)$ es el elemento de volumen orientado de S^n , y

$$\begin{aligned} J^*(d\sigma)_p(v_1, \dots, v_n) &= d\sigma_{J(p)}(dJ|_p(v_1), \dots, dJ|_p(v_n)) \\ &= dm_{J(p)}(N_{J(p)}, dJ|_p(v_1), \dots, dJ|_p(v_n)) \\ &= dm_{J(p)}(dJ|_p(N_p), dJ|_p(v_1), \dots, dJ|_p(v_n)) \\ &= J^*(dm)_p(N_p, v_1, \dots, v_n) \\ &= (-1)^{n+1} dm_p(N_p, v_1, \dots, v_n) \\ &= (-1)^{n+1} i_N(dm)_p(v_1, \dots, v_n) \\ &= (-1)^{n+1} d\sigma_p(v_1, \dots, v_n), \end{aligned}$$

luego $J^*(d\sigma) = (-1)^{n+1}d\sigma$, luego $d\sigma \in \Lambda_+^n(S^n)$ si y sólo si n es impar. Esto implica que $[d\sigma] \in H_+^n(S^n)$ si y sólo si n es impar, pues si $[d\sigma] \in H_+^n(S^n)$ para un n par, entonces $d\sigma = \omega + d\eta$, con $\omega \in \Lambda_+^n(S^n)$, $\eta \in \Lambda^{n-1}(S^n)$, y aplicando J^* resulta que $-d\sigma = \omega + dJ^*(\eta)$, luego $2d\sigma = d(\eta - J^*(\eta))$, luego $d\sigma \in F^n(S^n)$, lo cual es absurdo, pues tiene integral no nula.

Como $[d\sigma] \neq 0$ (precisamente porque tiene integral no nula) concluimos que $H_+^n(S^n) = 0$ si y sólo si n es par (pues si n es par hay un elemento no nulo de $H^n(S^n)$ que no está en $H_+^n(S^n)$, luego tiene que ser $H_+^n(S^n) = 0$). ■

Notemos que de la prueba anterior se deduce que los espacios proyectivos $P^n(\mathbb{R})$ sí que son orientables cuando n es impar, pues $d\sigma \in \Lambda_+^n(S^n)$ y existe $\eta \in \Lambda^n(P^n(\mathbb{R}))$ tal que $\pi^*(\eta) = d\sigma$ y, como π es un difeomorfismo local, es claro que η es un elemento de volumen orientado en $P^n(\mathbb{R})$.

5.8 La cohomología y el cálculo vectorial

Vamos a mostrar ahora algunas particularidades del cálculo vectorial sobre variedades V que cumplan condiciones de tipo $H^k(V) = 0$, es decir, variedades en las que las k -formas cerradas son exactas. Por ejemplo:

Teorema 5.49 *Si V es una variedad semirriemanniana tal que $H^1(V) = 0$ y $X \in \mathfrak{X}(V)$, entonces X es conservativo si y sólo si $d\flat X = 0$, lo cual equivale a su vez a que, las coordenadas u^1, \dots, u^n de X en cualquier abierto coordenado cumplan, para todos los índices, i, j ,*

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

DEMOSTRACIÓN: Que X sea conservativo equivale a que exista una función $f \in C^\infty(V)$ tal que $X = \nabla f$, lo que a su vez equivale a que $\flat X = df$, es decir, a que la 1-forma $\flat X$ sea exacta, y por la hipótesis sobre la cohomología esto equivale a que sea cerrada, es decir, a que $d\flat X = 0$.

Si $X|_U = \sum_i u^i \partial_{x_i}$, entonces $\flat X = \sum_i u_i dx^i$, donde $u_i = \sum_k u^i g_{ik}$, luego

$$d\flat X = \sum_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx^j \wedge dx^i = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx^i \wedge dx^j,$$

luego $d\flat X = 0$ equivale a las igualdades del enunciado. ■

Observemos que en el caso en que V es un abierto en \mathbb{R}^n , la condición $X = \nabla f$ equivale a que sus coordenadas sean $u^i = \partial_{x_i} f = u_i$, luego

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j},$$

de modo que la condición del teorema anterior es una condición necesaria por el teorema de Schwarz, y lo que afirma el teorema es que, bajo la hipótesis $H^1(V) = 0$, la condición es también suficiente.

En el caso de una variedad tridimensional tenemos que $dbX = 0$ es equivalente a $*d \flat X = 0$, y también a $\sharp * dbX = 0$, es decir:

Teorema 5.50 *Si V es una variedad semirriemanniana tridimensional tal que $H^1(V) = 0$ y $X \in \mathfrak{X}(V)$, entonces X es conservativo si y sólo si $\text{rot } X = 0$.*

Notemos que no hace falta exigir que V sea orientable porque basta con que la condición se cumpla localmente, y la condición $\text{rot } X|_U = 0$ no depende de la orientación con la que se calcula el rotacional.

Nuevamente, dado que $\text{rot } \nabla f = 0$, la condición del teorema anterior es siempre necesaria, y lo que prueba el teorema es que, bajo la hipótesis de $H^1(V) = 0$, se vuelve suficiente.

Puesto que $\text{div } \text{rot } X = 0$, también sabemos que una condición necesaria para que un campo sea de la forma $X = \text{rot } Y$ es que $\text{div } X = 0$. Bajo la hipótesis adecuada, también es suficiente:

Teorema 5.51 *Sea V una variedad semirriemanniana tridimensional tal que $H^2(V) = 0$ y sea $X \in \mathfrak{X}(V)$ un campo vectorial. Entonces existe un $Y \in \mathfrak{X}(V)$ tal que $X = \text{rot } Y$ si y sólo si $\text{div } X = 0$.*

DEMOSTRACIÓN: La condición $X = \text{rot } Y$ equivale a que $X = \sharp * dbY$, o también a $(-1)^\nu * \flat X = dbY$. Por lo tanto, existe Y tal que $X = \text{rot } Y$ si y sólo si la 2-forma $(-1)^\nu * \flat X$ es cerrada. Por hipótesis esto equivale a que $(-1)^\nu d * \flat X = 0$, o también a que $(-1)^\nu * d * \flat X = 0$, pero esto es $\text{div } X = 0$. ■

En muchos casos, un campo vectorial tridimensional está determinado por su divergencia y su rotacional:

Teorema 5.52 *Si V es una variedad de Riemann compacta tridimensional tal que $H^1(V) = 0$ y un campo $X \in \mathfrak{X}(V)$ cumple $X|_{\partial V} = 0$, $\text{div } X = 0$ y $\text{rot } X = 0$, entonces $X = 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Como $\text{rot } X = 0$, existe una función f tal que $X = \nabla f$, luego $\Delta f = \text{div } \nabla f = \text{div } X = 0$, luego el potencial f es armónico. La primera fórmula de Green aplicada a $f = g$ nos da que

$$\int_V \|X\|^2 dm = 0$$

(pues, por hipótesis, $df/dN = \langle X, N \rangle$ se anula en ∂V). Como el integrando es ≥ 0 , tiene que ser $\|X\| = 0$, luego $X = 0$. ■

Observemos que esto implica que si V es una variedad en las condiciones del teorema anterior y dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$ cumplen

$$X|_{\partial V} = Y|_{\partial V}, \quad \operatorname{div} X = \operatorname{div} Y, \quad \operatorname{rot} X = \operatorname{rot} Y,$$

entonces $X = Y$. Veamos un resultado análogo para \mathbb{R}^3 (donde no tenemos la compacidad):

Teorema 5.53 *Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial tal que $\operatorname{div} F = \operatorname{rot} F = 0$ y F tienda a 0 en infinito. Entonces $F = 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Como en el teorema anterior, concluimos que $X = \nabla f$, donde $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ es una función armónica. Ahora bien, es claro que

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_i}(\Delta f) = \Delta \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right),$$

luego las derivadas parciales de f (las componentes de F) también son armónicas, y por hipótesis tienden a 0 en infinito, luego el teorema del valor medio de Gauss concluimos que son nulas, pues

$$|F_i(x)| \leq \frac{1}{\sigma(\partial B_r(x))} \int_{\partial B_r(x)} |F_i| d\sigma \leq \epsilon$$

para todo r tal que $|F_i| \leq \epsilon$ sobre $\partial B_r(x)$. Por lo tanto $F = 0$. ■

Y en consecuencia, dos campos en \mathbb{R}^3 con la misma divergencia y el mismo rotacional que tiendan a 0 en infinito son iguales. (En realidad basta con que la diferencia tienda a 0 en el infinito.)

Es natural preguntarse ahora si las ecuaciones $\operatorname{div} F = G$, $\operatorname{rot} F = H$ tienen solución para dos campos G y H prefijados. Esto supone resolver ecuaciones en derivadas parciales, así que nos limitaremos al caso de \mathbb{R}^3 , donde contamos con la teoría sobre los potenciales newtonianos. En primer lugar demostramos lo siguiente:

Teorema 5.54 *Sea F un campo de clase C^1 en \mathbb{R}^3 tal que $\operatorname{div} F$ tenga soporte compacto. Entonces F puede descomponerse como $F = V + U$, donde $\operatorname{rot} V = 0$ y $\operatorname{div} U = 0$.*

DEMOSTRACIÓN: El campo V ha de ser de la forma $\nabla\phi$, para una cierta función diferenciable ϕ . Además $\Delta\phi = \operatorname{div} V = \operatorname{div} F$. Según el teorema [An 8.14], esta ecuación tiene como solución el potencial newtoniano

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\operatorname{div} F}{\|x - y\|} dm(y).$$

Definimos, pues, ϕ de esta manera y hacemos $V = \nabla\phi$. A su vez, definimos $U = F - V$. Entonces

$$\operatorname{div} U = \operatorname{div} F - \operatorname{div} V = \Delta\phi - \operatorname{div} \nabla\phi = 0. \quad \blacksquare$$

En las condiciones del teorema anterior tenemos que $V = \nabla\phi$ y $U = \text{rot } A$, para una cierta función $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y un cierto campo $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. A ϕ se le llama *potencial escalar* de F , mientras que A es su *potencial vectorial*. El primero está determinado salvo una constante, mientras que el segundo lo está salvo un gradiente. Podemos determinar completamente A si exigimos que $\text{div } A = 0$.

Conviene definir el *laplaciano vectorial* de un campo $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ como

$$\Delta A = \nabla \text{div } A - \text{rot rot } A.$$

Se comprueba que si $A = (A_1, A_2, A_3)$ entonces $\Delta A = (\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3)$.

Volviendo a nuestro caso, el potencial vectorial A de un campo F (determinado por la condición $\text{div } A = 0$) cumple $\Delta A = -\text{rot rot } A = -\text{rot } U = -\text{rot } F$. Concluimos así que los potenciales ϕ y A de un campo F con divergencia de soporte compacto están determinados por las ecuaciones

$$\Delta\phi = \text{div } F, \quad \Delta A = -\text{rot } F.$$

Si $\text{rot } F$ tiene también soporte compacto entonces la última ecuación vectorial equivale a tres ecuaciones escalares análogas a la primera, y las soluciones son los potenciales newtonianos de las componentes del rotacional. En definitiva tenemos

$$F(x) = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\text{div } F}{\|x-y\|} dm + \frac{1}{4\pi} \text{rot} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\text{rot } F}{\|x-y\|} dm.$$

Teorema 5.55 *Dados dos campos $D : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ y $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de soporte compacto con $\text{div } R = 0$, existe un único campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\text{div } F = D$ y $\text{rot } F = R$.*

DEMOSTRACIÓN: Basta tomar $\Delta\phi = D$, $\Delta A = -R$, $F = \nabla\phi + \text{rot } A$. ■

Por ejemplo, según el teorema [An 8.14], el campo gravitatorio \vec{E} determinado por una distribución de masa (en una región acotada del espacio) con función de densidad ρ está completamente determinado por las ecuaciones

$$\text{div } \vec{E} = -4\pi G\rho, \quad \text{rot } \vec{E} = 0.$$

En el apéndice B se expone la teoría básica sobre el electromagnetismo que, entre otras muchas ilustraciones de la utilidad del cálculo vectorial, muestra cómo el campo eléctrico y el campo magnético están determinados también por su divergencia y su rotacional, a través de las ecuaciones de Maxwell.

5.9 Apéndice: La interpretación del flujo

Demostremos aquí con rigor la interpretación del flujo en hidrodinámica enunciada tras la definición 5.7, de modo que partimos de una variedad diferencial semiriemanniana orientada sin frontera V , de un campo $X \in \mathfrak{X}(V)$, que interpretamos como el flujo de velocidades de un fluido,¹⁰ y de una hipersuperficie compacta orientada W , cuya orientación viene determinada por el vector normal unitario N .

En lugar de interpretar el flujo de X en términos del volumen neto de fluido que atraviesa W por unidad de tiempo, vamos a considerar su masa, para lo cual tenemos que introducir una función de densidad $\rho(t, p)$ que al integrarla sobre una región de V para un tiempo t fijo nos proporciona (por definición) la masa de fluido contenida en dicha región en dicho instante.

Concretamente, vamos a probar lo siguiente:

El flujo $\Phi_W(\rho_{t_0} X)$ es la masa neta de fluido que atraviesa W por unidad de tiempo en el instante t_0 , entendiendo que la masa que la atraviesa en el sentido de N cuenta positivamente y el que la atraviesa en sentido inverso cuenta negativamente.

Si tomamos en particular la función ρ constante igual a 1 podemos reemplazar “masa” por “volumen” en la afirmación anterior, con lo que recuperamos la interpretación que habíamos enunciado tras la definición 5.7. No perdemos generalidad si suponemos $t_0 = 0$.

Consideramos los abiertos

$$W_+ = \{p \in W \mid \langle X_p, N_p \rangle > 0\}, \quad W_- = \{p \in W \mid \langle X_p, N_p \rangle < 0\}$$

y el cerrado

$$W_0 = \{p \in W \mid \langle X_p, N_p \rangle = 0\}.$$

La compacidad de W implica que el grupo uniparamétrico local de X está definido en un producto:

$$\Phi_X :]-\delta, \delta[\times U_0 \longrightarrow V,$$

donde $U_0 \subset V$ es un abierto que contiene a W . Vamos a probar que la restricción

$$\Phi_X^0 :]-\delta, \delta[\times W_+ \longrightarrow V$$

es una inmersión que conserva la orientación.

Tomemos un punto $(t, p) \in]-\delta, \delta[\times W_+$.

Si $v \in T_p(W)$, se cumple que $d\Phi_X^0|_{(t,p)}(v) = d\Phi_{X,t}|_p(v)$. En efecto, basta tener en cuenta que al considerar $v \in T_{(t,q)}(]-\delta, \delta[\times W)$ estamos identificándolo con $dt_t|_p(v)$, donde $\iota_t(q) = (t, q)$, y claramente $\iota_t \circ \Phi_X^0 = \Phi_{X,t}$.

¹⁰Suponemos que X no depende del tiempo, pero véase la nota sobre el caso general al final de la prueba.

Veamos por otra parte que $d\Phi_X^0|_{(t,p)}(\partial_t|_{(t,p)}) = d\Phi_{X,t}|_p(X_p)$. Para ello consideramos $\alpha :]-\delta_0, \delta_0[\rightarrow]-\delta, \delta[$ dada por $\alpha(s) = t + s$, de modo que $d\alpha|_0(\partial_s|_0) = \partial_t|_t$. A su vez $\iota_p(t) = (t, p)$ cumple que $d\iota_p|_t(\partial_t|_t) = \partial_t|_{(t,p)}$. Además,

$$(\alpha \circ \iota_p \circ \Phi_X^0)(s) = \Phi_X^0(t + s, p) = \Phi_{X,t}(\Phi_X(s, p)) = \Phi_{X,t}(\Phi_{X,p}(s)).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} d\Phi_X^0|_{(t,p)}(\partial_t|_{(t,p)}) &= d(\alpha \circ \iota_p \circ \Phi_X^0)|_0(\partial_s|_0) = d(\Phi_{X,p} \circ \Phi_{X,t})|_0(\partial_s|_0) \\ &= d\Phi_{X,t}|_p(d\Phi_{X,p}|_0(\partial_s|_0)) = d\Phi_{X,t}|_p(\Phi'_{X,p}(0)) = d\Phi_{X,t}|_p(X_p). \end{aligned}$$

Si v_1, \dots, v_{n-1} es una base de $T_p(W)$, entonces, como $\langle X_p, N_p \rangle \neq 0$, se cumple que $X_p \notin T_p(W)$, luego X_p, v_1, \dots, v_{n-1} es una base de $T_p(V)$ y, como $\Phi_{X,t}$ es un difeomorfismo, concluimos que

$$d\Phi_X^0|_{(t,p)}(\partial_t|_{(t,p)}), d\Phi_X^0|_{(t,p)}(v_1), \dots, d\Phi_X^0|_{(t,p)}(v_{n-1})$$

es una base de $T_{\Phi_X^0(t,p)}(V)$, pues no es sino la imagen por el isomorfismo $d\Phi_{X,t}|_p$ de la base X_p, v_1, \dots, v_{n-1} .

Con esto queda probado que Φ_X^0 es una inmersión. Para probar que conserva la orientación basta ver que lo hace sobre los puntos de la forma $(0, p)$, pues toda componente conexa de $]-\delta, \delta[\times W_+$ contiene un punto de este tipo, y es claro que una inmersión definida sobre una variedad conexa conserva la orientación en todos los puntos o la invierte en todos ellos.

Ahora bien, si v_1, \dots, v_{n-1} es una base orientada de $T_p(W)$, entonces, por definición de la orientación en un producto, $\partial_t|_{(0,p)}, v_1, \dots, v_{n-1}$ es una base orientada de $T_{(0,p)}(]-\delta, \delta[\times W_+)$, y como $\Phi_{X,0}$ es la identidad, su imagen por $d\Phi_X^0|_{(0,p)}$ es X_p, v_1, \dots, v_{n-1} , luego basta probar que esta base está orientada en $T_p(V)$. Ahora bien, por la elección de N , la base N_p, v_1, \dots, v_{n-1} es una base orientada de $T_p(V)$, y la primera coordenada de X_p en esta base es $\langle X_p, N_p \rangle > 0$, de donde se sigue que la matriz de cambio de base tiene determinante positivo.

Si $0 < h < \delta$ el conjunto $C(h) = \Phi_X[[0, h] \times W_+]$ contiene todas las partículas de fluido que han pasado por W_+ en el intervalo de tiempo $[0, h]$. Si Φ_X^0 es un difeomorfismo, podemos aplicar el teorema de cambio de variable y concluir que el volumen de fluido que ha atravesado h en ese tiempo es

$$Q_+^1(h) = \int_{C(h)} dm = \int_{[0,h] \times W_+} \Phi_{X\#}^0(dm).$$

Si Φ_X^0 no es un difeomorfismo no podemos aplicar el teorema de cambio de variable, pero sigue siendo cierto que la segunda integral representa el volumen de fluido que ha atravesado W_+ en el intervalo de tiempo $[0, h]$. En efecto, podemos cubrir $[0, h] \times W_+ \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i$, donde $U_i \subset]-\delta, \delta[\times W_+$ es un abierto tal

que $\Phi_X^0|_{U_i}$ es un difeomorfismo. Si llamamos $B_i = U_i \cap ([0, h] \times W_+) \setminus \bigcup_{j < i} U_j$, entonces los B_i son conjuntos de Borel disjuntos dos a dos tales que

$$[0, h] \times W_+ = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$$

y el teorema de cambio de variable aplicado a $\Phi_X^0|_{U_i}$ y la función característica de $\Phi_X^0[U_i]$ nos da que

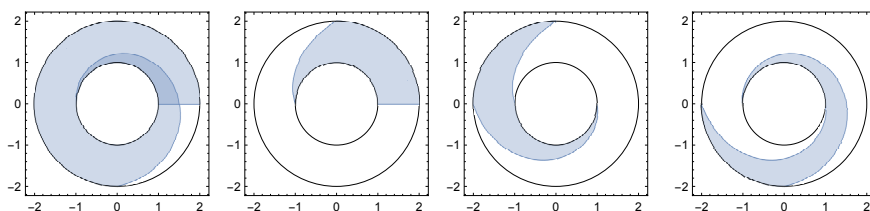
$$Q_+^0(h) = \int_{[0, h] \times W_+} \Phi_X^{0*}(dm) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{B_i} \Phi_X^{0*}(dm) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\Phi_X^0[B_i]} dm = \sum_{i=0}^{\infty} m(\Phi_X^0[B_i]).$$

No podemos decir que el último término sea $m(C(h))$ porque los conjuntos $\Phi_X^0[B_i]$ no son necesariamente disjuntos dos a dos, pero precisamente así estamos calculando correctamente el volumen de fluido que ha pasado por W_+ , porque cada $\Phi_X^0[B_i]$ es un bloque de fluido que ha atravesado W_+ en el intervalo de tiempo considerado, y la única forma que tiene de solaparse con otro bloque es que uno de los dos haya cruzado dos (o más) veces W_+ , pero en tal caso el volumen solapado debe contarse dos o más veces, y eso es lo que hacemos al sumar los volúmenes $m(\Phi_X^0[B_i])$, no tener en cuenta los solapamientos.

Ejemplo Consideremos el campo vectorial en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dado por

$$X(x, y) = \frac{2\pi}{\sqrt{x^2 + y^2}}(-y, x),$$

cuyas curvas integrales son circunferencias recorridas a una velocidad de 2π m/s.



La figura de la izquierda muestra el fluido que ha atravesado el segmento $W = \{0\} \times [1, 2]$ en un tiempo de 1.5 s. Más detalladamente, en la segunda figura vemos el fluido que ha atravesado W en el primer medio segundo. Cada partícula ha recorrido π m, lo que en el caso de la partícula que empieza en $(1, 0)$ se traduce en que ha recorrido media circunferencia, mientras que la que empieza en $(2, 0)$ sólo ha tenido tiempo de recorrer un cuarto de circunferencia.

La tercera figura muestra la posición de dicho fluido al cabo de 1 s. Vemos que la partícula que ha empezado en $(1, 0)$ ha recorrido otra media circunferencia y la que ha empezado en $(2, 0)$ ha recorrido otro cuarto de circunferencia. En

total, el volumen de fluido que ha atravesado W en un segundo es la suma de los volúmenes mostrados en las figuras segunda y tercera. Por último, la cuarta figura muestra la posición del fluido que ha cruzado W en el primer medio segundo al cabo de 1.5 s.

La región sombreada en la tercera figura se solapa con la de la segunda, tal y como se ve en la primera, pero el volumen total de fluido que ha atravesado W al cabo de 1.5 segundos es la suma de los volúmenes sombreados en las figuras segunda, tercera y cuarta, que corresponden, respectivamente, al volumen que ha cruzado W en los intervalos de tiempo $[1, 1.5]$, $[0.5, 1]$, $[0, 0.5]$. Sería un error calcular dicho volumen considerando la región sombreada en la primera figura, sin tener en cuenta el solapamiento. Con la notación precedente, podemos tomar

$$B_0 =]0, 0.5[\times W, \quad B_1 =]0.5, 1[\times W, \quad B_2 =]1, 1.5[\times W,$$

y entonces

$$Q_+^1(1.5) = m(\Phi_X^0[B_0]) + m(\Phi_X^0[B_1]) + m(\Phi_X^0[B_2]),$$

mientras que sería incorrecto definir $Q_+^1(1.5) = m(\Phi_X^0[[0, 1.5] \times W])$.

Aunque no tiene especial interés, observemos que el elemento de volumen de \mathbb{R}^2 es $dm = \rho d\rho \wedge d\theta$ y, la condición de que el fluido se mueve a velocidad constante de 2π m/s equivale a que $\theta(\rho, t) = 2\pi t/\rho$, por lo que

$$d\theta = \frac{2\pi}{\rho} dt + \frac{\partial\theta}{\partial t} dt,$$

luego $dm = 2\pi dt \wedge d\rho$. Por lo tanto, $Q_+^1(h) = \int_0^h \int_1^2 2\pi d\rho dt = 2\pi h$. En particular, las áreas sombreadas en las figuras segunda, tercera y cuarta son de π m² y el flujo por W es de 2π m²/s. Esto también puede obtenerse integrando el elemento de flujo $\langle N, X \rangle d\sigma = 2\pi dx$ sobre W . ■

Volviendo al caso general, si en lugar de considerar el volumen de fluido queremos considerar su masa, tendremos que introducir la función de densidad:

$$Q_+^1(h) = \int_{[0, h] \times W_+} \rho_h \Phi_X^{0*}(dm).$$

Ahora $Q_+^1(h)$ es la masa de fluido que ha atravesado W_+ en el intervalo de tiempo $[0, h]$. Si $\Phi_X^{0*}(dm) = \Delta dt \wedge d\sigma$, donde $d\sigma$ es el elemento de volumen de W , tenemos que

$$Q_+^1(h) = \int_0^h \left(\int_{W_+} \rho_h \Delta_t d\sigma \right) dt,$$

Para derivar esta función aplicamos la regla de la cadena a

$$F(h_1, h_2) = \int_0^{h_1} \left(\int_{W_+} \rho_{h_2} \Delta_t d\sigma \right) dt,$$

con lo que¹¹

$$\frac{dQ_+^1}{dh} = \int_{W_+} \rho_h \Delta_h d\sigma + \int_0^h \left(\int_{W_+} \frac{\partial \rho}{\partial h} \Delta_t d\sigma \right) dt,$$

luego

$$\left. \frac{dQ_+^1}{dh} \right|_0 = \int_{W_+} \rho_0 \Delta_0 d\sigma.$$

Ahora bien, si $p \in W_+$, tenemos que

$$\begin{aligned} (\rho_0 \Delta_0(p) d\sigma|_p)(v_1, \dots, v_{n-1}) &= \rho_0 \Delta(0, p) (dt \wedge d\sigma)(\partial_t|_{(0,p)}, v_1, \dots, v_{n-1}) \\ &= \rho_0 \Phi_X^{0*}(dm)|_{(0,p)}(\partial_t|_{(0,p)}, v_1, \dots, v_{n-1}) \\ &= \rho_0 dm(d\Phi_X^0|_{(0,p)}(\partial_t|_{(0,p)}), d\Phi_X^0|_{(0,p)}(v_1), \dots, d\Phi_X^0|_{(0,p)}(v_{n-1})) \\ &= dm(\rho_0 X_p, v_1, \dots, v_{n-1}) = i_{\rho_0 X}(dm)|_p(v_1, \dots, v_{n-1}). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_{W_+} i_{\rho_0 X}(dm) = \left. \frac{dQ_+^1}{dh} \right|_0.$$

El razonamiento se adapta fácilmente para llegar a la misma conclusión con valores negativos de h , considerando el fluido que va a atravesar W_+ en el intervalo $[h, 0]$ en lugar del que lo ha atravesado.

A su vez, todo el razonamiento se aplica igualmente a W_- salvo la discusión sobre la orientación. En este caso obtenemos que

$$\int_{W_-} i_{\rho_0 X}(dm) = - \left. \frac{dQ_-^1}{dh} \right|_0.$$

Puesto que el flujo sobre W_0 es obviamente nulo (ya que el integrando es la forma nula), debemos probar que la masa de fluido que atraviesa W_0 por unidad de tiempo es nula.¹² Pueden darse situaciones muy variadas: puede haber puntos donde $X_p = 0$ (y, por consiguiente, la curva integral correspondiente es constante), puntos cuya curva integral se mantenga contenida en W , puntos cuya curva integral toque W desde un lado, pero “rebote” sin cruzar al otro lado, o que desde un lado “entre” en W sin salir por el otro, etc.

Dado $p \in W_0$, el teorema 1.14 nos da cartas de W y V alrededor de p en las que la lectura de la inclusión es $(x_2, \dots, x_n) \mapsto (0, x_2, \dots, x_n)$. Esto significa que si $x : U_0 \rightarrow \tilde{U}$ es la carta de V , se cumple que

$$U_0 \cap W = \{q \in U_0 \mid x^1(q) = 0\}.$$

¹¹Para introducir la derivada parcial en la integral respecto de W_+ observamos que la integral sobre W_+ coincide con la integral sobre su clausura compacta, pues ∂W es una variedad diferencial, luego tiene medida nula.

¹²Esto no significa necesariamente que no haya partículas de fluido que atraviesen W por W_0 . Por ejemplo, si la masa de fluido que atraviesa W_0 en un sentido cumple $Q_+^0(h) = h^2$, se cumple que la masa (instantánea) por unidad de tiempo es nula.

Restringiendo x podemos suponer que U_0 tiene clausura compacta y que x se extiende a una carta en un abierto que contiene a dicha clausura. También podemos suponer que la carta x está orientada. Si

$$X|_{U_0} = a^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a^n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

como todos los vectores menos el primero son tangentes a W (y forman una base del espacio tangente en cada punto), tenemos que $a^1(q) = 0$ para todo punto $q \in U_0 \cap W_0$. Podemos tomar un entorno $U \subset U_0 \cap W$ de p de clausura compacta (también contenida en U_0) tal que exista un $\delta_0 > 0$ para el que esté definido $\Phi_X^0 : [-\delta_0, \delta_0] \times U \rightarrow U_0$.

La compacidad de W_0 nos permite cubrirlo por un número finito de abiertos U^1, \dots, U^k en estas condiciones. Llamamos $x_i : U_0^i \rightarrow \tilde{U}^i$ a las cartas correspondientes y, tomando el mínimo, podemos suponer que δ_0 es el mismo para todas.

Sea $dm|_{U_0^i} = \Delta_i dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ y sea M una cota de las funciones Δ_i en todos los abiertos U_0^i (o en sus clausuras compactas). Sea

$$B^i = U^i \setminus \bigcup_{j < i} U^j.$$

Así los conjuntos B^i son conjuntos de Borel en W_0 disjuntos dos a dos, con clausura compacta, cuya unión es todo W_0 .

Si $0 < h < \delta$, llamamos $C^i(h) = \Phi_X[[0, h] \times B^i] \subset V$. Este conjunto contiene a todo el fluido que ha pasado por B^i en el intervalo de tiempo $[0, h]$. Esto incluye también las partículas que hayan podido “rebotar” en B^i sin cruzarlo realmente, pero no importa. Lo que importa es que los conjuntos $C_+^i(h)$ y $C_-^i(h)$ de partículas que han cruzado por B^i , ya sea en el sentido de N o en el de $-N$, respectivamente, están contenidos en $C^i(h)$. Por lo tanto, las masas que contienen cumplen

$$0 \leq Q_+^i(h), Q_-^i(h) \leq Q^i(h) \leq Rm(C^i(h)),$$

donde R es una cota de ρ en un compacto $[-k, k] \times W$.

Sea $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ la proyección que elimina la primera componente y sea $D^i = \pi[x_i[C^i(\delta)]]$, que es un subconjunto de Borel \mathbb{R}^{n-1} de clausura compacta. Así, $x_i[C^i(h)] \subset \mathbb{R} \times C^i$, para todo h . Sea $M' > 0$ la suma de las medidas de Lebesgue de los conjuntos D^i (o cualquier número positivo si la suma fuera nula).

Fijado $\epsilon > 0$, teniendo en cuenta que, para todo $q \in U^i \cap W_0$, la función $x_i^1(\Phi_{X,q}(t))$ tiene derivada $a_i^1(q) = 0$ en $t = 0$, existe un $h > 0$ suficientemente pequeño tal que si $0 \leq t \leq h$, entonces

$$|x_i^1(\Phi_{X,q}(t))| < \frac{\epsilon}{2RMM'}h.$$

Por la continuidad respecto de q podemos tomar el mismo h para todos los puntos de un entorno de q (tomamos h de modo que la desigualdad se cumpla

en q con la mitad de la cota, y por continuidad podemos exigir que se cumpla en un entorno de q con la cota indicada). Por la compacidad de W_0 podemos tomar el mismo h para todo $q \in W_0$, y así

$$x_i[C^i(h)] \subset \left[-\frac{\epsilon}{2RMM'}h, \frac{\epsilon}{2RtMM'}h \right] \times D^i,$$

luego

$$\begin{aligned} Q_{\pm}^i(h) &\leq Q_i(h) = \int_{C^i(h)} \rho_h dm = \int_{x_i[C^i(h)]} \tilde{\rho}_h \tilde{\Delta}_i dx_1 \cdots dx_n \\ &\leq RM m(C^i(h)) \leq \frac{RM\mu(D^i)\epsilon}{RMM'}h, \end{aligned}$$

y al sumar para todos los abiertos que cubren W_0 queda que $Q_{\pm}^0(h) \leq \epsilon h$, para todo h suficientemente pequeño, donde $Q_{\pm}^0(h)$ es la masa total de fluido que ha atravesado W_0 en uno u otro sentido el intervalo de tiempo $[0, h]$. Por consiguiente,

$$\left. \frac{dQ_{\pm}^0}{dh} \right|_0 = 0,$$

y también

$$\left. \frac{dQ_+^0}{dh} \right|_0 - \left. \frac{dQ_-^0}{dh} \right|_0 = 0 = \int_{W_0} i_{\rho_0 X}(dm).$$

Al sumar los resultados que hemos obtenido para W_+ , W_- y W_0 resulta que

$$\left. \frac{dQ_+}{dh} \right|_0 - \left. \frac{dQ_-}{dh} \right|_0 = 0 = \int_W i_{\rho_0 X}(dm),$$

donde ahora $Q_{\pm} = Q_{\pm}^0 + Q_{\pm}^1$ representan la masa total de fluido que atraviesa W en uno y otro sentido (sea por W_0 o por W_{\pm}).

Nota Hemos supuesto que el campo vectorial X no depende del tiempo. Si no es así, el comportamiento del flujo puede ser mucho más caótico, lo que dificulta determinar qué debemos entender por “el volumen que atraviesa W_+ en un tiempo h ”. El caso es que podemos considerar igualmente que dicho volumen viene dado por la integral

$$Q_+^1(h) = \int_{[t_0, t_0+h] \times W_+} \Phi_{X, t_0}^{0*}(dm),$$

donde t_0 es el tiempo inicial, que permanece constante en todo el argumento. La razón es que, por el teorema de Sard, el conjunto $E \subset [t_0, t_0+h] \times W_+$ donde Φ_{X, t_0}^0 tiene diferencial de rango menor que n tiene imagen nula, y $\Phi_{X, t_0}^0|_E = 0$, luego

$$Q_+^1(h) = \int_{([t_0, t_0+h] \times W_+) \setminus E} \Phi_{X, t_0}^{0*}(dm)$$

y con esta restricción dejamos de cubrir una región de V de medida nula, luego no afecta al cálculo del volumen. Ahora podemos descomponer

$$([t_0, t_0+h] \times W_+) \setminus E = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i,$$

donde cada B_i es un conjunto de Borel donde Φ_{X,t_0}^0 es un difeomorfismo, y podemos razonar como en el caso estático que $Q_+^1(h)$ calcula correctamente el volumen deshaciendo los posibles solapamientos.

Teniendo esto en cuenta, el argumento dado vale sin cambio alguno (siempre respecto a un tiempo t_0 prefijado) salvo que ya no podemos asegurar que el coeficiente Δ sea siempre positivo, así que debemos escribir $|\Delta|$, pero Δ_{t_0} si que es positivo, así que al final podemos eliminar el valor absoluto. ■

Capítulo VI

Conexiones afines

Consideremos una curva $\alpha : I \rightarrow V$ en una variedad diferencial. Podemos pensar que $\alpha(t)$ representa la posición en el instante t de una partícula puntual que se mueve por V . Entonces su derivada $\alpha' : I \rightarrow TV$ representa su velocidad, y tal vez el lector se sienta tentado a afirmar que su derivada segunda α'' representa su aceleración, pero hay un inconveniente, y es que no podemos definir tal derivada segunda. Por supuesto, cuando $V = \mathbb{R}^n$ no hay ningún problema: a través de la identificación canónica $\theta : T\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, la derivada abstracta, que en un abierto coordenado admite la expresión

$$\alpha' = \sum_i \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\alpha(t)},$$

se convierte en la derivada usual

$$\alpha' = \left(\frac{dx^1}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt} \right),$$

y nada nos impide volver a derivar para obtener

$$\alpha'' = \left(\frac{d^2x^1}{dt^2}, \dots, \frac{d^2x^n}{dt^2} \right).$$

Incluso podemos considerar la “forma abstracta” de esta derivada segunda:

$$\alpha'' = \sum_i \frac{d^2x^i}{dt^2} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\alpha(t)}. \quad (6.1)$$

¿Qué problema hay, entonces, en usar esta fórmula como definición de derivada segunda —e incluso k -ésima, cambiando el 2 por una k — en una variedad arbitraria? Técnicamente, la respuesta es que tal “definición” dependería de la carta elegida para calcular las coordenadas de $\alpha(t)$, con lo que no tendríamos una derivada segunda, sino una derivada segunda para cada posible carta; pero el problema no es un mero “tecnicismo”. Pretender que las coordenadas de la

derivada segunda sean las derivadas segundas de las coordenadas —que es lo que expresa la fórmula (6.1)— no es razonable ni siquiera en \mathbb{R}^n cuando las coordenadas consideradas no son las cartesianas:

Ejemplo Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y consideramos la carta determinada por las coordenadas polares: $(x, y) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta)$, es fácil ver que

$$\alpha' = \rho' \frac{\partial}{\partial \rho} \Big|_{\alpha(t)} + \theta' \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\alpha(t)},$$

como sabíamos que tenía que ser, pero, calculando en coordenadas cartesianas y luego pasando el resultado a coordenadas polares, obtenemos:

$$\alpha'' = (\rho'' - \rho\theta'^2) \frac{\partial}{\partial \rho} \Big|_{\alpha(t)} + \left(\theta'' + \frac{2\rho'\theta'}{\rho} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\alpha(t)}. \quad (6.2)$$

Esto tiene su interpretación física: aun si ρ es constante —en cuyo caso la partícula describe un círculo alrededor del origen— esto no significa que la componente normal de la aceleración (el primer término¹) sea nula, sino que tiene que haber una aceleración normal (centrípeta) responsable del giro, cuyo valor es precisamente $-\rho\theta'^2$ (la velocidad angular al cuadrado por el radio de giro). Por lo tanto, hubiera sido ingenuo esperar que la aceleración en coordenadas polares fuera

$$\alpha'' = \rho'' \frac{\partial}{\partial \rho} \Big|_{\alpha(t)} + \theta'' \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\alpha(t)},$$

que daría una aceleración normal nula en el caso de un movimiento circular. ■

Puesto que las coordenadas polares en \mathbb{R}^2 están más cerca de pasar por “una carta arbitraria en una variedad diferencial” que las coordenadas de la carta identidad, el lector debería entender que todo intento de tomar (6.1) como definición general de derivada segunda sería, cuanto menos, “temerario” sino fuera porque —de hecho— es incoherente, como ya hemos señalado.

Ahora conviene reflexionar sobre por qué en una variedad podemos definir la primera derivada α' , pero no α'' . La derivada $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}(V)$ es una derivación que indica cómo varía cualquier función f sobre la trayectoria descrita por α . Concretamente:

$$\alpha'(t)(f) = \frac{d(\alpha \circ f)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha(t+h)) - f(\alpha(t))}{h},$$

y no hay ningún problema en comparar los valores que toma f en los puntos $\alpha(t)$ y $\alpha(t+h)$. En particular, las coordenadas de $\alpha'(t)$, es decir, los valores $\alpha'(t)(x^i)$, expresan la variación de las coordenadas de $\alpha(t)$ por unidad de tiempo, y eso es su velocidad en el sentido usual.

¹Observemos que el vector ∂_ρ se corresponde con el vector radial $(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$, mientras que ∂_θ se corresponde con $(-\rho \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \theta)$, que es ortogonal a ∂_ρ .

En cambio, α'' pretende medir la variación de α' sobre la trayectoria descrita por α , luego debería ser

$$\alpha''(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha'(t+h) - \alpha'(t)}{h}.$$

Esto tiene sentido para $V = \mathbb{R}^n$ si consideramos $\alpha' : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, pero no en una variedad diferencial arbitraria, porque en general $\alpha'(t+h) \in T_{\alpha(t+h)}(V)$ y $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}(V)$, luego en la fórmula anterior pretendemos restar dos vectores de dos espacios vectoriales distintos, y eso es absurdo.

Con esto llegamos al *quid* de la cuestión: en \mathbb{R}^n tenemos una forma canónica de identificar todos los espacios tangentes $T_p(\mathbb{R}^n)$. De hecho, al desarrollar el cálculo diferencial en \mathbb{R}^n ni siquiera se plantea la posibilidad de considerar espacios tangentes distintos en puntos distintos, pero el concepto abstracto de variedad diferencial asigna un espacio vectorial distinto a cada uno de sus puntos, y así no tiene sentido restar vectores tangentes correspondientes a puntos distintos, cosa que hacemos inadvertidamente cada vez que derivamos una función vectorial en \mathbb{R}^n .

Para abordar este problema conviene prescindir por el momento de las curvas y replantearlo en términos de campos vectoriales definidos sobre toda la variedad. A este respecto conviene comparar la derivada de Lie de funciones con la derivada de Lie de campos vectoriales. La primera se corresponde exactamente con la derivación direccional de funciones en \mathbb{R}^n :

$$\mathcal{L}_X(f)(p) = df|_p(X_p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\Phi_{X,p}(t)) - f(p)}{t}.$$

Vemos así que $\mathcal{L}_X(f)(p)$ indica la variación de f a lo largo del flujo determinado por X o, más precisamente, dado que $df|_p(X_p)$ sólo depende de X_p , a lo largo de cualquier curva que pase por p con velocidad X_p . En el caso de \mathbb{R}^n , para cada $v \in T_p(\mathbb{R}^n)$, podemos tomar el campo X constante igual a v y entonces $\Phi_{X,p}(t) = p + tv$, con lo que el límite anterior se convierte en la definición usual de derivada direccional $D_v f(p)$.

En cambio, no podemos decir lo mismo de la derivada $\mathcal{L}_X(Y)$ de un campo vectorial $Y \in \mathfrak{X}(V)$. La derivada de Lie no se corresponde en este caso con lo que hacemos en \mathbb{R}^n . Para derivar una función $Y : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ en una dirección v lo que hacemos es calcular

$$D_v Y|_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_{p+tv} - Y_p}{t}, \quad (6.3)$$

pero, como ya hemos advertido, esto no tiene sentido en una variedad arbitraria. Aunque sustituyamos el término $p + tv$ por $\Phi_{X,p}(t)$, para un cierto campo X tal que $X_p = v$, nos encontramos de nuevo con que $Y_{\Phi_{X,p}(t)} \in T_{\Phi_{X,p}(t)}(V)$, mientras que $Y_p \in T_p(V)$, por lo que la resta no tiene sentido.

Según muestra el teorema 3.35, al calcular $\mathcal{L}_X(Y)$ resolvemos este problema aplicando a $Y_{\Phi_{X,p}(t)}$ la diferencial del flujo $d\Phi_{X,-t}|_{\Phi_X(t,p)}$, para obtener un vector de $T_p(V)$, pero esto no se corresponde con derivación usual en \mathbb{R}^n , y una muestra de ello es que, como se deduce inmediatamente de la fórmula (3.4), la derivada $\mathcal{L}_X(Y)(p)$ no depende únicamente de $v = X_p$, sino de la restricción de X a un entorno de p (por la presencia de las derivadas de las funciones coordenadas u^i).

Es verdad que si en \mathbb{R}^n tomamos como X el campo constante igual a v , la diferencial $d\Phi_{X,-t}|_{\Phi_X(t,p)}$ es la identidad y entonces $(\mathcal{L}_X Y)_p$ coincide con la derivada direccional (6.3), pero en una variedad arbitraria V no podemos dar sentido a la expresión “el campo constante igual a v ”, ya que ello nos lleva una vez más al problema de establecer cuándo un vector X_q de otro espacio $T_q(V)$ es “el mismo” que $v = X_p \in T_p(V)$.

Así pues, al problema de definir la derivada segunda de una curva, podemos añadir el de dar una definición de derivada direccional $(D_v Y)_p$ de un campo vectorial $Y \in \mathfrak{X}(V)$ que dependa únicamente del punto p donde se calcula y de una dirección marcada por un vector $v \in T_p(V)$, pero no de un campo X alrededor de p , como sucede con la derivada de Lie $(\mathcal{L}_X Y)_p$.

6.1 Variedades diferenciales afines

Observemos que la posibilidad de identificar canónicamente todos los espacios tangentes con un mismo espacio vectorial no se da únicamente en \mathbb{R}^n , sino en cualquier espacio afín E , donde, para cada par de puntos $p, q \in E$, podemos considerar el isomorfismo $\theta_p^q : \theta_p \circ \theta_q^{-1} : T_p(E) \rightarrow T_q(E)$ que a cada vector abstracto de $T_p(E)$ le asigna el vector abstracto de $T_q(E)$ que se corresponde con el mismo vector “geométrico” de \vec{E} , con lo que podemos decir objetivamente que ambos vectores abstractos son “el mismo vector”. Con la ayuda de estos isomorfismos podemos dar una definición “satisfactoria” de derivada de un campo vectorial abstracto, en el sentido de que se corresponda con la derivación usual en \mathbb{R}^n :

Definición 6.1 Sea E un espacio afín y sean $X, Y \in \mathfrak{X}(E)$. Para cada punto $p \in \mathfrak{X}(E)$ definimos

$$(\nabla_X Y)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\theta_{\Phi_{X,p}(t)}^p(Y_{\Phi_{X,p}(t)}) - Y_p}{t}.$$

Vamos a comprobar que el límite existe, que sólo depende de X_p y que cuando $E = \mathbb{R}^n$ se reduce a la derivada direccional usual.

Para ello fijamos un sistema de referencia $(O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E y consideramos su carta asociada $x : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. Pongamos que

$$X = \sum_{k=1}^n u^k \partial_{x_k}, \quad Y = \sum_{k=1}^n v^k \partial_{x_k}.$$

Entonces $Y_{\Phi_X(t,p)} = \sum_k v^k(\Phi_{X,p}(t)) \partial_{x_k} |_{\Phi_{X,p}(t)} \in T_{\Phi_{X,p}(t)}(\mathbb{R}^n)$. A través del isomorfismo canónico $\theta_{\Phi_{X,p}(t)}$ este vector se identifica con

$$\sum_i v^i(\Phi_{X,p}(t)) \vec{e}_i \in \vec{E},$$

y a través de θ_p^{-1} se identifica con $\sum_k v^k(\Phi_{X,p}(t)) \partial_{x_k} |_p \in T_p(\mathbb{R}^n)$. A este vector podemos restarle Y_p y calcular

$$(\nabla_X Y)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sum_k (v^k(\Phi_{X,p}(t)) - v^k(p)) \partial_{x_k} |_p}{t}.$$

El coeficiente de $\partial_{x_k} |_p$ es $F'_k(0)$, donde $F_k(t) = v^k(\Phi_{X,p}(t))$ (y esto prueba en particular que existe el límite que define a $(\nabla_X Y)_p$). Calculamos

$$F'_k(t) = \sum_i \frac{\partial v^k}{\partial x_i} \Big|_{\Phi_{X,p}(t)} (\Phi_{X,p}^i)'(t),$$

luego

$$F'_k(0) = \sum_i \frac{\partial v^k}{\partial x_i} \Big|_p u_i(p).$$

En definitiva:

$$\nabla_X Y = \sum_{k,i} u^i \frac{\partial v^k}{\partial x_i} \partial_{x_k}. \quad (6.4)$$

Como en esta expresión no aparecen las derivadas de u^i , concluimos que, en efecto, $(\nabla_X Y)_p$ sólo depende de X_p . Por consiguiente no perdemos generalidad si tomamos las funciones constantes $u^i(x) = v^i$, con lo que, en el caso en que $E = \mathbb{R}^n$ y la carta x es la identidad, las coordenadas de $(\nabla_X Y)_p$ son simplemente las derivadas direccionales $D_v(Y^k)(p)$, lo que a su vez implica que la derivada $(\nabla_X Y)_p$ coincide con (6.3).

Tenemos así una derivación en $\mathfrak{X}(E)$ distinta de la derivada de Lie \mathcal{L}_X . Es fácil ver que se trata realmente de una derivación (respecto de la derivada de Lie \mathcal{L}_X en $C^\infty(E)$), aunque pronto lo veremos en un contexto más general.

Vamos a ver es que la característica relevante de los espacios afines en general —y de \mathbb{R}^n en particular— desde el punto de vista de la geometría diferencial no es el hecho de que podamos identificar todos sus espacios tangentes —algo que no podemos esperar que suceda en otras variedades diferenciales— sino el hecho de que en ellos pueda definirse la derivación $\nabla_X Y$. Más concretamente, la fórmula (6.4) muestra algo que —según veremos enseguida— es más fuerte que el hecho de que $(\nabla_X Y)_p$ sólo dependa de X_p , y es que $\nabla_X Y$ es $C^\infty(V)$ -lineal en X , es decir, que, para toda $f \in C^\infty(V)$, se cumple $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$, pues las funciones coordenadas de fX son $f u^i$, y la f puede extraerse del miembro derecho de (6.4).

Con esto llegamos ya a la definición central de esta sección:

Definición 6.2 Sea V una variedad diferencial sin frontera. Una *conexión afín* en V es una aplicación $D : \mathfrak{X}(V) \times \mathfrak{X}(V) \longrightarrow \mathfrak{X}(V)$ que cumpla las propiedades siguientes:

1. Si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(V)$, entonces $D_X(Y + Z) = D_XY + D_XZ$.
2. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$, $f \in C^\infty(V)$, entonces $D_X(fY) = X(f)Y + fD_XY$.
3. Si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(V)$, $f, g \in C^\infty(V)$, entonces $D_{fX+gY}Z = fD_XZ + gD_YZ$.

Una *variedad diferencial afín* es un par (V, D) , donde V es una variedad diferencial sin frontera y D es una conexión afín en V .

Las propiedades 1) y 2) afirman simplemente que D_X es una derivación en el espacio $\mathfrak{X}(V)$ respecto de la derivada de Lie \mathcal{L}_X en $C^\infty(V)$. La propiedad 3) es la realmente novedosa, y marca una diferencia sustancial respecto de la derivada de Lie en $\mathfrak{X}(V)$. (Es fácil ver que la derivada \mathcal{L}_X no es $C^\infty(V)$ -lineal en X porque $\mathcal{L}_XY = -\mathcal{L}_YX$.)

Vamos a ver que todo lo que hemos dicho que podíamos hacer en \mathbb{R}^n , pero no en una variedad diferencial cualquiera, lo podemos hacer realmente en cualquier variedad diferencial afín, no exactamente en las mismas condiciones que en un espacio afín, pero con un grado suficiente de fidelidad.

A partir de la expresión (6.4) es fácil demostrar que la operación ∇ definida en 6.1 es una conexión afín, que recibe el nombre de *conexión de Levi-Civita*. En lo sucesivo consideraremos siempre a los espacios afines —y en particular a \mathbb{R}^n — como variedades diferenciales afines con dicha conexión afín.

Si V es una variedad diferencial afín y $X \in \mathfrak{X}(V)$, el teorema 3.32 nos da que la derivación D_X se extiende a una única derivación en $\mathfrak{T}(V)$ que conserva el grado de varianza y covarianza de cada tensor homogéneo y conmuta con las contracciones de tensores, luego podemos extender la conexión afín D a una aplicación $D : \mathfrak{X}(V) \times \mathfrak{T}(V) \longrightarrow \mathfrak{T}(V)$ cuyas propiedades son:

1. Si $f \in C^\infty(V)$, entonces $D_X(f) = X(f)$.
2. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$, $f, g \in C^\infty(V)$, $T \in \mathfrak{T}(V)$, entonces

$$D_{fX+gY}T = fD_XT + gD_YT.$$

3. Si $X \in \mathfrak{X}(V)$, $T_1, T_2 \in \mathfrak{T}(V)$, entonces

$$D_X(T_1 + T_2) = D_XT_1 + D_XT_2$$

y

$$D_X(T_1 \otimes T_2) = T_1 \otimes D_XT_2 + D_XT_1 \otimes T_2.$$

Más aún, podemos definir la *diferencial covariante* en V como el operador $D : \mathfrak{T}(V) \longrightarrow \mathfrak{T}(V)$ en el álgebra tensorial que se obtiene por suma directa de los

operadores $D : \mathcal{T}_s^r(V) \rightarrow \mathcal{T}_{s+1}^r(V)$ determinados (por el lema de localización) mediante

$$D(T)(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s, X) = (D_X T)(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s).$$

Claramente $D(T)$ así definida es $C^\infty(V)$ -multilineal (gracias a que la conexión afín lo es en su primer argumento), por lo que puede identificarse con un tensor que contiene la misma información que la conexión afín de partida.

Notemos que, en particular, si $f \in C^\infty(V)$, se cumple que $Df = df$, pues

$$(Df)(X) = D_X f = X(f) = df(X),$$

luego la diferencial covariante asociada a una conexión afín extiende a la diferencial usual.

Como toda derivación, $(D_X T)_p$ depende únicamente del valor de T en un entorno de p . Ahora probamos que la $C^\infty(V)$ -linealidad en X se traduce en que $(D_X T)_p$ sólo depende de X_p (para un T dado).

Teorema 6.3 *Si V es una variedad diferencial afín, $X \in \mathfrak{X}(V)$, $T \in \mathcal{T}(V)$ y $p \in V$, entonces $(D_X T)_p$ depende únicamente de X_p y de la restricción de T a un entorno de p .*

DEMOSTRACIÓN: Primero demostramos que $(D_X T)_p$ sólo depende de la restricción de X a un entorno de p . Si el campo X se anula en un entorno U de p , tomamos una función $f \in C^\infty(V)$ tal que $f(p) = 0$ y que valga 1 fuera de un entorno compacto de p contenido en U . Entonces $X = fX$, luego

$$(D_X T)_p = (D_{fX} T)_p = f(p)(D_X T)_p = 0.$$

Ahora probamos que si $X_p = 0$ entonces $(D_X T)_p = 0$. Para ello tomamos una carta x alrededor de p . Multiplicando las coordenadas de X en x y los vectores ∂_{x_i} por una función de $C^\infty(V)$ adecuada podemos conseguir un campo $X' = \sum_i v^i w_i \in \mathfrak{X}(V)$ tal que w_i coincida con ∂_{x_i} en un entorno de p y v^i coincida con la coordenada i -ésima de X en dicho entorno. Entonces X' coincide con X en un entorno de p , luego, por lo que ya hemos probado,

$$(D_X T)_p = \sum_i v^i(p)(D_{w_i} T)_p = 0,$$

porque $v^i(p) = 0$ para todo i . La parte sobre T ya está probada. ■

Así pues, si V es una variedad diferencial afín, $v \in T_p(V)$ y $T \in \mathcal{T}(V)$, tiene sentido hablar de $(D_v T)_p$, pues siempre es posible construir un campo $X \in \mathfrak{X}(V)$ tal que $X_p = v$, pero $(D_X T)_p$ no depende de la elección de X .

Con esto hemos resuelto —al menos superficialmente— el problema de definir una derivada direccional de un campo vectorial (o tensorial, incluso). Decimos “superficialmente” porque en realidad no tenemos nada definido en una variedad arbitraria mientras no fijemos en ella una conexión afín D , y en tal caso habrá que investigar si el significado geométrico de $(D_v X)_p$ es o no el pretendido.

Coefficientes de una conexión Ahora conviene calcular la expresión en coordenadas de una conexión afín. Para ello consideramos una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ y dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$. Entonces

$$X|_U = \sum_i u^i \partial_{x_i}, \quad Y|_U = \sum_i v^i \partial_{x_i},$$

para ciertas funciones $u^i, v^i \in C^\infty(U)$. Si D es una conexión en V , tenemos que

$$(D_X Y)|_U = \sum_{i,j} u^i D_{\partial_{x_i}}(v^j \partial_{x_j}) = \sum_{i,j} u^i v^j D_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} + \sum_{i,j} u^i \frac{\partial v^j}{\partial x_i} \partial_{x_j}.$$

Como $D_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} \in \mathfrak{X}(U)$, existen funciones diferenciables $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$D_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_{x_k}. \quad (6.5)$$

Las funciones Γ_{ij}^k se llaman *coeficientes* de la conexión D en la carta x , y la determinan completamente en U , pues, según hemos obtenido,

$$(D_X Y)|_U = \sum_k \left(\sum_{i,j} u^i \Gamma_{ij}^k v^j + \sum_i u^i \frac{\partial v^k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (6.6)$$

Recíprocamente, un cálculo muy simple muestra que, dadas funciones arbitrarias $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$, la fórmula precedente define una derivada covariante en $\mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U)$. Por ejemplo, de acuerdo con (6.4), la conexión de Levi-Civita de un espacio afín es la que resulta de tomar todos los coeficientes Γ_{ij}^k nulos (respecto de las coordenadas asociadas a un sistema de referencia afín). ■

Ejercicio: Usar la fórmula (6.5) para probar que los coeficientes respecto de la carta determinada por las coordenadas polares en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ de la conexión de Levi-Civita en \mathbb{R}^2 definida por (6.4) son $\Gamma_{\rho\theta}^\theta = \Gamma_{\theta\rho}^\theta = 1/\rho$, $\Gamma_{\theta\theta}^\rho = -\rho$, y todos los demás son nulos.

La derivada covariante Hemos probado que la $C^\infty(V)$ -linealidad de las conexiones afines se traduce en que $(D_X T)_p$ sólo depende de X_p . Ahora probaremos que sólo depende de los valores que toma el tensor T sobre cualquier curva regular que pase por p con derivada X_p .

Recordemos que si $\alpha : I \rightarrow V$ es una curva en una variedad, representamos por $\mathcal{T}_s^r(V)_\alpha$ al espacio $\mathcal{T}_s^r(I, V)_\alpha$ de los campos tensoriales definidos sobre α (definición 3.23). Usaremos también la notación especial $\mathfrak{X}(V)_\alpha$ para el espacio $\mathcal{T}_0^1(V)_\alpha$ de los campos vectoriales sobre α .

El resultado fundamental para nuestros fines inmediatos es el siguiente:

Teorema 6.4 *Sea $\alpha : I \rightarrow V$ una curva regular en una variedad diferencial sin frontera V , sea $T \in \mathcal{T}_s^r(V)_\alpha$ y sea $t_0 \in [a, b]$. Entonces existe un entorno U de $\alpha(t_0)$ en V y un campo tensorial $T' \in \mathcal{T}_s^r(U)$ tal que $T = \alpha \circ T'$. Además, si D es una conexión en V , entonces $(D_{\alpha'(t_0)} T')_{\alpha(t_0)}$ no depende de la elección de T' .*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos un sistema de coordenadas x alrededor de $\alpha(t_0)$. Entonces $\alpha \circ x$ tiene derivada no nula en t_0 , luego alguna de las funciones coordenadas $\alpha \circ x^i$ tiene derivada no nula en t_0 . Por el teorema de la función inversa (para funciones de una variable), tenemos que $\alpha \circ x^i$ se restringe a un difeomorfismo entre un entorno de t_0 y un entorno J de $x_0^i = x^i(\alpha(t_0))$. Sea $t = t(x_i)$ la función inversa y sea $U = (x^i)^{-1}[J]$, entorno coordenado de $\alpha(t_0)$.

Para cada $p \in U$ tenemos que $x^i(p) \in J$, luego podemos definir $T'_p = T_{t(x^i(p))}$. Las funciones coordenadas de T' en U son la composición de x^i con t y con las funciones coordenadas de T , luego son diferenciables. Así pues, $T \in \mathcal{T}_s^r(U)$ y, por construcción, $T = \alpha \circ T'$.

Para la segunda parte basta probar que si T' es un campo tensorial en un entorno de $\alpha(t_0)$ tal que $\alpha \circ T' = 0$, entonces $(D_{\alpha'(t_0)}T')_{\alpha(t_0)} = 0$.

Tomemos un campo $X \in \mathfrak{X}(V)$ tal que $X_{\alpha(t_0)} = \alpha'(t_0)$. Por definición, $(D_{\alpha'(t_0)}T')_{\alpha(t_0)} = (D_X T')_{\alpha(t_0)}$. En una carta alrededor de $\alpha(t_0)$ tendremos que

$$\begin{aligned} T' &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \partial_{x_{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x_{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}, \\ D_X T' &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} D_X(T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}) \partial_{x_{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x_{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \\ &+ \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} D_X(\partial_{x_{i_1}} \otimes \dots \otimes \partial_{x_{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}). \end{aligned}$$

El segundo sumando se anula en $\alpha(t_0)$ porque por hipótesis se anulan las funciones coordenadas de T' . Respecto al primero, vemos que

$$D_X(T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r})_{\alpha(t_0)} = X_{\alpha(t_0)}(T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}) = \alpha'(t_0)(T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}) = \left. \frac{d(\alpha \circ T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r})}{dt} \right|_{t_0} = 0.$$

Así pues, $(D_X T')_{\alpha'(t)} = 0$. ■

De aquí se deduce que una conexión afín induce derivaciones sobre las álgebras de campos tensoriales de curvas regulares:

Definición 6.5 Sea V una variedad diferencial afín y $\alpha : I \rightarrow V$ una curva regular en V . Llamaremos *derivada covariante* a lo largo de α a la derivación D/dt del álgebra $\mathcal{T}(V)_\alpha$ dada por

$$\left. \frac{DT}{dt} \right|_{t_0} = (D_{\alpha'(t)}T')_{\alpha(t_0)}, \quad \text{para cada } t_0 \in [a, b],$$

donde T' es cualquier extensión de T a un entorno de $\alpha(t_0)$ en el sentido del teorema anterior. (Ésta es la definición para campos homogéneos de tipo (r, s) . Para campos arbitrarios extendemos la definición por linealidad.)

En particular, si $T \in \mathcal{T}(V)$, se cumple

$$D_{\alpha'(t)}T = \frac{D(\alpha \circ T)}{dt}. \quad (6.7)$$

Es claro que la derivada covariante es local, es decir, que $DT/dt|_{t_0}$ depende únicamente de la restricción de T a un entorno de t_0 . Las demás propiedades se deducen inmediatamente a partir de las de la derivada de campos en V :

Teorema 6.6 *Sea V una variedad diferencial afín y α una curva regular en V . Entonces, la derivada covariante en $\mathcal{T}(V)_\alpha$ cumple las propiedades siguientes:*

1. *Conserva el grado de los tensores homogéneos y conmuta con las contracciones de tensores.*

2. *Si $f \in C^\infty(I)$, entonces $\frac{Df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t}$.*

3. *Si $T_1, T_2 \in \mathcal{T}(V)_\alpha$, entonces*

$$\frac{D(T_1 + T_2)}{dt} = \frac{DT_1}{dt} + \frac{DT_2}{dt}, \quad \frac{D(T_1 \otimes T_2)}{dt} = T_1 \otimes \frac{DT_2}{dt} + \frac{DT_1}{dt} \otimes T_2.$$

Dado $X \in \mathfrak{X}(V)$ y $p \in V$, es fácil encontrar una curva regular que cumpla $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = X_p$, y entonces la fórmula (6.7) implica que, tal y como afirmábamos, $(D_X T)_p$ sólo depende de X_p y de $\alpha \circ T$, es decir, que si dos campos tensoriales coinciden sobre una curva que pasa por p con derivada X_p , sus derivadas D_X coinciden en p .

Expresión en coordenadas Calculamos ahora la expresión en coordenadas de la derivada covariante de un campo vectorial $v \in \mathfrak{X}(V)_\alpha$. Sea $x : U \rightarrow \tilde{U}$ una carta alrededor de un punto $\alpha(t_0)$. Entonces, para $t \in \alpha^{-1}[U]$ tenemos la expresión

$$v_t = \sum_j v^j(t) \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{\alpha(t)}.$$

Aplicando las propiedades de la derivada covariante tenemos:

$$\frac{Dv}{dt} = \sum_j \left(\frac{dv^j}{dt} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{\alpha(t)} + v^j \frac{D(\alpha \circ \partial_{x_j})}{dt} \right) = \sum_j \left(\frac{dv^j}{dt} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{\alpha(t)} + v^j D_{\alpha'} \frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

Ahora recordamos que

$$\alpha' = \sum_i \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)},$$

con lo que

$$\frac{Dv}{dt} = \sum_j \left(\frac{dv^j}{dt} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{\alpha(t)} + v^j \sum_i \frac{dx^i}{dt} (D_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j})_{\alpha(t)} \right).$$

Sustituyendo $D_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j}$ por su expresión en coordenadas (6.5) queda

$$\frac{Dv}{dt} = \sum_k \left(\frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{dx^i}{dt} \Gamma_{ij}^k(\alpha(t)) v^j \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_{\alpha(t)}. \quad (6.8)$$

En particular, si $\alpha : I \rightarrow E$ es una curva regular en un espacio afín E , la derivada covariante de un campo $v \in \mathfrak{X}(E)_\alpha$ es el campo cuyas coordenadas (respecto de la carta asociada a un sistema de referencia afín) son las derivadas de las coordenadas de v . En particular, si $E = \mathbb{R}^n$ e identificamos a v con $v \circ \theta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, entonces la derivada covariante de v es la derivada usual v' . ■

Ahora ya podemos resolver —también “superficialmente”, en principio— el primer problema que nos habíamos planteado en este capítulo:

La derivada segunda de una curva Si $\alpha : I \rightarrow V$ es una curva en una variedad diferencial afín, tenemos que $\alpha' \in \mathfrak{X}(V)_\alpha$, luego podemos definir su derivada segunda

$$\alpha'' = \frac{D\alpha'}{dt} \in \mathfrak{X}(V)_\alpha.$$

Para particularizar a este caso la fórmula (6.8) debemos tomar $v^i = dx^i/dt$, con lo que resulta

$$\alpha'' = \sum_k \left(\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \sum_{i,j} \frac{dx^i}{dt} \Gamma_{ij}^k(\alpha(t)) \frac{dx^j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_{\alpha(t)}. \quad (6.9)$$

Por ejemplo, para $V = \mathbb{R}^n$ respecto de la carta identidad, todos los coeficientes de la conexión son nulos, y queda

$$\alpha'' = \sum_k \frac{d^2 x^k}{dt^2} \frac{\partial}{\partial x_k} \Big|_{\alpha(t)},$$

que se corresponde a través de θ con la derivada usual $\alpha'' = (x''_1, \dots, x''_n)$.

Observemos que, comparando (6.9) con (6.2), llegamos más fácilmente a la conclusión del ejercicio de la página 246. ■

6.2 La restricción de una conexión afín

Hasta aquí no tenemos más ejemplo de variedades diferenciales afines que los propios espacios afines, para los cuales es redundante toda la teoría que estamos desarrollando, pues en ellos todo puede hacerse de forma mucho más directa a través de los isomorfismos canónicos entre los espacios tangentes. Si consideramos cualquier otra variedad —como S^2 , sin ir más lejos— en ausencia de una definición específica de una conexión afín en ella, no podemos juzgar si los conceptos que estamos definiendo son los “geoméricamente razonables” o no.

Lo único que hemos podido constatar hasta ahora es que en \mathbb{R}^n se reducen a los usuales, pero eso no es garantía de que no haya otras definiciones alternativas que también se reduzcan a las usuales en \mathbb{R}^n y que sean más razonables en otras variedades.

En esta sección demostraremos que la conexión de Levi-Civita en \mathbb{R}^n induce una conexión en cada una de sus subvariedades con una interpretación geométrica natural, pero en su definición interviene la estructura métrica de \mathbb{R}^n .

Más en general, partimos de una subvariedad semirriemanniana V de una variedad semirriemanniana R en la que tenemos definida una conexión afín D .

En primer lugar demostramos un sencillo resultado técnico. Recordemos que $\mathfrak{X}(V, R)$ es el conjunto de los campos vectoriales no necesariamente tangentes $X : V \rightarrow TR$, donde X es diferenciable y $X_p \in T_p(V)$ para todo $p \in V$.

Teorema 6.7 *Sea R una variedad semirriemanniana, V una subvariedad semirriemanniana y $X \in \mathfrak{X}(V, R)$. Para cada $p \in V$ existe un entorno abierto U de p en R y un campo $\bar{X} \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $\bar{X}|_{U \cap V} = X$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema del rango, al igual que razonamos tras la definición 4.3, podemos tomar una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ alrededor de p en R y una carta x^* en $U \cap W$ cuyas coordenadas sean $x^1|_{U \cap W}, \dots, x^n|_{U \cap W}$, mientras que las coordenadas x^{n+1}, \dots, x^m sean nulas en $W \cap U$. Así, $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}$ determinan en cada punto una base de $T_p(V)$ como subespacio de $T_p(R)$. Si

$$X = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

y llamamos $\pi = x \circ \pi_n \circ (x^*)^{-1} : U \rightarrow U \cap W$, donde π_n es la proyección en las n primeras componentes, basta tomar

$$\bar{X}_q = \sum_{i=1}^n a^i(\pi(q)) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Claramente cumple lo pedido. ■

Observemos que el teorema anterior vale en particular para campos tangentes $X \in \mathfrak{X}(V) \subset \mathfrak{X}(V, R)$. Ahora podemos definir una aplicación

$$\bar{D} : \mathfrak{X}(V) \times \mathfrak{X}(V, R) \rightarrow \mathfrak{X}(V, R)$$

del modo siguiente: dados $X \in \mathfrak{X}(V)$ e $Y \in \mathfrak{X}(V, R)$ y un punto $p \in V$, consideramos extensiones $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathfrak{X}(U)$ en las condiciones del teorema anterior y definimos

$$(\bar{D}_X Y)_p = (D_{\bar{X}} \bar{Y})_p.$$

El teorema 6.4 implica que $(\bar{D}_X Y)_p$ no depende de la elección de las extensiones, pues puede calcularse a partir de una curva $\alpha : I \rightarrow R$ que cumpla $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \bar{X}_p = X_p$ y del campo $\alpha \circ \bar{Y}$, pero podemos tomar $\alpha : I \rightarrow V$ y entonces $\alpha \circ \bar{Y} = \alpha \circ Y$.

Como $D_{\bar{X}}\bar{Y} \in \mathfrak{X}(U)$, es decir, como se trata de una aplicación diferenciable $U \rightarrow TR$, su restricción $(\bar{D}_X Y)|_{U \cap V} = (D_{\bar{X}}\bar{Y})|_{U \cap V}$ también es diferenciable, luego $\bar{D}_X Y \in \mathfrak{X}_R(V)$.

Teorema 6.8 *Sea R una variedad semirriemanniana dotada de una conexión afín D y sea V una subvariedad semirriemanniana. Entonces la aplicación $\bar{D} : \mathfrak{X}(V) \times \mathfrak{X}(V, R) \rightarrow \mathfrak{X}(V, R)$ que acabamos de definir tiene las propiedades siguientes:*

1. Si $X \in \mathfrak{X}(V)$, $Y, Z \in \mathfrak{X}(V, R)$, entonces $\bar{D}_X(Y + Z) = \bar{D}_X Y + \bar{D}_X Z$.
2. Si $X \in \mathfrak{X}(V)$, $Y \in \mathfrak{X}(V, R)$ $f \in C^\infty(V)$, entonces

$$\bar{D}_X(fY) = X(f)Y + f\bar{D}_X Y.$$

3. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$, $Z \in \mathfrak{X}(V, R)$, $f, g \in C^\infty(V)$, entonces

$$\bar{D}_{fX+gY}Z = f\bar{D}_X Z + g\bar{D}_Y Z.$$

DEMOSTRACIÓN: Las tres propiedades se demuestran igual. Veamos por ejemplo la segunda: dado $p \in V$, tomamos un abierto U en R alrededor de p en el que existan extensiones \bar{X}, \bar{Y} de ambos campos y consideramos también una extensión² $\bar{f} \in C^\infty(U)$ de f . Por las propiedades de las conexiones afines tenemos que

$$D_{\bar{X}}(\bar{f}\bar{Y}) = \bar{X}(\bar{f})\bar{Y} + \bar{f}D_{\bar{X}}\bar{Y}$$

Ahora observamos que $\bar{f}\bar{Y}$ es una extensión de fY , luego podemos usarla para calcular

$$D_X(fY)_p = X_p(\bar{f})Y_p + f(p)(\bar{D}_X Y)_p.$$

Sólo falta observar que estamos identificando a X_p con $di|_p(X_p)$, por lo que $X_p(\bar{f}) = di|_p(X_p)(\bar{f}) = X_p(\bar{f}|_{U \cap V}) = X_p(f)$. ■

Vemos así que \bar{D} cumple la definición de derivada covariante salvo por los espacios en los que está definida. Más aún, es claro que si $(\bar{D}_X Y)_p$ sólo depende de X_p y de $\alpha \circ Y$, donde $\alpha : I \rightarrow V$ es cualquier curva que cumpla $\alpha(t_0) = X_p$, pues entonces

$$(\bar{D}_X Y)_p = \left. \frac{D(\alpha \circ Y)}{dt} \right|_{t_0},$$

considerando a $(\alpha \circ Y) \in \mathfrak{X}(R)_\alpha$.

Observemos que lo que hemos hecho hasta aquí es en el fondo trivial: como $(D_X Y)_p$ sólo depende de X_p y de los valores de Y sobre una curva que pase por p con derivada X_p , sólo hemos observado que $(D_X Y)_p$ sigue teniendo sentido cuando los campos están definidos sobre V y X es tangente a V (para que exista una curva contenida en V con derivada X_p). La parte no trivial viene ahora:

²Con la notación de la prueba de 6.7, basta tomar $\bar{f} = \pi \circ f$.

Definición 6.9 Sea R una variedad semirriemanniana dotada de una conexión afín D y sea V una subvariedad semirriemanniana. Definimos la *restricción* de D a V como la conexión afín $D : \mathfrak{X}(V) \times \mathfrak{X}(V) \rightarrow \mathfrak{X}(V)$ dada por

$$D_X Y = \tan(\bar{D}_X Y).$$

Usando la linealidad de la proyección \tan_p (y que deja invariantes a los vectores de $T_p(V)$) es inmediato probar a partir del teorema anterior que la restricción de una conexión afín es una conexión afín. En particular, tenemos definida una conexión afín en toda subvariedad semirriemanniana de \mathbb{R}_s^m , la restricción de la conexión de Levi-Civita, a la que llamaremos también *conexión de Levi-Civita* en la subvariedad considerada y la representaremos igualmente con el signo ∇ .

Observemos ahora en qué consiste la derivación covariante sobre campos vectoriales asociada a la conexión de Levi-Civita de una subvariedad de \mathbb{R}^n :

Si $\alpha : I \rightarrow V$ es una curva en una subvariedad de \mathbb{R}^m y $v \in \mathfrak{X}(V)_\alpha$, entonces, considerando $v \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)_\alpha$ podemos calcular su derivada covariante, que no es sino su derivada usual v' (lo cual sólo tiene sentido en \mathbb{R}^m gracias a su estructura de espacio afín). Esta derivada ya no es necesariamente tangente a V , pero podemos descomponerla como

$$v'(t) = \tan_{\alpha(t)} v'(t) + \text{nor}_{\alpha(t)} v'(t) \in T_{\alpha(t)}(V) \oplus T_{\alpha(t)}(V)^\perp,$$

y el primer sumando, es decir, la proyección ortogonal de $v'(t)$ sobre $T_{\alpha(t)}(V)$, es por definición

$$\frac{\nabla v}{dt} = \tan(v'),$$

Por consiguiente, la derivada covariante de un campo vectorial asociada a la conexión de Levi-Civita es precisamente la derivada covariante definida en [An 7.29]. Si $v'(t)$ representa la variación de v , su componente normal representa la variación necesaria para que v se mantenga tangente a V , mientras que su componente tangencial (su derivada covariante en V) representa la “variación gratuita”, la que no es necesaria para mantenerse tangente a V y que puede percibirse “desde dentro” de V .

En particular, la condición $\nabla v/dt = 0$ se interpreta como que la variación de v es “la justa” para permanecer tangente a V , por lo que los distintos vectores $v(t)$ pueden considerarse como “el mismo” vector con respecto a V , en un sentido análogo a cuando consideramos que dos vectores en distintos puntos de \mathbb{R}^n son “el mismo” vector, lo cual significa que uno se convierte en el otro cuando se mueve “sin alterarlo” de una posición a otra. A continuación vamos a desarrollar esta idea en el contexto general de las variedades diferenciales afines. ■

6.3 Transporte paralelo

Ahora desarrollamos la idea que acabamos de esbozar al final de la sección precedente: los campos vectoriales sobre curvas cuya derivada covariante es nula

representan distintas posiciones de un mismo vector. Para que esta idea dé el juego necesario tenemos que demostrar que siempre es posible transportar un vector a lo largo de una curva de modo que la derivada covariante sea nula, y eso equivale a resolver un sistema de ecuaciones diferenciales:

Teorema 6.10 *Sea $\alpha : I \rightarrow V$ una curva regular en una variedad diferencial afín V , sea $t_0 \in I$ y $p = \alpha(t_0)$. Para cada $v_0 \in T_p(V)$ existe un único campo vectorial $v \in \mathfrak{X}(V)_\alpha$ tal que $v(t_0) = v_0$ y $Dv/dt = 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos una carta x alrededor de p . En vista de (6.8), un campo vectorial v a lo largo de α tendrá derivada covariante nula en un entorno de t_0 si y sólo si sus coordenadas $v^k(t)$ en la carta x satisfacen las ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{dx^i}{dt} (\alpha \circ \Gamma_{ij}^k) v^j = 0. \quad (6.10)$$

La teoría de ecuaciones diferenciales nos da que este sistema tiene solución única en un entorno de t_0 si imponemos la condición inicial $v^k(t_0) = v_0^k$, donde v_0^k son las coordenadas del vector v_0 .

En general, un campo vectorial en las condiciones del enunciado se llama *transporte paralelo* de v_0 a lo largo de α . Acabamos de demostrar que existe un único transporte paralelo de v_0 sobre la restricción α_0 de α a un entorno I_{t_0} de t_0 en I . Tomando dicho entorno suficientemente pequeño podemos garantizar la existencia y unicidad de transporte paralelo sobre α_0 para los vectores de una base de $T_p(V)$ y para el vector nulo. De aquí se sigue la existencia y unicidad del transporte paralelo de cualquier vector sobre α_0 . En efecto, una combinación lineal de campos vectoriales con derivada covariante nula tiene derivada covariante nula, y transporta a la combinación lineal correspondiente de los vectores de partida. Por otra parte, si dos campos son transportes paralelos de un mismo vector, su diferencia es un transporte paralelo del vector nulo, luego por la unicidad se trata del campo nulo.

Por lo tanto, tenemos definida una aplicación $\text{tp}_{t_0} : I_{t_0} \times T_{\alpha(t_0)}(V) \rightarrow TV$ tal que $t \mapsto \text{tp}_{t_0}(t, v_0) \in T_{\alpha(t)}(V)$ es el único transporte paralelo de v_0 a lo largo de $\alpha|_{I_{t_0}}$. En particular, para cada $t_1 \in I_{t_0}$ podemos definir la aplicación $\text{tp}_{t_0}^{t_1} : T_{\alpha(t_0)}(V) \rightarrow T_{\alpha(t_1)}(V)$ dada por $\text{tp}_{t_0}^{t_1}(v_0) = \text{tp}_{t_0}(t_1, v_0)$.

Se cumple que $\text{tp}_{t_0}^{t_1}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales. En efecto, dados $r, s \in \mathbb{R}$ y $v_0, v_1 \in T_{\alpha(t_0)}(V)$, tenemos que $t \mapsto r \text{tp}_{t_0}(t, v_0) + s \text{tp}_{t_0}(t, v_1)$ tiene derivada covariante nula (porque la derivada covariante es lineal), luego por la unicidad coincide con $t \mapsto \text{tp}_{t_0}(t, rv_0 + sv_1)$, de donde concluimos que

$$\text{tp}_{t_0}^{t_1}(rv_0 + sv_1) = r \text{tp}_{t_0}^{t_1}(v_0) + s \text{tp}_{t_0}^{t_1}(v_1).$$

Para probar la inyectividad basta ver que el transporte paralelo de un vector no nulo no puede ser nulo. Ahora bien, si $v \in \mathfrak{X}(V)_\alpha$ es un transporte paralelo que cumple $v(t_0) = 0$, entonces v es el transporte paralelo del vector nulo de $T_{\alpha(t_0)}(V)$, luego por la unicidad local tiene que coincidir con el campo nulo en

un entorno de t_0 . Esto significa que el conjunto de puntos t donde v se anula es abierto en el dominio I de v , pero por continuidad es también cerrado, luego por la conexión del intervalo I concluimos que v es el campo nulo.

Finalmente, como $\text{tp}_{t_0}^{t_1}$ es un monomorfismo entre dos espacios vectoriales de la misma dimensión, de hecho es un isomorfismo.

Ahora es fácil ver que si $t_0 \in I' \subset I$ es un intervalo donde un cierto vector $v_0 \in T_{\alpha(t_0)}(V)$ admite dos transportes paralelos v y v' , entonces ambos coinciden.

En efecto, si existe un $t' \in J$, digamos $t' > t_0$, donde $v(t') \neq v'(t')$, podemos tomar el ínfimo de los $t^* > t_0$ que cumplen esto. Por existencia y la unicidad local será $t_0 < t^*$ y $v|_{[t_0, t^*]} = v'|_{[t_0, t^*]}$. Más aún, por continuidad también $v(t^*) = v'(t^*)$, luego $t_0 < t^* < t'$. Pero hemos probado que en un entorno $I_{t^*} =]t^* - \epsilon, t^* + \epsilon[$ de t^* este vector tiene transporte paralelo único, el cual tiene que ser tanto $v|_{I^*}$ como $v'|_{I^*}$, luego v y v' coinciden en $[0, t^* + \epsilon[$, en contra de la elección de t^* .

Esto nos permite definir $I_{t_0}^*$ como la unión de todos los intervalos $I' \subset I$ que contienen a t_0 donde todos los vectores de $T_{\alpha(t_0)}(V)$ admiten un (único) transporte paralelo sobre α . Por la unicidad, estos transportes paralelos admiten una única extensión común a $I_{t_0}^*$, de modo que tenemos definida la aplicación $\text{tp}_{t_0} : I_{t_0}^* \times T_{\alpha(t_0)}(V) \rightarrow TV$ exactamente en las mismas condiciones que la que teníamos definida sobre I_{t_0} (simplemente, $I_{t_0}^*$ es un intervalo mayor que cumple lo mismo que I_{t_0}). Basta probar que $I_{t_0}^* = I$. En caso contrario, supongamos que el extremo superior b de $I_{t_0}^*$ es menor que el de I . (En particular $b \in I$.)

Podemos considerar $\text{tp}_b : I_b \times T_{\alpha(b)}(V) \rightarrow TV$ definida en un entorno de b en I , es decir, en un intervalo $]b - \epsilon, b + \epsilon[$. Para cada $v_0 \in T_{\alpha(t_0)}(V)$, consideremos $v_1 = (\text{tp}_b^{b-\epsilon/2})^{-1}(\text{tp}_{t_0}^{b-\epsilon/2}(v_0))$. Entonces $t \mapsto \text{tp}_{t_0}(t, v_0)$ y $t \mapsto \text{tp}_b(t, v_1)$ son transportes paralelos de v_1 en el intervalo $]b - \epsilon, b[$. Por la unicidad global del transporte paralelo que hemos probado resulta que ambos coinciden, luego tp_{t_0} puede extenderse hasta $[t_0, b + \epsilon[$, en contradicción con la maximalidad de $I_{t_0}^*$.

Esto prueba que el extremo superior de $I_{t_0}^*$ coincide con el extremo superior de I , e igualmente con los extremos inferiores. Sólo falta probar que si I contiene a uno de sus extremos, $I_{t_0}^*$ también lo hace. Por ejemplo, si el extremo superior es $b \in I_{t_0}$, tenemos definido tp_b en un intervalo $]b - \epsilon, b[$, y el mismo razonamiento anterior muestra que tp_{t_0} se extiende a $[t_0, b] \times T_{\alpha(t_0)}(V)$, lo que implica que $b \in I_{t_0}^*$, e igualmente sucede con el extremo inferior. ■

En la demostración del teorema anterior hemos introducido el concepto de transporte paralelo y hemos demostrado algunos hechos que conviene destacar:

Definición 6.11 Sea $\alpha : I \rightarrow V$ una curva regular en una variedad diferencial afín V . Llamaremos *campos paralelos* o *transportes paralelos* a lo largo de α a los campos vectoriales sobre α con derivada covariante nula.

Más precisamente, si $t_0 \in I$ y $v \in T_{\alpha(t_0)}(V)$, llamaremos *transporte paralelo* de v a lo largo de α al único transporte paralelo $\text{tp}(\alpha)_{t_0, v} \in \mathfrak{X}(V)_\alpha$ que cumple $\text{tp}(\alpha)_{t_0, v}(t_0) = v$.

Esto define en realidad una función

$$\text{tp}(\alpha) : I \times I \times T_{\alpha(t_0)}(V) \longrightarrow TV$$

tal que $\text{tp}(\alpha)(t_0, t, v) = \text{tp}(\alpha)_{t_0, v}(t) \in T_{\alpha(t)}(V)$.

Para cada $t_1 \in I$, llamaremos también transportes paralelos a los isomorfismos

$$\text{tp}(\alpha)_{t_0}^{t_1} : T_{\alpha(t_0)}(V) \longrightarrow T_{\alpha(t_1)}(V)$$

dados por $\text{tp}(\alpha)_{t_0}^{t_1}(v) = \text{tp}(\alpha)(t_0, t_1, v)$.

Si $\alpha : [a, b] \longrightarrow V$ es un arco regular con $p = \alpha(a)$ y $q = \alpha(b)$, cuando hablemos del transporte paralelo a lo largo de α nos referiremos al transporte paralelo entre sus extremos: $\text{tp}(\alpha) : T_p(V) \longrightarrow T_q(V)$.

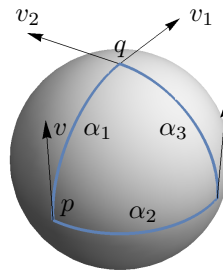
Más en general, podemos definir el transporte paralelo a lo largo de una curva regular a trozos como la composición de los transportes paralelos correspondientes a cada trozo.

Ejemplo Si E es un espacio afín, su conexión de Levi-Civita tiene sus coeficientes nulos respecto de las cartas determinadas por los sistemas de referencia afines. La fórmula (6.8) implica entonces que un campo $v \in \mathfrak{X}(V)_\alpha$ es paralelo si y sólo si sus coordenadas v^k respecto a cualquier sistema de referencia afín son constantes, lo cual equivale a su vez a que la imagen del campo por la identificación canónica $\theta : TE \longrightarrow \vec{E}$ sea constante.

Por consiguiente, el transporte paralelo $\text{tp}(\alpha) : T_p(E) \longrightarrow T_q(E)$ a lo largo de un arco de extremos p y q no es sino el isomorfismo canónico θ_p^q .

Así pues, hemos encontrado un análogo a los isomorfismos θ_p^q definibles, no sólo en los espacios afines, sino en todas las variedades diferenciales afines.

Ya hemos discutido informalmente la interpretación geométrica del transporte paralelo en el caso de las subvariedades de \mathbb{R}^n , que es la que justifica el nombre de “transporte paralelo”. Pero en este punto hay que destacar una diferencia sustancial, y es que en un espacio afín el transporte paralelo entre dos puntos es independiente del arco que los une, cosa que no es cierta en general. Por ejemplo, en S^2 , el transporte paralelo (respecto de la conexión de Levi-Civita) del vector v que muestra la figura a lo largo del arco α_1 es v_1 , mientras que su transporte paralelo a lo largo de $\alpha_2 \cup \alpha_3$ es v_2 . Más adelante veremos que las discrepancias en los transportes paralelos por arcos distintos están relacionadas con la curvatura de la variedad.



■

Ahora probamos que una conexión afín está determinada por el transporte paralelo que define:

Teorema 6.12 Si V es una variedad diferencial afín, para cada par de campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$ y cada $p \in V$ se cumple que

$$(D_X Y)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{tp}_{\alpha, t}^{-1}(Y_{\alpha(t)}) - Y_p}{t},$$

donde α es cualquier curva regular en V tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = X_p$.

DEMOSTRACIÓN: Fijemos una base de $T_p(V)$ y consideramos transportes paralelos v_1, \dots, v_n de sus vectores a través de α . Como los transportes paralelos son isomorfismos, los vectores $v_1(t), \dots, v_n(t)$ son una base de $T_{\alpha(t)}(V)$ para todo t . Por lo tanto, podemos expresar

$$Y_{\alpha(t)} = \sum_i u^i(t) v_i(t), \quad (6.11)$$

para ciertas funciones u^i que son diferenciables, pues, tomando una carta x alrededor de un punto $\alpha(t)$, podemos expresar

$$Y_{\alpha(t)} = \sum_j a^j(t) \partial_{x_j}|_{\alpha(t)}, \quad v_i(t) = \sum_j b_i^j(t) \partial_{x_j}|_{\alpha(t)},$$

para ciertas funciones a^j, b_i^j diferenciables (porque los campos Y, v_i lo son), y entonces

$$a^j = \sum_i u^i b_i^j,$$

o, matricialmente, $(a^j) = (u^i)(b_i^j)$. La matriz es inversible (porque es una matriz de cambio de base) y la fórmula para el cálculo de la matriz inversa prueba que sus coeficientes también son funciones diferenciables, luego las funciones $(u^i) = (a^j)(b_i^j)^{-1}$ también son diferenciables. Ahora calculamos:

$$\begin{aligned} \frac{\text{tp}_{\alpha, t}^{-1}(Y_{\alpha(t)}) - Y_p}{t} &= \sum_i \frac{u^i(t) \text{tp}_{\alpha, t}^{-1}(v_i(t)) - u^i(0) v_i(0)}{t} = \\ &= \sum_i \frac{u^i(t) v_i(0) - u^i(0) v_i(0)}{t} = \sum_i \frac{u^i(t) - u^i(0)}{t} v_i(0). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{tp}_{\alpha, t}^{-1}(Y_{\alpha(t)}) - Y_p}{t} = \sum_i \left. \frac{du^i}{dt} \right|_0 v_i(0) = \left. \frac{DY_{\alpha(t)}}{dt} \right|_0 = (D_X Y)(p).$$

El penúltimo paso se obtiene aplicando la derivada covariante a (6.11) teniendo en cuenta que los campos son transportes paralelos, luego tienen derivada covariante nula. ■

Teniendo en cuenta el ejemplo precedente, la fórmula del teorema anterior aplicada a un espacio afín se reduce a (6.3).

En resumen: hemos visto que una conexión afín en una variedad diferencial define una noción de transporte paralelo entre los espacios tangentes de cada par de puntos (para cada arco que los una) de modo que las derivadas covariantes de campos vectoriales en $\mathfrak{X}(V)$ o sobre curvas se calculan comparando vectores de espacios tangentes distintos mediante el transporte paralelo. Esto hace que en el caso de \mathbb{R}^n las derivadas de campos en $\mathfrak{X}(V)$ coincidan con las derivadas direccionales usuales y las derivadas de campos tangentes a curvas coincidan con las derivadas usuales.

6.4 Geodésicas

Hemos visto que en una variedad diferencial afín es posible definir la derivada segunda de una curva, lo cual nos permite a su vez introducir un concepto geométrico fundamental:

Definición 6.13 Diremos que una curva regular $\gamma : I \rightarrow V$ en una variedad diferencial afín V es una *geodésica* si su derivada segunda es nula:

$$\gamma'' = \frac{D\gamma'}{dt} = 0.$$

Equivalentemente, una geodésica es una curva cuya velocidad γ' es un transporte paralelo sobre γ . Exigimos que sea una curva regular para que esté definido el transporte paralelo, lo cual significa que la derivada de una geodésica no se anula nunca, pero conviene considerar también como geodésicas las curvas constantes, que tienen derivada idénticamente nula.

Por ejemplo, en \mathbb{R}^n las geodésicas son las curvas cuya segunda derivada en el sentido usual es nula, por lo que son simplemente las rectas $\gamma(t) = a + bt$, para ciertos $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Vemos que el concepto de geodésica depende de la estructura afín de la variedad, pero las geodésicas en una subvariedad de \mathbb{R}^m respecto de la conexión de Levi-Civita tienen una interpretación geométrica completamente natural: son las curvas cuya velocidad se modifica “lo justo” para que γ permanezca sobre la variedad, pero sin ninguna componente tangencial detectable desde la propia variedad.³

Expresión en coordenadas Sea γ una curva regular tal que $\gamma(t_0) = q$. Fijemos una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ alrededor de q , respecto a la cual, la derivada tendrá coordenadas

$$\gamma'(t) = \sum_k \frac{dx^k}{dt} \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\gamma(t)}.$$

³La *geodesia* es el estudio detallado de la geometría de la superficie terrestre, y las geodésicas reciben su nombre porque son las curvas que son “todo lo rectas que permite la geodesia del terreno”.

Según la fórmula (6.9), la condición $\gamma'' = 0$ equivale a que las coordenadas $x(t)$ de γ cumplan el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \sum_{i,j} \frac{dx^i}{dt} \tilde{\Gamma}_{ij}^k(x(t)) \frac{dx^j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (6.12)$$

donde llamamos $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = x^{-1} \circ \Gamma_{ij}^k$. Pero estas ecuaciones se satisfacen también trivialmente en el caso en que la curva γ es constante (pues todas las derivadas de x^k son nulas) y, recíprocamente, por los teoremas de unicidad, las únicas soluciones de estas ecuaciones con $x'(t_0) = 0$ corresponden a las curvas constantes. En resumen:

Una curva γ (regular o no) en una variedad diferencial afín V es una geodésica si y sólo si en un entorno coordenado de cada punto sus coordenadas $x^k(t)$ satisfacen (6.12). ■

Ahora los teoremas de existencia y unicidad sobre ecuaciones diferenciales nos dan un resultado de existencia y unicidad de geodésicas.

Fijemos un punto $(q, w) \in TV$, tomemos una carta x alrededor de q y llamemos $\tilde{x}(q, w) = (a, b) \in \tilde{U} \times \mathbb{R}^n$. El teorema [An 5.48] nos da una función diferenciable

$$x :]-\epsilon, \epsilon[\times B_\epsilon(a) \times B_\epsilon(b) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

(que no hay que confundir con la carta $x : U \longrightarrow \tilde{U}$) tal que $x(t, x_0, v_0)$ es la única solución de (6.12) con las condiciones iniciales $x(0, x_0, v_0) = x_0$, $x'(0, x_0, v_0) = v_0$ (las dos bolas abiertas son bolas en \mathbb{R}^n). En particular $x(0, a, b) = a$, luego reduciendo el dominio de x podemos suponer que

$$x :]-\epsilon, \epsilon[\times B_\epsilon(a) \times B_\epsilon(b) \longrightarrow \tilde{U}, \quad B_\epsilon(a) \subset \tilde{U}.$$

Así, $U^* = \tilde{x}^{-1}[B_\epsilon(a) \times B_\epsilon(b)]$ es un abierto en TV que contiene a (q, w) , y, al componer $I \times \tilde{x}$ con la aplicación anterior x con la inversa de la carta x obtenemos una aplicación diferenciable

$$\gamma^* :]-\epsilon, \epsilon[\times U^* \longrightarrow U$$

de manera que, para cada $(p, v) \in U^*$, las coordenadas en la carta x de la curva $\gamma_{p,v}^*(t) = \gamma^*(t, p, v)$ cumplen (6.12) —lo que significa que $\gamma_{p,v}^*$ es una geodésica— y además $\gamma_{p,v}^*(0) = p$, $(\gamma_{p,v}^*)'(0) = v$. Más aún, $\gamma_{p,v}^*$ es la única geodésica contenida en U (salvo extensión o restricción) que cumple estas condiciones.

En particular tenemos que, dado $w \in T_q V$, salvo extensión o restricción, existe una única geodésica $\gamma : I \longrightarrow V$ definida en un entorno de 0 y tal que $\gamma(0) = q$, $\gamma'(0) = w$. Pero la unicidad de las geodésicas puede expresarse en términos más fuertes:

Teorema 6.14 Sean $\gamma_1, \gamma_2 : I \longrightarrow V$ dos geodésicas en una variedad diferencial afín sin frontera V y supongamos que existe $t_0 \in I$ tal que $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ y $\gamma_1'(t_0) = \gamma_2'(t_0)$. Entonces $\gamma_1 = \gamma_2$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que existe un $t_1 \in I$ tal que $\gamma_1(t_1) \neq \gamma_2(t_1)$. Digamos, por ejemplo, que $t_0 < t_1$. Según acabamos de probar, γ_1 y γ_2 coinciden en un entorno de t_0 . Por lo tanto, $t^* = \inf\{t > t_0 \mid \gamma_1(t) \neq \gamma_2(t)\}$ tiene que cumplir $t_0 < t^*$. Por continuidad $\gamma_1(t^*) = \gamma_2(t^*)$, luego de hecho tenemos que $\gamma_1|_{[t_0, t^*]} = \gamma_2|_{[t_0, t^]}$, de donde se sigue que también $\gamma_1'(t^*) = \gamma_2'(t^*)$, pero por la unicidad local esto implica que γ_1 y γ_2 tienen que coincidir en un entorno de t^* , lo que contradice la definición de t^* . ■

Definición 6.15 Si V es una variedad diferencial afín y $v \in T_p(V)$, llamamos $I_{p,v}$ a la unión de todos los intervalos abiertos que contienen a 0 sobre los que hay definida una geodésica $\gamma : I \rightarrow V$ que cumpla $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$.

El resultado precedente sobre existencia de geodésicas implica que $I_{p,v}$ es un intervalo abierto no vacío, y el teorema anterior implica que todas las geodésicas definidas en tales intervalos se extienden a una geodésica $\gamma_{p,v} : I_{p,v} \rightarrow V$ tal que $\gamma_{p,v}(0) = p$, $\gamma_{p,v}'(0) = v$. Además, es claro que si $\gamma : I \rightarrow V$ es cualquier otra geodésica con estas propiedades, necesariamente $I \subset I_{p,v}$ y $\gamma = \gamma_{p,v}|_I$.

Diremos que $\gamma_{p,v} : I_{p,v} \rightarrow V$ es la *geodésica maximal* que pasa por p con velocidad v .

Notemos que, en realidad, no podemos decir que $\gamma_{p,v}$ es la única geodésica que pasa por p con velocidad v , porque cualquier otra curva $\gamma(t) = \gamma_{p,v}(t + a)$ cumple lo mismo (sólo que no pasa por p en $t = 0$, sino en $t = -a$). No obstante, las posibilidades de reparametrizar una geodésica son limitadas:

Teorema 6.16 Sea V una variedad diferencial afín, $\gamma : I \rightarrow V$ una geodésica no constante y $t : J \rightarrow I$ una biyección diferenciable entre intervalos. Entonces $t \circ \gamma : J \rightarrow V$ es una geodésica si y sólo si existen $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, tales que $t(s) = as + b$.

DEMOSTRACIÓN: Para cada $s_0 \in J$, tomamos una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ alrededor de $\gamma(t(s_0)) \in V$. Sabemos que las coordenadas $x(t)$ de γ en dicha carta cumplen las ecuaciones (6.12) y las coordenadas $x^k(s) = x^k(t(s))$ de $t \circ \gamma$ cumplen

$$\frac{dx^k}{ds} = \frac{dx^k}{dt} \Big|_{t(s)} t'(s), \quad \frac{d^2x^k}{ds^2} = \frac{d^2x^k}{dt^2} \Big|_{t(s)} t'(s)^2 + \frac{dx^k}{dt} \Big|_{t(s)} t''(s),$$

luego

$$\frac{d^2x^k}{ds^2} + \sum_{i,j} \frac{dx^i}{ds} \tilde{\Gamma}_{ij}^k(x(s)) \frac{dx^j}{ds} = \left(\frac{d^2x^k}{dt^2} \Big|_{t(s)} + \sum_{i,j} \frac{dx^i}{dt} \Big|_{t(s)} \tilde{\Gamma}_{ij}^k(x(t(s))) \frac{dx^j}{dt} \Big|_{t(s)} \right) t'(s)^2 + \frac{dx^k}{dt} \Big|_{t(s)} t''(s) = \frac{dx^k}{dt} \Big|_{t(s)} t''(s).$$

Teniendo en cuenta que las derivadas respecto de las funciones x^k no pueden ser todas nulas (pues las geodésicas no constantes son curvas regulares), concluimos que $t \circ \gamma$ es una geodésica en un entorno de s_0 si y sólo si $t''(s) = 0$ en

dicho entorno, luego $t \circ \gamma$ es una geodésica si y sólo si t'' es idénticamente nula, lo cual equivale a que $t(s)$ tenga la forma indicada. ■

En particular vemos que (incluso si $a = 0$) la derivada de $\gamma_{p,v}(at)$ es $a\gamma'_{p,v}(t)$, y en 0 toma el valor av , luego $\gamma_{p,v}(at) = \gamma_{p,av}(t)$.

Observemos ahora que $\gamma'_{p,v} : I_{p,v} \rightarrow TV$ es una curva diferenciable tal que $\gamma'_{p,v}(0) = (p, v)$, luego podemos considerar su derivada $(\gamma'_{p,v})'(0) \in T_{(p,v)}(TV)$.

Definición 6.17 Si V es una variedad diferencial afín, el *campo geodésico* de V es el campo $G \in \mathfrak{X}(TV)$ dado por $G_{(p,v)} = (\gamma'_{p,v})'(0)$.

Hay que comprobar que realmente es un campo diferenciable. Ahora bien, hemos probado que si $(q, w) \in TV$ y $x : U \rightarrow \tilde{U}$ es una carta alrededor de q , existe un entorno $U^* \subset TU$ de (q, w) para el que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}]-\epsilon, \epsilon[\times U^* & \xrightarrow{\gamma} & U \\ I \times \tilde{x} \downarrow & & \downarrow x \\]-\epsilon, \epsilon[\times B_\epsilon(a) \times B_\epsilon(b) & \xrightarrow{x} & \tilde{U} \end{array}$$

donde la $x(t, x, v)$ de la fila inferior no es la carta, sino la solución del sistema de ecuaciones diferenciales (6.12). Vamos a comprobar que las coordenadas del tensor $G|_{U^*}$ asociadas a la carta \tilde{x} son funciones diferenciables. Las funciones coordenadas de \tilde{x} son, por una parte, las funciones $x^i(p, v) = x^i(p)$ y, por otra parte, las funciones $y^i(p, v) = v(x^i)$, luego tenemos que estudiar $G_{(p,v)}(x^i)$ y $G_{(p,v)}(y^i)$:

$$G_{(p,v)}(x^i) = (\gamma'_{p,v}(0))(x^i) = \left. \frac{d(\gamma'_{p,v} \circ x^i)}{dt} \right|_0 = \left. \frac{d(\gamma_{p,v} \circ x^i)}{dt} \right|_0.$$

En el último paso hemos usado que $\gamma'_{p,v}(t) \in T_{\gamma_{p,v}(t)}(V)$, luego su coordenada x^i es $x^i(\gamma_{p,v}(t))$. Por otro lado:

$$y^i(\gamma'_{p,v}(t)) = \gamma'_{p,v}(t)(x^i) = \frac{d(\gamma_{p,v} \circ x^i)}{dt},$$

con lo que

$$G_{(p,v)}(y^i) = (\gamma'_{p,v}(0))(y^i) = \left. \frac{d(\gamma'_{p,v} \circ y^i)}{dt} \right|_0 = \left. \frac{d^2(\gamma_{p,v} \circ x^i)}{dt^2} \right|_0.$$

Usando el diagrama conmutativo llegamos a que

$$G_{(p,v)}(x^i) = \left. \frac{d(x^i(t, \tilde{x}(p, v)))}{dt} \right|_0, \quad G_{(p,v)}(y^i) = \left. \frac{d^2(x^i(t, \tilde{x}(p, v)))}{dt^2} \right|_0,$$

pero las funciones $x^i(t, \tilde{x}(p, v))$ son diferenciables, luego sus derivadas también. ■

El campo geodésico nos permite aprovechar en este contexto los resultados generales sobre flujos de campos vectoriales:

Teorema 6.18 Si V es una variedad diferencial afín, la composición con la proyección $\pi : TV \rightarrow V$ biyecta las curvas integrales (maximales) del campo geodésico de V con las geodésicas (maximales) de V . La biyección inversa es $\gamma \mapsto \gamma'$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\gamma : I \rightarrow V$ una geodésica de V y sea $\alpha : I \rightarrow TV$ su derivada, es decir, $\alpha(t) = \gamma'(t)$. Veamos que α es una curva integral de G , que claramente cumple $\alpha \circ \pi = \gamma$. Dado $t \in I$, sean $q = \gamma(t)$, $w = \gamma'(t)$ y $\beta = \gamma'_{q,w}$.

Se cumple que $\gamma(t+s) = \gamma_{q,w}(s)$, pues ambos miembros son geodésicas que pasan por el mismo punto con la misma derivada en $s = 0$. Por consiguiente,

$$\alpha(t+s) = \gamma'(t+s) = (\gamma(t+s))' = \gamma'_{q,w}(s) = \beta(s).$$

A su vez, $\alpha'(t+s) = \beta'(s)$ y, haciendo $s = 0$, queda

$$\alpha'(t) = \beta'(0) = G_{q,w} = G_{\gamma'(t)} = G_{\alpha(t)}.$$

Recíprocamente, si $\alpha : I \rightarrow TV$ es una curva integral de G , vamos a ver que $\alpha \circ \pi$ es una geodésica de V . Fijamos $t_0 \in I$ y sea $\alpha(t_0) = (q, w)$. Entonces, por la parte ya probada, la geodésica $t \mapsto \gamma'_{q,w}(t-t_0)$ es una curva integral de G que para $t = t_0$ pasa por el mismo punto que α . Por la unicidad de las curvas integrales tiene que ser $\alpha(t) = \gamma'_{q,w}(t-t_0)$, luego

$$\pi(\alpha(t)) = \pi(\gamma'_{q,w}(t-t_0)) = \gamma_{q,w}(t-t_0),$$

luego $\alpha \circ \pi$ es la geodésica $t \mapsto \gamma_{q,w}(t-t_0)$, y además hemos demostrado que $(\alpha \circ \pi)'(t) = \gamma'_{q,w}(t-t_0) = \alpha(t)$.

Por lo tanto, las correspondencias $\alpha \mapsto \alpha \circ \pi$ y $\gamma \mapsto \gamma'$ son mutuamente inversas, luego ambas son biyectivas y, como conservan el dominio, las curvas integrales maximales se corresponden con las geodésicas maximales. ■

Por consiguiente, en las condiciones del teorema anterior, tenemos definido un abierto $W_G \subset \mathbb{R} \times TV$ y un flujo geodésico $\Phi_G : W_G \rightarrow TV$, de modo que las curvas $\Phi_{G,p,v}(t)$ son las curvas integrales de G , y sus proyecciones son las geodésicas de V , concretamente $\Phi_{G,p,v} \circ \pi = \gamma_{p,v}$. Veamos que, en el caso de las geodésicas, podemos condensar toda la información que contiene Φ_G en una aplicación más sencilla.

Definición 6.19 Si V es una variedad diferencial afín, consideramos el abierto $W = \{(p, v) \in TV \mid (1, p, v) \in W_G\}$, sobre el que está definida la función exponencial $\exp : W \rightarrow V$ dada por $\exp(p, v) = \Phi_G(1, p, v) = \gamma_{p,v}(1)$.

Para cada $p \in V$, definimos $W_p = T_p(V) \cap W$ y $\exp_p : W_p \rightarrow V$ dada por $\exp_p(v) = \exp(p, v)$.

La diferenciabilidad de Φ_G implica la de las funciones \exp y \exp_p . Veamos algunas otras propiedades elementales:

1. Para todo $p \in V$ y todo $v \in T_p(V)$, existe un $t > 0$ tal que $(p, tv) \in W$.

En efecto, la geodésica $\gamma_{p,v}$ está definida en algún $t > 0$, por lo que $\gamma_{p,v}(s) = \gamma_{p,v}(ts)$ está definida en $s = 1$.

2. Si $(p, v) \in W$ y $0 \leq t \leq 1$, también $(p, tv) \in W$.

En efecto, $\gamma_{p,tv}(s) = \gamma_{p,v}(ts) = \Phi_{G,p,v}(ts)$ está definida en $s = 1$, ya que $\Phi_{G,p,v}$ está definida en un intervalo que contiene a 0, luego si éste contiene a 1 también contiene a t .

3. Si $p \in V$, entonces W_p es un entorno abierto de 0 y si $v \in W_p$ entonces $\exp_p(tv) = \gamma_{p,v}(t)$. En particular $\exp_p(0) = p$.

En efecto, $\exp_p(tv) = \exp(p, tv) = \gamma_{p,tv}(1) = \gamma_{p,v}(t)$.

Notemos que, en general, \exp_p sólo está definida para vectores v suficientemente pequeños, mientras que $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$ está definida para cualquier v , sólo que el dominio de variación de t será (o podrá ser) menor cuanto mayor sea la velocidad inicial v .

La función exponencial proporciona una relación natural entre una variedad y sus espacios tangentes:

Teorema 6.20 *Sea V una variedad diferencial afín y $p \in V$. Existe un abierto $U^* \subset W_p \subset T_p(V)$ (entorno de 0) tal que $\exp_p|_{U^*} : U^* \rightarrow V$ es un difeomorfismo en su imagen.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema de la función inversa, basta probar que

$$d\exp_p|_0 : T_0(W_p) \rightarrow T_p(V)$$

es biyectiva. Para ello construiremos explícitamente su inversa. Sea $v \in T_p(V)$. Consideremos la curva $\alpha :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow W_p$ dada por $\alpha_v(t) = tv$. Entonces $\alpha'_p(0) \in T_0(W_p)$. Definimos $\phi : T_p(V) \rightarrow T_0(W_p)$ mediante $\phi(v) = \alpha'_p(0)$. Es claro que ϕ es lineal.

Ahora calculamos

$$d\exp_p|_0(\phi(v)) = d\exp_p|_0(\alpha'_p(0)) = d\exp_p|_0(d\alpha_v|_0(\partial_t)) = d(\alpha_v \circ \exp_p)|_0(\partial_t),$$

pero esto es la derivada en 0 de la curva $\exp_p(tv)$, o sea, v .

Así pues, $\phi \circ \exp_p|_0 = 1$. Como son aplicaciones lineales entre espacios de la misma dimensión, ambas son isomorfismos. ■

Conviene observar que la aplicación ϕ que hemos definido en la prueba anterior no es más que la inversa del isomorfismo canónico $\theta_0 : T_0(T_p V) \rightarrow T_p V$, por lo que $d\exp_p|_0 = \theta_0$.

Definición 6.21 Si V es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , un subconjunto $U \subset V$ es *estrellado* si cuando $v \in U$ y $0 \leq t \leq 1$, entonces $tv \in U$.

Es obvio que si consideramos en V la topología euclídea, todo entorno de 0 contiene un abierto estrellado (por ejemplo, la antiimagen de una bola abierta por un isomorfismo entre V y \mathbb{R}^n).

Dada una variedad diferencial afín V y un punto $p \in V$, un abierto $U \subset V$ es un *entorno normal* de p si existe un abierto estrellado $U^* \subset T_p(V)$ tal que $\exp_p|_{U^*} : U^* \rightarrow U$ es un difeomorfismo.

El teorema anterior prueba que todo punto tiene entornos normales. Su interés radica en el hecho siguiente:

Teorema 6.22 *Si V es una variedad diferencial afín y U es un entorno normal de un punto $p \in V$, entonces para cada punto $q \in U$ existe una única geodésica $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$. De hecho, si $U^* \subset T_p(V)$ es un abierto estrellado sobre el que $\exp_p : U^* \rightarrow U$ es un difeomorfismo y $v = (\exp_p|_{U^*})^{-1}(q)$, entonces $\gamma = \gamma_{p,v}|_{[0,1]}$.*

DEMOSTRACIÓN: Como U^* es estrellado tenemos la curva $r : [0, 1] \rightarrow U^*$ dada por $r(t) = tv$, y entonces

$$\gamma_{p,v}(t) = \gamma_{tv}(1) = \exp_p(r(t)) \in U.$$

Así pues, $\gamma = \gamma_{p,v}|_{[0,1]}$ es una geodésica contenida en U tal que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = \exp_p(v) = q$.

Sea ahora $\sigma : [0, 1] \rightarrow U$ una geodésica arbitraria tal que $\sigma(0) = p$ y $\sigma(1) = q$. Si $w = \sigma'(0)$, entonces $\sigma(t) = \gamma_{p,w}(t) = \exp_p(tw)$.

Veamos que la curva $r^* : [0, 1] \rightarrow T_p(V)$ dada por $r^*(t) = tw$ tiene su imagen en U^* . En principio, $(r^*)^{-1}[U^*]$ es un abierto en $[0, 1]$ que contiene a 0, luego también a un intervalo $[0, \epsilon[$. Si existe un $t \in [0, 1]$ tal que $r(t) \notin U^*$, podemos tomar el ínfimo de todos ellos $t^* > 0$. Así $r^*[[0, t^*] \subset U^*$, pero $r^*(t^*) \notin U^*$, o de lo contrario existiría un ϵ tal que $[0, t^* + \epsilon[\subset (r^*)^{-1}[U^*]$, en contradicción con la elección de t^* .

Por otra parte, $\sigma \circ (\exp_p|_{U^*})^{-1} : [0, 1] \rightarrow U^*$ es una aplicación continua que coincide con r^* en $[0, t^*[$, luego también tiene que coincidir en t^* , de modo que $r^*(t^*) = (\exp_p|_{U^*})^{-1}(\sigma(t^*)) \in U^*$, contradicción.

En particular $w \in U^*$, y como $q = \sigma(1) = \exp_p(w) = \exp_p(v)$, concluimos que $w = v$, luego $\sigma = \gamma$. ■

El teorema no excluye que pueda haber otras geodésicas que unan p con q sin estar contenidas en U .

Notemos que este teorema implica también que U^* está determinado por U , pues consta de las derivadas en 0 de las geodésicas contenidas en U que unen p (en $t = 0$) con los puntos de U (en $t = 1$).

Definición 6.23 Una *geodésica a trozos* en una variedad diferencial afín V es una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow V$ tal que existe una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ tal que cada restricción $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ es una geodésica.

Claramente, las geodésicas a trozos en \mathbb{R}^n son las poligonales. El hecho de que todo punto de una variedad diferencial afín pueda unirse por una geodésica con todos los puntos de un entorno implica claramente el teorema siguiente (comparar con 2.23):

Teorema 6.24 *Si V es una variedad diferencial afín conexa y $p, q \in V$, existe una geodésica a trozos $\gamma : [a, b] \rightarrow V$ tal que $\gamma(a) = p$ y $\gamma(b) = q$.*

DEMOSTRACIÓN: Tomamos $p \in V$ y observamos que el conjunto de los puntos de V que pueden unirse con p mediante una geodésica a trozos es abierto y cerrado en V . ■

En realidad cada punto de una variedad afín tiene entornos mejores que los entornos normales:

Definición 6.25 Un abierto en una variedad diferencial afín V es *convexo* si es un entorno normal de todos sus puntos.

Todo punto de una variedad diferenciable afín tiene un entorno convexo, pero debemos posponer la prueba hasta la sección siguiente (teorema 6.37). No obstante, por mantener en la misma sección todos los resultados sobre geodésicas, demostramos a continuación una consecuencia de este hecho, a saber, que una geodésica no se interrumpe mientras “tenga espacio” por el que avanzar:

Teorema 6.26 Sea V una variedad diferencial afín y supongamos que una geodésica $\gamma :]a, b[\rightarrow V$ admite una extensión $\gamma :]a, b[\rightarrow V$ continua. Entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que γ se prolonga a una geodésica $\gamma :]a, b + \epsilon[\rightarrow V$.

DEMOSTRACIÓN: Sea U un entorno convexo de $\gamma(b)$. Entonces existe un $\delta > 0$ tal que $p = \gamma(b - \delta) \in U$. Como U es un entorno normal de p , tenemos un difeomorfismo $\exp_p : U^* \rightarrow U$, donde U^* es un abierto estrellado en $T_p(V)$. Consideramos la reparametrización $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\delta t + b - \delta)$, que es también una geodésica y cumple $\tilde{\gamma}(0) = p$, luego tiene que ser de la forma $\tilde{\gamma}(t) = \gamma_{p,v}(t)$, donde $v = \tilde{\gamma}'(0)$.

Ahora bien, es fácil ver que la recta $t \mapsto tv$ permanece en U^* mientras $\gamma_{p,v}(t) = \exp_p(tv)$ permanece en U , y esto sucede para todo $0 \leq t < 1$, pues $\gamma_{p,v}(t) = \gamma(\delta t + b - \delta) \in U$ y también para $t = 1$, pues, por continuidad, $\gamma_{p,v}(1) = \tilde{\gamma}(1) = \gamma(b) \in U$. Concluimos que $v \in U^*$ y, al ser abierto, existe un $\epsilon > 0$ tal que $tv \in U^*$, para $0 \leq t < 1 + \epsilon$, luego $\gamma_{p,v}$ está definida en $[0, 1 + \epsilon[$, luego $\tilde{\gamma}$ se prolonga hasta este mismo intervalo, luego γ se prolonga hasta $]a, b + \epsilon[$. ■

6.5 La torsión de una conexión afín

En el capítulo siguiente veremos que el problema real a la hora de fijar una conexión afín en una variedad diferencial no es tanto encontrar una como encontrar “la adecuada”. Para el caso de subvariedades de \mathbb{R}^m “la adecuada” es la conexión de Levi-Civita, pero para una variedad abstracta no tenemos criterio alguno. Los resultados de esta sección nos ayudarán a elegir.

En principio, la fórmula (6.6) define una conexión afín en un abierto coordinado de una variedad para cualquier elección de las funciones Γ_{ij}^k . En vista de ello, tal vez el lector se sienta tentado de considerar en cualquier variedad diferencial la conexión determinada estipulando que todos los coeficientes Γ_{ij}^k sean nulos. Así tendríamos la conexión afín más parecida posible a la conexión de Levi-Civita de \mathbb{R}^n .

Por desgracia, esto no es coherente. En \mathbb{R}^n es viable porque admite un atlas de una sola carta y, además, podemos considerar a la identidad como una carta “canónica”, a la que hacer referencia en las definiciones de conceptos geométricos. Pero debemos tener presente que los coeficientes de una misma conexión afín pueden ser nulos en una carta y no nulos en otra con el mismo dominio, por lo que, en una variedad como S^2 , donde ninguna carta puede considerarse “más natural” que otra, no podemos exigir que los coeficientes de una conexión sean nulos en una carta sin que ello pueda forzar a que no lo sean en otra. Más aún, no es cierto que pedir que los coeficientes sean nulos sea necesariamente “lo más natural”, pues, por ejemplo, los coeficientes de la conexión de Levi-Civita en una subvariedad de \mathbb{R}^n no tienen por qué ser nulos en ninguna carta, luego una conexión alternativa con coeficientes nulos no sería “la natural”.

Aquí vamos a introducir una clase destacada de conexiones afines, las que llamaremos conexiones simétricas, y que estarán determinadas por la propiedad de que sus coeficientes cumplen $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, para todos los índices i, j, k . En principio tenemos el mismo problema: podría ocurrir que existieran dos cartas con el mismo dominio de modo que los coeficientes de la conexión en una de ellas cumplieran esta condición de simetría y en la otra no, con lo que no tendría sentido plantear si la conexión es o no simétrica. Sin embargo, vamos a ver que esto no puede ocurrir realmente y que, por consiguiente, la definición de simetría es coherente.

Una forma de comprobarlo sería estudiar cómo se relacionan los coeficientes de una misma conexión en el dominio común de dos cartas distintas y comprobar que la simetría de los coeficientes en una implica la simetría de los coeficientes en la otra. Sin embargo, vamos a llegar a esta conclusión por un camino más conceptual. Concretamente, vamos a ver que $\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$ son los coeficientes de un tensor, por lo que serán nulos o no (en cada carta) en función de si el tensor es nulo o no, lo cual no depende de la carta considerada. Pero antes de desarrollar esta idea, conviene relacionarla con otra cuestión:

El hecho de que las derivadas parciales conmutan se expresa en términos de la derivada de Lie como $[\partial_{x_i}, \partial_{x_j}] = 0$. Cabe preguntarse si también tiene su reflejo en las conexiones afines, es decir, si podemos asegurar que una conexión D tiene que cumplir $D_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = D_{\partial_{x_j}} \partial_{x_i}$. Más en general, del mismo modo que el corchete de Lie no es nulo para campos cualesquiera, cabe estudiar las diferencias $D_X Y - D_Y X$.

Con más detalle, consideremos una conexión afín D en una variedad diferencial V y dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$. Fijada una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$, podemos expresar

$$X|_U = \sum_i u^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y|_U = \sum_j v^j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Entonces (6.6) nos da que

$$D_X Y - D_Y X = \sum_k \left(\sum_{ij} u^i (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) v^j + \sum_i \left(u^i \frac{\partial v^k}{\partial x_i} - v^i \frac{\partial u^k}{\partial x_i} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

En la última parte reconocemos la expresión en coordenadas del corchete de Lie (3.4), luego tenemos que

$$D_X Y - D_Y X - [X, Y] = \sum_k \sum_{ij} u^i (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) v^j \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

El miembro izquierdo no depende de sistemas de coordenadas, mientras que el miembro derecho muestra que la expresión es $C^\infty(V)$ -bilineal.

Definición 6.27 Si D es una conexión en una variedad V , definimos su *torsión* como el operador

$$\text{Tor } D : \mathfrak{X}(V) \times \mathfrak{X}(V) \longrightarrow \mathfrak{X}(V)$$

dado por $(\text{Tor } D)(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y]$.

Hemos probado que $\text{Tor } D$ es bilineal y también es claro que $(\text{Tor } D)(X, Y)_p$ depende únicamente de los valores de X e Y en un entorno de p .

Según vimos en el ejemplo tras el lema de localización, podemos identificar a $\text{Tor } D$ con el tensor de tipo $(1, 2)$

$$\text{Tor } D : \Lambda^1(V) \times \mathfrak{X}(V) \times \mathfrak{X}(V) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dado por $(\omega, X, Y) \mapsto \omega(D_X Y - D_Y X - [X, Y])$. Sus coordenadas en una carta son

$$(\text{Tor } D)(dx^k, \partial_{x_i}, \partial_{x_j}) = dx^k (D_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} - D_{\partial_{x_j}} \partial_{x_i}) = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k.$$

Ahora el teorema siguiente es trivial:

Teorema 6.28 Sea D una conexión afín en una variedad diferencial V . Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. $\text{Tor } D = 0$.
2. Los coeficientes de D respecto de cualquier carta cumplen $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.
3. Para todo par de campos $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$, se cumple que

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y].$$

4. En cualquier carta se cumple que $D_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = D_{\partial_{x_j}} \partial_{x_i}$.

Definición 6.29 Una conexión afín en una variedad diferencial es *simétrica* si cumple cualquiera de las condiciones del teorema anterior.

Obviamente, la conexión de Levi-Civita de un espacio afín es trivialmente simétrica (pues sus coeficientes son todos nulos). El teorema siguiente implica que lo mismo vale para la conexión de Levi-Civita de cualquier subvariedad de \mathbb{R}^n :

Teorema 6.30 Si D es una conexión afín simétrica en una variedad semi-riemanniana R y V es una subvariedad semi-riemanniana de R , entonces la restricción de D a V también es simétrica.

DEMOSTRACIÓN: Si $p \in V$ y $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$, tenemos que

$$(D_X Y)_p - (D_Y X)_p = \tan((D_{\bar{X}} \bar{Y})_p - (D_{\bar{Y}} \bar{X})_p) = \tan([\bar{X}, \bar{Y}]_p),$$

y basta ver que $[\bar{X}, \bar{Y}]_p = [X, Y]_p$ (en realidad $[\bar{X}, \bar{Y}]_p = di|_p([X, Y])_p$), pues entonces $\tan(di|_p([X, Y])_p) = [X, Y]_p$. En efecto, dada $f \in C_p^\infty(R)$, tenemos que

$$\begin{aligned} [\bar{X}, \bar{Y}]_p(f) &= \bar{X}_p(\bar{Y}(f)) - \bar{Y}_p(\bar{X}(f)) = X_p(\bar{Y}(f)|_V) - Y_p(\bar{X}(f)|_V) \\ &= X_p(Y(f|_V)) - Y_p(X(f|_V)) = [X, Y]_p(f|_V) = di|_p([X, Y]_p)(f). \end{aligned}$$

■

Posiblemente, el teorema siguiente es el que más claramente muestra el significado geométrico de la simetría de una conexión afín:

Teorema 6.31 Si V es una variedad diferencial afín y $p \in V$, se cumple $(\text{Tor } D)_p = 0$ si y sólo si existe una carta alrededor de p respecto a la cual $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$, para todos los índices i, j, k .

DEMOSTRACIÓN: Puesto que los coeficientes de la torsión son $\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$, una implicación es evidente. Si la torsión se anula en p , tomamos un entorno normal U de p y fijamos una base e_1, \dots, e_n de $T_p(V)$. Sea $U^* \subset T_p(V)$ el abierto estrellado sobre el que $\exp_p|_{U^*} : U^* \rightarrow U$ es un difeomorfismo. Al componer el inverso de este difeomorfismo con las coordenadas respecto de la base fijada obtenemos una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$. Veamos que cumple lo requerido.

Para ello observamos que si $a \in \mathbb{R}^n$ y $v = a^1 e_1 + \dots + a^n e_n \in T_p(V)$, las coordenadas de la geodésica $\gamma_{p,v}(t) = \exp_p(tv)$ son $x^i(t) = a^i t$, luego las ecuaciones (6.9) nos dan que

$$\sum_{ij} a^i \Gamma_{ij}^k(p) a^j = 0$$

para todo $a \in \mathbb{R}^n$, y esto (teniendo en cuenta que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$) implica que todos los coeficientes son nulos.⁴

■

Nota Analicemos con más detalle el enunciado del teorema anterior: Si existe una carta en la que todos los coeficientes de la conexión son nulos, la ecuación (6.8) nos da que las coordenadas del transporte paralelo $v(t)$ de cualquier vector de $T_p(V)$ sobre cualquier curva que pase por $\alpha(t_0) = p$ cumplen $(v^k)'(t_0) = 0$, lo que significa que, en un entorno de t_0 suficientemente pequeño, todas las funciones $v^k(t)$ son indistinguibles de las constantes $v^k(t) = v^k(t_0)$ (sus

⁴Por ejemplo, porque los coeficientes definen una forma bilineal simétrica en \mathbb{R}^n en la que todos los vectores son isotropos, luego en una base pseudoortonormal su matriz es nula, luego el producto es nulo, luego todos los coeficientes son nulos.

gráficas con un factor de escala grande son indistinguibles de rectas horizontales), por lo que, en un entorno de p suficientemente pequeño, las coordenadas respecto a dicha carta del transportado de un vector sobre cualquier curva no muestran ninguna variación apreciable.

Por el contrario, si en una carta hay un coeficiente $\Gamma_{ij}^k(p) \neq 0$, entonces, suponiendo sin pérdida de generalidad que $x(p) = 0$, el transporte paralelo $v(t)$ por la curva $\alpha(t) = x^{-1}(0, \dots, t, \dots, 0)$ (con la t en la posición i -ésima) del vector $\partial_{x_j}|_p$ cumple $v'_k(0) = \Gamma_{ij}^k \neq 0$, y esto significa que, si nos restringimos a un entorno de p suficientemente pequeño, la gráfica de $v^k(t)$ será indistinguible de una recta, pero de pendiente no nula, lo que se interpreta como que el vector $v(t)$ varía de forma apreciable.⁵

En conclusión: para que una conexión afin induzca un transporte paralelo que localmente pueda confundirse con el transporte paralelo de \mathbb{R}^n —o el de los espacios afines en general—, en el sentido de que haya una carta respecto de la que las coordenadas de los vectores no muestren variaciones apreciables cuando se transportan paralelamente, la conexión tiene que ser simétrica. ■

interpretación “infinitesimal” de la torsión Imaginemos alguien que viva en un entorno muy pequeño de un punto p de una variedad diferencial afin V creyendo que vive en \mathbb{R}^n y, más concretamente, creyendo que las coordenadas de un punto respecto de una cierta carta x son las coordenadas respecto de la carta identidad en \mathbb{R}^n . Pongamos que $x(p) = x_0$. Este habitante identificará dos vectores abstractos

$$v = \sum_k v_0^k \partial_{x_k}|_p, \quad w = \sum_k w_0^k \partial_{x_k}|_p$$

con los vectores en \mathbb{R}^n de coordenadas $(v_0^k), (w_0^k)$. Fijemos $s > 0$ y consideremos los vectores sv y sw , cuyas coordenadas son sv_0^k y sw_0^k , respectivamente. Consideremos también las curvas

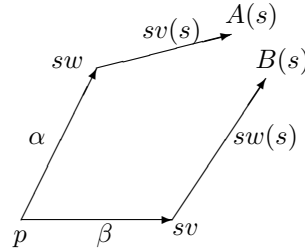
$$\alpha(t) = x^{-1}(x_0^1 + tw_0^1, \dots, x_0^n + tw_0^n), \quad \beta(t) = x^{-1}(x_0^1 + tv_0^1, \dots, x_0^n + tv_0^n)$$

y los transportes paralelos $v(s) = \text{tp}(\alpha)_0^s(v)$ y $w(s) = \text{tp}(\beta)_0^s(w)$.

Nuestro “habitante” creará que estos vectores tienen las mismas coordenadas que los originales, y que si “suma” las coordenadas del punto $\alpha(s)$ (que son $x_0^i + sw_0^i$) con las del vector $sv(s)$ (que para él son sv_0^i) llegará al punto de coordenadas $x_0^i + sv_0^i + sw_0^i$, el mismo que si suma las coordenadas de $\beta(s)$ con las del vector $sw(s)$. Veamos ahora en qué medida sus creencias se corresponden con la realidad.

⁵Si la pendiente es muy pequeña podría hacer falta utilizar escalas diferentes en cada eje para apreciarla, pero aun así tenemos una diferencia con el caso anterior, pues una función de derivada nula en un punto, aunque se represente gráficamente con escalas distintas en los dos ejes, sigue siendo indistinguible de una recta horizontal en un entorno del punto suficientemente pequeño (menor cuanto mayor sea la desproporción entre las escalas empleadas).

La figura representa la imagen mental que tiene nuestro “habitante” de la situación, en la que sumamos “alegremente” coordenadas de puntos con coordenadas de vectores como si estuviéramos en \mathbb{R}^n , salvo por que hemos distinguido los puntos $A(s)$ y $B(s)$ que nuestro “habitante” piensa que tienen que coincidir. Vamos a calcularlas para ver hasta qué punto esto es cierto, aunque sea por aproximación. Tenemos que



$$v(t) = x(\text{tp}_{\alpha,t}(v)), \quad w(t) = x(\text{tp}_{\beta,t}(w)),$$

y el hecho de que el transporte paralelo tenga derivada covariante nula se traduce, según (6.8) en que

$$\left. \frac{dv^k}{dt} \right|_0 = - \sum_{i,j} w_0^i \Gamma_{ij}^k(p) v_0^j, \quad \left. \frac{dw^k}{dt} \right|_0 = - \sum_{i,j} v_0^i \Gamma_{ij}^k(p) w_0^j = - \sum_{i,j} w_0^i \Gamma_{ji}^k(p) v_0^j.$$

Por consiguiente, el desarrollo de Taylor de las funciones v^k y w^k será:

$$v^k(s) = v^k(0) + \left. \frac{dv^k}{dt} \right|_0 s + a^k(s)s^2 = v_0^k - s \sum_{i,j} w_0^i \Gamma_{ij}^k(p) v_0^j + a^k(s)s^2,$$

$$w^k(s) = w^k(0) + \left. \frac{dw^k}{dt} \right|_0 s + b^k(s)s^2 = w_0^k - s \sum_{i,j} w_0^i \Gamma_{ji}^k(p) v_0^j + b^k(s)s^2,$$

para ciertas funciones diferenciables a^k y b^k . Por consiguiente, la diferencia entre las coordenadas de los puntos $A(s)$ y $B(s)$ que muestra la figura es

$$\begin{aligned} B^k(s) - A^k(s) &= (x_0^k + sv_0^k + sw^k(s)) - (x_0^k + sw_0^k + sv^k(s)) \\ &= x_0^k + sv_0^k + sw_0^k - s^2 \sum_{i,j} w_0^i \Gamma_{ji}^k(p) v_0^j + b^k(s)s^3 \\ &\quad - (x_0^k + sw_0^k + sv_0^k - s^2 \sum_{i,j} w_0^i \Gamma_{ij}^k(p) v_0^j + a^k(s)s^3) \\ &= \text{Tor}_p^k(v, w)s^2 + \text{términos de orden } \geq 3. \end{aligned}$$

Vemos así que, en general,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{B(s) - A(s)}{s} = 0,$$

lo cual se interpreta como que nuestro “habitante” no podrá distinguir las coordenadas de $A(s)$ y $B(s)$ si el cociente es menor que un $\epsilon > 0$ que haga que ϵs quede por debajo de su umbral de discernimiento para todo s lo suficientemente pequeño como para que no haga que las curvas y los vectores se salgan del entorno en que “habita”. Por otra parte,

$$\text{Tor}_p^k(v, w) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{B^k(s) - A^k(s)}{s^2},$$

lo que significa que las coordenadas de $A(s)$ y $B(s)$, que son indistinguibles en una aproximación de primer orden, se distinguen en una aproximación de segundo orden si y sólo si $\text{Tor}_p(v, w) \neq 0$, y las coordenadas de la torsión son precisamente los coeficientes que las distinguen en segundo orden. ■

La matriz hessiana Vamos a dar una caracterización adicional de la simetría de una conexión afín. En el cálculo diferencial en \mathbb{R}^n se define la matriz hessiana de una función f como la matriz formada por sus derivadas parciales de segundo orden. Si tratamos de extender esta definición a una variedad arbitraria nos encontramos con el problema habitual: si consideramos dos cartas distintas con el mismo dominio, tendremos dos “matrices hessianas” distintas en cada punto, y en ausencia de una “carta canónica”, como es la identidad en \mathbb{R}^n , no tiene sentido decir que la “auténtica matriz hessiana” es una u otra. Sin embargo, podemos dar una definición de hessiana independiente de la elección de cualquier carta:

Definición 6.32 Si D es una conexión afín en una variedad diferencial V , definimos el *tensor hessiano* de una función $f \in C^\infty(V)$ como su segunda diferencial covariante: $Hf = D(D(f)) = D(df)$. La *matriz hessiana* de f en una carta de V es la matriz de las coordenadas en dicha carta del tensor Hf .

Más explícitamente, usando la fórmula (3.5) vemos que

$$\begin{aligned} (Hf)(X, Y) &= D_Y(df)(X) = D_Y(df(X)) - df(D_Y X) \\ &= Y(X(f)) - (D_Y X)(f). \end{aligned}$$

Con esta expresión, y usando (6.5), podemos calcular las componentes de la matriz hessiana en una carta arbitraria:

$$H(f)_{ij} = H(f)(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k \Gamma_{ji}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

Así, en el caso de \mathbb{R}^n , la matriz hessiana de una función f respecto de las coordenadas cartesianas es la matriz hessiana de f en el sentido usual, pues los coeficientes Γ_{ji}^k son nulos, pero en una carta arbitraria de una variedad arbitraria, con esta expresión general conseguimos que sea independiente de la elección de la carta.

Ahora es inmediato que la simetría de la conexión D es equivalente a que la matriz hessiana de cualquier función f respecto de cualquier carta sea simétrica. (Para probar la simetría de la conexión basta aplicar la fórmula anterior a las funciones coordenadas x^k respecto de una carta arbitraria alrededor de un punto arbitrario de V .) ■

Veamos algunos resultados adicionales sobre la torsión de una conexión, que, entre otras cosas, nos darán otra interpretación geométrica. Empezamos observando que si D y \bar{D} son dos conexiones afines en una misma variedad diferencial V , la aplicación

$$\Delta(\bar{D}, D) : \mathfrak{X}(V) \times \mathfrak{X}(V) \longrightarrow \mathfrak{X}(V)$$

dada por

$$\Delta(\bar{D}, D)(X, Y) = \bar{D}_X Y - D_X Y$$

es $C^\infty(V)$ -bilineal, por lo que, del mismo modo que la torsión, puede identificarse con un tensor de tipo $(2, 1)$ al que llamaremos *diferencia* de las dos conexiones. Es fácil ver que sus coordenadas en una carta son $\bar{\Gamma}_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k$.

Recíprocamente, si D es una conexión y $T : \mathfrak{X}(V) \times \mathfrak{X}(V) \rightarrow \mathfrak{X}(V)$ es cualquier aplicación $C^\infty(V)$ -bilineal, se comprueba fácilmente que

$$\bar{D}_X Y = D_X Y + T(X, Y)$$

es otra conexión afín tal que $\Delta(\bar{D}, D) = T$.

Definimos la parte simétrica y antisimétrica de un tensor $T \in \mathcal{T}_1^2(V)$ como

$$T^s(X, Y) = \frac{1}{2}(T(X, Y) + T(Y, X)), \quad T^a(X, Y) = \frac{1}{2}(T(X, Y) - T(Y, X)).$$

Así T se descompone como $T = T^s + T^a$, y se da la igualdad $T = T^s$ (o, equivalentemente, $T^a = 0$) si y sólo si el tensor T es *simétrico* (en el sentido de que $T(X, Y) = T(Y, X)$). Análogamente, se cumple $T = T^a$ (o, equivalentemente, $T^s = 0$) si y sólo si T es *antisimétrico* ($T(X, Y) = -T(Y, X)$).

Teorema 6.33 Sean D y \bar{D} dos conexiones afines en una misma variedad diferencial V . Entonces:

1. D y \bar{D} definen las mismas geodésicas si y sólo si $\Delta^s(\bar{D}, D) = 0$.
2. D y \bar{D} tienen la misma torsión si y sólo si $\Delta^a(\bar{D}, D) = 0$.

Por consiguiente, $D = \bar{D}$ si y sólo si definen las mismas geodésicas y tienen la misma torsión.

DEMOSTRACIÓN: 1) Supongamos que D y \bar{D} definen las mismas geodésicas. Entonces, dado cualquier $X \in \mathfrak{X}(V)$, fijamos un punto interior $p \in V$ y consideramos la geodésica α que cumple $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = X_p$. Entonces

$$(\bar{D}_X X)_p = \left. \frac{\bar{D}\alpha}{dt} \right|_0 = 0,$$

e igualmente $(D_X X)_p = 0$, luego $\Delta(\bar{D}, D)(X, X)_p = 0$. Como esto vale para todo punto interior p , concluimos que $\Delta(\bar{D}, D)(X, X) = 0$ para todo campo $X \in \mathfrak{X}(V)$ (porque $V \setminus \partial V$ es denso en V , luego si una aplicación de $C^\infty(V)$ se anula en este abierto, se anula en V). Ahora, si tomamos dos campos X, Y , resulta que

$$0 = \Delta(\bar{D}, D)(X + Y, X + Y) = \Delta(\bar{D}, D)(X, X) + \Delta(\bar{D}, D)(X, Y)$$

$$+ \Delta(\bar{D}, D)(Y, X) + \Delta(\bar{D}, D)(Y, Y) = \Delta(\bar{D}, D)(X, Y) + \Delta(\bar{D}, D)(Y, X),$$

luego $\Delta(\bar{D}, D)$ es antisimétrico.

Recíprocamente, si α es una geodésica para D , sea $X \in \mathfrak{X}(V)$ un campo vectorial que extienda a α' en un entorno de uno de sus puntos $\alpha(t)$. Así, en un entorno de t , se cumple que

$$\frac{\bar{D}\alpha'}{dt} = (\bar{D}_X X)_{\alpha(t)} = (D_X X)_{\alpha(t)} + \Delta(\bar{D}, D)(X, X) = \frac{D\alpha'}{dt} = 0,$$

donde hemos usado que la antisimetría de $\Delta(\bar{D}, D)$ implica trivialmente que $\Delta(\bar{D}, D)(X, X) = 0$. Concluimos que α' también es una geodésica para \bar{D} .

2) Basta observar que

$$\begin{aligned} \text{Tor } \bar{D}(X, Y) - \text{Tor } D(X, Y) &= (\bar{D}_X Y - \bar{D}_Y X - [X, Y]) - (D_X Y - D_Y X - [X, Y]) \\ &= \Delta(\bar{D}, D)(X, Y) - \Delta(\bar{D}, D)(Y, X) = 2\Delta^a(\bar{D}, D)(X, Y). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\text{Tor } \bar{D} - \text{Tor } D = 2\Delta^a(\bar{D}, D). \quad \blacksquare$$

De la última fórmula se deduce también que si D es una conexión afín cualquiera sobre una variedad diferencial V , entonces la conexión ∇ dada por

$$\nabla_X Y = D_X Y - \frac{1}{2} \text{Tor} D(X, Y) \quad (6.13)$$

determina las mismas geodésicas (pues la torsión es siempre un tensor antisimétrico) y $\text{Tor}(\nabla) = 0$. Por lo tanto:

Teorema 6.34 *Para toda conexión afín en una variedad diferencial V , existe una única conexión simétrica en V que determina las mismas geodésicas.*

De aquí obtenemos una interpretación geométrica “relativa” de la torsión:

Teorema 6.35 *Sea D una conexión afín con torsión T en una variedad diferencial V y sea ∇ la conexión afín simétrica que determina las mismas geodésicas. Sea $p \in V$ y sean $v, w \in T_p(V)$. Entonces $\frac{1}{2}T_p(w, v)$ es la derivada covariante respecto de ∇ de cualquier transporte paralelo respecto de D del vector w sobre una curva regular que pase por p con velocidad v .*

DEMOSTRACIÓN: Sea α una curva regular que pase por p y v el transporte paralelo de w sobre α . Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$ campos que extiendan a α' y a v en un entorno de $p = \alpha(t_0)$. Entonces, en un entorno de t_0 , se cumple que

$$\frac{\nabla v}{dt} = (\nabla_X Y)_{\alpha(t)} = (D_X Y)_{\alpha(t)} - \frac{1}{2} T_{\alpha(t)}(\alpha'(t), v(t)) = \frac{1}{2} T_{\alpha(t)}(v(t), \alpha'(t)),$$

luego

$$\left. \frac{\nabla v}{dt} \right|_{t_0} = \frac{1}{2} T_p(w, v). \quad \blacksquare$$

Así, en las condiciones del teorema anterior, si admitimos que la conexión ∇ es “más fidedigna” que D en cuanto que da lugar a un transporte paralelo “infinitesimalmente invariante”, al contrario que D , entonces la torsión determina la derivada covariante “real” de los transportes que respecto de D son paralelos o, dicho de otro modo, lo que se desvía el transporte paralelo respecto de D del “auténtico” transporte paralelo. En el capítulo siguiente estaremos en condiciones de precisar estas ideas.

En relación con el teorema 6.33 conviene observar que el teorema 6.12 implica claramente que si dos conexiones afines determinan el mismo transporte paralelo sobre arcos cualesquiera, entonces son iguales, y también que si dos conexiones determinan las mismas geodésicas y el mismo transporte paralelo sobre las geodésicas, entonces son iguales.

Terminamos probando que, como habíamos anunciado, en una variedad diferencial afín todo punto tiene un entorno convexo. Para ello necesitamos un resultado previo. Sea $E : W \rightarrow V \times V$ dada por $E(p, v) = (p, \exp(p, v))$.

Teorema 6.36 *Sea V una variedad diferencial afín y $p \in V$. Si la exponencial $\exp_p : W_p \rightarrow V$ tiene rango máximo en un punto $v \in W_p$, entonces la aplicación $E : W \rightarrow V \times V$ tiene también rango máximo en (p, v) .*

DEMOSTRACIÓN: Hay que probar que $dE|_{(p,v)}$ es inyectiva. Supongamos que $w \in T_{(p,v)}(TV)$ cumple $dE|_{(p,v)}(w) = 0$. Sea $\pi : TV \rightarrow V$ la proyección usual y $\pi_1 : V \times V \rightarrow V$ la proyección en el primer factor. Entonces $E \circ \pi_1 = \pi$, luego $d\pi|_{(p,v)}(w) = d\pi_1|_{E(p,v)}(dE|_{(p,v)}(w)) = 0$.

Consideremos ahora la inclusión $i_p : T_p(V) \rightarrow TV$. Claramente $i_p \circ \pi = 0$, luego $di_p|_v \circ d\pi|_{(p,v)} = 0$, lo que significa que la imagen de $di_p|_v$ está contenida en el núcleo de $d\pi|_{(p,v)}$, pero ambos espacios tienen dimensión n , luego coinciden, luego existe un $\tilde{w} \in T_v(T_p(V))$ tal que $w = di_p|_v(\tilde{w})$.

Por otra parte, $\exp_p = i_p \circ E \circ \pi_2$, luego

$$d\exp_p|_v(\tilde{w}) = d\pi_2|_{\exp_p(v)}(dE|_{(p,v)}(w)) = 0,$$

luego $\tilde{w} = 0$ y, por consiguiente, $w = 0$. ■

En la prueba del teorema 6.20 hemos visto que \exp_p siempre tiene rango máximo en 0, luego por el teorema de la función inversa E se restringe a un difeomorfismo entre un entorno de $(p, 0)$ en TV y un entorno de (p, p) en $V \times V$.

Teorema 6.37 *Todo punto de una variedad diferencial afín tiene un entorno convexo.*

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar observamos que no perdemos generalidad si suponemos que la conexión afín de V es simétrica, pues si no lo es podemos cambiarla por otra con las mismas geodésicas, luego con la misma función exponencial, luego con los mismos abiertos normales y convexos.

Dado $p \in V$, tomamos un entorno normal U y consideramos el abierto estrellado $U^* \subset T_p(V)$ donde $\exp_p|_{U^*} : U^* \rightarrow U$ es un difeomorfismo. Igual

que en la prueba del teorema 6.31, tomamos una base e_1, \dots, e_n de $T_p(V)$ y consideramos la carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ que resulta de componer el difeomorfismo inverso de $\exp_p|_{U^*}$ con las coordenadas respecto de la base prefijada. Esto nos asegura que los coeficientes de la conexión son nulos en p . Además $x(p) = 0$.

Consideramos el tensor $B \in \mathcal{T}_2^0(U)$ cuyas coordenadas en la carta x son

$$B_{ij} = \delta_{ij} - \sum_k \Gamma_{ij}^k x^k$$

(donde (δ_{ij}) es la matriz identidad). Así, para cada $q \in U$ tenemos que B_q es una forma bilineal simétrica en $T_q(V) \times T_q(V)$ y la matriz de B_p en la base de $T_p(V)$ asociada a x es la identidad, luego es un producto escalar euclídeo. Por 4.10, restringiendo U podemos exigir que B sea euclídeo en todos sus puntos. Por la observación precedente al teorema, la aplicación E se restringe a un difeomorfismo

$$E : W^* \rightarrow W,$$

donde W es un entorno de (p, p) en $V \times V$, que podemos tomar contenido en $U \times U$, y W^* es un entorno de $(p, 0)$ en TV , que podemos tomar estrellado en el sentido de que si $(q, v) \in W^*$ y $0 \leq t \leq 1$, entonces $(q, tv) \in W^*$.

En efecto, reduciendo W^* podemos suponerlo contenido en TU^* , con lo que está definido $\tilde{x}[W^*]$, que es un entorno de $(0, 0)$ en $\tilde{U} \times \mathbb{R}^n$, el cual contiene un entorno de $(0, 0)$ de la forma $B_\delta(0) \times B_\delta(0)$ y su antiimagen por \tilde{x} es un entorno de $(p, 0)$ contenido en W^* que cumple lo requerido.

Veamos que en estas condiciones, si $(q, v) \in W^*$, la geodésica $\gamma_{q,v}|_{[0,1]}$ tiene su imagen contenida en U .

En efecto, tenemos que $v \in W_q^* = W^* \cap T_q(V)$, que es un abierto estrellado en $T_q(V)$ y la aplicación E se restringe a un difeomorfismo $W_q^* \rightarrow \tilde{U}_q$, donde $\tilde{U}_q = E[W_q^*] = \{q\} \times U_q$ es abierto en $W \cap (\{q\} \times U)$. Al componer con la proyección $\{q\} \times U \rightarrow U$, que también es un difeomorfismo, obtenemos que $\exp_q|_{W_q^*} : W_q^* \rightarrow U_q$ es un difeomorfismo, luego $U_q \subset U$ es un entorno normal de q , luego la geodésica $\gamma_{q,v}|_{[0,1]}$ tiene su imagen contenida en U_q , luego en U .

Sea $\delta > 0$ suficientemente pequeño como para que $B_\delta(0) \subset \tilde{U}$. Llamamos $\mathcal{B}_\delta(p) = x^{-1}[B_\delta(0)]$, que es un entorno de p difeomorfo a la bola $B_\delta(0)$. Tomando δ suficientemente pequeño podemos exigir que $\mathcal{B}_\delta(p) \times \mathcal{B}_\delta(p) \subset W$. Llamamos $W_\delta^* = E^{-1}[\mathcal{B}_\delta(p) \times \mathcal{B}_\delta(p)] \subset W^*$, de modo que E se restringe a un difeomorfismo

$$E_\delta : W_\delta^* \rightarrow \mathcal{B}_\delta(p) \times \mathcal{B}_\delta(p).$$

Basta probar que $\mathcal{B}_\delta(p)$ es convexo. Para ello tomamos un punto $q \in \mathcal{B}_\delta(p)$ y consideramos $W_{\delta,q}^* = W_\delta^* \cap T_q(V)$. Como antes, E_δ se restringe a un difeomorfismo $E_\delta|_{W_{\delta,q}^*} : W_{\delta,q}^* \rightarrow \{q\} \times \mathcal{B}_\delta(p)$, y al componer con la proyección tenemos un difeomorfismo $\exp_q|_{W_{\delta,q}^*} : W_{\delta,q}^* \rightarrow \mathcal{B}_\delta(p)$. Sin embargo, ahora no sabemos si el abierto $W_{\delta,q}^*$ es estrellado, por lo que no podemos asegurar que $\mathcal{B}_\delta(p)$ sea un entorno normal de q .

No obstante, si $r \in \mathcal{B}_\delta(p)$, $r \neq q$ y consideramos $(q, v) = E^{-1}(q, r) \in W_\delta^*$, vamos a probar que la geodésica $\gamma_{q,v}|_{[0,1]}$ tiene su imagen contenida en $\mathcal{B}_\delta(p)$. Notemos que $r = \exp_q(v)$, por lo que $\gamma_{q,v}(1) = r$. Por construcción, lo que sabemos es que la imagen de $\gamma_{q,v}|_{[0,1]}$ está contenida en U .

Definimos $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $f(t) = \|x(\gamma_{q,v}(t))\|^2$. Si llamamos $x^k(t) = x^k(\gamma_{q,v}(t))$ a las coordenadas de $\gamma_{q,v}$, tenemos que $f(t) = \sum_k (x^k(t))^2$.

Que $\gamma_{q,v}|_{[0,1]}$ tenga su imagen contenida en $\mathcal{B}_\delta(p)$ es equivalente a que f tome valores menores que δ^2 en todo punto. Como ciertamente $f(0), f(1) < \delta^2$, de no ser así, la función f tomaría su valor máximo en un punto $0 < t_0 < 1$. Ahora bien:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = 2 \sum_k \left(\left(\frac{dx^k}{dt} \right)^2 + x^k \frac{d^2 x^k}{dt^2} \right),$$

y usando (6.12) esto equivale a

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f}{dt^2} &= 2 \sum_k \left(\left(\frac{dx^k}{dt} \right)^2 - x^k \sum_{i,j} \frac{dx^i}{dt} \Gamma_{ij}^k(\gamma_{q,v}(t)) \frac{dx^j}{dt} \right) \\ &= 2 \sum_{i,j} \left(\delta_{ij} - \sum_k \Gamma_{ij}^k(\gamma_{q,v}(t)) x^k \right) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 2B_{\gamma_{q,v}(t)}(\gamma'_{q,v}(t), \gamma'_{q,v}(t)) > 0, \end{aligned}$$

porque $\gamma_{q,v}(t) \in U$ y $B_{\gamma_{q,v}(t)}$ tiene rango y signatura n . Pero una función real con segunda derivada positiva no puede tener un máximo (la primera derivada será positiva, luego será creciente, y tiene que anularse en el hipotético máximo, luego será negativa a su izquierda y positiva a su derecha, por lo que la función será decreciente a su izquierda y creciente a su derecha).

Ahora observamos que el difeomorfismo $\exp_q|_{W_q^*} : W_q^* \rightarrow U_q$ se restringe al difeomorfismo $\exp_q|_{W_{\delta,q}^*} : W_{\delta,q}^* \rightarrow \mathcal{B}_\delta(p)$, luego si $v \in W_{\delta,q}^*$ y $0 \leq t \leq 1$, tenemos que $tv \in W_q^*$ y $\exp_q(tv) = \gamma_{q,v}(t) \in \mathcal{B}_\delta(p)$, luego también $tv \in W_{\delta,q}^*$. Esto prueba que $W_{\delta,q}^*$ es estrellado y que, por consiguiente, $\mathcal{B}_\delta(p)$ es un entorno normal de q . ■

6.6 Curvatura

En el capítulo III demostramos que la identidad de Jacobi para el corchete de Lie puede expresarse en la forma

$$\mathcal{L}_{[X,Y]}Z = \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y Z) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X Z).$$

Sin embargo, las conexiones afines no satisfacen en general una relación análoga. Por el contrario, la diferencia entre ambos miembros resulta ser un concepto fundamental:

Definición 6.38 Si V es una variedad diferencial afín, se define su *tensor de curvatura de Riemann* como la aplicación

$$R : \mathfrak{X}(V) \times \mathfrak{X}(V) \times \mathfrak{X}(V) \longrightarrow \mathfrak{X}(V)$$

dada por

$$R(X, Y, Z) = D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) - D_{[X, Y]}Z.$$

Según el ejemplo tras el lema de localización 3.22, podemos considerar que, ciertamente, $R \in \mathcal{T}_3^1(V)$ sin más que justificar que R es $C^\infty(V)$ -multilineal. La multilinealidad para la suma es inmediata, mientras que para el producto es una comprobación rutinaria. Mostramos el caso de la tercera componente, que es el más largo:

$$\begin{aligned} R(X, Y, fZ) &= D_X(D_Y(fZ)) - D_Y(D_X(fZ)) - D_{[X, Y]}(fZ) \\ &= D_X(Y(f)Z + fD_Y Z) - D_Y(X(f)Z + fD_X Z) - [X, Y](fZ) - fD_{[X, Y]}Z \\ &= X(Y(f))Z + Y(f)D_X Z + X(f)D_Y Z + fD_X(D_Y Z) \\ &\quad - Y(X(f))Z - X(f)D_Y Z - Y(f)D_X Z - fD_Y(D_X Z) - [X, Y](f)Z - fD_{[X, Y]}Z \\ &= X(Y(f))Z + fD_X(D_Y Z) - Y(X(f))Z - fD_Y(D_X Z) - [X, Y](f)Z - fD_{[X, Y]}Z \\ &= [X, Y](f)Z + fR(X, Y, Z) - [X, Y](f)Z = fR(X, Y, Z). \end{aligned}$$

En particular, para cada $p \in V$, el tensor R determina una aplicación multilineal

$$R_p : T_p(V) \times T_p(V) \times T_p(V) \longrightarrow T_p(V).$$

Como el tercer argumento aparece en una situación esencialmente distinta a los dos primeros, a veces conviene pensar en el tensor de Riemann como en una aplicación bilineal con imagen en el espacio de los endomorfismos $C^\infty(V)$ -lineales de $\mathfrak{X}(V)$:

$$R : \mathfrak{X}(V) \times \mathfrak{X}(V) \longrightarrow \text{End}(\mathfrak{X}(V))$$

dada por

$$R(X, Y)(Z) = R(X, Y, Z),$$

que a su vez determina aplicaciones $R_p : T_p(V) \times T_p(V) \longrightarrow \text{End}(T_p(V))$, donde ahora los endomorfismos son endomorfismos de espacios vectoriales.

Por ejemplo, en estos términos podemos decir que R es antisimétrico, es decir, que $R(X, Y) = -R(Y, X)$, como se desprende inmediatamente de la definición. En particular, si $v, w \in T_p(V)$ son vectores linealmente dependientes, resulta que $R_p(v, w) = 0$.

Una variedad diferencial afín es *plana* si su curvatura de Riemann es nula. No es difícil ver a partir de la definición que todo espacio afín es plano, pero esto es inmediato a partir de la expresión en coordenadas de la curvatura, que mostramos a continuación (sin más que tener en cuenta que en un espacio afín hay cartas en las que todos los coeficientes Γ_{jk}^i son nulos):

Expresión en coordenadas Las coordenadas del tensor de Riemann en una carta x son:

$$\begin{aligned}
R_{ijk}^l &= dx^l(R(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}, \partial_{x_k})) = dx^l(D_{\partial_{x_i}}(D_{\partial_{x_j}}\partial_{x_k}) - D_{\partial_{x_j}}(D_{\partial_{x_i}}\partial_{x_k})) \\
&= dx^l(D_{\partial_{x_i}}(\sum_u \Gamma_{jk}^u \partial_{x_u}) - D_{\partial_{x_j}}(\sum_u \Gamma_{ik}^u \partial_{x_u})) \\
&= dx^l(\sum_u ((\partial_{x_i} \Gamma_{jk}^u) \partial_{x_u} + \Gamma_{jk}^u D_{\partial_{x_i}} \partial_{x_u}) - \sum_u ((\partial_{x_j} \Gamma_{ik}^u) \partial_{x_u} + \Gamma_{ik}^u D_{\partial_{x_j}} \partial_{x_u})) \\
&= dx^l(\sum_u (\partial_{x_i} \Gamma_{jk}^u) \partial_{x_u} + \sum_{uv} \Gamma_{jk}^u \Gamma_{iu}^v \partial_{x_v} - \sum_u (\partial_{x_j} \Gamma_{ik}^u) \partial_{x_u} - \sum_{uv} \Gamma_{ik}^u \Gamma_{ju}^v \partial_{x_v}) \\
&= \partial_{x_i} \Gamma_{jk}^l + \sum_u \Gamma_{jk}^u \Gamma_{iu}^l - \partial_{x_j} \Gamma_{ik}^l - \sum_u \Gamma_{ik}^u \Gamma_{ju}^l.
\end{aligned}$$

En conclusión:

$$R_{ijk}^l = \partial_{x_i} \Gamma_{jk}^l - \partial_{x_j} \Gamma_{ik}^l + \sum_u (\Gamma_{iu}^l \Gamma_{jk}^u - \Gamma_{ju}^l \Gamma_{ik}^u). \quad (6.14)$$

■

En [An 7.38] introdujimos la curvatura de Gauss para el caso de variedades diferenciables bidimensionales (superficies), que en cierto sentido mide “lo curvada” que está una superficie alrededor de un punto. Al tratar de generalizar esta noción de curvatura a variedades arbitrarias aparece el tensor de Riemann. Ahora no estamos en condiciones de mostrar la relación entre ambos conceptos, pero sí que podemos dar una interpretación de qué está midiendo exactamente el tensor de curvatura:

Interpretación geométrica del tensor de Riemann Consideremos una variedad diferencial afín con frontera V y fijemos en ella un punto $p \in V$ y tres vectores $u, v, w \in T_p(V)$. Vamos a dar una interpretación geométrica de $R_p(u, v)(w)$. Podemos suponer que u y v son linealmente independientes, pues en caso contrario sabemos que $R_p(u, v)(w) = 0$.

Fijemos un entorno U de p donde estén definidos dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ tales que $X_p = u$, $Y_p = v$ y $[X, Y] = 0$. (Por ejemplo, según el teorema 3.42, siempre podemos tomar una carta alrededor de p tal que $\partial_{x_1}|_p = u$ y $\partial_{x_2}|_p = v$, y entonces sirven $X = \partial_{x_1}$, $Y = \partial_{x_2}$.)

Según el teorema 3.39, el hecho de que $[X, Y] = 0$ se traduce en que, para todo par de números s, t suficientemente pequeños (para no salirnos de U), si nos desplazamos s unidades por la curva integral de X que pasa por p y luego t unidades por la curva integral de Y que pasa por el punto al que hemos llegado, obtenemos el mismo punto

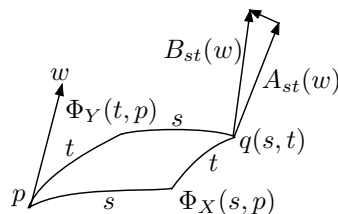
$$q(s, t) = \Phi_Y(t, \Phi_X(s, x_0)) = \Phi_X(s, \Phi_Y(t, x_0))$$

que si nos desplazamos primero por la curva integral de Y y luego por la de X .

Para cada $w \in T_p(V)$, sea $T_X(s, p, w)$ el transporte paralelo de w por la curva $\Phi_X(s, p)$ y sea $T_Y(t, p, w)$ el transporte paralelo por la curva $\Phi_Y(t, p)$. Definimos

$$A_{st}(w) = T_Y(t, \Phi_X(s, p), T_X(s, p, w)), \quad B_{st}(w) = T_X(s, \Phi_Y(t, p), T_Y(t, p, w)),$$

de modo que $A_{st}(w) \in T_{q(s,t)}(V)$ es el vector que resulta de transportar paralelamente w a lo largo de la curva integral de X que pasa por p durante s unidades y luego transportar el resultado t unidades por la curva integral de Y , mientras que $B_{st}(w)$ sigue el orden contrario. Pretendemos estimar la diferencia $B_{st}(w) - A_{st}(w)$.



Fijamos una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ alrededor de p (que podemos suponer definida en el mismo entorno que los campos X, Y , restringiendo éstos si es preciso) y sea $\tilde{x} : TU \rightarrow \tilde{U} \times \mathbb{R}^n$ la carta correspondiente del fibrado de tangentes.

Usamos tildes para representar las expresiones en coordenadas de las funciones que estamos considerando, por ejemplo

$$\tilde{T}_X(s, x, y) = dx|_{q(s,t)}(T_X(s, x^{-1}(x), \tilde{x}^{-1}(x, y)))$$

es la función que nos da las coordenadas del transporte paralelo del vector que en el espacio tangente del punto de coordenadas x tiene coordenadas y cuando avanzamos s unidades por la curva integral de X . Pongamos que

$$X = \sum_i u^i \partial_{x_i}, \quad Y = \sum_i v^i \partial_{x_i}.$$

Así, la relación $DT_X/ds = 0$ se traduce, según la ecuación (6.8), en que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{T}_X^l}{\partial s} &= - \sum_{ij} \tilde{\Gamma}_{ij}^l(\tilde{\Phi}_X(s, x)) \tilde{u}^i(\tilde{\Phi}_X(s, x)) \tilde{T}_X^j(s, x, y), \\ \frac{\partial \tilde{T}_Y^l}{\partial t} &= - \sum_{ij} \tilde{\Gamma}_{ij}^l(\tilde{\Phi}_Y(t, x)) \tilde{v}^i(\tilde{\Phi}_Y(t, x)) \tilde{T}_Y^j(t, x, y). \end{aligned}$$

Por otro lado, la relación $\tilde{T}_X(0, x, y) = y$, implica que

$$\left. \frac{\partial \tilde{T}_X^l}{\partial x_i} \right|_{(0, x, y)} = 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{T}_X^l}{\partial y_i} \right|_{(0, x, y)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = l, \\ 0 & \text{si } i \neq l, \end{cases}$$

e igualmente para \tilde{T}_Y .

Respecto a las derivadas de $\tilde{\Phi}_X(s, x)$ y $\tilde{\Phi}_Y(t, x)$, véase la prueba del teorema 3.40. Si $x(p) = x_0$, las coordenadas de $A_{st}(w)$ serán

$$\tilde{A}_{st}^l(y) = \tilde{T}_Y^l(t, \tilde{\Phi}_X(s, x_0), \tilde{T}_X^l(s, x_0, y)).$$

Calculamos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{A}_{st}^l(y)}{\partial s} &= \sum_a \frac{\partial \tilde{T}_Y^l}{\partial x_a} \Big|_{(t, \tilde{\Phi}_X(s, x_0), \tilde{T}_X(s, x_0, y))} \frac{\partial \tilde{\Phi}_X^a}{\partial s} \Big|_{(s, x_0)} \\
&+ \sum_a \frac{\partial \tilde{T}_Y^l}{\partial y_a} \Big|_{(t, \tilde{\Phi}_X(s, x_0), \tilde{T}_X(s, x_0, y))} \frac{\partial \tilde{T}_X^a}{\partial s} \Big|_{(s, x_0, y)} \\
&= \sum_a \frac{\partial \tilde{T}_Y^l}{\partial x_a} \Big|_{(t, \tilde{\Phi}_X(s, x_0), \tilde{T}_X(s, x_0, y))} \tilde{u}^a(\tilde{\Phi}_X(s, x_0)) \quad (6.15) \\
&- \sum_a \frac{\partial \tilde{T}_Y^l}{\partial y_a} \Big|_{(t, \tilde{\Phi}_X(s, x_0), \tilde{T}_X(s, x_0, y))} \sum_{ik} \tilde{\Gamma}_{ik}^a(\tilde{\Phi}_X(s, x_0)) \tilde{u}^i(\tilde{\Phi}_X(s, x_0)) \tilde{T}_X^k(s, x_0, y),
\end{aligned}$$

luego

$$\frac{\partial \tilde{A}^l(y)}{\partial s} \Big|_{(0,0)} = - \sum_{ik} \Gamma_{ik}^l(p) u^i(p) y^k.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \tilde{A}_{st}^l(y)}{\partial t} = \\
&- \sum_{jk} \tilde{\Gamma}_{jk}^l(\tilde{\Phi}_Y(t, \tilde{\Phi}_X(s, x_0))) \tilde{v}^j(\tilde{\Phi}_Y(t, \tilde{\Phi}_X(s, x_0))) \tilde{T}_Y^k(t, \tilde{\Phi}_X(s, x_0), \tilde{T}_X(s, x_0, y)),
\end{aligned}$$

luego

$$\frac{\partial \tilde{A}_{st}^l(y)}{\partial t} \Big|_{(0,0)} = - \sum_{jk} \Gamma_{jk}^l(p) v^j(p) y^k.$$

Para calcular la derivada segunda respecto de ∂s^2 observamos que no merece la pena derivar el primer sumando de (6.15), pues en todos sus términos aparecerá una derivada segunda de \tilde{T}_Y^l respecto de variables distintas de t o una derivada primera respecto de una x_i , y todas ellas se anularán luego en $(0, 0)$. Similarmente, las derivadas segundas del primer factor del segundo sumando se van a anular todas, y de las derivadas primeras sólo quedará la correspondiente a y_l , que valdrá 1. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \tilde{A}_{st}^l(y)}{\partial s^2} \Big|_{(0,0)} &= - \frac{\partial}{\partial s} \sum_{ik} \tilde{\Gamma}_{ik}^l(\tilde{\Phi}_X(s, x_0)) \tilde{u}^i(\tilde{\Phi}_X(s, x_0)) \tilde{T}_X^k(s, x_0, y) \Big|_{(0,0)} \\
&= - \sum_{ik} \sum_j \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ik}^l}{\partial x_j} \Big|_{\tilde{\Phi}_X(s, x_0)} \tilde{u}^j(\tilde{\Phi}_X(s, x_0)) \tilde{u}^i(\tilde{\Phi}_X(s, x_0)) \tilde{T}_X^k(s, x_0, y) \\
&- \sum_{ik} \tilde{\Gamma}_{ik}^l(\tilde{\Phi}_X(s, x_0)) \left(\sum_j \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial x_j} \Big|_{\tilde{\Phi}_X(s, x_0)} \tilde{u}^j(\tilde{\Phi}_X(s, x_0)) \right) \tilde{T}_X^k(s, x_0, y) \\
&- \tilde{u}^i(\tilde{\Phi}_X(s, x_0)) \sum_{ja} \tilde{\Gamma}_{ja}^k(\tilde{\Phi}_X(s, x_0)) \tilde{u}^j(\tilde{\Phi}_X(s, x_0)) \tilde{T}_X^a(s, x_0, y) \Big|_{(0,0)},
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 \tilde{A}_{st}^l(y)}{\partial s^2} \right|_{(0,0)} &= - \sum_{ijk} \left. \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} \right|_p u^i(p) u^j(p) y^k - \sum_{ijk} \Gamma_{ik}^l(p) \left. \frac{\partial u^i}{\partial x_j} \right|_p u^j(p) y^k \\
&\quad + \sum_{ijka} \Gamma_{ik}^l(p) \Gamma_{ja}^k(p) u^i(p) u^j(p) y^a. \\
\frac{\partial^2 \tilde{A}_{st}^l(y)}{\partial t^2} &= - \sum_{jk} \left(\sum_i \left. \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{jk}^l}{\partial x_i} \right|_{\tilde{\Phi}_Y(t, \tilde{\Phi}_X(s, x_0))} \tilde{v}^i(\tilde{\Phi}_Y(t, \tilde{\Phi}_X(s, x_0))) \right. \\
&\quad \tilde{v}^j(\tilde{\Phi}_Y(t, \tilde{\Phi}_X(s, x_0))) \tilde{T}_Y^k(t, \tilde{\Phi}_X(s, x_0), \tilde{T}_X(s, x_0, y)) + \tilde{\Gamma}_{jk}^l(\tilde{\Phi}_Y(t, \tilde{\Phi}_X(s, x_0))) \\
&\quad \left. \left(\sum_i \left. \frac{\partial \tilde{v}^j}{\partial x_i} \right|_{\tilde{\Phi}_Y(t, \tilde{\Phi}_X(s, x_0))} \tilde{v}^i(\tilde{\Phi}_Y(t, \tilde{\Phi}_X(s, x_0))) \tilde{T}_Y^k(t, \tilde{\Phi}_X(s, x_0), \tilde{T}_X(s, x_0, y)) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \tilde{v}^j(\tilde{\Phi}_Y(t, \tilde{\Phi}_X(s, x_0))) \right) \right) \\
&\quad \sum_{ia} \tilde{\Gamma}_{ia}^k(\tilde{\Phi}_Y(t, \tilde{\Phi}_X(s, x_0))) \tilde{v}^i(\tilde{\Phi}_Y(t, \tilde{\Phi}_X(s, x_0))) \tilde{T}_Y^a(t, \tilde{\Phi}_X(s, x_0), \tilde{T}_X(s, x_0, y)),
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 \tilde{A}_{st}^l(y)}{\partial t^2} \right|_{(0,0)} &= - \sum_{ijk} \left. \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i} \right|_p v^i(p) v^j(p) y^k - \sum_{ijk} \Gamma_{jk}^l(p) \left. \frac{\partial v^j}{\partial x_i} \right|_p v^i(p) y^k \\
&\quad + \sum_{ijka} \Gamma_{jk}^l(p) \Gamma_{ia}^k(p) v^i(p) v^j(p) y^a.
\end{aligned}$$

Ahora derivamos respecto de s la derivada respecto de t , y para ello observamos que, al aplicar la regla de la cadena al tercer factor, no merece la pena calcular las derivadas respecto de x_i , porque van a ser todas nulas al sustituir en $(0, 0)$ ni las derivadas respecto de y_i , excepto para $i = b$, por la misma razón, de modo que

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 \tilde{A}_{st}^l(y)}{\partial s \partial t} \right|_{(0,0)} &= - \sum_{jk} \left. \frac{\partial}{\partial s} \tilde{\Gamma}_{jk}^l(\tilde{\Phi}_Y(t, \tilde{\Phi}_X(s, x_0))) \tilde{v}^j(\tilde{\Phi}_Y(t, \tilde{\Phi}_X(s, x_0))) \right|_{(0,0)} y^k \\
&\quad - \sum_{ja} \Gamma_{ja}^l(p) v^j(p) \left. \frac{\partial}{\partial s} \tilde{T}_X^a(s, x_0, y) \right|_{(0,0)} \\
&= - \sum_{jk} \sum_i \left. \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{jk}^l}{\partial x_i} \right|_{\tilde{\Phi}_Y(t, \tilde{\Phi}_X(s, x_0))} \sum_a \left. \frac{\partial \tilde{\Phi}_Y^i}{\partial x_a} \right|_{(t, \tilde{\Phi}_X(s, x_0))} \tilde{u}^a(\tilde{\Phi}_X(s, x_0)) \left. v^j(p) y^k \right|_{(0,0)} \\
&\quad - \sum_{jk} \Gamma_{jk}^l(p) \sum_i \left. \frac{\partial \tilde{v}^j}{\partial x_i} \right|_{\tilde{\Phi}_Y(t, \tilde{\Phi}_X(s, x_0))} \sum_a \left. \frac{\partial \tilde{\Phi}_Y^i}{\partial x_a} \right|_{(t, \tilde{\Phi}_X(s, x_0))} \tilde{u}^a(\tilde{\Phi}_X(s, x_0)) \left. y^k \right|_{(0,0)} \\
&\quad + \sum_{ja} \Gamma_{ja}^l(p) v^j(p) \sum_{ik} \tilde{\Gamma}_{ik}^a(\tilde{\Phi}_X(s, x_0)) \tilde{u}^i(\tilde{\Phi}_X(s, x_0)) \tilde{T}_X^k(s, x_0, y) \left. \right|_{(0,0)}
\end{aligned}$$

Así pues:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \tilde{A}_{st}^l(y)}{\partial s \partial t} \right|_{(0,0)} &= - \sum_{ijk} \left. \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i} \right|_p u^i(p) v^j(p) y^k \\ &- \sum_{ijk} \Gamma_{jk}^l(p) \left. \frac{\partial v^j}{\partial x_i} \right|_p u^i(p) y^k + \sum_{ijk a} \Gamma_{ja}^l(p) \Gamma_{ik}^a(p) u^i(p) v^j(p) y^k. \end{aligned}$$

Ahora consideramos el desarrollo de Taylor

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{st}^l(y) &= y^k + \left. \frac{\partial \tilde{A}_{st}^l(y)}{\partial s} \right|_{(0,0)} s + \left. \frac{\partial \tilde{A}_{st}^l(y)}{\partial t} \right|_{(0,0)} t \\ &+ \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \tilde{A}_{st}^l(y)}{\partial s^2} \right|_{(0,0)} s^2 + \left. \frac{\partial^2 \tilde{A}_{st}^l(y)}{\partial s \partial t} \right|_{(0,0)} st + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \tilde{A}_{st}^l(y)}{\partial t^2} \right|_{(0,0)} t^2 + \dots, \end{aligned}$$

donde los puntos suspensivos representan el resto de Taylor, formado por las funciones s^3, s^2t, st^2, t^3 multiplicadas por funciones diferenciables (véase el teorema [VC 2.9]).

Es claro que el desarrollo de Taylor $\tilde{B}_{st}^k(y)$ será el que resulta de cambiar u por v y s por t , luego al restarlos se cancelan todos los términos de orden ≤ 2 excepto el correspondiente a st , que resulta ser:

$$\begin{aligned} &\sum_{ijk} \left. \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i} \right|_p u^i(p) v^j(p) y^k - \sum_{ijk} \left. \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i} \right|_p v^i(p) u^j(p) y^k \\ &+ \sum_{ijk a} \Gamma_{ja}^l(p) \Gamma_{ik}^a(p) v^i(p) u^j(p) y^k - \sum_{ijk a} \Gamma_{ja}^l(p) \Gamma_{ik}^a(p) u^i(p) v^j(p) y^k \\ &+ \sum_{ijk} \Gamma_{jk}^l(p) \left. \frac{\partial v^j}{\partial x_i} \right|_p u^i(p) y^k - \sum_{ijk} \Gamma_{jk}^l(p) \left. \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right|_p v^i(p) y^k. \end{aligned}$$

Cambiamos los índices para sacar factor común:

$$\begin{aligned} &\sum_{ijk} \left. \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_i} \right|_p u^i(p) v^j(p) y^k - \sum_{ijk} \left. \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_j} \right|_p u^i(p) v^j(p) y^k \\ &+ \sum_{ijk a} \Gamma_{ia}^l(p) \Gamma_{jk}^a(p) u^i(p) v^j(p) y^k - \sum_{ijk a} \Gamma_{ja}^l(p) \Gamma_{ik}^a(p) u^i(p) v^j(p) y^k \\ &+ \sum_{ijk} \Gamma_{jk}^l(p) \left. \frac{\partial v^j}{\partial x_i} \right|_p u^i(p) y^k - \sum_{ijk} \Gamma_{jk}^l(p) \left. \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right|_p v^i(p) y^k \\ &= \sum_{ijk} (\partial_{x_i} \Gamma_{jk}^l - \partial_{x_j} \Gamma_{ik}^l + \sum_a (\Gamma_{ia}^l \Gamma_{jk}^a - \Gamma_{ja}^l \Gamma_{ik}^a))_p u^i(p) v^j(p) y^k \\ &\quad + \sum_{jk} (\sum_i (\partial_{x_i} v^j - \partial_{x_i} u^j))_p \Gamma_{jk}^l(p) y^k \\ &= \sum_{ijk} R_{ijk}^l(p) u^i v^j y^k + \sum_{jk} [X, Y]_p^i \Gamma_{jk}^l(p) y^k = R_p^l(u, v)(w). \end{aligned}$$

Así pues:

$$\tilde{B}_{st}^l(y) - \tilde{A}_{st}^l(y) = R_p^l(u, v)(w)st + r^l(s, t), \quad (6.16)$$

donde el resto de Taylor es

$$r^l(s, t) = a_{30}^l(s, t)s^3 + a_{21}^l(s, t)s^2t + a_{12}^l(s, t)st^2 + a_{03}^l(s, t)t^3,$$

para ciertas funciones diferenciables $a_{ij}^l(s, t)$. Eliminando las cartas tenemos que

$$B_{st}^l(w) - A_{st}^l(w) = R_p^l(u, v)(w)st + r^l(s, t). \quad (6.17)$$

No podemos eliminar las coordenadas y afirmar que

$$B_{st}(w) - A_{st}(w) \stackrel{?}{=} R_p(u, v)(w)st + r(s, t),$$

porque $R_p(u, v)(w) \in T_p(V)$, mientras que $B_{st}(w) - A_{st}(w) \in T_{q(s,t)}(V)$. No obstante, sí que es cierto que

$$R_p(u, v)(w) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{B_{ss}(w) - A_{ss}(w)}{s^2},$$

donde el límite hay que entenderlo respecto de la topología del fibrado de tangentes TV , pues lo que hemos probado es que las coordenadas del cociente en TV (que son las coordenadas del punto $q(s, s)$ junto con las de los vectores $(B_{ss}^l(w) - A_{ss}^l(w))/s^2$) tienden a 0, luego también el cociente tiende a 0. No obstante, podemos evitar el inconveniente de que el cociente y el tensor de Riemann están en espacios tangentes de puntos distintos con una ligera modificación del planteamiento:

Llamamos $C_{st}(w)$ al vector que resulta de transportar paralelamente el vector $w \in T_p(V)$ durante t unidades por la curva integral de Y , luego s unidades por la curva integral de X , luego $-t$ unidades de nuevo mediante Y y luego $-s$ unidades mediante X . La hipótesis $[X, Y] = 0$ garantiza que $C_{st}(w) \in T_p(V)$, por lo que ahora sí tiene sentido la igualdad

$$C_{st}(w) - w = R_p(u, v)(w)st + \bar{r}(s, t), \quad (6.18)$$

para cierta función

$$\bar{r}(s, t) = a_{30}(s, t)s^3 + a_{21}(s, t)s^2t + a_{12}(s, t)st^2 + a_{03}(s, t)t^3,$$

donde cada $a_{ij} :]-\epsilon, \epsilon[\times]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow T_p(V)$ es diferenciable.

Y no sólo tiene sentido, sino que es cierta. Hemos demostrado primero la relación (6.17) porque era más sencillo derivar las composiciones dobles A_{st} y B_{st} que no la composición cuádruple C_{st} , pero (6.18) se deduce fácilmente de (6.17) o, equivalentemente, de su expresión en coordenadas (6.16). Para probarlo observamos que $A_{st} : T_p(V) \rightarrow T_{q(s,t)}(V)$ es un isomorfismo (es un transporte paralelo), luego también lo es su expresión en coordenadas $\tilde{A}_{st} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y (6.16) implica que

$$\tilde{B}_{st}(y) - \tilde{A}_{st}(y) = \tilde{R}_p(u, v)(y)st + \tilde{r}(s, t),$$

donde $\tilde{R}_p(u, v)(y) = dx|_p(R_p(u, v)(dx|_p^{-1}(y)))$ es la versión en coordenadas del tensor de Riemann y $\tilde{r}(s, t) = (r^1(s, t), \dots, r^n(s, t))$. Por lo tanto:

$$\tilde{C}_{st}(y) - y = \tilde{A}_{st}^{-1}(\tilde{B}_{st}(y)) - y = \tilde{A}_{st}^{-1}(\tilde{R}_p(u, v)(y))st + \tilde{A}_{st}^{-1}(\tilde{r}(s, t)).$$

Ahora bien, la función $f(s, t) = \tilde{A}_{st}^{-1}(\tilde{R}_p(u, v)(y))$ —para unos u, v, y fijos— es diferenciable, luego podemos calcular su desarrollo de Taylor de grado 0, que es

$$f(s, t) = f(0, 0) + b_1(s, t)s + b_2(s, t)t = \tilde{R}_p(u, v)(y) + b_1(s, t)s + b_2(s, t)t,$$

luego llegamos a que

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{st}(y) - y &= \tilde{R}_p(u, v)(y)st + b_1(s, t)s^2t + b_2(s, t)st^2 \\ &+ \tilde{A}_{st}^{-1}(a_{30}(s, t))s^3 + \tilde{A}_{st}^{-1}(a_{21}(s, t))s^2t + \tilde{A}_{st}^{-1}(a_{12}(s, t))st^2 + \tilde{A}_{st}^{-1}(a_{03}(s, t))t^3, \end{aligned}$$

y en total

$$\tilde{C}_{st}(y) - y = \tilde{R}_p(u, v)(y)st + \tilde{r}(s, t),$$

de donde podemos eliminar las coordenadas para llegar a (6.18) con la función $\tilde{r}(s, t) = \tilde{x}^{-1}(x_0, \tilde{r}(s, t))$, que tiene claramente la forma requerida. Enunciamos en un teorema la conclusión a la que hemos llegado:

Teorema 6.39 *Sea V una variedad diferencial sin frontera, sea $p \in V$, sean $u, v, w \in T_p(V)$ y sean $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ dos campos vectoriales en un entorno U de p tales que $X_p = u$, $Y_p = v$, $[X, Y] = 0$. Sea $C_{st} : T_p(V) \rightarrow T_p(V)$ el transporte paralelo de t unidades sobre la curva integral de Y que pasa por p , seguido de s unidades sobre la curva integral de X , seguido de $-t$ unidades sobre la curva integral de Y , seguido de $-s$ unidades por la curva integral de X . Entonces,*

$$C_{st}(w) - w = R_p(u, v)(w)st + r(s, t),$$

donde $r(s, t) = a_{30}(s, t)s^3 + a_{21}(s, t)s^2t + a_{12}(s, t)st^2 + a_{03}(s, t)t^3$, para ciertas funciones diferenciables $a_{ij} :]-\epsilon, \epsilon[\times]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow T_p(V)$. En particular

$$R_p(u, v)(w) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{C_{st}(w) - w}{s^2}.$$

Ejercicio: Probar que las funciones a_{ij} dependen linealmente de u, v, w , es decir, que tenemos funciones diferenciables $a_{ij} :]-\epsilon, \epsilon[\times]-\epsilon, \epsilon[\times T_p(V)^3 \rightarrow T_p(V)$ de modo que cada función $a_{ij}(s, t) : T_p(V)^3 \rightarrow T_p(V)$ es multilineal. AYUDA: Aplicar el teorema cuando u, v, w recorren una base de $T_p(V)$ y construir a_{ij} a partir de las funciones obtenidas en estos casos.

En resumen, cuando transportamos paralelamente un vector por un “cuadrado” en las condiciones del teorema, el resultado, para s suficientemente pequeño, es indistinguible del vector de partida en una aproximación de primer orden, mientras que en una aproximación de segundo orden la diferencia la marca el tensor de Riemann.

Así pues, la idea subyacente al tensor de Riemann es que una forma de estimar hasta qué punto el transporte paralelo es “realmente paralelo” en una variedad diferencial afín es realizar transportes paralelos al lo largo de arcos cerrados y comparar el vector resultante con el vector inicial. Sucede que ambos vectores serán siempre indistinguibles en una aproximación de primer orden, lo que podemos interpretar como que, localmente, “todos los transportes paralelos son paralelos”, pero en una aproximación de segundo orden ya podemos notar discrepancias, las cuales son atribuibles a la curvatura de la variedad: cuanto más curvada esté una variedad alrededor de un punto, mayor será la discrepancia (en segundo orden) entre el transporte paralelo de un vector por un arco cerrado y el vector de partida o, equivalentemente —en términos de (6.17)— mayor será la discrepancia entre dos transportes paralelos de un mismo vector por dos arcos distintos.

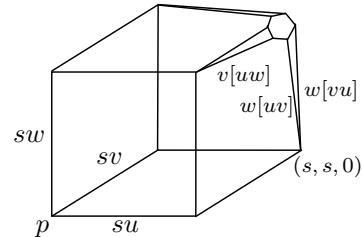
Aunque la expresión dada por el teorema anterior para el tensor de Riemann es más elegante que (6.17) en cuanto que no depende de ninguna carta, en muchos casos (6.17) es más conveniente para visualizar algunas propiedades. Por ejemplo, es claro que el efecto de intercambiar los vectores u y v (para $s = t$) es el de intercambiar A_{ss} con B_{ss} , lo cual explica la antisimetría de R .

Por otro lado, si en lugar de transportar w transportamos sw , tenemos la relación

$$B_{ss}^l(sw) - A_{ss}^l(sw) = s^3 R_p^l(u, v)(w) + s^4 h^l(s).$$

Intercambiando los papeles de u, v y w obtenemos seis vectores (tres A_{ss} y otros tres B_{ss}). Si entendemos que la figura representa las coordenadas de los distintos puntos y vectores en una carta x tal que $x(p) = 0$ y

$$\partial_{x_1}|_p = u, \quad \partial_{x_2}|_p = v, \quad \partial_{x_3}|_p = w,$$



en realidad la figura está distorsionada, porque, para s suficientemente pequeño, si nos limitamos a ampliarla, los seis puntos resultarían indistinguibles, ya que en una aproximación de primer orden son iguales. Más concretamente, si llamamos $w[uv]$ a la suma de las coordenadas $(s, s, 0)$ más las coordenadas del transporte paralelo de sw primero en la dirección de u y luego en la de v , e igualmente con las demás combinaciones, tenemos que

$$(w[vu] - w[uv]) + (v[uw] - v[wu]) + (u[wv] - u[vw]) = s^3 (R(u, v)(w) + R(w, u)(v) + R(v, w)(u)) + s^4 h_1(s),$$

donde hay que entender que todos los términos representan en realidad coordenadas. Por otra parte, puede probarse que el primer sumando de

$$(u[wv] - v[wu]) + (w[vu] - u[vw]) + (v[uw] - w[uv]) \tag{6.19}$$

es igual a (las coordenadas de) $s^2 \text{Tor}(u, v)$ más términos de orden s^3 , y análogamente sucede con los otros dos, y si la torsión es nula, la suma es del orden

de s^3 . Esto puede deducirse de la interpretación infinitesimal de la torsión que hemos dado, pero no merece la pena hacerlo porque en realidad sucede que, si la torsión es nula, la suma es de hecho del orden de s^4 , y al igualarla a una expresión $s^4 h_2(s)$ y sumarla a la ecuación precedente obtenemos que

$$s^3(R(u, v)(w) + R(w, u)(v) + R(v, w)(u)) = s^4 h_3(s),$$

de donde se sigue que $R(u, v)(w) + R(w, u)(v) + R(v, w)(u) = 0$. Hemos presentado estas consideraciones únicamente para mostrar la interpretación geométrica de esta igualdad, pero es mucho más fácil demostrarla a partir de la definición del tensor de Riemann y no de su caracterización infinitesimal. (Notemos que el teorema siguiente implica que, como hemos afirmado, la suma (6.19) es del orden de s^4 .) ■

Teorema 6.40 (Primera identidad de Bianchi) *Si V es una variedad diferencial afín simétrica, entonces, para todo punto $p \in V$ y todos los vectores $u, v, w \in T_p(V)$, se cumple la relación*

$$R_p(u, v)(w) + R_p(w, u)(v) + R_p(v, w)(u) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Es equivalente probar que si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(V)$, se cumple que

$$R(X, Y)(Z) + R(Z, X)(Y) + R(Y, Z)(X) = 0.$$

Por definición el miembro izquierdo es

$$\begin{aligned} D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) - D_{[X, Y]}Z + D_Z(D_X Y) - D_X(D_Z Y) - D_{[Z, X]}Y \\ + D_Y(D_Z X) - D_Z(D_Y X) - D_{[Y, Z]}X = \\ D_X(D_Y Z - D_Z Y) + D_Y(D_X Z - D_Z X) + D_Z(D_X Y - D_Y X) \\ - D_{[X, Y]}Z - D_{[X, Z]}Y - D_{[Y, Z]}X. \end{aligned}$$

Como la torsión es nula, esto equivale a

$$\begin{aligned} D_X[Y, Z] + D_Y[X, Z] + D_Z[X, Y] - D_{[X, Y]}Z - D_{[Z, X]}Y - D_{[Y, Z]}X \\ = [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \end{aligned}$$

por la identidad de Jacobi. ■

La diferencial covariante del tensor de Riemann es un tensor en $\mathfrak{T}_4^1(V)$, que podemos identificar con una aplicación multilineal $DR : \mathfrak{X}(V)^3 \rightarrow \text{End}(\mathfrak{X}(V))$ que determina aplicaciones multilineales $(DR)_p : T_p(V)^3 \rightarrow \text{End}(T_p(V))$. Sobre ella tenemos la relación siguiente:

Teorema 6.41 (Segunda identidad de Bianchi) *Si V es una variedad diferencial afín simétrica, entonces, para todo punto $p \in V$ y todos los vectores $u, v, w \in T_p(V)$, se cumple la relación*

$$(D_w R)_p(u, v) + (D_v R)_p(w, u) + (D_u R)_p(v, w) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 6.31, podemos tomar una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ alrededor de p respecto a la cual $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$. Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$ cuyas coordenadas respecto de x sean constantemente iguales a las de u, v, w , respectivamente. En particular $X_p = u, Y_p = v, Z_p = w$.

Como los campos X, Y, Z tienen coordenadas constantes, la fórmula (6.6) nos da que $(D_X Y)_p = 0$, e igualmente con las otras ocho derivadas análogas que podemos formar con los campos X, Y, Z . Por otra parte, la fórmula (3.6) sobre derivación de tensores nos da que, si $V \in \mathfrak{X}(U)$,

$$\begin{aligned} (D_Z R)(X, Y)(V)^i &= D_Z(dx^i, X, Y, V) = D_Z(R(dx^i, X, Y, V)) \\ &\quad - R(dx^i, D_Z X, Y, V) - R(dx^i, X, D_Z Y, V) \\ &\quad - R(dx^i, X, Y, D_Z V) - R(D_Z(dx^i), X, Y, V), \end{aligned}$$

y a su vez, aplicando (3.5) al último término:

$$D_Z(dx^i) = D_Z(dx^i(X)) - dx^i(D_Z X) = 0 - (D_Z X)^i,$$

resulta que

$$\begin{aligned} (D_Z R)(X, Y)(V) &= D_Z(R(X, Y)(V)) - R(D_Z X, Y)(V) \\ &\quad - R(X, D_Z Y)(V) - R(X, Y)(D_Z V). \end{aligned}$$

En particular,

$$\begin{aligned} (D_w R)_p(u, v)(V_p) &= D_Z(R(X, Y)(V))_p - R_p(X, Y)(D_Z V) \\ &= (D_Z D_X D_Y V)_p - (D_Z D_Y D_X V)_p - (D_Z D_{[X, Y]} V)_p \\ &\quad - (D_X D_Y D_Z V)_p + (D_Y D_X D_Z V)_p + (D_{[X, Y]} D_Z V)_p \\ &= (D_Z D_X D_Y V)_p - (D_Z D_Y D_X V)_p - (D_X D_Y D_Z V)_p + (D_Y D_X D_Z V)_p, \end{aligned}$$

donde hemos usado que, al tener coordenadas constantes, $[X, Y] = 0$. Al permutar cíclicamente las variables X, Y, Z y sumar, todos los términos se cancelan mutuamente, luego

$$(D_w R)_p(u, v)(V_p) + (D_v R)_p(w, u)(V_p) + (D_u R)_p(v, w)(V_p) = 0.$$

Como V_p es un vector arbitrario, tenemos la identidad del enunciado. ■

Capítulo VII

Geometría Riemanniana I

Aunque venimos hablando de variedades semirriemannianas desde el capítulo IV, en realidad hasta ahora no hemos usado las estructuras métricas más que para definir el elemento de volumen de una variedad semirriemanniana y para aprovechar la dualidad que induce el tensor métrico. Sólo en el capítulo anterior hemos sacado más partido a la métrica de forma indirecta, al mostrar que el tensor métrico en \mathbb{R}^n permite definir una conexión afín simétrica en todas sus subvariedades, lo cual da lugar a los conceptos de transporte paralelo, geodésicas, etc. Aquí empezaremos a aprovechar plenamente la estructura métrica de las variedades de Riemann y semirriemannianas. Empezaremos demostrando que la conexión de Levi-Civita de una subvariedad de \mathbb{R}^n está determinada por su propio tensor métrico, sin necesidad de considerarla como subvariedad de \mathbb{R}^n .

7.1 La conexión de Levi-Civita

Vamos a ver que es posible asociar canónicamente una conexión afín a toda variedad semirriemanniana. Para ello observamos en primer lugar que en una variedad diferencial es posible definir muchas conexiones afines, pero en una variedad semirriemanniana hay una condición adicional que tenemos que exigir para que una conexión sea aceptable:

Teorema 7.1 *Sea D una conexión afín en una variedad semirriemanniana V . Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *Para todo arco regular α que una dos puntos $p, q \in V$, el transporte paralelo $\text{tp}_\alpha : T_p(V) \rightarrow T_q(V)$ es una isometría.*
2. *Para todo arco regular $\alpha : [a, b] \rightarrow V$ y todo par de campos vectoriales v, w sobre α se cumple que*

$$\frac{d(\langle v, w \rangle_{\alpha(t)})}{dt} = \left\langle \frac{Dv}{dt}, w \right\rangle_{\alpha(t)} + \left\langle v, \frac{Dw}{dt} \right\rangle_{\alpha(t)} .$$

3. Para todos los campos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(V)$ se cumple que

$$X(\langle Y, Z \rangle) = \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle.$$

4. Para todo $X \in \mathfrak{X}(V)$ se cumple que $D_X g = 0$.

DEMOSTRACIÓN: 1) \Leftrightarrow 2) Pongamos que $\alpha : [a, b] \rightarrow V$. Fijemos una base ortonormal en $T_p(V)$ y sean $P_1, \dots, P_n \in \mathcal{T}_0^1(V)_\alpha$ los transportes paralelos de sus vectores. Si los transportes paralelos son isometrías, $P_{1,t}, \dots, P_{n,t}$ forman una base ortonormal de $T_{\alpha(t)}(V)$, para todo $t \in [a, b]$. Por lo tanto, podemos expresar

$$v = \sum_i v^i P_i, \quad w = \sum_i w^i P_i,$$

para ciertas funciones $v^i, w^i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables.¹ Como los campos P_i tienen derivada covariante nula, tenemos que

$$\frac{Dv}{dt} = \sum_i \frac{dv^i}{dt} P_i, \quad \frac{Dw}{dt} = \sum_i \frac{dw^i}{dt} P_i.$$

Por lo tanto, si $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ es la signatura del tensor métrico,

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n \epsilon_i v^i w^i,$$

y por otra parte,

$$\left\langle \frac{Dv}{dt}, w \right\rangle_{\alpha(t)} + \left\langle v, \frac{Dw}{dt} \right\rangle_{\alpha(t)} = \sum_i \epsilon_i \frac{dv^i}{dt} w^i + \epsilon_i v^i \frac{dw^i}{dt}.$$

Ahora es claro que se cumple 2).

El recíproco es trivial, pues si los campos v, w son transportes paralelos, la fórmula de b) se reduce a que el producto escalar es constante sobre α .

2) \Leftrightarrow 3) Si se cumple b), dado $p \in V$, tomemos una curva $\alpha : [-\delta, \delta] \rightarrow V$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = X_p$. Sean $v = \alpha \circ Y, w = \alpha \circ Z$. Entonces

$$\begin{aligned} X_p(\langle Y, Z \rangle) &= \left. \frac{d(\langle Y_{\alpha(t)}, Z_{\alpha(t)} \rangle_{\alpha(t)})}{dt} \right|_0 = \left. \frac{d(\langle v, w \rangle_{\alpha(t)})}{dt} \right|_0 = \\ &= \left\langle \left. \frac{Dv}{dt} \right|_0, w(0) \right\rangle_p + \left\langle v(0), \left. \frac{Dw}{dt} \right|_0 \right\rangle_p = \langle (D_X Y)_p, Z_p \rangle_p + \langle Y_p, (D_X Z)_p \rangle_p. \end{aligned}$$

Para probar el recíproco basta tomar campos X, Y, Z que extiendan a α', u, v , respectivamente, en un entorno de un t arbitrario.

3) \Leftrightarrow 4) Basta tener en cuenta la fórmula (3.6), según la cual

$$D_X(g)(Y, Z) = D_X(\langle Y, Z \rangle) - \langle D_X Y, Z \rangle - \langle Y, D_X Z \rangle. \quad \blacksquare$$

¹La diferenciabilidad se puede probar calculando sus coordenadas respecto de una carta o bien notando que $v^i = \pm \langle v, P_i \rangle$. Los campos v y P_i se pueden extender a campos $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$, y entonces $v^i = \alpha \circ \langle X, Y \rangle$.

Definición 7.2 Sea V una variedad semirriemanniana. Diremos que una conexión afín D en V es *compatible con el tensor métrico* si cumple cualquiera de las condiciones del teorema anterior.

Obviamente, si pretendemos que el transporte paralelo asociado a una conexión afín se interprete como el transporte de un vector “sin alterarlo”, en una variedad semirriemanniana debe cumplir la propiedad 1) del teorema anterior. Dicha propiedad la cumple trivialmente la conexión del Levi-Civita de un espacio semieuclicídeo, pues en ella los transportes paralelos coinciden con los isomorfismos θ_{pq} , que en un espacio semieuclicídeo son isometrías. Más aún:

Teorema 7.3 Si V es una variedad semirriemanniana, D es una conexión afín en V compatible con el tensor métrico y W es una subvariedad semirriemanniana, entonces la restricción de D a W es también compatible con el tensor métrico.

DEMOSTRACIÓN: Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(W)$ y consideremos extensiones $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ a un abierto en V alrededor de un punto $p \in W$. Entonces $\langle \bar{Y}, \bar{Z} \rangle$ extiende a $\langle Y, Z \rangle$, pues si $q \in W$ tenemos que

$$\langle \bar{Y}_q, \bar{Z}_q \rangle_q = \langle di|_q(Y_q), di|_q(Z_q) \rangle_q = \langle Y, Z \rangle_q.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} X_q(\langle Y, Z \rangle) &= \bar{X}_q(\langle \bar{Y}, \bar{Z} \rangle) = \langle (D_{\bar{X}}\bar{Y})_q, \bar{Z}_q \rangle_q + \langle \bar{Y}_q, (D_{\bar{X}}\bar{Z})_q \rangle_q \\ &= \langle (\bar{D}_X Y)_q, Z_q \rangle_q + \langle Y_q, (\bar{D}_X Z)_q \rangle_q. \end{aligned}$$

Ahora usamos que

$$\bar{D}_X Y = D_X Y + \text{nor } \bar{D}_X Y, \quad \bar{D}_X Z = D_X Z + \text{nor } \bar{D}_X Z,$$

y como los campos Y, Z están en $\mathfrak{X}(W)$, son ortogonales a las componentes normales de la derivada \bar{D} , luego

$$X_q(\langle Y, Z \rangle) = \langle (D_X Y)_q, Z_q \rangle_q + \langle Y_q, (D_X Z)_q \rangle_q. \quad \blacksquare$$

Sucede que la compatibilidad con el tensor métrico, que, como ya hemos señalado, es obviamente una condición necesaria para que el transporte paralelo asociado a una derivada covariante sea geoméricamente aceptable, es casi suficiente:

Teorema 7.4 En una variedad semirriemanniana existe una única conexión simétrica compatible con el tensor métrico.

DEMOSTRACIÓN: Sea V una variedad semirriemanniana. Probaremos primero la unicidad y de ella deduciremos la existencia. Supongamos que ∇ es

una conexión simétrica en V compatible con el tensor métrico. Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(V)$, por la compatibilidad se ha de cumplir

$$\begin{aligned} X(\langle Y, Z \rangle) &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \\ Y(\langle Z, X \rangle) &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle, \\ Z(\langle X, Y \rangle) &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \end{aligned}$$

Sumando las dos primeras igualdades y restando la tercera queda:

$$\begin{aligned} X(\langle Y, Z \rangle) + Y(\langle Z, X \rangle) - Z(\langle X, Y \rangle) &= \langle \nabla_X Y + \nabla_Y X, Z \rangle \\ &+ \langle \nabla_X Z - \nabla_Z X, Y \rangle + \langle \nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X \rangle \\ &= \langle 2\nabla_X Y + [Y, X], Z \rangle + \langle [X, Z], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle, \end{aligned}$$

donde hemos usado la condición de simetría:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]. \quad (7.1)$$

Despejando:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z \rangle &= \frac{1}{2} (X(\langle Y, Z \rangle) + Y(\langle Z, X \rangle) - Z(\langle X, Y \rangle) \\ &- \langle [Y, X], Z \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Esto determina el campo dual $(\nabla_X Y)^*$, luego también a $\nabla_X Y$, con lo que la unicidad está probada. Más aún, dados campos $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$, la ecuación (7.2) define un campo $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(V)$. Sólo tenemos que probar que esta correspondencia es una conexión simétrica compatible con la métrica.

Se trata de una comprobación rutinaria. Por ejemplo, la tabla muestra cómo se transforma cada sumando de (7.2) cuando sustituimos Y por fY .

$\langle \nabla_X Y, Z \rangle$	$\langle \nabla_X (fY), Z \rangle$
$X(\langle Y, Z \rangle)$	$fX(\langle Y, Z \rangle) + \langle X(f)Y, Z \rangle$
$Y(\langle Z, X \rangle)$	$fY(\langle Z, X \rangle)$
$-Z(\langle X, Y \rangle)$	$-fZ(\langle X, Y \rangle) - Z(f)\langle X, Y \rangle$
$-\langle [Y, X], Z \rangle$	$-f\langle [Y, X], Z \rangle + \langle X(f)Y, Z \rangle$
$-\langle [X, Z], Y \rangle$	$-f\langle [X, Z], Y \rangle$
$-\langle [Y, Z], X \rangle$	$-f\langle [Y, Z], X \rangle + Z(f)\langle Y, X \rangle$

Al sumar los primeros términos de la columna de la derecha (multiplicados por $1/2$) obtenemos $\langle f\nabla_X Y, Z \rangle$, y al sumar los segundos términos (también multiplicados por $1/2$) queda $\langle X(f)Y, Z \rangle$, luego concluimos que

$$\langle \nabla_X (fY), Z \rangle = \langle X(f)Y + f\nabla_X Y, Z \rangle,$$

y como esto vale para todo Z , por dualidad $\nabla_X (fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$. Las demás propiedades se comprueban análogamente. ■

Definición 7.5 Se llama *conexión de Levi-Civita* de una variedad semirriemanniana V a la única conexión afín simétrica ∇ en V compatible con g .

Ya hemos señalado que la conexión de Levi-Civita que ya teníamos definida en los espacios afines, cuando fijamos en ellos un producto escalar que los dote de estructura semieuclicéa, resulta ser compatible con la métrica derivada de dicho producto escalar (porque los transportes paralelos θ_{pq} son isometrías), luego es la conexión de Levi-Civita en el sentido de la definición anterior. En particular, la conexión de Levi-Civita de los espacios semieuclicéos \mathbb{R}_s^n es independiente de la signatura s .

Más aún, los teoremas 6.30 y 7.3 implican que la restricción de la conexión de Levi-Civita de una variedad semirriemanniana a una subvariedad semirriemanniana es la conexión de Levi-Civita de la subvariedad.

Esto es sorprendente, pues en la definición de la restricción de una conexión se usa fuertemente la estructura pseudorriemanniana de la variedad mayor, pero ahora resulta que el resultado está completamente determinado por la estructura pseudorriemanniana de la variedad menor. En otras palabras, que alguien que “viva” en una subvariedad de \mathbb{R}^m puede calcular derivadas covariantes —es decir, proyecciones de derivadas en \mathbb{R}^m — sin necesidad de calcular derivadas en \mathbb{R}^m ni de proyectarlas.

Concluimos, pues, que la conexión de Levi-Civita es la conexión “geométricamente correcta” en las subvariedades de \mathbb{R}^m , y por ello, siempre que hablemos de derivación covariante, transporte paralelo, geodésicas o curvatura en una variedad de Riemann, o incluso semirriemanniana, nos referiremos a los conceptos determinados por la conexión de Levi-Civita. No obstante, a continuación hacemos unas observaciones sobre otras conexiones compatibles con un tensor métrico:

La torsión de una conexión compatible Una ligera modificación de la prueba del teorema anterior muestra que si $T : \mathfrak{X}(V) \times \mathfrak{X}(V) \rightarrow \mathfrak{X}(V)$ es cualquier tensor antisimétrico (es decir, tal que $T(X, Y) = -T(Y, X)$), existe una única conexión afín en V compatible con el tensor métrico y cuya torsión es T . La prueba es la misma, sin más que cambiar la ecuación (7.1) por

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] + T(X, Y),$$

y la conexión resultante está determinada por la relación

$$\langle D_X Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \frac{1}{2}(\langle T(X, Y), Z \rangle + \langle T(Z, X), Y \rangle - \langle T(Y, Z), X \rangle).$$

Por lo tanto, el tensor diferencia entre ambas conexiones cumple

$$\langle \Delta(D, \nabla)(X, Y), Z \rangle = \frac{1}{2}(\langle T(X, Y), Z \rangle + \langle T(Z, X), Y \rangle - \langle T(Y, Z), X \rangle),$$

y es fácil ver entonces que es antisimétrico, luego según el teorema 6.33 resulta que todas las conexiones compatibles con la métrica definen las mismas geodésicas. Equivalentemente, dada una conexión D compatible con la métrica

con torsión T , la única conexión simétrica que define las mismas geodésicas es precisamente la conexión de Levi-Civita.

Más aún, si $p \in V$ y $v_0, w_0 \in T_p(V)$, podemos tomar una geodésica γ que pase por $p = \gamma(t_0)$ con velocidad $\gamma'(t_0) = v_0$ y si $w \in \mathfrak{X}(V)_\gamma$ es el transporte paralelo de w_0 , tenemos que $\langle \gamma'(t), w(t) \rangle_{\gamma(t)}$ es constante, luego

$$0 = \frac{d(\langle \gamma'(t), w(t) \rangle_{\gamma(t)})}{dt} = \left\langle \frac{\nabla \gamma'}{dt}, w \right\rangle_{\gamma(t)} + \left\langle \alpha', \frac{\nabla w}{dt} \right\rangle_{\gamma(t)},$$

y en particular

$$\left\langle v_0, \frac{\nabla w}{dt} \Big|_{t_0} \right\rangle_p = 0.$$

Pero según el teorema 6.35 esta derivada covariante es $\frac{1}{2}T_p(w_0, v_0)$, luego concluimos que, para todo par de vectores $v, w \in T_p(V)$, se cumple que $T_p(w, v)$ es ortogonal a v y, por la antisimetría de T , también a w . A su vez, volviendo a la interpretación de T dada por el teorema 6.35 (que no menciona geodésicas), concluimos que si D es una conexión compatible con el tensor métrico de una variedad semirriemanniana, el transporte paralelo de un vector $w \in T_p(V)$ por una curva con velocidad v en p tiene derivada covariante perpendicular tanto a v como a w .

Esto explica el nombre de “torsión”, pues el efecto de la torsión de una conexión sobre el transporte paralelo (respecto del transporte paralelo determinado por la conexión de Levi-Civita) es hacer girar los vectores alrededor de la dirección de avance de la curva. ■

Nota En la definición de variedad semirriemanniana hemos exigido que la signatura del tensor métrico sea la misma en todos los puntos, pero no hemos usado esa condición en ningún momento. Ahora podemos entender que ello se debe a que dicha condición es redundante salvo en el caso de variedades no conexas, pues, si tenemos una variedad semirriemanniana conexa, podemos unir dos cualesquiera de sus puntos p y q por un arco regular a trozos y el transporte paralelo de una base ortonormal de $T_p(V)$, al ser isométrico, da lugar a una base ortonormal de $T_q(V)$ con la misma signatura. Por lo tanto la signatura de un tensor métrico es necesariamente la misma en cada componente conexa de la variedad. ■

Definición 7.6 Los coeficientes Γ_{ij}^k de la conexión de Levi-Civita respecto de una carta se conocen como *símbolos de Christoffel* respecto de la carta dada.

Para calcularlos aplicamos $\langle -, \partial_{x_i} \rangle$ a la igualdad (6.5) y usamos (7.2) teniendo en cuenta que $[\partial_{x_i}, \partial_{x_j}] = 0$:

$$\sum_k \Gamma_{ij}^k g_{kl} = \langle \nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j}, \partial_{x_l} \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right). \quad (7.3)$$

Despejando:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right) g^{lk}. \quad (7.4)$$

El sistema de ecuaciones precedente a (7.4) es el mismo que [An (7.9)], lo que confirma que la derivada covariante definida en [An 7.29] en una subvariedad de \mathbb{R}^m no es sino la inducida por su conexión de Levi-Civita. ■

Propiedades de las conexiones compatibles Veamos algunas consecuencias de la definición de conexión compatible con un tensor métrico:

Teorema 7.7 *Si V es una variedad semirriemanniana y D es una conexión afín compatible con el tensor métrico, entonces D conmuta con los cambios de tipo, es decir:*

$$D_X(\uparrow_b^a T) = \uparrow_b^a(D_X T), \quad D_X(\downarrow_b^a T) = \downarrow_b^a(D_X T).$$

DEMOSTRACIÓN: Observemos en primer lugar que $\downarrow_1^a T = C_1^a(g \otimes T)$. Basta probar la igualdad en un entorno de cada punto (luego en el dominio de una carta x), y por linealidad podemos suponer que

$$T = \partial_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \partial_{x_{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s},$$

con lo que

$$\begin{aligned} \downarrow_1^a T &= \partial_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \widehat{\partial_{x_{i_a}}} \otimes \cdots \otimes \partial_{x_{i_r}} \otimes \downarrow_{\partial_{x_{i_a}}} dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s} \\ &= \sum_j g_{i_a j} \partial_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \widehat{\partial_{x_{i_a}}} \otimes \cdots \otimes \partial_{x_{i_r}} \otimes dx^j \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$g \otimes T = \sum_{ij} g_{ij} \partial_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \partial_{x_{i_r}} \otimes dx^i \otimes dx^j \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$$

y $C_1^a(g \otimes T) =$

$$\begin{aligned} &\sum_{ij} g_{ij} dx^i(\partial_{x_{i_a}}) \partial_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \widehat{\partial_{x_{i_a}}} \otimes \cdots \otimes \partial_{x_{i_r}} \otimes dx^j \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s} \\ &= \sum_j g_{i_a j} \partial_{x_{i_1}} \otimes \cdots \otimes \widehat{\partial_{x_{i_a}}} \otimes \cdots \otimes \partial_{x_{i_r}} \otimes dx^j \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}. \end{aligned}$$

Ahora, como D_X conmuta con las contracciones, resulta que

$$D_X(\downarrow_1^a T) = D_X(C_1^a(g \otimes T)) = C_1^a(D_X(g \otimes T)) = C_1^a(g \otimes D_X T) = \downarrow_1^a(D_X T),$$

donde en la penúltima igualdad hemos usado que $D_X g = 0$.

Para extender el resultado al cambio de tipo \downarrow_b^a observamos que si $\sigma \in \Sigma_s$ es una permutación, a cada tensor $T \in \mathcal{T}_s^r$ le podemos asignar el tensor

$$\sigma T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_1, \dots, X_s) = T(\omega^1, \dots, \omega^r, X_{\sigma^{-1}1}, \dots, X_{\sigma^{-1}s}),$$

de modo que

$$\sigma(X_1 \otimes \dots \otimes X_s \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^s) = X_1 \otimes \dots \otimes X_s \otimes \omega^{\sigma^1} \otimes \dots \otimes \omega^{\sigma^s}.$$

Es claro entonces que $D_X(\sigma T) = \sigma D_X T$, así como que si σ es la permutación dada por $(\sigma 1, \dots, \sigma(s+1)) = (2, \dots, b, 1, b+1, \dots, s+1)$, entonces

$$D_X(\downarrow_b^a T) = D_X(\sigma(\downarrow_1^a T)) = \sigma D_X(\downarrow_1^a T) = \sigma \downarrow_1^a D_X T = \downarrow_b^a D_X T.$$

Por último,

$$D_X(\uparrow_b^a T) = \uparrow_b^a \downarrow_b^a D_X(\uparrow_b^a T) = \uparrow_b^a D_X(\downarrow_b^a \uparrow_b^a T) = \uparrow_b^a D_X T. \quad \blacksquare$$

En particular $D_X \flat Y = \flat D_X Y$ y $D_X \sharp \omega = \sharp D_X \omega$, pues $\flat Y = \downarrow_1^1 Y$ y $\sharp \omega = \uparrow_1^1 \omega$.

Consideremos ahora los productos

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{T}_s^r(V) \times \mathcal{T}_s^r(V) \longrightarrow C^\infty(V)$$

definidos puntualmente mediante las formas bilineales (A.2).

Teorema 7.8 *Si V es una variedad semiriemanniana y D es una conexión afín compatible con el tensor métrico, para todos los tensores $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_s^r(V)$ y todo $X \in \mathfrak{X}(V)$, se cumple que*

$$D_X(\langle T_1, T_2 \rangle) = \langle D_X T_1, T_2 \rangle + \langle T_1, D_X T_2 \rangle.$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos en primer lugar el producto definido en $\Lambda^1(V)$, que viene dado por $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \langle \sharp \omega_1, \sharp \omega_2 \rangle$. Entonces

$$\begin{aligned} D_X(\langle \omega_1, \omega_2 \rangle) &= D_X(\langle \sharp \omega_1, \sharp \omega_2 \rangle) = \langle D_X \sharp \omega_1, \sharp \omega_2 \rangle + \langle \sharp \omega_1, D_X \sharp \omega_2 \rangle \\ &= \langle \sharp D_X \omega_1, \sharp \omega_2 \rangle + \langle \sharp \omega_1, \sharp D_X \omega_2 \rangle = \langle D_X \omega_1, \omega_2 \rangle + \langle \omega_1, D_X \omega_2 \rangle. \end{aligned}$$

Para el caso general podemos restringirnos a un abierto coordenado y, por linealidad, basta considerar tensores de la forma

$$T_1 = X_1 \otimes \dots \otimes X_r \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^s, \quad T_2 = Y_1 \otimes \dots \otimes Y_r \otimes \eta^1 \otimes \dots \otimes \eta^s.$$

Entonces

$$\langle T_1, T_2 \rangle = \langle X_1, Y_1 \rangle \dots \langle X_r, Y_r \rangle \langle \omega^1, \eta^1 \rangle \dots \langle \omega^s, \eta^s \rangle,$$

luego, aplicando D_X resulta que

$$\begin{aligned} D_X(\langle T_1, T_2 \rangle) &= \sum_{i=1}^r \langle X_1, Y_1 \rangle \dots D_X(\langle X_i, Y_i \rangle) \dots \langle X_r, Y_r \rangle \\ &\quad + \sum_{i=1}^s \langle \omega^1, \eta^1 \rangle \dots D_X(\langle \omega^i, \eta^i \rangle) \dots \langle \omega^s, \eta^s \rangle \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} D_X T_1 &= \sum_{i=1}^r X_1 \otimes \cdots \otimes D_X X_i \otimes \cdots \otimes X_r \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^s \\ &+ \sum_{i=1}^s X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes D_X \omega^i \otimes \cdots \otimes \omega^s, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \langle D_X T_1, T_2 \rangle &= \sum_{i=1}^r \langle X_1, Y_1 \rangle \cdots \langle D_X X_i, Y_i \rangle \cdots \langle X_r, Y_r \rangle \\ &+ \sum_{i=1}^s \langle \omega^1, \eta^1 \rangle \cdots \langle D_X \omega^i, \eta^i \rangle \cdots \langle \omega^s, \eta^s \rangle. \end{aligned}$$

Si desarrollamos análogamente $\langle T_1, D_X T_2 \rangle$ y sumamos las dos expresiones, vemos que podemos pasar de la expresión de $D_X(\langle T_1, T_2 \rangle)$ a la que obtenemos para $\langle D_X T_1, T_2 \rangle + \langle T_1, D_X T_2 \rangle$ sin más que aplicar la relación análoga para campos vectoriales (que es la compatibilidad de la derivación con la métrica) y para el caso de 1-formas (ya demostrada). ■

Por el mismo argumento empleado en la sección 3.5 para la derivada de Lie, concluimos que D_X se restringe a una derivación en $\Lambda(V)$, es decir, que cumple

$$D_X(\omega \wedge \eta) = D_X \omega \wedge \eta + \omega \wedge D_X \eta.$$

Por otra parte, tenemos los productos

$$\langle \mid \rangle : \Lambda^k(V) \times \Lambda^k(V) \longrightarrow C^\infty(V)$$

definidos puntualmente por mediante las formas bilineales (A.3). Puesto que $\langle \omega \mid \eta \rangle = (1/k!) \langle \omega, \eta \rangle$, el teorema anterior implica que, para conexiones compatibles con el tensor métrico,

$$D_X(\langle \omega \mid \eta \rangle) = \langle D_X \omega \mid \eta \rangle + \langle \omega \mid D_X \eta \rangle.$$

De aquí deducimos lo siguiente:

Teorema 7.9 *Si V es una variedad semirriemanniana orientada, D es una conexión afín compatible con el tensor métrico, $X \in \mathfrak{X}(V)$ y dm es el elemento de volumen orientado, entonces $D_X dm = 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 4.6, en un entorno de cada punto existe un sistema de referencia ortonormal X_1, \dots, X_n (que podemos tomar orientado), y entonces

$$dm|_U = X_1 \wedge \cdots \wedge X_n,$$

luego

$$\langle dm|_U \mid dm|_U \rangle = \det(\langle X_i, X_j \rangle) = 1.$$

Por lo tanto, $\langle dm | dm \rangle = 1$. Aplicando D_X resulta:

$$0 = D_X 1 = D_X(\langle dm | dm \rangle) = 2 \langle D_X dm | dm \rangle.$$

Pongamos que $D_X dm = f dm$, para cierta función $f \in C^\infty(V)$. Entonces

$$0 = \langle D_X dm | dm \rangle = f \langle dm | dm \rangle = f,$$

luego $D_X dm = 0$. ■

Los operadores diferenciales En el capítulo V hemos definido los operadores diferenciales (el gradiente, la divergencia, etc.) en términos de los “isomorfismos musicales” \sharp, \flat y del operador $*$ de Hodge. Ahora vamos a mostrar que pueden expresarse en términos de la conexión de Levi-Civita. En el caso del gradiente tenemos trivialmente que $\nabla f = \sharp df = \sharp \nabla f$, donde el primer ∇ representa el gradiente y el segundo la diferencial covariante asociada a la conexión de Levi-Civita, que sabemos que sobre funciones coincide con la diferencial. El caso de la divergencia ya no es inmediato:

Teorema 7.10 *Si V es una variedad semirriemanniana y $X \in \mathfrak{X}(V)$, entonces*

$$\operatorname{div} X = \operatorname{Tr}(\nabla X).$$

Observemos que $\nabla X \in \mathcal{T}_1^1(V)$ se identifica con la aplicación $\mathfrak{X}(V) \rightarrow \mathfrak{X}(V)$ dada por $Y \mapsto \nabla_Y X$. En cada punto $p \in V$ determina un endomorfismo $T_p(V) \rightarrow T_p(V)$ cuya traza es $\operatorname{Tr}(\nabla X)_p = C_1^1(\nabla X)$, y lo que afirma el teorema es que $\operatorname{div} X = C_1^1(\nabla X)$.

DEMOSTRACIÓN: Para comprobar la igualdad en un entorno de un punto arbitrario podemos cambiar V por el dominio de una carta x alrededor del punto, y en particular tenemos entonces que V es orientable. Fijamos una orientación y consideramos el elemento de volumen orientado dm . La expresión en coordenadas de ∇X es

$$\nabla X = \sum_{ij} (\nabla_{\partial_{x_i}} X)(x^j) \partial_{x_j} \otimes dx^i,$$

luego $C_1^1(\nabla X) = \sum_i (\nabla_{\partial_{x_i}} X)(x^i)$.

Observemos ahora que si $f \in C^\infty(V)$ e $Y \in \mathfrak{X}(V)$ tenemos que

$$\nabla_X f = \mathcal{L}_X f, \quad \mathcal{L}_X Y = \nabla_X Y - \nabla_Y X,$$

donde la segunda fórmula se debe a que $\operatorname{Tor}(\nabla) = 0$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} & (\mathcal{L}_X dm)(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}) = \\ & \mathcal{L}_X(dm(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})) - \sum_i dm(\partial_{x_1}, \dots, \mathcal{L}_X \partial_{x_i}, \dots, \partial_{x_n}) \\ & = \nabla_X(dm(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})) - \sum_i dm(\partial_{x_1}, \dots, \nabla_X \partial_{x_i}, \dots, \partial_{x_n}) \\ & \quad + \sum_i dm(\partial_{x_1}, \dots, \nabla_{\partial_{x_i}} X, \dots, \partial_{x_n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (\nabla_X dm)(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}) + \sum_i dm(\partial_{x_1}, \dots, (\nabla_{\partial_{x_i}} X)(x^i) \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}) \\ &= \sum_i (\nabla_{\partial_{x_i}} X)(x^i) dm(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}) = C_1^1(\nabla X) dm(\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}), \end{aligned}$$

donde hemos usado en primer lugar que $\nabla_{\partial_{x_i}} X = \sum_j (\nabla_{\partial_{x_i}} X)(x^j) \partial_{x_j}$ junto con la antisimetría de dm , y luego que $\nabla_X dm = 0$, por 7.9. En definitiva, hemos obtenido que

$$\mathcal{L}_X(dm) = \text{Tr}(\nabla X) dm,$$

y ésta es precisamente la condición que define la divergencia. ■

De la fórmula $\text{div } X = \sum_i (\nabla_{\partial_{x_i}} X)(x^i)$ (válida en el dominio de una carta x) podemos deducir una expresión en coordenadas de la divergencia en términos de los símbolos de Christoffel, en lugar de los coeficientes del tensor métrico: Si $X = \sum_j u^j \partial_{x_j}$, entonces

$$\text{div } X = \sum_i \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_i} + \sum_j \Gamma_{ij}^i u^j \right).$$

En efecto:

$$\begin{aligned} (\nabla_{\partial_{x_i}} X)(x^i) &= \sum_j (\nabla_{\partial_{x_i}} (u^j) \partial_{x_j} + u^j \nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j})(x^i) = \nabla_{\partial_{x_i}} (u^i) + \sum_j u^j (\nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j})(x^i) \\ &= \frac{\partial u^i}{\partial x_i} + \sum_j \Gamma_{ij}^i u^j. \end{aligned}$$

A su vez obtenemos una expresión para el laplaciano en términos del tensor hessiano:

$$\Delta f = \text{div } \nabla f = C_1^1(\nabla \uparrow_1^1 df) = C_1^1(\uparrow_1^1 \nabla df) = C_1^1(\uparrow_1^1 Hf),$$

que a su vez nos da la expresión en coordenadas

$$\Delta f = \sum_{ij} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right).$$

La segunda forma fundamental Veamos otro ejemplo en el que es relevante que la conexión de Levi-Civita tenga torsión nula.

Definición 7.11 Si V es una variedad semirriemanniana y W es una subvariedad semirriemanniana, la *segunda forma fundamental* de W es la aplicación

$$\Pi : \mathfrak{X}(W) \times \mathfrak{X}(W) \longrightarrow \mathfrak{X}(W)^\perp$$

dada por $\Pi(X, Y) = \text{nor } \bar{\nabla}_X Y$.

Puesto que la restricción de la conexión es la parte normal de $\bar{\nabla}_X Y$, para cada par de campos $X, Y \in \mathfrak{X}(W)$ tenemos la descomposición

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \Pi(X, Y).$$

De aquí se sigue inmediatamente la relación entre las derivadas covariantes de un campo $X \in \mathfrak{X}(W)_\alpha$, para cualquier curva α en W :

$$\frac{\bar{\nabla} X}{dt} = \frac{\nabla X}{dt} + \Pi(\alpha', X).$$

La segunda forma fundamental contiene la información sobre la variación que necesita una curva para permanecer en W . La ausencia de torsión se traduce en la propiedad de simetría que señala el teorema siguiente:

Teorema 7.12 *Si W es una subvariedad semirriemanniana de una variedad semirriemanniana V , la segunda forma fundamental de W es $C^\infty(W)$ -bilineal y simétrica.*

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que

$$\Pi(X, Y) - \Pi(Y, X) = \text{nor}(\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X) = \text{nor}([\bar{X}, \bar{Y}]) = \text{nor}([X, Y]) = 0,$$

donde hemos usado que $[\bar{X}, \bar{Y}] = [X, Y]$, tal y como vimos en la prueba del teorema 6.30, y como $[X, Y] \in \mathfrak{X}(W)$, su proyección normal es nula.

De la definición es inmediato que Π es $C^\infty(W)$ -lineal en su primera componente, pero por la simetría es de hecho $C^\infty(W)$ -bilineal. ■

En [An 7.37] definimos la segunda forma fundamental de una superficie en \mathbb{R}^3 , que no coincide exactamente con la que acabamos de definir. Veamos la relación entre ambas:

Definición 7.13 Si W es una hipersuperficie orientada en una variedad semirriemanniana orientada V y N es el vector normal unitario a W que determina su orientación, definimos $\tilde{\Pi} : \mathfrak{X}(W) \times \mathfrak{X}(W) \rightarrow C^\infty(W)$ mediante

$$\tilde{\Pi}(X, Y) = \langle \Pi(X, Y), N \rangle.$$

Claramente $\tilde{\Pi} \in \mathcal{T}_2^0(V)$ es un tensor simétrico y $\Pi(X, Y) = \tilde{\Pi}(X, Y)N$. Así pues, Π está determinada por $\tilde{\Pi}$ y por la orientación de W .

Para comprobar que $\tilde{\Pi}$ generaliza a la segunda forma fundamental definida en [An 7.37] generalizamos a su vez el concepto de curvatura normal:

Definición 7.14 Si V es una variedad de Riemann orientada, W es una hipersuperficie orientada, N es la determinación del vector normal unitario a W que induce su orientación y α es una curva en W parametrizada por el arco, se define la *curvatura normal* de α (respecto de V) como $\kappa(t) = \langle \nabla \alpha' / dt, N \rangle$. Para una curva regular arbitraria, se define su curvatura normal como la asociada a su reparametrización por el arco.

Observemos que esta definición generaliza a [An 7.35] porque en el caso en que $V = \mathbb{R}^n$ tenemos que $\nabla \alpha'/dt = \alpha''$. Además,

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \langle \nabla_{\alpha'(t)} \alpha'(t), N \rangle = \langle \text{nor}(\nabla_{\alpha'(t)} \alpha'(t)), N \rangle \\ &= \langle \Pi(\alpha'(t), \alpha'(t)), N \rangle = \tilde{\Pi}(\alpha'(t), \alpha'(t)).\end{aligned}$$

Si α es una curva regular arbitraria y $\beta(s) = \alpha(t(s))$ es su reparametrización por el arco, tenemos que $\beta'(s) = \alpha'(t(s))t'(s) = \alpha'(t(s))/\|\alpha'(t(s))\|$, luego

$$\kappa_\alpha(t) = \kappa_\beta(s(t)) = \frac{\tilde{\Pi}(\alpha'(t), \alpha'(t))}{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle}.$$

Por lo tanto, para cada $p \in W$, y cada $v \in T_p(W)$, tenemos que

$$\tilde{\Pi}_p(v, v) = \langle v, v \rangle \kappa(v),$$

donde $\kappa(v)$ es la curvatura normal de cualquier curva en W que pase por p con velocidad v , y ésta es la definición de la segunda forma fundamental dada en [An 7.37]. Más precisamente, la función definida en [An 7.37] es la forma cuadrática $v \mapsto \tilde{\Pi}_p(v, v)$.

Según el teorema [Al 6.54], existe una base ortonormal de $T_p(W)$ respecto a la cual la matriz de $\tilde{\Pi}_p$ es diagonal. Además, los elementos de la diagonal son precisamente los valores propios de la matriz, luego no dependen de la elección de la base² (pero cambian de signo si cambiamos la orientación de W) y reciben el nombre de *curvaturas principales* de W en p .

En [An 7.38] definimos la curvatura de Gauss de una hipersuperficie en \mathbb{R}^3 como el producto de sus dos curvaturas principales. Esta definición depende, en principio, de la inmersión de la superficie en \mathbb{R}^3 , si bien demostramos que en realidad es un concepto “intrínseco” determinado completamente por la métrica de la hipersuperficie. Nos ocuparemos de esto más adelante.

Ejemplo: La segunda forma fundamental de una esfera Llamemos S_r^n a la esfera n -dimensional de centro 0 y radio r en \mathbb{R}^{n+1} . Si $p \in S_r^n$ y $v \in T_p(S_r^n)$, una curva que pasa por p con velocidad v es la circunferencia de radio r

$$\alpha(t) = p \cos(\|v\|t/r) + \frac{rv}{\|v\|} \text{sen}(\|v\|t/r).$$

Calculando en \mathbb{R}^{n+1} tenemos que

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= -\frac{\|v\|}{r} \text{sen}(\|v\|t/r) p + \cos(\|v\|t/r) v, \\ \nabla_{\alpha'(t)} \alpha' &= \alpha''(t) = -\frac{\|v\|^2}{r^2} \cos(\|v\|t/r) p - \frac{\|v\|}{r} \text{sen}(\|v\|t/r) v.\end{aligned}$$

²Más precisamente, si llamamos $S : T_p(W) \rightarrow T_p(W)$ al tensor $\uparrow_1^1 \tilde{\Pi}$, de modo que $\tilde{\Pi}(u, v) = \langle S(u), v \rangle$, entonces, en cualquier base ortonormal de $T_p(W)$ la forma bilineal $\tilde{\Pi}$ y el endomorfismo S tienen la misma matriz, luego las curvaturas principales, que son los valores propios de S , no dependen de la base ortonormal elegida.

Por lo tanto,

$$\Pi_p(v, v) = -\frac{\|v\|^2}{r^2}p, \quad \tilde{\Pi}_p(v, v) = -\frac{1}{r}\langle v, v \rangle, \quad \kappa(v) = -\frac{1}{r}.$$

Así pues, las curvaturas principales de una esfera de radio r valen todas $-1/r$. ■

Invarianza por isometrías Observemos ahora que el hecho de que la conexión de Levi-Civita esté determinada por la métrica implica que se conserva por isometrías, es decir, que si $f : V \rightarrow W$ es una isometría entre variedades semirriemannianas, entonces las proyecciones de campos vectoriales cumplen

$$\nabla_X Y = \nabla_{f^*(X)} f^*(Y).$$

La razón es que, si definimos $D_X Y = \nabla_{f^*(X)} f^*(Y)$, es una mera rutina comprobar que D es una conexión afín simétrica compatible con la métrica, luego tiene que ser la conexión de Levi-Civita.

De aquí se siguen varias consecuencias de interés. Por ejemplo, si $\alpha : I \rightarrow V$ es una curva regular a trozos, $v \in \mathfrak{X}(V)_\alpha$ y $w \in \mathfrak{X}(W)_{\alpha \circ f}$ es el campo dado por

$$w(t) = df_{\alpha(t)}(v(t)),$$

entonces

$$\frac{\nabla w}{dt} = df_{\alpha(t)}\left(\frac{\nabla v}{dt}\right).$$

Más aún, el hecho de que las isometrías cumplan esto implica que también lo cumplen las isometrías locales. En particular, α es una geodésica si y sólo si lo es $\alpha \circ f$.

Como consecuencia tenemos que una isometría local está determinada por la imagen de un punto y su diferencial en dicho punto:

Teorema 7.15 *Si $f, g : V \rightarrow W$ son isometrías locales entre dos variedades semirriemannianas conexas y $p \in V$ cumple que $f(p) = g(p)$ y $df|_p = dg|_p$, entonces $f = g$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $A = \{q \in V \mid f(q) = g(q), df|_q = dg|_q\}$. Es claro que A es cerrado, luego basta probar que es abierto, y para ello basta ver que si $q \in A$, entonces todo entorno normal U de q está contenido en A . En efecto, si $r \in U$, existe una geodésica $\gamma : [0, 1] \rightarrow V$ tal que $\gamma(0) = q$, $\gamma(1) = r$, pero entonces $\gamma \circ f$ y $\gamma \circ g$ son geodésicas en W que pasan por $f(q) = g(q)$ en $t = 0$ con derivada $(\gamma \circ f)'(0) = df|_q(\gamma'(0)) = dg|_q(\gamma'(0)) = (\gamma \circ g)'(0)$, luego $\gamma \circ f = \gamma \circ g$, luego $f(r) = (\gamma \circ f)(1) = (\gamma \circ g)(1) = g(r)$. Esto prueba que $f|_U = g|_U$, luego obviamente $df|_r = dg|_r$, luego $r \in A$. ■

7.2 Geodésicas

Estudiamos ahora las geodésicas en una variedad semirriemanniana. Observemos en primer lugar que si $\gamma : I \rightarrow V$ es una geodésica no constante en una variedad semirriemanniana, como γ' es un transporte paralelo sobre γ y el transporte paralelo es isométrico, resulta que $\langle \gamma', \gamma' \rangle$ es constante, luego podemos dividir a las geodésicas en *positivas*, *negativas* o *isótropas* según el signo constante de $\langle \gamma', \gamma' \rangle$. Obviamente en una variedad de Riemann todas las geodésicas no constantes son positivas. En particular la norma $\|\gamma'\|$ también es constante.

Esto se interpreta como que toda geodésica está *parametrizada proporcionalmente al arco*, pues la longitud del arco comprendido entre $\gamma(t_0)$ y $\gamma(t_1)$ es $\|\gamma'\|(t_1 - t_0)$. Según esto, la definición que hemos dado exige que las geodésicas (no constantes) estén parametrizadas proporcionalmente al arco, lo cual en ciertos contextos puede ser arbitrario. Por ello a veces es útil el concepto siguiente:

Definición 7.16 Una curva en una variedad semirriemanniana es una *pregeodésica* si tiene una reparametrización que es geodésica.

Teorema 7.17 Una curva regular $\alpha : I \rightarrow V$ en una variedad de Riemann V es pregeodésica si y sólo si existe una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\nabla \alpha'}{dt} = f(t)\alpha'(t).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $t : J \rightarrow I$ una función diferenciable y $\beta(s) = \alpha(t(s))$ una reparametrización de α . Entonces $\beta'(s) = \alpha'(t(s))t'(s)$, y el mismo cálculo en coordenadas realizado en la prueba del teorema 6.16 muestra que

$$\frac{\nabla \beta}{ds} = \frac{\nabla \alpha}{dt} \Big|_{t(s)} t'(s)^2 + \alpha'(t(s))t''(s).$$

Supongamos que existe la función f del enunciado y que β es la reparametrización por el arco. Entonces $\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle = 1$, luego derivando resulta que

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \frac{\nabla \beta'}{ds}, \beta'(s) \right\rangle = \langle f(t(s))\alpha'(t(s))t'(s)^2 + t''(s)\alpha'(t(s)), \beta'(s) \rangle \\ &= (f(t(s))t'(s)^2 + t''(s)) \langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle = f(t(s))t'(s)^2 + t''(s), \end{aligned}$$

de donde a su vez

$$\frac{\nabla \beta'}{ds} = (f(t(s))t'(s)^2 + t''(s))\beta'(s) = 0,$$

luego la reparametrización $\beta(s)$ es una geodésica.

Recíprocamente, si $\beta(s)$ es una geodésica, necesariamente t' no se anula, y tenemos que

$$\frac{\nabla\alpha}{dt}\Big|_{t(s)} = -\frac{t''(s)}{t'(s)^2}\alpha'(t(s)),$$

luego basta tomar $f(t) = -\frac{t''(s(t))}{t'(s(t))^2}$, donde $s = t^{-1}$. ■

Ejemplo: Las geodésicas de las esferas Es fácil comprobar que las geodésicas de S^n son los círculos máximos (parametrizados con velocidad constante). En efecto, si $u, v \in S^n$ son dos vectores ortogonales en \mathbb{R}^{n+1} , la curva

$$\gamma(t) = \cos(kt)u + \operatorname{sen}(kt)v$$

tiene su imagen en S^n y, derivando en \mathbb{R}^{n+1} , es decir, identificando sus espacios tangentes, vemos que

$$\gamma''(t) = -k^2(\cos(kt)u + \operatorname{sen}(kt)v),$$

que claramente es ortogonal a $T_{\gamma(t)}(V)$, por lo que $\nabla\gamma/dt = 0$ y γ es una geodésica que pasa por $\gamma(0) = u$ con tangente $\gamma'(0) = kv$. Como u puede variar en todos los puntos de S^n y kv puede variar en todo $T_u(S^n)$ resulta que hay una geodésica de este tipo que pasa por cualquier punto dado de S^n con cualquier tangente dada, y la unicidad de las geodésicas garantiza que no hay otras. ■

Cartas normales El teorema 6.31 puede mejorarse para el caso de variedades semirriemannianas. En la prueba tomábamos un entorno normal U de un punto p y fijábamos una base arbitraria de $T_p(V)$. Si V es una variedad semirriemanniana podemos fijar, más concretamente, una base ortonormal, con lo que la aplicación $\tilde{x} : T_p(V) \rightarrow \mathbb{R}_s^n$ que a cada vector le asigna las coordenadas en dicha base es una isometría.

Definición 7.18 Sea V una variedad semirriemanniana y $p \in V$. Una *carta normal* alrededor de p es una carta de la forma $x = \tilde{x} \circ (\exp_p|_{U^*})^{-1} : U \rightarrow \tilde{U}$, donde $\tilde{x} : T_p(V) \rightarrow \mathbb{R}_s^n$ es una isometría, U es un entorno normal de p y $\tilde{U}^* \subset T_pV$ es su abierto estrellado asociado. Observemos que $x(p) = 0$.

Así, todo $q \in U$ es de la forma $q = \exp_p(v)$, para cierto $v \in U^*$, de modo que la geodésica $\gamma_{p,v}$ cumple $\gamma_{p,v}(0) = p$ y $\gamma_{p,v}(q) = q$. Además, $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$, luego $x(\gamma_v(t)) = t\tilde{x}(v) = tx(q)$. Esto significa que la única geodésica contenida en U que une p con q tiene coordenadas $x(t)$ dadas por $x(t) = tx(q)$.

También conviene observar que la isometría \tilde{x} puede recuperarse a partir de x del modo siguiente:

$$dx^i|_p(v) = dx^i|_p(\gamma'_v(0)) = (\gamma_v \circ x^i)'(0) = \tilde{x}^i(v),$$

luego $\tilde{x}(v) = (dx^1|_p(v), \dots, dx^n|_p(v))$. Notemos que estas coordenadas son también las de v respecto de la base $\partial_{x_1}|_p, \dots, \partial_{x_n}|_p$.

En realidad todas estas relaciones son válidas igualmente aunque \tilde{x} no sea una isometría. La relevancia de que lo sea se encuentra en el teorema siguiente:

Teorema 7.19 *Sea $x : U \rightarrow \tilde{U}$ una carta normal alrededor de un punto p de una variedad semirriemanniana V con signatura $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$. Entonces, los coeficientes de la métrica en la carta cumplen*

$$g_{ij}(p) = \begin{cases} \epsilon_i & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \quad \left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right|_p = 0.$$

Además $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$.

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que $g_{ij}(p) = g_p(\partial_{x_i}|_p, \partial_{x_j}|_p)$. Ahora bien, $dx|_p$ hace corresponder la base $\partial_{x_i}|_p$ con la base canónica de \mathbb{R}^n y, como es una isometría, la base de las derivadas parciales es ortonormal, luego $g_{ij}(p)$ toma el valor que indica el enunciado.

El teorema 6.31 nos da que los símbolos de Christoffel se anulan en p . Esto quiere decir que $(\nabla_{\partial_{x_k}} \partial_{x_i})_p = 0$ y por lo tanto

$$\left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right|_p = \frac{\partial \langle \partial_{x_i}, \partial_{x_j} \rangle}{\partial x_k} \Big|_p = \left\langle (\nabla_{\partial_{x_k}} \partial_{x_i})_p, \partial_{x_j}|_p \right\rangle_p + \left\langle \partial_{x_i}|_p, (\nabla_{\partial_{x_k}} \partial_{x_j})_p \right\rangle_p = 0. \quad \blacksquare$$

Notemos que las condiciones del teorema anterior las cumplen los coeficientes de la métrica de \mathbb{R}_s^n en todo punto. Así pues, lo que tenemos es que, localmente, la métrica de cualquier variedad “se parece” a la de \mathbb{R}_s^n .

El lema de Gauss Vamos a probar ahora un resultado técnico sobre geodésicas que necesitaremos más adelante. Para ello necesitamos un concepto previo:

Definición 7.20 Una *superficie parametrizada* en una variedad diferencial V es una aplicación diferenciable $\alpha : J \rightarrow V$, donde $J \subset \mathbb{R}^2$ es abierto.

Llamamos (s, t) a las coordenadas de J respecto de la carta identidad. Para cada punto $(s_0, t_0) \in J$ definimos los vectores de $T_{\alpha(s_0, t_0)}(V)$

$$\left. \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|_{(s_0, t_0)} = d\alpha|_{(s_0, t_0)}(\partial_s|_{(s_0, t_0)}), \quad \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(s_0, t_0)} = d\alpha|_{(s_0, t_0)}(\partial_t|_{(s_0, t_0)}).$$

Fijado un punto (s_0, t_0) , definimos las *curvas coordenadas* $\alpha_{s_0}(t) = \alpha(s_0, t)$ y $\alpha_{t_0}(s) = \alpha(s, t_0)$. Claramente son diferenciables, y es inmediato comprobar que

$$\left. \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|_{(s_0, t_0)} = \alpha'_{t_0}(s_0), \quad \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(s_0, t_0)} = \alpha'_{s_0}(t_0).$$

Podemos considerar a $\left. \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|_{(s_0, t)}$ como un campo vectorial sobre α_{s_0} , claramente diferenciable, e igualmente cambiando s por t . Si las curvas coordenadas

son regulares podemos hablar de las derivadas covariantes de estos campos. En tal caso se cumple:

$$\frac{\nabla}{dt} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \Big|_{(s_0, t)} \right) \Big|_{t_0} = \frac{\nabla}{ds} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{(s, t_0)} \right) \Big|_{s_0} \quad (7.5)$$

DEMOSTRACIÓN: Tomemos un sistema de coordenadas x alrededor del punto $\alpha(s_0, t_0)$. Entonces

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} \Big|_{(s_0, t)} = \sum_i \frac{\partial \alpha^i}{\partial s} \Big|_{(s_0, t)} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(s_0, t)}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{(s, t_0)} = \sum_j \frac{\partial \alpha^j}{\partial t} \Big|_{(s, t_0)} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{\alpha(s, t_0)}$$

(e incidentalmente esto prueba que se trata de campos diferenciables). Ahora, el primer miembro de (7.5) es igual a

$$\begin{aligned} & \sum_i \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \alpha^i}{\partial s} \right) \Big|_{t_0} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(s_0, t_0)} + \frac{\partial \alpha^i}{\partial s} \Big|_{(s_0, t_0)} \left(\nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{(s_0, t)}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \Big|_{\alpha(s_0, t_0)} \right) \\ &= \sum_i \frac{\partial^2 \alpha^i}{\partial s \partial t} \Big|_{(s_0, t_0)} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(s_0, t_0)} + \sum_{ij} \frac{\partial \alpha^i}{\partial s} \Big|_{(s_0, t_0)} \frac{\partial \alpha^j}{\partial t} \Big|_{(s_0, t_0)} (\nabla_{\partial_j} \partial_i) \Big|_{\alpha(s_0, t_0)}. \end{aligned}$$

Como esta expresión es simétrica en s y t , es claro que coincide con el segundo miembro de (7.5). ■

Si V es una variedad semirriemanniana y U es un entorno normal de un punto p , tenemos que $\exp_p : U^* \rightarrow U$ es un difeomorfismo, pero normalmente no será una isometría. Por la observación tras el teorema 6.20 sabemos que

$$d \exp_p |_0 : T_0(T_p(V)) \rightarrow T_p(V)$$

sí que lo es (pues se trata del isomorfismo canónico θ_0), pero si consideramos otro punto $z \in U^*$ no nulo y $q = \exp_p(z)$ no es cierto en general que

$$d \exp_p |_z : T_x(T_p(V)) \rightarrow T_q(V)$$

sea una isometría. No obstante, se cumple un resultado parcial: esta diferencial conserva el producto escalar de un vector arbitrario por otro radial, es decir, un vector cuya imagen por el isomorfismo canónico θ_z sea múltiplo de z . Eso es lo que afirma el teorema siguiente:

Teorema 7.21 (Lema de Gauss) *Sea V una variedad semirriemanniana, sea $p \in V$, sea U un entorno normal de p , sea $U^* \subset T_p(V)$ su abierto estrellado asociado, sea $z \in U^*$ y consideremos dos vectores $v_z, w_z \in T_z(T_p(V))$ con v_z radial. Entonces*

$$\langle d \exp_p |_z(v_z), d \exp_p |_z(w_z) \rangle = \langle v_z, w_z \rangle.$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que $z \neq 0$, pues en tal caso el teorema se cumple trivialmente, según acabamos de observar. Llamemos $v = \theta_z(v_z)$ y $w = \theta_z(w_z)$ a los vectores del espacio $T_p(V)$ con los que se identifican los vectores dados. El resultado también es trivial si $v_z = 0$ o $w_z = 0$. En caso contrario, la hipótesis es que $v = \lambda z$, para cierto λ no nulo. Por linealidad basta probarlo si $\lambda = 1$, de modo que $v = z$.

Consideramos la superficie parametrizada $\tilde{\alpha} : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p(V)$ determinada por $\tilde{\alpha}(s, t) = s(v + tw)$ y su composición con la exponencial $\alpha(s, t) = \exp_p(s(v + tw))$, que está definida en un entorno de $(0, 0)$. Claramente:

$$\frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial s} \Big|_{(1,0)} = v_v, \quad \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial t} \Big|_{(1,0)} = w_v.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} \Big|_{(1,0)} = d \exp_p |_{v}(v_v), \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{(1,0)} = d \exp_p |_{v}(w_v),$$

y lo que tenemos que probar es que

$$\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial s} \Big|_{(1,0)}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{(1,0)} \right\rangle = \langle v, w \rangle,$$

(donde hemos usado que θ_p es una isometría). Para ello observamos que

$$\alpha_t(s) = \exp_p(s(v + tw)) = \gamma_{p, v+tw}(s),$$

luego la curva coordenada α_t es regular (si w es múltiplo de v , esto vale para t suficientemente pequeño, para que $v + tw \neq 0$) y, al ser una geodésica,

$$\frac{\nabla}{ds} \frac{\partial \alpha_t}{\partial s} = 0.$$

Más aún, como las derivadas de las geodésicas se transportan paralelamente,

$$\left\langle \frac{\partial \alpha_t}{\partial s}, \frac{\partial \alpha_t}{\partial s} \right\rangle = \langle v + tw, v + tw \rangle.$$

Por la compatibilidad con la métrica,

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial \alpha_t}{\partial s}, \frac{\partial \alpha_s}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \alpha_t}{\partial s}, \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial \alpha_s}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \alpha_t}{\partial s}, \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial \alpha_t}{\partial s} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \alpha_t}{\partial s}, \frac{\partial \alpha_t}{\partial s} \right\rangle.$$

En el penúltimo paso hemos usado la observación precedente al teorema, que es aplicable para $s > 0$, pues en tal caso las curvas α_s también son regulares, puesto que su derivada es $d \exp_p |_{v}(sw) \neq 0$ y $v \in U^*$, luego la diferencial es biyectiva. Teniendo en cuenta la expresión que hemos encontrado para el último producto escalar, queda

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial \alpha_t}{\partial s}, \frac{\partial \alpha_s}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{2} (\langle w, v + tw \rangle + \langle v + tw, w \rangle),$$

luego, para todo $s > 0$,

$$\frac{\partial}{\partial s} \left\langle \frac{\partial \alpha_t}{\partial s}, \frac{\partial \alpha_s}{\partial t} \right\rangle \Big|_{(s,0)} = \langle v, w \rangle.$$

Esto significa que

$$\left\langle \frac{\partial \alpha_t}{\partial s}, \frac{\partial \alpha_s}{\partial t} \right\rangle \Big|_{(s,0)} = a + s \langle v, w \rangle$$

y por continuidad esto vale también si $s = 0$. Y como $\alpha_0(t) = \exp_p(0) = p$ es constante, su derivada es nula y, evaluando en 0 la igualdad anterior, vemos que $a = 0$. Evaluando en $s = 1$ (notemos que α_0 está definida en $s = 1$, pues $v \in U^*$) queda la igualdad buscada. ■

Nota El lema de Gauss admite una expresión conceptualmente más simple en términos del *campo de posición* $P = \sum_i x^i \partial_{x_i}$ (donde x es una carta normal alrededor de p) y de la *función radial*

$$r^2 = \sum_i \epsilon_i (x^i)^2.$$

En estos términos equivale a que el gradiente de la función radial es

$$\nabla(r^2) = 2P.$$

En efecto, veamos en primer lugar que esto lo cumplen las funciones \tilde{P} y \tilde{r}^2 definidas análogamente en $T_p(V)$. En efecto, para cada $z \in T_p(V)$, tenemos que los vectores $\partial_{x_i}|_z$ forman una base ortonormal de $T_z(T_p(V))$, luego $\langle \tilde{P}, \tilde{P} \rangle = \tilde{r}^2$. Por lo tanto, para cada $V \in \mathfrak{X}(T_p(V))$, tenemos que

$$\langle \nabla \tilde{r}^2, V \rangle = V(\tilde{r}^2) = V(\langle \tilde{P}, \tilde{P} \rangle) = 2 \langle \nabla_V(\tilde{P}), \tilde{P} \rangle = 2 \langle V, \tilde{P} \rangle = \langle 2\tilde{P}, V \rangle,$$

donde hemos usado que en un espacio afín la conexión afín se limita a derivar las coordenadas del campo: $\nabla_V(\tilde{P}) = \sum_i V(x^i) \partial_{x_i} = V$.

Ahora pasamos a V . Tomamos $q \in U$ y $v \in T_q(V)$. Sea $z \in \tilde{U}$ tal que $\exp_p(z) = v$ y sea $v_z \in T_z T_p(V)$ tal que $d \exp_p|_z(v_z) = v$. Si llamamos \tilde{x}^i a las coordenadas de $T_p(V)$, tenemos que $\tilde{x}^i \circ \exp_p = x^i$, de donde $\exp_p \circ r^2 = \tilde{r}^2$ y $P_q = d \exp_p|_z(\tilde{P}_z)$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \langle (\nabla r^2)_q, v \rangle &= v(r^2) = d \exp_p|_z(v_z)(r^2) = v_z(\exp_p \circ r^2) \\ &= v_z(\tilde{r}^2) = \langle (\nabla \tilde{r}^2)_z, v_z \rangle = 2 \langle \tilde{P}_z, v_z \rangle = 2 \langle P_q, v \rangle, \end{aligned}$$

donde el último paso es por el lema de Gauss, teniendo en cuenta que \tilde{P}_z es radial.

En una variedad de Riemann podemos definir $r = \sqrt{r^2}$, que es una función diferenciable en $U \setminus \{p\}$, y en este abierto se cumple que $\nabla r = P/r$ es el *campo radial unitario*.

En efecto:

$$2 \langle P, V \rangle = \langle \nabla(r^2), V \rangle = V(r^2) = 2rV(r) = 2r \langle \nabla r, V \rangle,$$

luego $\langle \nabla r, V \rangle = \langle P/r, V \rangle$. ■

7.3 La métrica de una variedad de Riemann

Ya hemos visto que en una variedad de Riemann está definida la longitud de un arco. A partir de ella podemos definir a su vez una distancia natural entre puntos. Recordemos que el teorema 2.23 afirma que dos puntos cualesquiera de una variedad diferencial conexa pueden unirse por un arco regular a trozos. Esto justifica la definición siguiente:

Definición 7.22 Si V es una variedad de Riemann conexa, definimos la *distancia* entre dos puntos $p, q \in V$ como el ínfimo $\rho(p, q)$ de las longitudes de los arcos diferenciables a trozos que unen p con q .

Vamos a probar que ρ es una distancia en V que induce la topología de V .

Obviamente $\rho(p, q) \geq 0$ y $\rho(p, p) = 0$, pues un arco constante une p con p y longitud 0.

La prueba de que si $\rho(p, q) = 0$ entonces $p = q$ es más delicada, y debemos posponerla.

Es fácil ver que $\rho(p, q) = \rho(q, p)$. De hecho, si α es un arco diferenciable a trozos que une p con q , entonces $-\alpha$ es un arco diferenciable a trozos de la misma longitud que une q con p .

Dados $p, q, r \in V$, si α_1 une p con q y α_2 une q con r entonces $\alpha_1 \cup \alpha_2$ es un arco diferenciable a trozos que une p con r y $L(\alpha_1 \cup \alpha_2) = L(\alpha_1) + L(\alpha_2)$. Por consiguiente

$$\rho(p, r) \leq L(\alpha_1) + L(\alpha_2).$$

Tomando el ínfimo en α_1 y α_2 obtenemos la desigualdad triangular:

$$\rho(p, r) \leq \rho(p, q) + \rho(q, r).$$

Con esto tenemos probado que ρ es una pseudométrica en V , es decir, sólo nos falta probar que si $\rho(p, q) = 0$ entonces $p = q$.

Sea $x : U \rightarrow \tilde{U}$ una carta de V alrededor de un punto p . Podemos suponer que $x(p) = 0$. En U tenemos definidas dos métricas de Riemann: la restricción de la métrica de V , a la que llamamos g , y la retracción por x de la métrica

euclídea g^e en \tilde{U} , a la que llamaremos \tilde{g} . Más concretamente, si $q \in U$ y $v, w \in T_q(V)$, entonces

$$\tilde{g}_q(v, w) = g_{x(q)}^e(dx|_q(v), dx|_q(w)).$$

Es claro que $dx|_q(\partial_{x_i}|_q) = \partial_{x_i}|_{x(q)}$, donde en el miembro izquierdo x_i son las coordenadas de x y en el miembro derecho son las coordenadas de la identidad en \tilde{U} . Por consiguiente, si $v = \sum_i v^i \partial_{x_i}|_q$ y $w = \sum_i w^i \partial_{x_i}|_q$, entonces

$$\tilde{g}_q(v, w) = \sum_i v^i w^i.$$

Para cada $q \in U$ y cada $v = \sum_i v^i \partial_{x_i}|_q \in T_q(V)$, definimos

$$\|v\|_1 = \sqrt{g_q(v, v)} = \sqrt{\sum_{i,j} v^i g_{ij}(q) v^j}, \quad \|v\|_2 = \sqrt{\tilde{g}_q(v, v)} = \sqrt{\sum_i (v^i)^2}.$$

Para cada arco $\alpha : [a, b] \rightarrow U$ diferenciable a trozos definimos

$$L_1(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|_1 dt, \quad L_2(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|_2 dt.$$

En definitiva, $L_1(\alpha)$ es la longitud de α y $L_2(\alpha)$ es la longitud de su lectura en \tilde{U} . Vamos a comparar ambas longitudes. Como $0 = x(p) \in \tilde{U}$, existe un $\delta > 0$ tal que $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \delta\} \subset \tilde{U}$. Sea $K = x^{-1}[B]$, que es un entorno compacto de p contenido en U . Definimos $h : K \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$h(q, u) = \sqrt{\sum_{i,j} u^i g_{ij}(q) u^j}.$$

Claramente $K \times S^{n-1}$ es compacto y la función h es continua y no se anula (el radicando es la norma del vector de $T_q(V)$ de coordenadas u en la base ∂_{x_i}), luego existen números reales $M > m > 0$ tales que

$$m < h(q, u) < M,$$

para todo $q \in K$ y todo $u \in S^{n-1}$. Equivalentemente,

$$m \sqrt{\sum_i (u^i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i,j} u^i g_{ij}(q) u^j} \leq M \sqrt{\sum_i (u^i)^2}.$$

Ahora bien, por la homogeneidad de los tres términos, esta desigualdad vale para todo $u \in \mathbb{R}^n$. De aquí se deduce que

$$m \|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq M \|v\|_2$$

para todo $v \in T_q(V)$ con $q \in K$. Usando la monotonía de la integral concluimos que

$$m L_2(\alpha) \leq L_1(\alpha) \leq M L_2(\alpha),$$

para todo arco regular a trozos α con imagen contenida en K .

Veamos ahora que si $q \in V$ cumple $\rho(p, q) < m\delta$, entonces $q \in U$. En efecto, supongamos que $q \in V \setminus U$. Tomemos un arco regular a trozos $\alpha : [a, b] \rightarrow V$ que una p con q .

Por continuidad existe un $t \in [a, b]$ tal que $\alpha[a, t] \subset K$. Sea t_0 el supremo de los t que cumplen esto. Como K es cerrado, es claro que $\alpha[a, t_0] \subset K$. Podemos considerar el arco $\eta : [a, t_0] \rightarrow B$ dado por $\eta = \alpha \circ x$. Es claro que $\|\eta(t_0)\| = \delta$, o de lo contrario podríamos tomar un $t > t_0$ con $\alpha[a, t] \subset K$.

La longitud de un arco en \mathbb{R}^n es mayor o igual que la distancia entre sus extremos,³ luego $L(\eta) \geq \delta$. Ahora bien, como $\alpha|_{[a, t_0]}$ tiene imagen en K , tenemos que

$$\delta \leq L(\eta) = L_2(\alpha|_{[a, t_0]}) \leq L_1(\alpha|_{[a, t_0]})/m \leq L_1(\alpha)/m,$$

para todo arco α que una p con q . Por consiguiente $\rho(p, q) \geq m\delta$.

Esto ya nos garantiza que ρ es una distancia: si $p \neq q$ tomamos un entorno coordenado U de p que no contenga a q . Según acabamos de probar, todo $r \in V$ que cumpla $d(p, r) < m\delta$ ha de estar en U , para ciertos m y δ , luego $\rho(p, q) \neq 0$.

Más aún, hemos probado que todo entorno de un punto $p \in V$ para la topología de V contiene una bola abierta de centro p para la métrica ρ . Ahora probamos el recíproco, es decir, que toda bola abierta $B_\epsilon(p)$ contiene un entorno de p para la topología de V . Concretamente, el entorno

$$W = \{q \in U \mid \|x(q)\| < \min\{\delta, \epsilon/M\}\}.$$

En efecto, dado $q \in W$, el arco $\alpha(t) = x^{-1}(tx(q))$ (para $t \in [0, 1]$) es regular, tiene imagen en K y une p con q . Además

$$l_1(\alpha)/M \leq l_2(\alpha) = \|x(q)\| < \epsilon/M,$$

por lo que $\rho(p, q) \leq l_1(\alpha) < \epsilon$.

Resumimos en el teorema siguiente lo que hemos demostrado:

Teorema 7.23 *Si V es una variedad de Riemann conexa, entonces la distancia ρ definida como el ínfimo de las longitudes de los arcos diferenciables a trozos que unen dos puntos dados es una distancia en V que induce la topología de V .*

Ya sabíamos (por el teorema de Whitney) que las variedades diferenciales eran espacios métricos, pero ahora hemos definido una distancia “intrínseca” a la variedad, es decir, una distancia respecto de la cual la distancia entre dos puntos hace referencia a la distancia que hay que recorrer para desplazarse desde uno hasta el otro sin salir de la variedad.

Observaciones No podemos decir que la distancia entre dos puntos es la longitud del camino más corto que los une, pues dicho camino más corto no tiene por qué existir. Por ejemplo, si $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, la distancia de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$ es 2, pero no hay ningún arco en V de longitud 2 que una ambos puntos, ya

³Esto se sigue fácilmente del teorema [IC 2.14], que vale obviamente para curvas en \mathbb{R}^n .

que cualquier arco tiene que “sortear” el $(0, 0)$, y eso obliga a que su longitud se haga un poco mayor que 2. Se puede aproximar a 2 cuanto se quiera reduciendo el desvío, pero no se puede alcanzar el 2.

Si una variedad de Riemann V no es conexa, no existe ninguna noción intrínseca de distancia entre dos puntos que pertenezcan a componentes conexas distintas. No obstante, si definimos $\rho(p, q)$ como la distancia que tenemos definida en el caso en que ambos puntos están en la misma componente conexa y $\rho(p, q) = 1$ en caso contrario, tenemos igualmente una distancia en V que sobre cada componente conexa es la distancia intrínseca. ■

Si $f : V \rightarrow W$ es una isometría entre variedades de Riemann, el hecho de que conserve las longitudes de curvas se traduce obviamente en que conserva las distancias, es decir, que para cada par de puntos $p, q \in V$ se cumple que $\rho_V(p, q) = \rho_W(f(p), f(q))$. En otras palabras, las isometrías entre variedades de Riemann son isometrías entre espacios métricos.

Ahora podemos interpretar las isometrías puntuales:

Teorema 7.24 *Sea $f : V_1 \rightarrow V_2$ una aplicación diferenciable entre dos variedades de Riemann y sea $p_1 \in V_1$ tal que $df|_{p_1} : T_{p_1}(V_1) \rightarrow T_{f(p_1)}(V_2)$ sea una isometría. Entonces*

$$\lim_{(q,r) \rightarrow (p_1, p_1)} \frac{d(f(q), f(r))}{d(q, r)} = 1.$$

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $p_2 = f(p_1)$. Como $df|_{p_1}$ es un isomorfismo, f se restringe a un difeomorfismo de un entorno de p_1 en un entorno de p_2 . Equivalentemente, cambiando V_1 y V_2 por abiertos respectivos, podemos suponer que f es un difeomorfismo. Llamemos g_1, g_2 a las métricas respectivas de V_1 y V_2 , y llamemos $h = f^{-1*}(g_1)$, que es una métrica en V_2 respecto de la cual f es una isometría. La hipótesis sobre $df|_{p_1}$ se traduce claramente en que $h_{p_2} = (g_2)_{p_2}$.

Dado $0 < \epsilon < 1$, el tensor

$$\bar{h} = \frac{(1 + \epsilon)h - g_2}{\epsilon}$$

cumple que $\bar{h}_{p_2} = h_{p_2}$, por lo que \bar{h}_{p_2} es un producto escalar euclídeo. Por el teorema 4.10 existe un entorno U_ϵ de p_2 tal que si $q \in U_\epsilon$ entonces \bar{h}_q es un producto euclídeo, por lo que si $v \in T_q(V_2)$ es no nulo, tenemos que $\bar{h}_q(v, v) > 0$, y esto equivale a que

$$(g_2)_q(v, v) < (1 + \epsilon)h_q(v, v).$$

Reduciendo U_ϵ podemos exigir igualmente que se cumpla

$$(1 - \epsilon)h_q(v, v) < (g_2)_q(v, v) < (1 + \epsilon)h_q(v, v).$$

Si $\alpha : I \rightarrow U_\epsilon$ es cualquier arco diferenciable a trozos, por definición de longitud tenemos que

$$(1 - \epsilon)L_h(\alpha) \leq L_{g_2}(\alpha) \leq (1 + \epsilon)L_h(\alpha),$$

y por la definición de distancia, si $q, r \in U_\epsilon$ tenemos que

$$(1 - \epsilon)d_h(q, r) \leq d_{g_2}(q, r) \leq (1 + \epsilon)d_h(q, r).$$

Llamamos $U = f^{-1}[U_\epsilon]$ y así, si $q, r \in U$ son dos puntos distintos, teniendo en cuenta que f es una isometría respecto de g_1 y h , tenemos que

$$(1 - \epsilon)d_{g_1}(q, r) \leq d_{g_2}(f(q), f(r)) \leq (1 + \epsilon)d_{g_1}(q, r),$$

luego

$$\left| \frac{d(f(q), f(r))}{d(q, r)} - 1 \right| \leq \epsilon,$$

y la conclusión es ahora inmediata, por definición de límite. ■

Nota La conclusión del teorema anterior puede expresarse también así:

$$\lim_{(q,r) \rightarrow (p_1, p_1)} \frac{d(f(q), f(r)) - d(q, r)}{d(q, r)} = 0,$$

lo que significa que el error relativo que resulta de aproximar $d(f(q), f(r))$ por $d(q, r)$ tiende a 0. Por ejemplo, imaginemos que f es una parametrización de una superficie V y tomamos un $\delta > 0$ tal que cuando $d(q, p_1) < \delta$ y $d(r, p_1) < \delta$, entonces el límite es menor que $\epsilon = 10^{-5}$. Restringimos f a un cuadrado $C \subset \mathbb{R}^2$ centrado en p cuyo diámetro sea δ . Así, si $q, r \in C$, entonces $d(q, r) < \delta$, luego

$$|d(f(q), f(r)) - d(q, r)| < d(q, r)\epsilon < 10^{-5}\delta.$$

Si representamos C sobre el papel como un cuadrado de 10 cm de lado, esto significa que la escala equipara la longitud δ con $10\sqrt{2}$ cm del mapa, por lo que la diferencia entre la distancia sobre el mapa de los puntos q, r y la distancia “real” sobre V de los puntos $f(q)$ y $f(r)$ es inferior a $10\sqrt{2} \cdot 10^{-5} = 0.00015$ cm sobre el mapa, es decir, 1.5 micras. En otras palabras, para “corregir el error” habría que desplazar 1.5 micras sobre el mapa uno de los puntos. Así pues, “en la práctica” —aunque en teoría no— f es una isometría sobre C . ■

La propiedad minimizante de las geodésicas Vamos a generalizar a variedades de Riemann arbitrarias el hecho de que *el camino más corto entre dos puntos es la línea recta*. Básicamente se trata de que la curva que minimiza la distancia entre dos puntos de una variedad es la única geodésica que los une, pero aquí hay que imponer ciertas restricciones, ya que en general puede no haber ninguna geodésica que una dos puntos o puede haber varias, incluso infinitas. Para enunciar adecuadamente lo que queremos demostrar conviene introducir el concepto siguiente:

Definición 7.25 Un arco diferenciable a trozos $c: [a, b] \rightarrow V$ es *minimizante* (entre sus extremos $p = c(a)$ y $q = c(b)$) si $L(c) = d(p, q)$, donde —recordemos— la distancia $d(p, q)$ está definida como el ínfimo de las longitudes de los arcos diferenciables a trozos que unen p con q .

Observemos que en tal caso c es minimizante entre dos cualesquiera de los puntos por los que pasa, $c(t_0)$ y $c(t_1)$, ya que si existiera un arco c' que uniera $c(t_0)$ y $c(t_1)$ con longitud menor que la de $c|_{[t_0, t_1]}$, al unirlo con $c|_{[a, t_0]}$ y con $c|_{[t_1, b]}$ obtendríamos un arco que uniría p con q de longitud menor que la de c .

Vamos a probar que los arcos de geodésica suficientemente pequeños son minimizantes. Conviene observar que no es cierto en general que toda geodésica sea minimizante. Basta pensar en la esfera S^2 , donde las geodésicas resultan ser los arcos de circunferencia de radio 1: los que tienen amplitud mayor que π radianes no son minimizantes entre sus puntos más alejados, pues la distancia entre ellos se realiza a través del arco complementario.

Teorema 7.26 *Sea V una variedad de Riemann, $p \in V$ y U un entorno normal de p , sea $q \in U$ y $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ la geodésica que cumple $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$. Sea $\beta : [a, b] \rightarrow U$ cualquier curva diferenciable a trozos que cumpla $\beta(a) = p$ y $\beta(b) = q$. Entonces $L(\gamma) \leq L(\beta)$, y se da la igualdad si y sólo si β es una reparametrización monótona de γ .*

DEMOSTRACIÓN: Sea $a_0 = \sup\{s \in [a, b] \mid \beta(s) = p\} < b$ y llamemos $\beta_0 = \beta|_{[a_0, b]}$. Así $L(\beta) \geq L(\beta_0)$ y $\beta_0(s)$ no toma el valor p salvo en $s = a_0$.

Sea $U^* \subset T_p(V)$ el abierto estrellado asociado a U y consideramos la curva diferenciable a trozos $\beta_0^* : [a_0, b] \rightarrow U^*$ dada por $\beta_0^*(s) = (\exp_p|_{U^*})^{-1}(\beta_0(s))$. Así $\beta_0(s) = \exp_p(\beta_0^*(s))$ y $\beta_0^*(s)$ no toma el valor 0 salvo en $s = a_0$. Además, $v_0 = \beta_0^*(b) \in U^*$ cumple que $\exp_p(v_0) = q$, por lo que $\gamma = \gamma_{p, v_0}$.

En $]a_0, b]$ definimos

$$r(s) = \|\beta_0^*(s)\|, \quad v(s) = \frac{\beta_0^*(s)}{\|\beta_0^*(s)\|}.$$

Así r es una función diferenciable a trozos y v una curva diferenciable a trozos en el espacio euclídeo $E = T_p(V)$. Además $\beta_0(s) = \exp_p(r(s)v(s))$.

Consideramos ahora la superficie parametrizada $\alpha(s, t) = \exp_p(tv(s))$. En realidad, tenemos una superficie parametrizada por cada intervalo donde β_0 es diferenciable. Así $\beta_0(s) = \alpha(s, r(s))$ y, salvo en un número finito de puntos, tenemos que

$$\left. \frac{d\beta_0}{ds} \right|_{s_0} = \left. \frac{\partial \alpha}{\partial s} \right|_{(s_0, r(s_0))} + \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(s_0, r(s_0))} \left. \frac{dr}{ds} \right|_{s_0}. \quad (7.6)$$

Observemos ahora que

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} = d \exp_p|_{\tilde{\alpha}_t(s)}(\tilde{\alpha}'_t(s)), \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} = d \exp_p|_{\tilde{\alpha}_s(t)}(\tilde{\alpha}'_s(t)),$$

donde $\tilde{\alpha}_t(s) = tv(s) = \tilde{\alpha}_s(t)$. Si calculamos las derivadas de estas funciones en el espacio euclídeo E identificando los espacios tangentes con el propio E (es decir, derivando como se deriva usualmente en \mathbb{R}^n), el resultado es

$$\tilde{\alpha}'_t(s) = tv'(s), \quad \tilde{\alpha}'_s(t) = v(s).$$

Si consideramos espacios tangentes abstractos, queda

$$\tilde{\alpha}'_t(s) = \theta_{tv(s)}^{-1}(\theta_{v(s)}(tv'(s))), \quad \tilde{\alpha}'_s(t) = \theta_{tv(s)}^{-1}(v(s)).$$

El segundo vector es radial, por lo que podemos aplicar el lema de Gauss, según el cual

$$\left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle = t \langle \theta_{v(s)}(v'(s)), v(s) \rangle = 0.$$

En efecto, como $\langle v(s), v(s) \rangle = 1$, derivando (bajo la identificación de los espacios tangentes) queda $2 \langle v'(s), v(s) \rangle = 0$, y sin la identificación es la igualdad precedente.

Concluimos que las derivadas parciales que aparecen en la fórmula 7.6 son ortogonales, luego podemos aplicar el teorema de Pitágoras:

$$\left\| \frac{d\beta_0}{ds} \Big|_{s_0} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial s} \Big|_{(s_0, r(s_0))} \right\|^2 + \left| \frac{dr}{ds} \Big|_{s_0} \right|^2 \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{(s_0, r(s_0))} \right\|^2.$$

Como $\alpha_{s_0}(t) = \gamma_{v(s_0)}(t)$, el módulo de su derivada es constante igual a $\|v(s_0)\| = 1$, luego

$$\|\beta'_0(s_0)\|^2 = \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial s} \Big|_{(s_0, r(s_0))} \right\|^2 + \left| \frac{dr}{ds} \Big|_{s_0} \right|^2 \geq \left| \frac{dr}{ds} \Big|_{s_0} \right|^2 = r'(s_0)^2,$$

para todo $s_0 > a_0$ donde c sea derivable.

Así pues,

$$\begin{aligned} L(\beta) &\geq L(\beta_0) = \int_{a_0}^b \|\beta'_0(s)\| ds \geq \int_{a_0}^b |r'(s)| ds \geq \int_{a_0}^b r'(s) ds = r(b) - r(a_0) \\ &= \|v_0\| - 0 = \int_0^1 \|v_0\| dt = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt = L(\gamma). \end{aligned}$$

Si se da la igualdad, todas las desigualdades son igualdades. Por una parte, $L(\beta) = L(\beta_0)$ implica que $\beta|_{[a, a_0]}$ tiene longitud 0, luego es constante. Por otra parte, $r'(s) = |r'(s)| \geq 0$, lo que equivale a que $r(s)$ es monótona creciente. Finalmente, $\|\beta'_0(s)\| = r'(s)$ donde están definidas, luego

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} \Big|_{(s_0, r(s_0))} = 0.$$

Esto es la derivada de $\alpha_{r(s_0)}(s) = \exp_p(r(s_0)v(s))$, luego esta función es constante, luego también lo es $v(s) = v(b) = v_0/\|v_0\|$ y así

$$\beta_0(s) = \exp_p \left(r(s) \frac{v_0}{\|v_0\|} \right) = \gamma \left(\frac{r(s)}{\|v_0\|} \right)$$

es una reparametrización monótona de γ , y también lo es β , sin más que prolongar el cambio de parámetro $s \mapsto r(s)/\|v_0\|$ haciendo que en $[a, a_0]$ sea constante. ■

El teorema anterior no nos permite concluir que la geodésica γ sea minimizante porque no excluye que pueda haber otra curva que una p y q de longitud menor que no esté contenida en U , pero esto se arregla fácilmente:

Definición 7.27 Sea V una variedad de Riemann, $p \in V$ y $\epsilon > 0$. Diremos que la bola abierta $B_\epsilon(p)$ es *geodésica* si es un entorno normal de p y para todo $q \in B_\epsilon(p)$ existe (salvo reparametrización) una única geodésica minimizante en V que une p con q , y además está contenida en $B_\epsilon(p)$.

Teorema 7.28 Si p es un punto de una variedad de Riemann V , para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, la bola $B_\epsilon(p)$ es geodésica.

DEMOSTRACIÓN: Sea U un entorno normal de p y sea $U^* \subset T_p(V)$ el abierto estrellado tal que $\exp_p|_{U^*} : U^* \rightarrow U$ es un difeomorfismo. Sea $\epsilon_0 > 0$ tal que $B_{\epsilon_0}(0) \subset U^*$ y sea $\mathcal{B}_{\epsilon_0}(p) = \exp_p[B_{\epsilon_0}(0)]$. Como $B_{\epsilon_0}(0)$ es un abierto estrellado, tenemos que $\mathcal{B}_{\epsilon_0}(p)$ es un entorno normal de p , por lo que le podemos aplicar el teorema anterior.

Si $q \in \mathcal{B}_{\epsilon_0}(p)$ y $v \in B_{\epsilon_0}(0)$ es su antiimagen, de modo que $q = \exp_p(v)$, sabemos que $\gamma = \gamma_{p,v}|_{[0,1]}$ es (salvo reparametrización) la única geodésica contenida en $\mathcal{B}_{\epsilon_0}(p)$ que une p con q . Veamos que es minimizante. Para ello tomamos cualquier arco diferenciable a trozos $\beta : [a, b] \rightarrow V$ tal que $\beta(a) = p$ y $\beta(b) = q$. Por el teorema anterior sabemos que si su imagen está contenida en $\mathcal{B}_{\epsilon_0}(p)$, entonces $L(\beta) \geq L(\gamma)$ y que si se da la igualdad es una reparametrización de γ .

Supongamos ahora que la imagen de β no está contenida en $\mathcal{B}_{\epsilon_0}(p)$. Entonces existe $a < t_0 < b$ de modo que $\beta|_{[a, t_0]}$ tiene su imagen contenida en $\mathcal{B}_{\epsilon_0}(p)$, pero $\beta(t_0) \notin \mathcal{B}_{\epsilon_0}(p)$. Consideremos la curva $\beta^* : [a, t_0] \rightarrow B_{\epsilon_0}(0)$ definida por $\beta^*(t) = (\exp_p|_{U^*})^{-1}(\beta(t))$. Si $\|v\| < \delta < \epsilon_0$, la imagen de β^* no puede estar contenida en $B_\delta(0)$, pues entonces $\beta(t_0)$ estaría en la imagen por \exp_p de la bola cerrada $\bar{B}_\delta(0) \subset B_{\epsilon_0}(0)$, luego existe $a < s_1 < t_0$ tal que la imagen de $\beta^*|_{[a, s_1]}$ está contenida en $B_\delta(0)$ y $v_1 = \beta^*(s_1)$ cumple $\|v_1\| = \delta$.

Sea $q_1 = \beta(s_1) \in \mathcal{B}_{\epsilon_0}(p)$. Así $\beta|_{[a, s_1]}$ es un arco que une p con q_1 , al igual que la geodésica $\gamma_1 = \gamma_{p, v_1}$. Por el teorema anterior

$$L(\beta) \geq L(\beta|_{[a, s_1]}) \geq L(\gamma_1) = \|v_1\| > \|v\| = L(\gamma).$$

Esto prueba que γ es minimizante y que es la única geodésica minimizante en V que une p con q .

Sea ahora $0 < \epsilon < \epsilon_0$ suficientemente pequeño como para que $B_\epsilon(p) \subset \mathcal{B}_{\epsilon_0}(p)$ y veamos que la bola $B_\epsilon(p)$ es geodésica.

En efecto, veamos en primer lugar que $\exp_p|_{B_\epsilon(0)} : B_\epsilon(0) \rightarrow B_\epsilon(p)$ lo que, como $B_\epsilon(0)$ es un abierto estrellado, implica que $B_\epsilon(p)$ es un entorno normal de p . Si $v \in B_\epsilon(0)$ y $q = \exp_p(v) \in B_\epsilon(p)$, tenemos que $\gamma = \gamma_{p,v}|_{[0,1]}$ es la única geodésica contenida en $\mathcal{B}_{\epsilon_0}(p)$ que une p con q , y es minimizante, luego $\|v\| = L(\gamma) = d(p, q)$, lo cual implica que $v \in B_\epsilon(0)$ si y sólo si $q \in B_\epsilon(p)$. Más aún, si $0 \leq t \leq 1$, entonces

$$d(p, \gamma(t)) = L(\gamma|_{[0, t]}) = t\|v\| < \epsilon,$$

luego la imagen de γ está contenida en $B_\epsilon(p)$ y es, por consiguiente, la única geodésica contenida en $B_\epsilon(p)$ (siempre salvo reparametrización) que une p con q . ■

Conviene destacar que hemos probado que si $\mathcal{B}_{\epsilon_0}(p)$ cumple todos los requisitos para ser una bola geodésica salvo tal vez ser igual a $B_{\epsilon_0}(p)$. Por ello, si $\epsilon > 0$ cumple que $B_\epsilon(0) \subset U^*$ y $\exp_p[B_\epsilon(0)] = B_\epsilon(p)$, podemos asegurar que la bola $B_\epsilon(p)$ es geodésica.

Señalemos también que el teorema 7.26 implica que cualquier curva diferenciable a trozos que una p con un punto $q \in B_\epsilon(p)$ con longitud $d(p, q)$ es una reparametrización de la geodésica.

Ahora es inmediato que toda geodésica es minimizante en un entorno de cualquiera de sus puntos.

Si $x : U \rightarrow \tilde{U}$ es una carta normal alrededor de p , tenemos que $x(q)$ se obtiene aplicando una isometría a $\exp_p^{-1}(q)$, luego $d(p, q) = \|x(q)\|$. Por consiguiente, una carta normal alrededor de un punto p transforma cada bola geodésica de centro p en la bola de centro 0 en \mathbb{R}^n del mismo radio.

Veamos una última consecuencia de la existencia de bolas geodésicas:

Teorema 7.29 *Si V es una variedad de Riemann y $p, q \in V$, son dos puntos distintos, entonces su distancia $\rho(p, q)$ es el ínfimo de las longitudes de los arcos regulares a trozos (o incluso de las geodésicas a trozos) que unen p con q .*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que si $\alpha : [a, b] \rightarrow V$ es un arco diferenciable a trozos tal que $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$, existe una geodésica a trozos γ que une p con q tal que $L(\alpha) \geq L(\gamma)$.

Sea A el conjunto de todos los $t \in]a, b]$ para los que existe una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = t$ y una curva $\gamma : [a, t] \rightarrow V$ tal que $\gamma(t_i) = \alpha(t_i)$ y cada $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ es una geodésica minimizante.

El conjunto A no es vacío, pues podemos tomar una bola geodésica B centrada en p y claramente $\alpha^{-1}[B] \setminus \{a\} \subset A$. Sea $a < t^* \leq b$ el supremo de A . Tiene que ser $t^* = b$ pues en caso contrario tomamos una bola geodésica B centrada en $\alpha(t^*)$ y un $t_0 \in \alpha^{-1}[B] \cap A$, con lo que existe $\gamma : [a, t_0] \rightarrow V$ en las condiciones de la definición de A , que claramente se puede prolongar con un arco de geodésica minimizante que una $\alpha(t_0)$ con $\alpha(t^*)$ y con otro que llegue hasta un punto $t_1 \in \alpha^{-1}[B] \cap]t^*, b]$, lo que nos da que $t_1 \in A$ y es mayor que su supremo. La primera parte del argumento prueba además que $b = t^* \in A$.

Así pues, existe una partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ y una geodésica a trozos (minimizantes) $\gamma : [a, b] \rightarrow V$ según la definición de A . Entonces

$$L(\alpha) = \sum_{i=1}^m L(\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}) \geq \sum_{i=1}^m L(\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}) = L(\gamma). \quad \blacksquare$$

Entornos convexos En el capítulo anterior hemos probado que todo punto de una variedad diferencial afín tiene un entorno convexo. En el caso de variedades de Riemann podemos reforzar ligeramente el concepto de abierto convexo:

Definición 7.30 Un abierto U en una variedad de Riemann V es *convexo* si es un entorno normal de todos sus puntos y, para todo par de puntos $p, q \in U$ existe (salvo reparametrización) una única geodésica que los une contenida en U , la cual es además la única geodésica minimizante (en V) que los une.

Por ejemplo, el teorema siguiente es falso⁴ con la definición 6.25 de convexidad:

Teorema 7.31 *En una variedad de Riemann, la intersección de dos abiertos convexos es convexa.*

DEMOSTRACIÓN: Sean U_1 y U_2 abiertos convexos en una variedad de Riemann V . Si $p \in U_1 \cap U_2$, existen abiertos estrellados $U_1^*, U_2^* \subset T_p(V)$ tales que $\exp_p : U_i^* \rightarrow U_i$ es un difeomorfismo, para $i = 1, 2$. Si $q \in U_1 \cap U_2$, existen $v_i \in U_i^*$ tal que $q = \exp_p(v_i)$. Entonces $\gamma_{v_i}|_{[0,1]}$ es una geodésica contenida en U_i que une p con q , luego en ambos casos se trata de la única geodésica minimizante en V que los une, luego $v_1 = v_2 \in U_1^* \cap U_2^*$. Esto implica que $\exp_p : U_1^* \cap U_2^* \rightarrow U_1 \cap U_2$ es un difeomorfismo, y claramente $U_1^* \cap U_2^*$ es un abierto estrellado, luego $U_1 \cap U_2$ es un entorno normal de p , y hemos probado que dos cualesquiera de sus puntos pueden unirse por una geodésica minimizante, necesariamente única. ■

Teorema 7.32 *Si p es un punto de una variedad de Riemann V , para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, la bola $B_\epsilon(p)$ es convexa.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos en primer lugar que, en la demostración del teorema 6.37, el entorno convexo que se obtiene es de la forma $x^{-1}[B_\delta(0)]$ para un $\delta > 0$ suficientemente pequeño, donde x es la composición de $(\exp_p|_{U^*})^{-1}$ con un isomorfismo arbitrario $T_p(V) \rightarrow \mathbb{R}^n$ que podemos tomar isométrico, luego $x^{-1}[B_\delta(0)]$ es también la imagen por $\exp_p|_{U^*}$ de una bola abierta de $T_p(V)$ contenida en U^* , pero las bolas geodésicas son de esta forma, luego concluimos que las bolas geodésicas de radio suficientemente pequeño son convexas en el sentido de 6.25. Para concluir que también lo son en el sentido de la definición anterior basta probar lo siguiente:

Existe un $\delta > 0$ tal que, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, si $q \in B_\epsilon(p)$, entonces $B_\epsilon(p) \subset B_\delta(q)$ y esta bola es geodésica.

En efecto, si probamos esto, sólo tenemos que tomar ϵ de modo que la bola $B_\epsilon(p)$ sea convexa en el sentido de 6.25, ya que entonces, si $q, r \in B_\epsilon(p)$,

⁴Basta pensar en dos rectángulos abiertos que rodeen un cilindro hasta solaparse en sus dos extremos. Ambos son convexos, en el sentido de 6.25, pero su intersección es disconexa, luego no es convexa.

existe una única geodésica minimizante en V que une q con r y está contenida en la bola $B_\delta(q)$, pero por convexidad está contenida en $B_\epsilon(p)$ (ya que en esta bola tiene que haber una geodésica que una q con r , y dicha geodésica estará también en $B_\delta(q)$, luego por la unicidad en $B_\delta(q)$ tiene que ser la minimizante).

En primer lugar demostramos que una base de entornos de un punto $(p, 0)$ en TV está formada por los conjuntos de la forma

$$W_\delta^* = \{(q, v) \in TV \mid d(p, q) < \delta, \|v\| < \delta\}. \quad (7.7)$$

En efecto, fijamos una carta normal (U, x) alrededor de p , de modo que (para δ suficientemente pequeño) la imagen de E_δ por la carta \tilde{x} es el conjunto

$$\tilde{W}_\delta^* = \{(x, y) \in x[U] \times \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \delta, \|y\|_x < \delta\},$$

donde

$$\|y\|_x = \sqrt{\sum_{i,j} \tilde{g}_{ij}(x) y_i y_j}, \quad \tilde{g}_{ij} = x^{-1} \circ g_{ij}.$$

Basta probar que los conjuntos \tilde{W}_δ^* son una base de entornos de $(0, 0)$. Como la función $\|y\|_x$ es claramente continua en $x[U] \times \mathbb{R}^n$, ciertamente son conjuntos abiertos. Veamos que la función

$$m(x) = \min_{\|y\|=1} \|y\|_x$$

es continua en $x[U]$.

En efecto, dado $x_0 \in x[U]$, tomamos un entorno compacto K y usamos que $F(x, y) = \|y\|_x$ es uniformemente continua en $K \times S^{n-1}$. Así, dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\|x - x_0\| < \delta$, entonces $|\|y\|_x - \|y\|_{x_0}| < \epsilon$. De aquí se concluye que $|m(x) - m(x_0)| \leq \epsilon$.

Ahora, fijado $\epsilon > 0$, tomamos $\delta > 0$ tal que $\delta < \epsilon$, si $\|x\| < \delta$ entonces $m(x) \geq m > 0$ y $\delta/m < \epsilon$. Así, si $(x, y) \in \tilde{W}_\delta^*$ con $y \neq 0$, tenemos que

$$\delta > \|y\|_x = \left\| \frac{\|y\|_x}{\|y\|} \right\| \|y\| \geq m(x) \|y\| \geq m \|y\|,$$

luego $\|y\| < \epsilon$ (lo cual también es cierto si $y = 0$). Así pues, $\tilde{W}_\delta^* \subset B_\epsilon(0) \times B_\epsilon(0)$, lo que prueba que todo entorno de $(0, 0)$ contiene un \tilde{W}_δ^* .

De acuerdo con la prueba del teorema 6.37, tenemos un difeomorfismo

$$E : W^* \longrightarrow W,$$

dado por $E(q, v) = (q, \exp_q(v))$, donde W^* es un entorno abierto de $(p, 0)$ en TV y W es un entorno abierto de (p, p) en $V \times V$. Por lo que acabamos de probar, podemos tomar $W^* = \tilde{W}_\delta^*$ y basta tomar $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño como para que la bola $B_\epsilon(p)$ sea geodésica y $B_\epsilon(p) \times B_\epsilon(p) \subset W$.

En efecto, tomamos $q \in B_\epsilon(p)$ y entonces $\{q\} \times B_\delta(0) = \tilde{W}_\delta^* \cap T_q(V)$ y, por consiguiente, su imagen por E es $\{q\} \times B_\delta(q) = W \cap (\{q\} \times V)$. Entonces,

$$\{q\} \times B_\epsilon(p) \subset W \cap (\{q\} \times V) = \{q\} \times B_\delta(q),$$

luego $B_\epsilon(p) \subset B_\delta(q)$.

Además tenemos un difeomorfismo $E|_{\{q\} \times B_\delta(0)} : B_\delta(0) \rightarrow \{q\} \times B_\delta(q)$ que, al componer con la proyección que elimina la q , se convierte en el difeomorfismo $\exp_q : B_\delta(0) \rightarrow B_\delta(q)$. Por la primera observación tras el teorema 7.28, esto implica que la bola $B_\delta(q)$ es geodésica. ■

Como consecuencia:

Teorema 7.33 *Toda curva diferenciable a trozos minimizante en una variedad de Riemann es —salvo reparametrización monótona— una geodésica.*

DEMOSTRACIÓN: Sea V una variedad de Riemann y $\alpha : [a, b] \rightarrow V$ una curva diferenciable a trozos y minimizante. Tomando una bola geodésica de centro $\alpha(a)$ obtenemos una geodésica $g : [0, t_0] \rightarrow V$ y un cambio de parámetro monótono $t : [a, s_0] \rightarrow [0, t_0]$ de modo que $\alpha(s) = g(t(s))$.

Sea $a < s^* \leq b$ el supremo del conjunto de los $s \in [a, b]$ tales que existen funciones $t : [a, s] \rightarrow [0, t]$ y $g : [0, t] \rightarrow V$ en estas condiciones. Sea B una bola convexa de centro $\alpha(s^*)$, sea $a \leq s_0 < b^*$ tal que $\alpha|_{[s_0, s^*]}$ tenga su imagen en B y sea $s_0 < s_1 < s^*$ tal que existan $t : [a, s_1] \rightarrow [0, t_1]$ y $g : [0, t_1] \rightarrow V$ en las condiciones anteriores. Si $s^* < b$ tomamos $s^* < s_2 < b$ tal que $\alpha|_{[s^*, s_2]}$ tenga imagen en B y, en caso contrario, $s_2 = s^*$.

Por la convexidad de la bola B , si $s_0 < s < s_1$, existe una geodésica minimizante g^* contenida en B que une $\alpha(s)$ con $\alpha(s_2)$, y como $\alpha|_{[s, s_2]}$ es minimizante, tiene que ser una reparametrización de g . En particular g^* pasa por $\alpha(s_1)$ y así, tanto $g|_{[t(s), t_1]}$ como g^* son geodésicas minimizantes que unen $\alpha(s)$ con $\alpha(s_1)$ luego, aplicando a g^* un cambio de parámetro lineal, podemos hacer que $g|_{[t(s), t_1]} = g^*|_{[t(s), t_1]}$, de modo que g y g^* se prolongan hasta una geodésica $g : [0, t_2] \rightarrow [a, s_2]$ de modo que $\alpha|_{[s_1, s_2]}$ es una reparametrización de $g|_{[t_1, t_2]}$. Esto nos da un cambio de parámetro $t : [a, s_2] \rightarrow [0, t_2]$ tal que $\alpha(s) = g(t(s))$ en $[a, s_2]$, con lo que $s_2 \leq s^*$. Por la elección de s_2 , tiene que ser $s^* = b$. ■

Nota En particular, una curva regular a trozos minimizante puede parametrizarse por el arco, y entonces es una geodésica (no sólo una geodésica a trozos), pues la relación $\alpha(s) = \gamma(t(s))$ implica que $1 = \|\alpha'(s)\| = |t'(s)| \|\gamma'(t(s))\|$, luego $t'(s) = 1/\|\gamma'\|$ es constante, luego $t(s) = s/\|\gamma'\| + b$ (donde b es constante porque t es continua) y, por consiguiente t es diferenciable y α también. ■

El teorema de Myers-Steenrod Veamos una aplicación notable de la existencia de bolas convexas. El teorema [G 3.27] afirma (en particular) que toda biyección de un espacio euclídeo en sí mismo que conserve la distancia es una isometría de espacios euclídeos, es decir, una biyección afín que conserva el producto escalar. Aquí vamos a generalizar este resultado a variedades de Riemann:

Teorema 7.34 *Toda biyección $f : V_1 \rightarrow V_2$ entre dos variedades de Riemann que conserva la distancia es una isometría.*

Notemos que no suponemos de antemano que f sea diferenciable.

DEMOSTRACIÓN: Evidentemente f es un homeomorfismo. En primer lugar demostramos que si $\gamma_1 : I \rightarrow V_1$ es una geodésica (donde I es un intervalo abierto), entonces $\gamma_2 = \gamma_1 \circ f : I \rightarrow V_2$ también es una geodésica y $\|\gamma_1'\| = \|\gamma_2'\|$.

En efecto, por simplicidad supongamos en primer lugar que γ_1 está parametrizada por el arco, es decir, que $\|\gamma_1'\| = 1$. Dado $t_0 \in I$, tomamos una bola convexa $B_2 = B_{\epsilon_2}(f(\gamma(t_0)))$ y otra $B_1 = B_{\epsilon_1}(\gamma(t_0)) \subset f^{-1}[B_2]$. Tomemos un intervalo $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\subset I$ tal que su imagen por γ esté en B_1 . Si $t_0 - \delta < t_1 < t_0 < t_2 < t_0 + \delta$, como γ es minimizante en B_1 , tenemos que

$$\begin{aligned} d(\gamma_1(t_1), \gamma_1(t_2)) &= L(\gamma_1|_{[t_1, t_2]}) = L(\gamma_1|_{[t_1, t_0]}) + L(\gamma_1|_{[t_0, t_2]}) \\ &= d(\gamma_1(t_1), \gamma_1(t_0)) + d(\gamma_1(t_0), \gamma_1(t_2)), \end{aligned}$$

luego también

$$d(\gamma_2(t_1), \gamma_2(t_2)) = d(\gamma_2(t_1), \gamma_2(t_0)) + d(\gamma_2(t_0), \gamma_2(t_2)).$$

Sea $\gamma : J \rightarrow B_2$ la geodésica parametrizada por el arco que pasa por $\gamma(t_0) = \gamma_2(t_0)$ y $\gamma(\bar{t}_2) = \gamma_2(t_2)$, con $\bar{t}_2 > t_0$ (si no se cumple esto último aplicamos a γ una reparametrización que cambie su sentido).

De hecho,

$$\begin{aligned} \bar{t}_2 - t_0 &= L(\gamma|_{[\bar{t}_2, t_0]}) = d(\gamma(t_0), \gamma(\bar{t}_2)) = d(f(\gamma_1(t_0)), f(\gamma_1(t_2))) \\ &= d(\gamma_1(t_0), \gamma_1(t_2)) = L(\gamma_1|_{[t_0, t_2]}) = t_2 - t_0, \end{aligned}$$

luego $\bar{t}_2 = t_2$.

Ahora observamos que la unión de la geodésica en B_2 que une $\gamma_2(t_1)$ con $\gamma_2(t_0)$ y $\gamma|_{[t_0, t_2]}$ es una curva regular a trozos minimizante, luego por la nota posterior a 7.33, salvo reparametrización, dicha curva es una geodésica $\bar{\gamma}$, pero si la reparametrizamos por el arco de modo que $\bar{\gamma}(t_0) = \gamma_2(t_0)$, $\bar{\gamma}(t_2) = \gamma(\bar{t}_2)$ (para un cierto $\bar{t}_2 > t_0$ que, por el mismo argumento anterior, tiene que ser t_2), por el teorema 6.16 es $\bar{\gamma} = \gamma$.

En definitiva, existe un \bar{t}_1 tal que $\gamma_2(t_1) = \gamma(\bar{t}_1)$. Entonces

$$\begin{aligned} d(\gamma(\bar{t}_1), \gamma(t_2)) &= d(\gamma_2(t_1), \gamma_2(t_2)) = d(\gamma_2(t_1), \gamma_2(t_0)) + d(\gamma_2(t_0), \gamma_2(t_2)) \\ &= d(\gamma(\bar{t}_1), \gamma(t_0)) + d(\gamma(t_0), \gamma(t_2)), \end{aligned}$$

lo cual implica que $\bar{t}_1 < t_0$, y a su vez de aquí llegamos a que

$$\begin{aligned} t_0 - \bar{t}_1 &= L(\gamma|_{[t_0, \bar{t}_1]}) = d(\gamma(\bar{t}_1), \gamma(t_0)) = d(f(\gamma_1(t_1)), f(\gamma_1(t_0))) \\ &= d(\gamma_1(t_1), \gamma_1(t_0)) = L(\gamma_1|_{[t_1, t_0]}) = t_0 - t_1, \end{aligned}$$

luego $\bar{t}_1 = t_1$ y $\gamma_2(t_1) = \gamma(t_1)$.

En definitiva, hemos probado que $\gamma_2|_{]t_0 - \delta, t_0]}$ es la geodésica parametrizada por el arco γ que une $\gamma_2(t_0)$ con $\gamma_2(t_2)$, para cualquier $t_2 > t_0$ prefijado, pero precisamente por esto, la relación vale también para todo $t_2 > t_0$, es decir, que γ extiende a $\gamma_2|_{]t_0 - \delta, t_0 + \delta]}$ y γ_2 es, por lo tanto, una geodésica parametrizada por el arco.

En general, si γ_1 es cualquier geodésica no constante, tenemos que $\gamma_1(t/\|\gamma_1'\|)$ es una geodésica parametrizada por el arco, luego $\gamma_2(t/\|\gamma_1'\|)$ también lo es, por lo que ya hemos probado, luego γ_2 es una geodésica con $\|\gamma_2'\| = \|\gamma_1'\|$.

Fijamos ahora un punto $p \in V$ y definimos $f_p : T_p(V_1) \rightarrow T_{f(p)}(V_2)$ del modo siguiente: dado $v \in T_p(V_1)$, consideramos la geodésica $\gamma_{p,v}$ de modo que $\gamma = \gamma_{p,v} \circ v$ es una geodésica en v_2 que pasa por $\gamma(0) = f(p)$, y hacemos $f_p(v) = \gamma'(0)$, de modo que $\gamma = \gamma_{f(p),f_p(v)}$.

Es inmediato comprobar que si definimos una aplicación análoga partiendo de f^{-1} y $f(p)$ se cumple que $f_p \circ (f_p^{-1})$ es la identidad en $T_p(V_1)$, y $(f_p^{-1}) \circ f_p$ es la identidad en $T_{f(p)}(V_2)$, luego $f_p : T_p(V_1) \rightarrow T_{f(p)}(V_2)$ es biyectiva.

Observemos que si supiéramos que f es diferenciable la aplicación f_p no sería sino $df|_p$, pero de momento ni siquiera sabemos si es una aplicación lineal.

Como f transforma geodésicas en geodésicas con velocidad de la misma norma, tenemos que $\|f_p(v)\| = \|v\|$. Por otra parte, si $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos que $\gamma_{p,\alpha v}(t) = \gamma_{p,v}(\alpha t)$, luego

$$\gamma_{f(p),f_p(\alpha v)}(t) = f(\gamma_{p,\alpha v}(t)) = f(\gamma_{p,v}(\alpha t)) = \gamma_{f(p),f_p(v)}(\alpha t) = \gamma_{f(p),\alpha f_p(v)}(t),$$

luego $f_p(\alpha v) = \alpha f_p(v)$.

Fijemos un entorno normal U_2 de $f(p)$ y sea U_1 un entorno normal de p tal que $U_1 \subset f^{-1}[U_2]$, y observamos que tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} U_1^* & \xrightarrow{f_p} & U_2^* \\ \exp_p \downarrow & & \downarrow \exp_{f(p)} \\ U_1 & \xrightarrow{f} & U_2 \end{array}$$

En efecto, si $v \in U_1^*$, entonces

$$\exp_{f(p)}(f_p(v)) = \gamma_{f(p),f_p(v)}(1) = f(\gamma_{p,v}(1)) = f(\exp_p(v)).$$

Por lo tanto, si probamos que f_p es una isometría de espacios euclídeos, podremos concluir que f es diferenciable (porque será la composición de tres aplicaciones diferenciables) y esto implicará a su vez que $df|_p = f_p$ es una isometría de espacios euclídeos, luego f será una isometría de variedades de Riemann.

Ahora bien, como $\exp_p|_0$ es una isometría, podemos aplicar el teorema 7.24, que nos da que si $v, w \in T_p(V_1)$ son dos vectores distintos, entonces

$$\lim_{(v,w) \rightarrow (0,0)} \frac{d(\exp_p(v), \exp_p(w))}{\|v - w\|} = 1.$$

En particular,

$$\|v - w\| = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d(\exp_p(tv), \exp_p(tw))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d(\gamma_{p,v}(t), \gamma_{p,w}(t))}{t}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d(f(\gamma_{p,v}(t)), f(\gamma_{p,w}(t)))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d(\gamma_{f(p), f_p(v)}(t), \gamma_{f(p), f_p(w)}(t))}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d(\exp_{f(p)}(tf_p(v)), \exp_{f(p)}(tf_p(w)))}{t} = \|f_p(v) - f_p(w)\|
\end{aligned}$$

A su vez, la relación

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v, w \rangle$$

implica ahora que $\langle f_p(v), f_p(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ y entonces,

$$\begin{aligned}
\langle f_p(v+w), f_p(r) \rangle &= \langle v+w, r \rangle = \langle v, r \rangle + \langle w, r \rangle \\
&= \langle f_p(v), f_p(r) \rangle + \langle f_p(w), f_p(r) \rangle = \langle f_p(v) + f_p(w), f_p(r) \rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f_p(v+w) - f_p(v) - f_p(w)$ es ortogonal a todos los vectores de $T_{f(p)}(V_2)$. En particular es ortogonal a sí mismo, luego tiene que ser el vector nulo. Esto prueba que f es lineal y también hemos visto que conserva el producto escalar. ■

Por consiguiente, cada espacio métrico admite a lo sumo una estructura de variedad de Riemann.

Propiedades globales de las geodésicas En general, dos puntos de una variedad de Riemann conexa no pueden unirse necesariamente por una geodésica. Pensemos por ejemplo en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y dos puntos tales que el segmento que los una pase por el origen. El problema es que la geodésica que “debería” unirlos se ve interrumpida. En este apartado probaremos que si las geodésicas no se interrumpen entonces sí que es cierto que cualquier par de puntos puede unirse por una geodésica, y además podemos tomarla minimizante.

Definición 7.35 Una variedad semirriemanniana V es *geodésicamente completa* en un punto $p \in V$ si todas las geodésicas que pasan por p están definidas en todo \mathbb{R} . Diremos que V es *geodésicamente completa* si lo es en todos sus puntos.

Si una variedad V es geodésicamente completa en un punto p , podemos definir $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$ para todo vector $v \in T_pV$, por lo que la función exponencial $\exp_p : T_pV \rightarrow V$ está definida sobre todo el espacio tangente.

Teorema 7.36 (Hopf-Rinow) Si V es una variedad de Riemann conexa, las afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. V es geodésicamente completa.
2. V es geodésicamente completa en un punto $p \in V$.
3. Todo subespacio cerrado y acotado en V es compacto.
4. V es completa como espacio métrico.

Además, si se da cualquiera de estas condiciones, entonces todo par de puntos de V puede unirse por una geodésica minimizante.

DEMOSTRACIÓN: Obviamente 1) implica 2). Veamos que 2) implica que todo punto $q \in V$ puede unirse con p por una geodésica minimizante. Sea $r = d(p, q) > 0$. Consideremos una bola geodésica $B_\epsilon(p)$ con $\epsilon < r$ y tomemos $v \in T_p V$ de norma 1 tal que $p_0 = \exp_p(\epsilon v)$ minimice la distancia a q entre los puntos de la esfera geodésica $S_\epsilon(p)$. Veamos que $q = \gamma_{p,v}(r)$. Como $L(\gamma_{p,v}|_{[0,r]}) = r$, tendremos además $\gamma_{p,v}$ será minimizante entre p y q .

Si $s \in S_\epsilon(p)$, entonces

$$d(p, q) \leq d(p, s) + d(s, q) = \epsilon + d(s, q) \leq \epsilon + d(p_0, q).$$

Por otra parte, si $\alpha : [a, b] \rightarrow V$ es un arco que une p con q , existe un punto $t_0 \in]a, b[$ tal que $\alpha(t_0) \in S_\epsilon(p)$ y así

$$L(\alpha) = L(\alpha|_{[a,t_0]}) + L(\alpha|_{[t_0,b]}) \geq \epsilon + d(p_0, q),$$

luego $d(p, q) = \epsilon + d(p_0, q)$. Equivalentemente, $d(\gamma_{p,v}(\epsilon), q) = r - \epsilon$.

Sea t_1 el supremo de los $t \in \mathbb{R}$ tales que $d(\gamma_{p,v}(t), q) = r - t$. Tenemos que $\epsilon \leq t_1 \leq r$ y por continuidad es claro que $d(\gamma_{p,v}(t_1), q) = r - t_1$. Basta demostrar que $t_1 = r$.

En caso contrario, si $t_1 < r$, tomamos una esfera geodésica $S_{\epsilon'}(\gamma_{p,v}(t_1))$ y consideramos en ella el punto p'_0 más cercano a q . Igual que antes razonamos que $d(\gamma_{p,v}(t_1), q) = \epsilon' + d(p'_0, q)$, luego $d(p'_0, q) = r - t_1 - \epsilon'$ y

$$d(p, p'_0) \geq d(p, q) - d(p'_0, q) = r - r + t_1 + \epsilon' = t_1 + \epsilon',$$

pero la unión de $\gamma_{p,v}|_{[0,t_1]}$ con la geodésica que va de $\gamma_{p,v}(t_1)$ a p'_0 tiene longitud $t_1 + \epsilon'$, luego es minimizante y, por consiguiente, una geodésica. Necesariamente entonces es la propia $\gamma_{p,v}$. En particular $d(p, p'_0) = t_1 + \epsilon'$ y $\gamma_v(t_1 + \epsilon') = p'_0$.

De este modo tenemos que $d(\gamma_{p,v}(t_1 + \epsilon'), q) = r - (t_1 + \epsilon')$, en contradicción con la elección de t_1 .

Como consecuencia, la aplicación $\exp_p : T_p V \rightarrow V$ es suprayectiva. Más aún, todo $q \in V$ tiene una antiimagen v con $\|v\| = d(p, q)$. Por consiguiente todo conjunto acotado de V está contenido en la imagen de una bola cerrada de $T_p V$, que por continuidad será compacta. Es claro entonces que 2) implica 3).

Obviamente 3) implica 4): Toda sucesión de Cauchy es acotada, luego está contenida en un compacto, luego tiene una subsucesión convergente, luego converge.

Para probar que 4) implica 1) observamos que si $\gamma :]a, b[\rightarrow V$ es una geodésica que no puede prolongarse más allá de b (por ejemplo) entonces podemos tomar una sucesión $\{t_m\}_m \subset]a, b[$ convergente a b , con lo que $\gamma(t_m)$ es una sucesión de Cauchy en V (ya que $d(\gamma(t_m), \gamma(t_r)) = k|t_m - t_r|$, donde $k = \|\gamma'(0)\|$). Por hipótesis converge a un punto $p \in V$, luego γ tiene una extensión continua a $]a, b]$, y el teorema 6.26 nos da una contradicción.

Si se cumple cualquiera de estas condiciones, entonces tenemos 2) para todo punto p , luego hemos probado que cualquier par de puntos p y q pueden unirse por una geodésica minimal. ■

En particular todas las variedades compactas son geodésicamente completas.

El teorema siguiente se aplica en particular a las isometrías locales, pero conviene enunciarlo bajo una hipótesis ligeramente más general:

Teorema 7.37 *Sea $f : V \rightarrow W$ un difeomorfismo local entre variedades de Riemann. Supongamos que V es completa y que W es conexa, así como que existe una constante C tal que para todo $p \in V$ y todo $v \in T_p(V)$ se cumple que $\|df_p(v)\| \geq C\|v\|$. Entonces f es un cubrimiento⁵ y W es completa.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos en primer lugar que si α es un arco regular a trozos en W de origen q y $f(p) = q$, entonces α tiene una elevación a V con origen en p . Sea $S \subset [0, 1]$ el conjunto de los t tales que $\alpha|_{[0,t]}$ tiene una elevación a V con origen en p . Tomando un entorno de p donde f sea un difeomorfismo es claro que podemos encontrar un $t > 0$ para el cual existe elevación, luego S no es vacío. Más aún, si $t \in S$ y $\beta : [0, t] \rightarrow V$ es una elevación de $\alpha|_{[0,t]}$, tomando un entorno de $\beta(t)$ donde f es un difeomorfismo obtenemos una prolongación de la elevación, lo que prueba que S es abierto en $[0, 1]$. Si probamos que es cerrado será $S = [0, 1]$ y tendremos una elevación de α .

Sea s el supremo de S y sea $\{t_i\}$ una sucesión creciente en S que converja a s . Como las elevaciones son únicas (teorema [TA 1.55]), tenemos que todas ellas determinan una única aplicación regular a trozos $\beta : [0, s[\rightarrow V$ que eleva a $\alpha|_{[0,s[}$. Entonces

$$\begin{aligned} d(\beta(t_i), \beta(t_j)) &\leq L(\beta|_{[t_i, t_j]}) = \int_{t_i}^{t_j} \|\beta'(t)\| dt \leq C \int_{t_i}^{t_j} \|df_{\beta(t)}(\beta'(t))\| dt \\ &= C \int_{t_i}^{t_j} \|(\beta \circ f)'(t)\| dt = C \int_{t_i}^{t_j} \|\alpha'(t)\| dt. \end{aligned}$$

Como $\|\alpha'(t)\|$ está acotada en $[0, 1]$, de aquí se sigue que la sucesión $\{\beta(t_i)\}$ es de Cauchy en V y, como estamos suponiendo que V es completa (lo que implica que lo es como espacio métrico), concluimos que converge a un punto $p^* \in V$. Tomando un entorno de p^* en el que f sea un difeomorfismo y un índice i suficientemente grande como para que $\beta(t_i)$ esté en dicho entorno, podemos prolongar la elevación hasta $[0, s]$ (y más allá si $s < 1$), luego $s \in S$ y $S = [0, 1]$.

En particular de aquí se sigue que f es suprayectiva, pues si p es cualquier punto de $f[V]$ y p' cualquier punto de W , basta tomar un arco que una p con p' , elevarlo a un arco β en V , y entonces $f(\beta(1)) = p'$.

A continuación vamos a probar que no perdemos generalidad si suponemos que f es una isometría local. Sea g la métrica de V y h la métrica de W . Sea g^* la retracción de h , es decir, la métrica en V dada por

$$g_p^*(u, v) = h_{f(p)}(df_p(u), df_p(v)).$$

⁵Para la definición de cubrimiento véase [TA 1.51]. Las propiedades que necesitamos de los cubrimientos en variedades diferenciales están en la sección 8.2 de [TA], especialmente en el último apartado.

Así $\|v\|_{g^*} = \|df_p(v)\|_h \geq C\|v\|_g$, luego, para cualquier arco $\alpha : [a, b] \rightarrow V$, se cumple que

$$L_{g^*}(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\|_{g^*} dt \geq C \int_a^b \|\alpha'(t)\|_g dt = CL_g(\alpha).$$

A su vez, esto implica que, para todo par de puntos $p_1, p_2 \in V$, se cumple que $CL_g(p_1, p_2) \leq d_{g^*}(p_1, p_2)$. Veamos ahora que V es completa respecto de la métrica g^* . Si $\{p_i\}$ es una sucesión de Cauchy para dicha métrica, la relación entre las distancias implica que también es de Cauchy para g , luego converge para g a un punto p . Ahora bien, la convergencia es una propiedad topológica, y tanto g como g^* inducen la misma topología en V , luego $\{p_i\}$ converge a p respecto de g^* .

Más aún, si $\alpha : [a, b] \rightarrow V$ es cualquier arco regular a trozos en V que una dos puntos p_1 y p_2 , entonces

$$\begin{aligned} L_{g^*}(\alpha) &= \int_a^b \|\alpha'(t)\|_{g^*} dt = \int_a^b \|df_{\alpha(t)}(\alpha'(t))\| dt \\ &= \int_a^b \|(\alpha \circ f)'(t)\| dt = L(\alpha \circ f) \geq d_h(f(p_1), f(p_2)), \end{aligned}$$

luego $d_{g^*}(p_1, p_2) \geq d_h(f(p_1), f(p_2))$.

Como el hecho de que f sea un cubrimiento no depende de la métrica, podemos trabajar con g^* en lugar de g , y así f es una isometría local. Fijemos ahora un $q \in W$ y sea $c > 0$ tal que para todo $0 < r < c$ se cumpla que $\exp_q : B_r(0_q) \rightarrow B_r(q)$ es un difeomorfismo (teorema 6.20). Si $p \in f^{-1}[q]$, tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} B_r(0_p) & \xrightarrow{df_p} & B_r(0_q) \\ \exp_p \downarrow & & \downarrow \exp_q \\ B_r(p) & \xrightarrow{f} & B_r(q) \end{array}$$

Observemos que la flecha horizontal superior está bien definida (y es un difeomorfismo) porque f es una isometría local, y la inferior por la relación $d_h(q, f(p')) \leq d_{g^*}(p, p')$.

Como tenemos margen para elegir r arbitrariamente pequeño, lo elegimos de modo que la bola $B_r(q)$ sea convexa (teorema 7.32), y vamos a probar que $f^{-1}[B_r(q)]$ es la unión disjunta de las bolas $B_r(p)$, donde p recorre $f^{-1}[q]$. Ciertamente, tenemos que cada $B_r(p)$ está contenida en $f^{-1}[B_r(q)]$.

Sea $p^* \in f^{-1}[B_r(q)]$, y consideremos la única geodésica $\gamma : [0, \delta] \rightarrow B_r(q)$ (parametrizada por el arco) que une $f(p^*)$ con q . Hemos probado que se eleva a una curva $\tilde{\gamma} : [0, \delta] \rightarrow V$ que une p^* con un cierto $p \in f^{-1}[q]$. Pero el hecho de

que f sea una isometría local se traduce en que $\tilde{\gamma}$ también está parametrizada por el arco. Esto implica que

$$d(p, p^*) \leq L(\tilde{\gamma}) = \delta = d(q, f(p^*)) < r,$$

luego $p^* \in B_r(p)$, y esto implica que $f^{-1}[B_r(q)]$ es la unión de las bolas indicadas. Falta probar que la unión es disjunta.

Para ello tomamos dos puntos distintos $p_1, p_2 \in f^{-1}[q]$ y vamos a probar que las bolas correspondientes son disjuntas. En caso contrario existe un punto $p^* \in B_r(p_1) \cap B_r(p_2)$. Según hemos probado, p^* puede unirse a p_1 y a p_2 por arcos $\tilde{\gamma}_1$ y $\tilde{\gamma}_2$ que son elevaciones de geodésicas en $B_r(q)$ que unen $f(p^*)$ con q , pero por la convexidad de la bola tienen que ser la misma geodésica, luego también coinciden las elevaciones (pues son elevaciones de un mismo arco con un extremo en común), luego $p_1 = p_2$.

Por último razonamos que W es completa. Para ello fijamos $q \in W$ y una geodésica γ que parta de q y la elevamos a una curva $\tilde{\gamma}$ que pase por cualquier antiimagen de q . Es claro que como γ es regular su elevación también lo es. Más aún, como f es una isometría local, $\tilde{\gamma}$ también es una geodésica, porque la propiedad que define las geodésicas es local y se conserva por isometrías. Como V es completa $\tilde{\gamma}$ puede prolongarse a todo \mathbb{R} , luego $p \circ \tilde{\gamma}$ es una geodésica que prolonga a γ a todo \mathbb{R} . ■

Subvariedades totalmente geodésicas Como veremos enseguida, las subvariedades totalmente geodésicas de una variedad semirriemanniana son el análogo a las subvariedades afines de un espacio afín:

Teorema 7.38 *Sea W una subvariedad semirriemanniana de una variedad semirriemanniana V . Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. *La segunda forma fundamental de W en V es idénticamente nula.*
2. *El transporte paralelo sobre curvas en W es el mismo en W que en V .*
3. *Toda geodésica de W es también una geodésica de V .*
4. *Si $v \in T_p(W)$, la geodésica $\gamma_{p,v}$ de V restringida a un entorno de 0 suficientemente pequeño está en W .*

Si además W es completa, en la propiedad 4 podemos afirmar que $\gamma_{p,v}$ está contenida en W .

DEMOSTRACIÓN: $1 \Rightarrow 2$ es consecuencia de la relación

$$\frac{\bar{\nabla} X}{dt} = \frac{\nabla X}{dt} + \Pi(\alpha', X).$$

donde $X \in \mathfrak{X}(W)_\alpha$ y $\bar{\nabla}$ representa la derivada covariante en V . De ella se sigue que la derivada covariante en V es la misma que en W y, en particular que una es nula si y sólo si lo es la otra.

$2 \Rightarrow 3$ es evidente: si γ es una geodésica en W , entonces γ' es paralelo en W , luego también en V , luego γ es una geodésica en V .

$3 \Rightarrow 4$ Sea $\gamma_{p,v}^*$ la geodésica de W que pasa por p con tangente v . Como también es una geodésica en V , por la unicidad debe coincidir en su dominio con $\gamma_{p,v}$. Si W es completa, dicho dominio es todo \mathbb{R} , luego ambas coinciden.

$4 \Rightarrow 1$ Tomemos $v \in T_p(W)$ y consideremos la geodésica $\gamma_{p,v}$ en V que, por hipótesis, también es geodésica en W (en un entorno de 0). La relación entre las derivadas covariantes en V y W implica que $\Pi_p(v, v) = 0$, luego $\Pi = 0$. ■

Es fácil ver que las subvariedades completas, conexas y completamente geodésicas de \mathbb{R}^n son las subvariedades afines, aunque la prueba se simplifica ligeramente teniendo en cuenta el teorema siguiente:

Teorema 7.39 Sean W_1, W_2 subvariedades completas, conexas y completamente geodésicas de una variedad de Riemann V y sea $p \in W_1 \cap W_2$ tal que $T_p(W_1) = T_p(W_2)$. Entonces $W_1 = W_2$.

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que si W_1 es conexa y W_2 es completa (siendo ambas totalmente geodésicas), entonces $W_1 \subset W_2$. En efecto, si $q \in W_1$, existe una geodésica γ en W_1 que conecta p con q , la cual será también geodésica en V . Como $\gamma'(0) \in T_p(W_1) = T_p(W_2)$, la completitud geodésica y la completitud de W_2 implican que γ está contenida en W_2 , luego $q \in W_2$. ■

Así es claro que para cada subespacio vectorial W de $T_p(\mathbb{R}^n)$ existe una única subvariedad afín V de \mathbb{R}^n tal que $T_p(V) = W$ y, como las subvariedades afines son claramente completas, conexas y geodésicamente completas, resulta que son las únicas subvariedades de \mathbb{R}^n en estas condiciones.

Similarmente, las subvariedades completas, conexas, totalmente geodésicas de S^n son las de la forma $S^n \cap W$, donde W es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^{n+1} de dimensión $d + 1 \geq 2$, que son subvariedades isométricas a S^d . En efecto, las geodésicas de S^n son las subvariedades correspondientes a $d = 1$, por lo que las subvariedades indicadas cumplen lo dicho, y por el teorema anterior son las únicas posibles.

7.4 El tensor de Riemann

Estudiamos ahora el tensor de Riemann de una variedad semirriemanniana. Empezamos observando que cumple algunas simetrías adicionales, además de la relación $R(X, Y) = -R(Y, X)$ y las identidades de Bianchi:

Teorema 7.40 Sea R el tensor de Riemann de una variedad semirriemanniana V , consideremos un punto $p \in V$ y vectores $v_1, v_2, w_1, w_2 \in T_p(V)$. Entonces

1. $\langle R_p(u_1, u_2)(v_1), v_2 \rangle = -\langle R_p(u_1, u_2)(v_2), v_1 \rangle$,
2. $\langle R(u_1, u_2)(v_1), v_2 \rangle = \langle R(v_1, v_2)(u_1), u_2 \rangle$.

DEMOSTRACIÓN: Puesto que $(x, y) \mapsto \langle R_p(u_1, u_2)(x), y \rangle$ es una forma bilineal en $T_p(V)$, para probar que es antisimétrica basta ver que

$$\langle R_p(u_1, u_2)(v), v \rangle = 0.$$

Si u_1 y u_2 son linealmente dependientes $R_p(u_1, u_2) = 0$ y la conclusión es trivial. En caso contrario, por el teorema 3.42 existe una carta x alrededor de p tal que $\partial_{x_1}|_p = u_1$, $\partial_{x_2}|_p = u_2$. Así, si llamamos $U_1 = \partial_{x_1}$, $U_2 = \partial_{x_2}$, tenemos que $(U_i)_p = u_i$ y además $[U_1, U_2] = 0$. Sea $X \in \mathfrak{X}(V)$ cualquier campo tal que $X_p = v$. Entonces

$$R(U_1, U_2)(X) = \nabla_{U_1}(\nabla_{U_2}(X)) - \nabla_{U_2}(\nabla_{U_1}(X)),$$

luego

$$\begin{aligned} \langle R(U_1, U_2)(X), X \rangle &= \langle \nabla_{U_1}(\nabla_{U_2}(X)), X \rangle - \langle \nabla_{U_2}(\nabla_{U_1}(X)), X \rangle \\ &= \frac{1}{2}U_1(U_2(\langle X, X \rangle)) - \frac{1}{2}U_2(U_1(\langle X, X \rangle)) = \frac{1}{2}[U_1, U_2](\langle X, X \rangle) = 0. \end{aligned}$$

Para probar la segunda identidad partimos de la primera identidad de Bianchi:

$$\langle R(U_1, V_1)(U_2), V_2 \rangle + \langle R(U_2, U_1)(V_1), V_2 \rangle + \langle R(V_1, U_2)(U_1), V_2 \rangle = 0.$$

Ahora permutamos cíclicamente los cuatro campos:

$$\begin{aligned} \langle R(U_1, V_1)(U_2), V_2 \rangle + \langle R(U_2, U_1)(V_1), V_2 \rangle + \langle R(V_1, U_2)(U_1), V_2 \rangle &= 0, \\ \langle R(V_2, U_1)(V_1), U_2 \rangle + \langle R(V_1, V_2)(U_1), U_2 \rangle + \langle R(U_1, V_1)(V_2), U_2 \rangle &= 0, \\ \langle R(U_2, V_2)(U_1), V_1 \rangle + \langle R(U_1, U_2)(V_2), V_1 \rangle + \langle R(V_2, U_1)(U_2), V_1 \rangle &= 0, \\ \langle R(V_1, U_2)(V_2), U_1 \rangle + \langle R(V_2, V_1)(U_2), U_1 \rangle + \langle R(U_2, V_2)(V_1), U_1 \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Sumamos las cuatro ecuaciones y, usando 1) vemos que cuatro pares de términos se cancelan y queda

$$\begin{aligned} \langle R(U_2, U_1)(V_1), V_2 \rangle + \langle R(V_1, V_2)(U_1), U_2 \rangle + \\ \langle R(U_1, U_2)(V_2), V_1 \rangle + \langle R(V_2, V_1)(U_2), U_1 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Usando 1) junto con $R(X, Y) = -R(Y, X)$ llegamos a que

$$-2 \langle R(U_1, U_2)(V_1), V_2 \rangle + 2 \langle R(V_1, V_2)(U_1), U_2 \rangle = 0,$$

de donde obtenemos la igualdad requerida. ■

Observemos que la aplicación multilineal $\mathfrak{X}(V)^4 \rightarrow \mathfrak{X}(V)$ dada por

$$(X, Y, Z, W) \mapsto \langle R(X, Y)(Z), W \rangle$$

no es sino $\downarrow_4^1 R$. Es costumbre identificar cada tensor con los que resultan de cambiar su tipo con el tensor métrico, por lo que este tensor se representa igualmente por $R(X, Y, Z, W)$ (donde los cuatro argumentos vectoriales no dejan duda de que se trata de $\downarrow_4^1 R$). No obstante, teniendo en cuenta el teorema anterior, a veces es más conveniente representarlo como $R(X, Y)(Z, W)$, de modo que podemos ver al tensor de Riemann como una aplicación que a cada par de campos vectoriales X, Y les asigna una forma bilineal $R(X, Y)$, que según el teorema anterior es antisimétrica.

En términos de la versión contravariante del tensor de Riemann sus propiedades principales se expresan como sigue:

1. $R_p(u, v, w, x) = -R_p(v, u, w, x)$,
2. $R_p(u, v, w, x) = -R_p(u, v, x, w)$,
3. $R_p(u, v, w, x) = R_p(w, x, u, v)$,
4. $R_p(u, v, w, x) + R_p(w, u, v, x) + R_p(v, w, u, x) = 0$.

Notemos que la propiedad 4. es la primera identidad de Bianchi. En términos de coordenadas, las otras tres afirman que

$$R_{ijkl} = R_{klij} = -R_{ijlk}.$$

Definición 7.41 Si V es una variedad semirriemanniana, $p \in V$ y $v, w \in T_p(V)$, definimos

$$(R_2)_p(v, w) = R_p(v, w)(v, w).$$

El interés de R_2 es que es más simple que R , pero determina completamente a R :

Teorema 7.42 Si V es una variedad semirriemanniana y $p \in V$, entonces

$$R_p(u, v, w, x) = \frac{1}{6} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} ((R_2)_p(u + sw, v + tx) - (R_2)_p(u + sx, v + tw)) \Big|_{(0,0)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Si desarrollamos por multilinealidad la expresión

$$R_2(u + sw, v + tx) - R_2(u + sx, v + tw)$$

obtenemos 32 sumandos que pueden agruparse en un polinomio en s y t . Al derivar y evaluar en $(0, 0)$ obtenemos el coeficiente de st , que es

$$\begin{aligned} & R_p(w, x, u, v) + R_p(w, v, u, x) + R_p(u, x, w, v) + R_p(u, v, w, x) \\ & - (R_p(x, w, u, v) + R_p(x, v, u, w) + R_p(u, w, x, v) + R_p(u, v, x, w)) \\ & = 4R_p(u, v, w, x) - 2R_p(v, w, u, x) - 2R_p(w, u, v, x) = 6R_p(u, v, w, x). \end{aligned}$$

■

Todavía podemos “condensar” más el tensor de Riemann observando que, si $\Pi = \langle u_1, v_1 \rangle = \langle u_2, v_2 \rangle$ es un subespacio semieuclicédeo de $T_p(V)$, entonces existen escalares a, b, c, d tales que $ac - bd \neq 0$ y

$$u_1 = au_2 + bv_2, \quad v_1 = cu_2 + dv_2,$$

con lo que, teniendo en cuenta que R_p se anula cuando coinciden sus dos primeros o sus dos últimos argumentos,

$$\begin{aligned} R_{2p}(u_1, v_1) &= R_p(au_2 + bv_2, cu_2 + dv_2, au_2 + bv_2, cu_2 + dv_2) \\ &= a^2d^2R_{2p}(u_2, v_2, u_2, v_2) + adbcR_p(u_2, v_2, v_2, u_2) \\ &\quad + adbcR_p(v_2, u_2, u_2, v_2) + b^2c^2R_p(v_2, u_2, v_2, u_2) \\ &= (a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2)R_{2p}(u_2, v_2) = (ad - bc)^2R_{2p}(u_2, v_2). \end{aligned}$$

Por otro lado, en todo espacio semieuclicédeo podemos definir

$$Q(u, v) = \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2 = \begin{vmatrix} \langle u, u \rangle & \langle u, v \rangle \\ \langle v, u \rangle & \langle v, v \rangle \end{vmatrix},$$

y también se cumple la relación

$$Q(u_1, v_1) = (ad - bc)^2Q(u_2, v_2).$$

Además $Q(u, v) = 0$ si u, v son linealmente dependientes y, en caso contrario, es el determinante de la matriz del producto escalar restringido al plano $\Pi = \langle u, v \rangle$. Por lo tanto, $Q(u, v) \neq 0$ equivale a que u y v son linealmente independientes y generan un subespacio semieuclicédeo. (En el caso euclídeo equivale a que los vectores sean linealmente independientes.)

Esto justifica la definición siguiente:

Definición 7.43 Sea W una subvariedad semirriemanniana de una variedad semirriemanniana V , sea $p \in V$ y $\Pi = \langle u, v \rangle \subset T_p(V)$ un subespacio semieuclicédeo de $T_p(V)$. La *curvatura seccional* de Π se define como

$$K_p(\Pi) = -\frac{R_{2p}(u, v)}{Q_p(u, v)}.$$

Las observaciones precedentes muestran que $K_p(\Pi)$ no depende de la elección de la base de Π con la que se calcula. En el caso en que V es una variedad de Riemann es inmediato que las curvaturas seccionales determinan R_2 y, por consiguiente, el tensor de Riemann R , pues si $u, v \in T_p(V)$ son linealmente independientes $R_{2p}(u, v) = -K_p(\langle u, v \rangle)Q_p(u, v)$, y si son linealmente dependientes $R_{2p}(\Pi) = 0$. En el caso semirriemanniano también es cierto, pero la prueba requiere observar lo siguiente:

Teorema 7.44 Si u, v son dos vectores en un espacio vectorial semieuclicédeo V , existen $u', v' \in V$ arbitrariamente próximos a u, v , respectivamente, tales que el subespacio $\langle u', v' \rangle$ es semieuclicédeo.

DEMOSTRACIÓN: Es claro que todo par de vectores linealmente dependientes se puede aproximar por un par de vectores linealmente independientes, luego podemos suponer que u y v son independientes. Si el subespacio $\langle u, v \rangle$ es semieuclicídeo no hay nada que probar. Si el subespacio no es semieuclicídeo, necesariamente el producto escalar en V es indefinido, es decir, tiene que haber vectores w con $\langle w, w \rangle > 0$ y vectores con $\langle w, w \rangle < 0$.

Si $\langle u, u \rangle = 0$, llamamos $w \in V$ a cualquier vector que cumpla $\langle u, w \rangle \neq 0$. Si $\langle u, u \rangle \neq 0$ tomamos cualquier $w \in V$ tal que $\langle w, w \rangle$ tenga signo opuesto a $\langle u, u \rangle$. En ambos casos $Q(u, w) < 0$. Ahora basta observar que

$$Q(u, v + \delta w) = 2\delta(\langle u, u \rangle \langle v, w \rangle - \langle u, v \rangle \langle u, w \rangle) + \delta^2 Q(u, w) \neq 0$$

para todo $\delta > 0$ suficientemente pequeño, luego $\langle u, v + \delta w \rangle$ es semieuclicídeo. ■

Así pues, si $u, v \in T_p(V)$, podemos tomar sucesiones $\{u_n\}_n, \{v_n\}_n$ tales que $\lim_n u_n = u$, $\lim_n v_n = v$ y $\langle u_n, v_n \rangle$ sea un subespacio semieuclicídeo de $T_p(V)$, con lo que

$$R_{2p}(u, v) = -\lim_n K_p(\langle u_n, v_n \rangle) Q_p(u_n, v_n),$$

luego, en efecto, el tensor de Riemann está completamente determinado por las curvaturas seccionales.

Para interpretar la curvatura seccional demostramos antes lo siguiente:

Teorema 7.45 *Sea W una subvariedad de una variedad semirriemanniana V y sean R_W y R_V sus tensores de Riemann. Entonces, si $U, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(W)$,*

$$R_V(U, X, Y, Z) = R_W(U, X, Y, Z) + \langle \Pi(U, Y), \Pi(X, Z) \rangle - \langle \Pi(U, Z), \Pi(X, Y) \rangle.$$

DEMOSTRACIÓN: Basta probar la igualdad en un entorno de cada punto para los campos ∂_{x_i} de una carta de W . En particular, no perdemos generalidad si suponemos que $[U, X] = 0$. Según el teorema 6.7, podemos tomar extensiones $\bar{U}, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} \in \mathfrak{X}(V)$ de los campos dados. En la demostración de 6.30 se prueba que $[U, X]|_W = 0$. Así,

$$\begin{aligned} R_V(U, X, Y, Z) &= R_V(\bar{U}, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}) = \langle R_V(\bar{U}, \bar{X}, \bar{Y}), \bar{Z} \rangle \\ &= \langle \nabla_{\bar{U}} \nabla_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_{\bar{X}} \nabla_{\bar{U}} \bar{Y}, \bar{Z} \rangle = \langle \bar{\nabla}_U \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_U Y, \bar{Z} \rangle. \end{aligned}$$

Ahora usamos la descomposición:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \Pi(X, Y), \quad \bar{\nabla}_U Y = \nabla_U Y + \Pi(U, Y),$$

con lo que

$$R_V(U, X, Y, Z) = \langle \bar{\nabla}_U \nabla_X Y + \bar{\nabla}_U \Pi(X, Y), \bar{Z} \rangle - \langle \bar{\nabla}_X \nabla_U Y + \bar{\nabla}_X \Pi(U, Y), \bar{Z} \rangle,$$

pero, como Z es tangente a W , en realidad $\langle \bar{\nabla}_U \nabla_X Y, \bar{Z} \rangle = \langle \nabla_U \nabla_X Y, Z \rangle$, $\langle \bar{\nabla}_X \nabla_U Y, \bar{Z} \rangle = \langle \nabla_X \nabla_U Y, Z \rangle$, luego

$$\begin{aligned} R_V(U, X, Y, Z) &= \langle \nabla_U \nabla_X Y + \bar{\nabla}_U \Pi(X, Y), \bar{Z} \rangle - \langle \nabla_X \nabla_U Y + \bar{\nabla}_X \Pi(U, Y), \bar{Z} \rangle \\ &= R_W(U, X, Y, Z) + \langle \bar{\nabla}_U \Pi(X, Y), \bar{Z} \rangle - \langle \bar{\nabla}_X \Pi(U, Y), \bar{Z} \rangle. \end{aligned}$$

Ahora usamos que

$$U(\langle \Pi(X, Y), Z \rangle) = \bar{U}(\langle \Pi(X, Y), \bar{Z} \rangle) = \langle \bar{\nabla}_U \Pi(X, Y), \bar{Z} \rangle + \langle \Pi(X, Y), \bar{\nabla}_U Z \rangle.$$

Como $\Pi(X, Y)$ es normal a W , esto equivale a que

$$\langle \bar{\nabla}_U \Pi(X, Y), \bar{Z} \rangle = -\langle \Pi(X, Y), \text{nor}(\nabla_U Z) \rangle = -\langle \Pi(X, Y), \Pi(U, Z) \rangle.$$

Igualmente $\langle \bar{\nabla}_X \Pi(U, Y), \bar{Z} \rangle = -\langle \Pi(U, Y), \Pi(X, Z) \rangle$, y con esto llegamos a la fórmula del enunciado. ■

En particular, para las curvaturas seccionales tenemos:

Teorema 7.46 *Sea W una subvariedad de una variedad semirriemanniana V , sea $p \in W$ y sea $\Pi = \langle u, v \rangle$ un subespacio semieuclicédeo de $T_p(W)$. Entonces, la relación entre las curvaturas seccionales de Π en W y V es:*

$$K_W(\Pi) = K_V(\Pi) + \frac{\langle \Pi_p(u, u), \Pi_p(v, v) \rangle - \langle \Pi_p(u, v), \Pi_p(u, v) \rangle}{\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2}.$$

En particular, para hipersuperficies:

Teorema 7.47 *Sea W una hipersuperficie orientada en una variedad semirriemanniana orientada V , sea $p \in W$ y $\Pi = \langle u, v \rangle$ un subespacio semieuclicédeo de $T_p(W)$. Sea $\epsilon = \langle N, N \rangle$, donde N es el vector normal unitario que induce su orientación. Entonces la relación entre las curvaturas seccionales de Π en W y V es:*

$$K_W(\Pi) = K_V(\Pi) + \epsilon \frac{\tilde{\Pi}_p(u, u)\tilde{\Pi}_p(v, v) - \tilde{\Pi}_p(u, v)^2}{\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2}.$$

En particular, si V es un abierto en \mathbb{R}^3 y $\Pi = T_p(W)$, tenemos $K_V(\Pi) = 0$ (puesto que el tensor de Riemann de \mathbb{R}^n es nulo) y que $\epsilon = 1$, con lo que el miembro derecho no es sino la curvatura de Gauss de W en p (véase la fórmula (7.13) de [An]), y el hecho de que coincida con $K_W(T_p(W))$, que a su vez está definido a partir del tensor de Riemann de W , implica que la curvatura es intrínseca, es decir, que depende únicamente de la métrica de W y no de su inmersión en \mathbb{R}^3 (que es lo que afirma el *teorema egregium* [An 7.42]).

Esto da pie a la definición general siguiente:

Definición 7.48 Si V es una superficie semirriemanniana y $p \in V$, definimos la *curvatura de Gauss* de V en p como la única curvatura seccional

$$K_p = K_p(T_p(V)) = -\frac{R_p(u, v, u, v)}{\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2},$$

donde u, v es cualquier base de $T_p(V)$ (Si se toma ortonormal, el denominador vale 1.)

La observación tras el teorema 7.44 implica que el tensor de Riemann de una superficie semirriemanniana está completamente determinado por su curvatura de Gauss. Explícitamente, se cumple que

$$R_p(u, v, w, x) = -K_p(\langle u, w \rangle \langle v, x \rangle - \langle u, x \rangle \langle v, w \rangle).$$

En efecto, la forma más simple de comprobarlo es observar que ambos miembros son aplicaciones multilineales, luego basta comprobar la igualdad cuando u, v, w, x recorren una base ortonormal e_1, e_2 de $T_p(V)$, pero ambos miembros cumplen las propiedades 1-3 enunciadas antes de la definición 7.41, por lo que basta con que coincidan en (e_1, e_2, e_1, e_2) , y en efecto coinciden por la definición de K_p .

A su vez, las curvaturas seccionales pueden interpretarse en términos de la curvatura de Gauss:

Teorema 7.49 *Sea V una variedad semirriemanniana, $p \in V$ y $\Pi \subset T_p(V)$ un subespacio semieuclídeo. Sea $U \subset T_p(V)$ un entorno de 0 donde \exp_p sea un difeomorfismo y sea $S = \exp_p[U \cap \Pi]$, que claramente es una subvariedad V de dimensión 2. Entonces la curvatura seccional $K_p(\Pi)$ es la curvatura de Gauss de S en p .*

DEMOSTRACIÓN: Veamos en primer lugar que la segunda forma fundamental $\Pi : \mathfrak{X}(S) \times \mathfrak{X}(S) \rightarrow \mathfrak{X}(S)^\perp$ se anula en p . Así, si $v \in \Pi$ y γ es la geodésica de V que pasa por p con velocidad v , tenemos que (restringida a un entorno de 0) está contenida en S y su velocidad en p sigue siendo v . Además

$$0 = \bar{\nabla}_{\gamma'(0)} \gamma' = \nabla_v \gamma' + \Pi_p(v, v),$$

donde $\bar{\nabla}$ es la derivada covariante de V y ∇ la de S . Ahora bien, el primer sumando está en $T_p(S)$ y el segundo es ortogonal a $T_p(S)$, luego ambos son nulos y, en particular, $\Pi_p(v, v) = 0$ para todo $v \in \Pi$, lo que implica que $\Pi_p = 0$. El teorema 7.46 implica entonces que $K_p(\Pi) = K_p(S)$. ■

Ejemplo: La curvatura de las esferas Si aplicamos el teorema 7.47 a la esfera $W = S_r^n$ de radio r en $V = \mathbb{R}^{n+1}$, teniendo en cuenta que $\tilde{\Pi} = -\frac{1}{r}g$, la fórmula se reduce a

$$K(\Pi) = \frac{1}{r^2} \frac{\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2}{\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2} = \frac{1}{r^2}.$$

Así pues, todas las curvaturas seccionales de la esfera de radio r valen $K = 1/r^2$. Teniendo en cuenta que el espacio proyectivo $P^n(\mathbb{R})$ es localmente isométrico a la esfera S^n , concluimos que sus curvaturas seccionales son todas iguales a 1. ■

Definición 7.50 Una variedad semirriemanniana V tiene *curvatura constante* C si todas sus curvaturas seccionales toman el mismo valor K .

Acabamos de ver que las esferas de radio r tienen curvatura constante $1/r^2$. En general, la curvatura constante determina el tensor de Riemann:

Teorema 7.51 *Si V es una variedad semirriemanniana de curvatura constante K , entonces su tensor de Riemann viene dado por*

$$R(U, V, W, X) = -K(\langle U, W \rangle \langle V, X \rangle - \langle U, X \rangle \langle V, W \rangle).$$

DEMOSTRACIÓN: Una comprobación rutinaria muestra que el miembro de-
recho es multilineal y cumple las cuatro propiedades enunciadas antes de la
definición 7.41. Por lo tanto, la diferencia \bar{R} entre ambos miembros cumple lo
mismo, y además, por definición de curvatura seccional, tenemos también que
 $\bar{R}_2(U, V) = \bar{R}(U, V, U, V) = 0$. La prueba del teorema 7.42 se basa únicamente
en que R cumple las cuatro propiedades consideradas, luego vale también para \bar{R} ,
y nos permite concluir que $\bar{R} = 0$, lo que equivale a la igualdad del enunciado. ■

Considerando, por ejemplo, la ecuación (7.3), vemos que si multiplicamos
el tensor métrico de una variedad semirriemanniana por una constante $c > 0$
obtenemos un nuevo tensor métrico con la misma signatura cuyos símbolos de
Christoffel son los mismos, luego induce la misma conexión de Levi-Civita y el
mismo tensor de Riemann, pero las curvaturas seccionales se multiplican por
 $1/c^2$. Esto implica que, salvo un cambio de escala, toda variedad semirrieman-
niana de curvatura constante es isométrica a una de curvatura 0 o ± 1 .

Es claro que \mathbb{R}^n tiene curvatura constante 0, y se cumple un recíproco parcial:

Teorema 7.52 *Si V es una variedad de Riemann sin frontera cuyo tensor de
curvatura es idénticamente nulo, entonces todo punto de V tiene un entorno
isométrico a un abierto de \mathbb{R}^n .*

DEMOSTRACIÓN: Dado $p \in V$, tomamos una carta cúbica $x : U \rightarrow \tilde{U}$,
con $x(p) = 0$ y $\tilde{U} =]-1, 1[^n$ alrededor de p . Consideramos en \tilde{U} la proyección
 $\tilde{g} = x_*(g|_U)$. Así x es una isometría entre (U, g) y (\tilde{U}, \tilde{g}) , luego (\tilde{U}, \tilde{g}) tiene tensor
de curvatura idénticamente nulo. Basta probar que un entorno de 0 en (\tilde{U}, \tilde{g})
es isométrico a un abierto de \mathbb{R}^n (con la métrica usual). Equivalentemente,
podemos suponer que $V =]-1, 1[^n$ (aunque la métrica no es necesariamente la
usual en V como abierto en \mathbb{R}^n).

Sean x^1, \dots, x^n las coordenadas cartesianas en V . Fijado $v \in T_0(V)$, vamos
a probar que existe un campo $X \in \mathfrak{X}(V)$ tal que $X_0 = v$ y $\nabla_{\partial_{x_i}} X = 0$ para
 $i = 1, \dots, n$.

Para ello consideramos el transporte paralelo de v a lo largo de la curva
 $\alpha(t) = (t, 0, \dots, 0)$, lo que nos da vectores X_p definidos para todos los puntos
de la forma $p = (x_1, 0, \dots, 0)$, de modo que $\nabla_{\partial_{x_1}} X = 0$.

Ahora, para cada $x_1 \in]-1, 1[$, consideramos la curva $\alpha(t) = (x_1, t, 0, \dots, 0)$
y transportamos paralelamente el vector $X_{(x_1, 0, \dots, 0)}$, con lo que X pasa a estar
definido sobre todos los puntos de la forma $(x_1, x_2, 0, \dots, 0)$.

Así tenemos que $\nabla_{\partial_{x_2}} X = 0$ en todo su dominio, mientras que, en principio, $\nabla_{\partial_{x_1}} X = 0$ sólo se cumple sobre los puntos $(x_1, 0, \dots, 0)$. Ahora bien,

$$\nabla_{\partial_{x_1}} \nabla_{\partial_{x_2}} X - \nabla_{\partial_{x_2}} \nabla_{\partial_{x_1}} X = R(\partial_{x_1}, \partial_{x_2})(X) = 0,$$

luego $\nabla_{\partial_{x_2}} \nabla_{\partial_{x_1}} X = 0$ en todos los puntos de la forma $(x_1, x_2, 0, \dots, 0)$. Esto significa que el campo $\nabla_{\partial_{x_1}} X$ es paralelo sobre la curva $\alpha(t) = (x_1, t, 0, \dots, 0)$, pero para $t = 0$ es nulo, luego de hecho $\nabla_{\partial_{x_1}} X = 0$ sobre todos los puntos de la forma $(x_1, x_2, 0, \dots, 0)$.

Es claro que podemos proceder de este modo hasta que X esté definido sobre todo V . El hecho de que $\nabla_{\partial_{x_i}} X = 0$ para todo i implica a su vez que $\nabla_Y X = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(V)$.

De este modo podemos conseguir campos vectoriales $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}(V)$ que en $T_0(V)$ formen una base ortonormal y de modo que $\nabla_Y X_i = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(V)$. Esto significa que los campos X_i se trasladan paralelamente por cualquier curva, luego son ortonormales en todos los puntos de V . En particular son linealmente independientes.

La simetría de la conexión de Levi-Civita se traduce en que

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i - [X_i, X_j] = 0,$$

luego $[X_i, X_j] = 0$, y el teorema 3.44 nos da que existe una carta y definida en un entorno de 0 de modo que $X_i = \partial_{y_i}$.

Como los vectores ∂_{y_i} son ortonormales en cada punto, la matriz del tensor métrico de V respecto de esta base es la identidad en cada punto, es decir, que

$$g = dy^1 \otimes dy^1 + \dots + dy^n \otimes dy^n.$$

Por lo tanto, y es una isometría entre un entorno de 0 en V y un abierto de \mathbb{R}^n con la métrica usual. ■

Obviamente, la isometría que proporciona el teorema anterior es meramente local. Por ejemplo, un cilindro en \mathbb{R}^3 tiene tensor de Riemann nulo (pues es fácil ver que es localmente isométrico a \mathbb{R}^2), pero no es isométrico a \mathbb{R}^2 , porque no es homeomorfo a \mathbb{R}^2 .

7.5 El teorema de Liouville

Como aplicación de los conceptos de la geometría riemanniana vamos a demostrar un teorema de Liouville sobre transformaciones conformes:

Teorema 7.53 (Liouville) *Si $n \geq 3$ toda aplicación conforme $f : U \rightarrow V$ entre abiertos de \mathbb{R}_∞^n es la composición de (a lo sumo) una homotecia, una inversión y una isometría. En particular es la restricción de una transformación de Möbius, luego es una transformación conforme.*

La prueba se basa en el teorema siguiente:

Teorema 7.54 Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto conexo y sea g un tensor métrico en U que, respecto de una carta x , cumple

$$ds^2 = \lambda(x)((dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2).$$

Si existe otra carta y de U respecto a la cual g sea euclídeo (es decir, que su expresión coordenada sea $ds^2 = (dy^1)^2 + \cdots + (dy^n)^2$), entonces λ es constante o bien $\lambda = 1/\rho^2$, donde

$$\rho(x) = \sum_i (ax^i + b_i)^2, \quad a \neq 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Que la métrica sea euclídea se traduce en que el tensor de Riemann es nulo, es decir, que, según (6.14):

$$R_{ijk}^l = \partial_{x_i} \Gamma_{jk}^l - \partial_{x_j} \Gamma_{ik}^l + \sum_u (\Gamma_{iu}^l \Gamma_{jk}^u - \Gamma_{ju}^l \Gamma_{ik}^u) = 0,$$

donde

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right) g^{lk}.$$

La función λ tiene que ser estrictamente positiva en todo punto, por lo que podemos definir $\rho = 1/\sqrt{\lambda}$, y entonces, en el sistema de referencia de partida, $g_{ij} = (1/\rho^2)\delta_{ij}$. Por consiguiente, los símbolos de Christoffel son:

$$\Gamma_{ii}^i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}, \quad \Gamma_{ij}^i = \Gamma_{ji}^i = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_j}, \quad \Gamma_{ii}^j = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_j}, \quad \Gamma_{ij}^k = 0,$$

donde se entiende que letras distintas representan índices distintos. A su vez:

$$R_{ijk}^i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \frac{\partial \rho}{\partial x_k} = 0,$$

lo cual equivale a

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_j \partial x_k} = 0,$$

para $j \neq k$ (pero aquí es fundamental que hemos podido calcular R_{ijk}^i con un tercer índice i distinto de j, k , lo que requiere la hipótesis $n \geq 3$). Igualmente, para $i \neq j$:

$$R_{iji}^j = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\rho^2} \sum_u \frac{\partial \rho}{\partial x_u} \frac{\partial \rho}{\partial x_u} = 0,$$

que equivale a

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_j^2} = \frac{1}{\rho} \sum_u \frac{\partial \rho}{\partial x_u} \frac{\partial \rho}{\partial x_u}.$$

Si restamos esta ecuación para (i, j) con la correspondiente a (i, k) , con k distinto de i, j (para lo que nuevamente necesitamos que $n \geq 3$) obtenemos que

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_k^2},$$

para todo i, k . Que las derivadas cruzadas sean nulas implica que

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = f_i(x^i),$$

para cierta función f_i . Si $x \in]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[\subset U$ la igualdad de las segundas derivadas implica que $f'_i(x_i) = f'_j(x_j)$, lo que a su vez implica que f'_i es constante en $]a_i, b_i[$, luego por conexión es constante en U . Así pues,

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = ax^i + b_i.$$

Por la relación entre las derivadas primeras y segundas:

$$2a = \frac{1}{\rho} \sum_u (ax^u + b_u)^2.$$

Si $a = 0$, también $b_u = 0$, para todo u , luego ρ tiene las derivadas nulas y es constante (y $\lambda = 1/\rho^2$ también). Si $a \neq 0$, es claro que ρ (luego λ) tiene la forma indicada en el enunciado. ■

Ahora ya podemos probar el teorema que hemos anunciado:

DEMOSTRACIÓN (del teorema de Liouville): Sea $p \in U$ un punto finito tal que $f(p)$ sea finito. Como $df|_p$ es biyectiva, podemos tomar un entorno U_0 de p y un entorno V_0 de $f(p)$ de modo que f se restringe a una transformación conforme $f : U_0 \rightarrow V_0$. Podemos suponer que $U_0, V_0 \subset \mathbb{R}^n$ (es decir, que no contienen al punto infinito).

Tomamos $x = f^{-1} : V_0 \rightarrow U_0$ como carta de V alrededor de $f(p)$. La matriz jacobiana de la inclusión $i : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ (considerando en V_0 la carta x y en \mathbb{R}^n las coordenadas cartesianas y^1, \dots, y^n) es $J = (\partial_{y_i} f^j)$, luego la matriz del tensor métrico en la carta x es $G = JJ^t$, cuyas componentes son

$$g_{ij} = \langle df(\partial_{y_i}), df(\partial_{y_j}) \rangle = h^2 \delta_{ij},$$

para cierta función $h > 0$, por definición de aplicación conforme. Por lo tanto, podemos aplicar el teorema anterior, con lo que, o bien $h = c$ es constante, o bien $h = \rho^{-1}$, con $\rho = \sum_i (ax^i + b_i)^2$, $a \neq 0$.

En el primer caso tenemos que $d(c^{-1}f)$ es una isometría o, lo que es lo mismo, que $c^{-1}f|_{U_0}$ es una isometría. Por lo tanto, $f|_{U_0}$ es la composición de una homotecia y una isometría.

En el segundo caso consideramos la inversión $J_{p,r}$, donde

$$p = (-b_1/a, \dots, -b_n/a), \quad r = 1/a.$$

Antes del teorema 4.40 hemos visto que

$$\langle dJ_{p,r}|_x(v), dJ_{p,r}|_x(v') \rangle = h^2(x) \langle v, v' \rangle,$$

donde

$$h(x) = \frac{r^2}{\|x - p\|^2} = \frac{1}{\rho(x)}.$$

Por lo tanto, si $g = f|_{U_0}^{-1} \circ J_{p,r}$ y $q \in V_0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle dg|_q(v), dg|_q(v') \rangle &= \langle dJ|_{x(q)}(df^{-1}|_q(v)), dJ|_{x(q)}(df^{-1}|_q(v')) \rangle \\ &= \frac{1}{\rho^2(x(q))} \langle df^{-1}|_q(v), df^{-1}|_q(v') \rangle = \langle v, v' \rangle, \end{aligned}$$

es decir, que g es una isometría, luego $f|_{U_0}$ es la composición de una inversión y una isometría.

En ambos casos hemos probado que $f|_{U_0} = u|_{U_0}$, donde u es una composición de una homotecia/inversión y una isometría. Veamos ahora que de hecho se cumple que $f = u|_U$. Para ello llamamos U_1 al abierto que resulta de quitarle a U el punto ∞ (si es que $\infty \in U$) y el punto $f^{-1}(\infty)$ (si es que $\infty \in V$).

Veamos que $f|_{U_1} = u|_{U_1}$. Definimos U_2 como la intersección de todos los abiertos contenidos en U_1 tales donde f coincide con u . Sabemos que $U_2 \subset U_1$ es un abierto no vacío y queremos probar que $U_1 = U_2$. En caso contrario, como U es conexo (luego U_1 también), existe un $q \in \partial U_2 \cap U_1$, y por la parte ya probada, existe una transformación de Möbius v que coincide con f en un entorno U_3 de q , pero entonces u y v coinciden en el abierto $U_2 \cap U_3$, luego por el teorema 4.42 tenemos que $u = v$, luego u coincide con f en U_3 , luego $q \in U_3 \subset U_2$, en contra de que $q \in \partial U_2$.

Con esto tenemos probado que f coincide con u en U salvo a lo sumo en dos puntos (∞ y $f^{-1}(\infty)$), pero por continuidad coinciden en todo U . ■

En particular vemos que las transformaciones de Möbius son todas las aplicaciones conformes de \mathbb{R}_∞^n en sí mismo, lo cual a su vez implica que las transformaciones conformes de \mathbb{R}^n en sí mismo coinciden con las semejanzas (las transformaciones de Möbius que fijan a ∞).

El caso bidimensional La pregunta natural a la vista del teorema de Liouville es qué sucede cuando $n = 2$. La respuesta es que sigue siendo cierto que las transformaciones conformes de \mathbb{R}_∞^2 en sí mismo son las transformaciones de Möbius y que las transformaciones conformes de \mathbb{R}^2 en sí mismo son las semejanzas, pero ya no es cierto que toda aplicación conforme entre abiertos de \mathbb{R}^2 tenga que ser biyectiva, ni mucho menos que se extienda hasta una transformación de Möbius (aunque sea biyectiva).

Por ejemplo, puede probarse que existe una transformación conforme de la bola $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ en el cuadrado $]0, 1[^2$, la cual no puede extenderse a una transformación de Möbius, ya que debería transformar la circunferencia $\partial B_1(0)$ en la frontera del cuadrado, y esto es imposible, ya que las transformaciones de Möbius transforman circunferencias en circunferencias o rectas.

Sin embargo, la prueba de estos resultados requiere técnicas completamente distintas de las de la geometría diferencial, pues se apoyan en que, identificando

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, las aplicaciones conformes directas entre abiertos de \mathbb{R}^2 coinciden con las funciones holomorfas (el análogo para funciones de una variable compleja de las funciones derivables de una variable real).

Capítulo VIII

Geometría riemanniana II

Después de haber estudiado en el capítulo precedente los conceptos principales de la geometría riemanniana, aquí vamos a presentar algunos resultados más avanzados. Muchos de ellos dependen del estudio de los campos de Jacobi, que presentamos en la primera sección y que, como veremos, permiten relacionar la curvatura de una variedad de Riemann con el comportamiento de sus geodésicas.

8.1 Campos de Jacobi

Definición 8.1 Sea $\gamma : [0, a] \rightarrow V$ una geodésica no constante en una variedad semiriemanniana V . Un campo vectorial $J : [0, a] \rightarrow TV$ sobre γ es un *campo de Jacobi* si cumple la ecuación diferencial

$$\frac{\nabla^2 J}{ds^2} = R(\gamma', J)\gamma'.$$

El lector que tenga curiosidad por saber de dónde surge esta ecuación puede leer el principio de la sección siguiente. Allí verá que los campos de Jacobi miden la velocidad a la que las geodésicas próximas a γ se separan de γ . Aquí vamos a presentar las propiedades de estos campos que nos permitirán sacar partido a dicha interpretación.

En primer lugar observamos que la ecuación de Jacobi es lineal en J , de modo que toda combinación lineal (con coeficientes reales) de campos de Jacobi es también un campo de Jacobi. Equivalentemente, el conjunto $\text{Jac}(\gamma)$ de todos los campos de Jacobi sobre γ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{X}(V)_\gamma$.

Aquí hay que tener en cuenta también que el campo nulo es claramente un campo de Jacobi, aunque también podemos encontrar otros dos ejemplos no triviales: por una parte tenemos $J(s) = \gamma'(s)$, que claramente es un campo de Jacobi, pues $\nabla J/ds = 0$ (porque γ es una geodésica) y, por otra parte, $R(\gamma', \gamma') = 0$.

Otro ejemplo que tendrá más interés para nosotros es $J(s) = s\gamma'(s)$. Nuevamente $R(\gamma', s\gamma') = sR(\gamma', \gamma') = 0$ y, por otra parte, $\nabla J/ds = \gamma'$, luego la segunda derivada es nula.

Seguidamente vamos a aplicar la teoría general sobre ecuaciones diferenciales para obtener un resultado de existencia y unicidad de campos de Jacobi. Para ello fijamos una base ortonormal de $T_{\gamma(0)}(V)$ y consideramos su transporte paralelo a lo largo de γ , lo que nos da campos vectoriales $e_1, \dots, e_n : [0, a] \rightarrow TV$, que determinan en cada punto una base ortonormal de $T_{\gamma(s)}(V)$. Podemos expresar

$$J(s) = \sum_i f^i(s) e_i(s)$$

de modo que

$$\frac{\nabla J}{ds} = \sum_j (f^j)' e_j, \quad \frac{\nabla^2 J}{ds^2} = \sum_j (f^j)'' e_j.$$

Por otro lado,

$$R(\gamma', J)\gamma' = \sum_j \langle R(\gamma', J)\gamma', e_j \rangle e_j = \sum_{ij} f^i \langle R(\gamma', e_i)\gamma', e_j \rangle e_j = \sum_{ij} f^i a_i^j e_j,$$

donde $a_i^j = \langle R(\gamma', e_i)\gamma', e_j \rangle$. De este modo, los campos de Jacobi sobre γ se corresponden biunívocamente con las funciones diferenciables $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^n$ que cumplen el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$(f^j)''(s) = \sum_i a_i^j f^i.$$

Esto ya nos permite aplicar la teoría de ecuaciones diferenciales:

Teorema 8.2 *Si $\gamma : [0, a] \rightarrow V$ es una geodésica en una variedad semiriemanniana V , para cada par de vectores $v, w \in T_{\gamma(0)}(V)$, existe un único campo de Jacobi $J_{v,w}$ sobre γ tal que $J_{v,w}(0) = v$, $\nabla J_{v,w}/ds|_0 = w$.*

DEMOSTRACIÓN: Al aplicar el teorema [An 5.48] al sistema de ecuaciones diferenciales precedente obtenemos que, para cada $s_0 \in [0, a]$ y cada par de condiciones iniciales $(v, w) \in T_{\gamma(s_0)}(V) \times T_{\gamma(s_0)}(V)$, existe un entorno I_{s_0} de s_0 en $[0, a]$ donde está definido un único campo de Jacobi $J_{v,w}^{s_0}$ sobre $\gamma|_{I_{s_0}}$ tal que $J_{v,w}^{s_0}(s_0) = v$, $\nabla J_{v,w}^{s_0}/ds|_{s_0} = w$.

Tomando la intersección de los entornos correspondientes, fijando una base (v_i, v_j) de $T_{\gamma(s_0)}(V) \times T_{\gamma(s_0)}(V)$, podemos tomar un entorno I_{s_0} de s_0 en $[0, a]$ donde están definidos unos únicos campos de Jacobi $J_{i,j}^{s_0}$ sobre $\gamma|_{I_{s_0}}$ tales que $J_{i,j}^{s_0}(s_0) = v_i$, $\nabla J_{i,j}^{s_0}/ds|_{s_0} = v_j$.

A su vez, dado cualquier par $(v, w) \in T_{\gamma(s_0)}(V) \times T_{\gamma(s_0)}(V)$, podemos expresarlo como combinación lineal de los vectores (v_i, v_j) , y la combinación lineal correspondiente de los campos $J_{i,j}^{s_0}$ es un campo de Jacobi $J_{v,w}^{s_0}$ sobre $\gamma|_{I_{s_0}}$ tal que $J_{v,w}^{s_0}(s_0) = v$, $\nabla J_{v,w}^{s_0}/ds|_{s_0} = w$. En resumen, todas las condiciones iniciales definen campos de Jacobi sobre I_{s_0} .

Finalmente, dadas condiciones iniciales $v, w \in T_{\gamma(0)}(V)$, el supremo del conjunto de los $s \in [0, a]$ tales que existe un campo de Jacobi con tales condiciones iniciales definido en $[0, s[$ tiene que ser a , pues si fuera $t < a$, y $]t - \delta, t + \delta[\subset I_t$, el campo $J_{v,w}$ estaría definido en $[0, t[$ y, tomando como condiciones iniciales $J_{v,w}(t - \delta/2)$ y $\nabla J_{v,w}/ds|_{t-\delta/2}$ podríamos formar un campo de Jacobi con el que extender $J_{v,w}$ hasta $t + \delta/2$, en contradicción con la definición de t . Esto prueba que el campo $J_{v,w}$ indicado en el enunciado existe sobre $[0, a[$, y el mismo argumento prueba que, de hecho, está definido en $[0, a]$.

La unicidad global de $J_{v,w}$ en $[0, a]$ es clara, en virtud de la unicidad local de las soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales. ■

Definición 8.3 Si $\gamma : [0, a] \rightarrow V$ es una geodésica no constante en una variedad semiriemanniana V y $v, w \in T_{\gamma(0)}(V)$, llamaremos $J_{v,w} : [0, a] \rightarrow TV$ al único campo de Jacobi sobre γ que satisface las condiciones iniciales $J_{v,w}(0) = v$, $\nabla J/ds|_0 = w$.

Es claro que la aplicación $T_{\gamma(0)}(V) \times T_{\gamma(0)}(V) \rightarrow \text{Jac}(\gamma)$ definida mediante $(v, w) \mapsto J_{v,w}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Así pues, $\dim \text{Jac}(\gamma) = n^2$. No obstante, nos van a interesar únicamente los campos de Jacobi con condición inicial $J(0) = 0$, que forman un subespacio vectorial $\text{Jac}_0(\gamma)$ de dimensión n . Abreviaremos $J_w = J_{0,w}$.

Tras la definición de campo de Jacobi hemos mostrado dos ejemplos no triviales. Si llamamos $v = \gamma'(0)$, ahora podemos identificarlos como $J_{v,0}(s) = \gamma'(s)$ y $J_v(s) = J_{0,v}(s) = s\gamma'(s)$, pues claramente cumplen las condiciones iniciales indicadas.

Estos dos campos son “especiales” en cierto sentido que precisaremos mediante el teorema siguiente:

Teorema 8.4 Si $\gamma : [0, a] \rightarrow V$ es una geodésica no constante en una variedad semiriemanniana, entonces

$$\langle J_{v,w}(s), \gamma'(s) \rangle = \langle w, \gamma'(0) \rangle s + \langle v, \gamma'(0) \rangle.$$

En particular, si las condiciones iniciales v, w son ambas ortogonales a $\gamma'(0)$, entonces $J_{v,w}$ es ortogonal a γ' en todo punto.

DEMOSTRACIÓN: Como $\nabla \gamma'/ds = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \langle J_{v,w}, \gamma' \rangle &= \left\langle \frac{\nabla J_{v,w}}{ds}, \gamma' \right\rangle, \\ \frac{d^2}{ds^2} \langle J_{v,w}, \gamma' \rangle &= \left\langle \frac{\nabla^2 J_{v,w}}{ds^2}, \gamma' \right\rangle = \langle R(\gamma', J_{v,w})\gamma', \gamma' \rangle = 0, \end{aligned}$$

luego $\langle J_{v,w}, \gamma' \rangle$ es un polinomio en s de grado 1, es decir, $\langle J_{v,w}, \gamma' \rangle = cs + d$, para ciertos $c, d \in \mathbb{R}$. Al evaluar en 0 obtenemos que $d = \langle v, \gamma'(0) \rangle$, mientras que

$$c = \left. \frac{d \langle J_{v,w}, \gamma' \rangle}{ds} \right|_0 = \left\langle \left. \frac{\nabla J}{ds} \right|_0, \gamma'(0) \right\rangle = \langle w, \gamma'(0) \rangle. \quad \blacksquare$$

Si $\gamma : [0, a] \rightarrow V$ es una geodésica en una variedad semirriemanniana V y llamamos $p = \gamma(0)$, $v_0 = \gamma'(0)$, para cualquier par de condiciones iniciales $(v, w) \in T_p(V) \times T_p(V)$, podemos descomponer $v = av_0 + v_1$, $w = bv_0 + w_1$, donde $\langle v_0, v_1 \rangle = \langle v_0, w_1 \rangle = 0$, y entonces

$$\begin{aligned} J_{v,w}(s) &= J_{v,0}(s) + J_{0,w}(s) = aJ_{v_0,0}(s) + J_{v_1,0}(s) + bJ_{0,v_0}(s) + J_{0,w_1}(s) \\ &= a\gamma'(s) + bs\gamma'(s) + J_{v_1,w_1}(s), \end{aligned}$$

y J_{v_1,w_1} es ortogonal a $J_{v,w}$ por el teorema anterior. Esto implica que

$$\text{Jac}(\gamma) = \text{Jac}(\gamma)^t \oplus \text{Jac}(\gamma)^\perp,$$

donde $\text{Jac}(\gamma)^t = \langle J_{v_0,0}, J_{0,v_0} \rangle$ es el subespacio de los campos de Jacobi proporcionales a γ' , mientras que $\text{Jac}(\gamma)^\perp$ es el subespacio de los campos de Jacobi ortogonales a γ' , que tiene, por consiguiente, dimensión $n^2 - 2$.

Si nos restringimos a campos con $J(0) = 0$ la situación es

$$\text{Jac}_0(\gamma) = \langle J_{v_0} \rangle \oplus \text{Jac}_0(\gamma)^\perp,$$

donde el segundo espacio tiene dimensión $n - 1$.

Ejemplo: Campos de Jacobi en variedades de curvatura constante

Sea $\gamma : [0, a] \rightarrow V$ una geodésica no constante en una variedad de Riemann de curvatura constante K . Supongamos que γ está parametrizada por el arco, de modo que $\|\gamma'\| = 1$. Sea $p = \gamma(0)$ y $v = \gamma'(0)$.

Sea J un campo de Jacobi sobre γ ortogonal a γ' con $J(0) = 0$. Si X es cualquier campo tangente sobre γ , por el teorema 7.51 tenemos que

$$\langle R(\gamma', J)\gamma', X \rangle = -K(\langle \gamma', \gamma' \rangle \langle J, X \rangle - \langle \gamma', X \rangle \langle J, \gamma' \rangle) = -K \langle J, X \rangle,$$

luego $R(\gamma', J)\gamma' = -KJ$ y la ecuación de Jacobi se reduce a

$$\frac{\nabla^2 J}{ds^2} + KJ = 0.$$

Si $w \in T_p(V)$ cumple $\langle v, w \rangle = 0$ y $w(s)$ es su transporte paralelo sobre γ , es fácil ver que

$$J_w(s) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(s\sqrt{K})}{\sqrt{K}} w(s) & \text{si } K > 0, \\ sw(s) & \text{si } K = 0, \\ \frac{\text{senh}(s\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}} w(s) & \text{si } K < 0, \end{cases}$$

es una (la) solución de la ecuación de Jacobi con condiciones iniciales $(0, w)$. Por ejemplo, en el caso $K > 0$, tenemos que

$$\frac{\nabla J_w}{ds} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\text{sen}(s\sqrt{K})}{\sqrt{K}} w(s) = \cos(s\sqrt{K}) w(s),$$

que para $s = 0$ toma el valor w . A su vez:

$$\frac{\nabla^2 J_w}{ds^2} = -\sqrt{K} \text{sen}(s\sqrt{K}) w(s) = -KJ_w. \quad \blacksquare$$

Vamos a necesitar estimaciones sobre cómo varía la norma de un campo de Jacobi. Empezamos por el resultado siguiente:

Teorema 8.5 *Sea $\gamma : [0, a] \rightarrow V$ una geodésica no constante en una variedad semiriemanniana V . Sea $p = \gamma(0)$ y $v = \gamma'(0)$. Para cada $w \in T_p(V)$, tenemos el desarrollo de Taylor*

$$\langle J_w(s), J_w(s) \rangle = \langle w, w \rangle s^2 + \frac{1}{3} R_{2p}(v, w) s^4 + \dots$$

DEMOSTRACIÓN: Por abreviar escribiremos $J = J_w$. Tenemos que

$$\langle J(0), J(0) \rangle = 0, \quad \langle J, J \rangle'(0) = 2 \langle \nabla J/ds, J \rangle(0) = 0.$$

A su vez:

$$\langle J, J \rangle''(0) = 2 \langle \nabla^2 J/ds^2, J \rangle(0) + 2 \langle \nabla J/ds, \nabla J/ds \rangle(0) = 2 \langle w, w \rangle.$$

Esto prueba que los términos del polinomio de Taylor hasta grado 2 son los indicados. Para el de grado 3 tenemos que

$$\langle J, J \rangle'''(0) = 2 \langle \nabla^3 J/ds^3, J \rangle(0) + 6 \langle \nabla^2 J/ds^2, \nabla J/ds \rangle(0) = 0,$$

pues $\nabla^2 J/ds^2|_0 = (R(\gamma', J)\gamma')(0) = R_p(v, 0)v = 0$.

Ahora observamos que

$$\left. \frac{\nabla}{ds} R(\gamma', J)\gamma' \right|_0 = R(\gamma', \nabla J/ds)\gamma'|_0.$$

En efecto, si X es un campo arbitrario sobre γ , tenemos que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\nabla}{ds} R(\gamma', J)\gamma', X \right\rangle &= \frac{d}{ds} \langle R(\gamma', J)\gamma', X \rangle - \langle R(\gamma', J)\gamma', \nabla X/ds \rangle \\ &= \frac{d}{ds} \langle R(\gamma', X)\gamma', J \rangle - \langle R(\gamma', J)\gamma', \nabla X/ds \rangle \\ &= \left\langle \frac{\nabla}{ds} R(\gamma', X)\gamma', J \right\rangle + \left\langle R(\gamma', X)\gamma', \frac{\nabla J}{ds} \right\rangle - \left\langle R(\gamma', J)\gamma', \frac{\nabla X}{ds} \right\rangle. \end{aligned}$$

En $s = 0$, teniendo en cuenta que $J(0) = 0$, queda

$$\left\langle \left. \frac{\nabla}{ds} R(\gamma', J)\gamma' \right|_0, X(0) \right\rangle = \langle R(\gamma', \nabla J/ds)\gamma'|_0, X(0) \rangle,$$

y como esto vale para todo vector $X(0)$, se tiene la igualdad indicada. Por lo tanto,

$$\left. \frac{\nabla^3 J}{ds^3} \right|_0 = \left. \frac{\nabla}{ds} R(\gamma', J, \gamma') \right|_0 = R_p(v, w)v.$$

A su vez:

$$\begin{aligned} \langle J, J \rangle''''(0) &= 8 \langle \nabla J/ds, \nabla^3 J/ds^3 \rangle(0) + 6 \langle \nabla^2 J/ds^2, \nabla^2 J/ds^2 \rangle(0) \\ &\quad + 2 \langle \nabla^4 J/ds^4, J \rangle(0) = 8 \langle R_p(v, w)v, w \rangle = 8R_p(v, w, v, w). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A su vez:

Teorema 8.6 Sea $\gamma : [0, a] \rightarrow V$ una geodésica no constante en una variedad de Riemann V , sea $p = \gamma(0)$ y $v = \gamma'(0)$. Para cada $w \in T_p(V)$, tenemos el desarrollo de Taylor

$$\|J_w(s)\| = \|w\|s + \frac{1}{6}\|w\|R_{2p}(v, w)s^3 + \dots$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que $w \neq 0$. Como en la prueba del teorema anterior, abreviaremos $J = J_w$. Según dicho teorema, el desarrollo de Taylor de $\|J\|^2$ con resto integral es de la forma

$$\|J\|^2 = \|w\|^2s^2 + \frac{1}{3}R_{2p}(v, w)s^4 + r(s)s^5,$$

para cierta función diferenciable $r(s)$. En particular

$$\|J\|^2 = \|w\|^2s^2 + g(s)s^4,$$

donde $g(s) = \frac{1}{3}R_{2p}(v, w) + r(s)s$ cumple $g(0) = \frac{1}{3}R_{2p}(v, w)$. Vamos a probar que la función

$$f(s) = \begin{cases} \|J(s)\| & \text{si } s \geq 0, \\ -\|J(s)\| & \text{si } s < 0, \end{cases}$$

es derivable en 0. En efecto,

$$f'(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\text{sig } s \sqrt{\|w\|^2s^2 + g(s)s^4}}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\|w\|^2 + g(s)s^2} = \|w\|$$

y para $s \neq 0$ es

$$\begin{aligned} f'(s) &= \text{sig } s \frac{\langle J, J \rangle'}{2\|J\|} = \text{sig } s \frac{2\|w\|^2s + g'(s)s^4 + 4g(s)s^3}{2\sqrt{\|w\|^2s^2 + g(s)s^4}} \\ &= \frac{2\|w\|^2 + g'(s)s^3 + 4g(s)s^2}{2\sqrt{\|w\|^2 + g(s)s^2}}. \end{aligned}$$

Ahora bien, esta expresión vale también para $s = 0$, lo que prueba que f es diferenciable (de clase C^∞) en un entorno de 0. Dejamos al lector el cálculo de $f''(s)$ a partir de esta última expresión, del que se sigue que $f''(0) = 0$, así como que

$$f'''(0) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f''(s)}{s} = 3g(0)\|w\| = \|w\|R_{2p}(v, w),$$

y esto nos da el desarrollo del enunciado. ■

Los teoremas anteriores describen el comportamiento de $\langle J, J \rangle$ y $\|J\|$ para valores de s próximos a 0, pero en el caso de variedades de Riemann con curvatura seccional ≤ 0 podemos encontrar relaciones globales. Nos basamos en el teorema siguiente:

Teorema 8.7 Sea $\gamma : [0, a] \rightarrow V$ una geodésica no constante en una variedad de Riemann V y sea J un campo de Jacobi sobre γ . Entonces

$$\langle J, J \rangle'' = 2\|\nabla J/ds\|^2 + 2R_2(\gamma', J)$$

y si $J(s) \neq 0$,

$$\|J\|'' = \frac{1}{\|J\|^3} (\|\nabla J/ds\|^2 \|J\|^2 - \langle \nabla J/ds, J \rangle^2) + \frac{1}{\|J\|} R_2(\gamma', J).$$

DEMOSTRACIÓN: Claramente

$$\begin{aligned} \langle J, J \rangle'' &= 2\langle \nabla J/ds, \nabla J/ds \rangle + 2\langle \nabla^2 J/ds^2, J \rangle \\ &= 2\langle \nabla J/ds, \nabla J/ds \rangle + 2\langle R(\gamma', J)\gamma', J \rangle \\ &= 2\|\nabla J/ds\|^2 + 2R_2(\gamma', J). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\|J\| = \sqrt{\langle J, J \rangle}$, vemos que

$$\|J\|' = \frac{1}{\|J\|} \langle \nabla J/ds, J \rangle,$$

de donde a su vez

$$\begin{aligned} \|J\|'' &= -\frac{1}{\|J\|^2} \frac{1}{\|J\|} \langle \nabla J/ds, J \rangle^2 + \frac{1}{\|J\|} (\|\nabla J/ds\|^2 + \langle \nabla^2 J/ds^2, J \rangle) \\ &= \frac{1}{\|J\|^3} (\|\nabla J/ds\|^2 \|J\|^2 - \langle \nabla J/ds, J \rangle^2) + \frac{1}{\|J\|} \langle R(\gamma', J)\gamma', J \rangle, \end{aligned}$$

lo que nos da la fórmula del enunciado. \blacksquare

En los espacios tangentes de las variedades de Riemann se cumple la desigualdad de Schwarz, que equivale a que

$$Q_p(v, w) = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2 \geq 0,$$

y en particular vemos que $K_p(\langle v, w \rangle) \leq 0$ si y sólo si $R_{2p}(v, w) \geq 0$. Teniendo esto en cuenta podemos probar:

Teorema 8.8 Sea $\gamma : [0, a] \rightarrow V$ una geodésica no constante en una variedad de Riemann V tal que todas las curvaturas seccionales de V en los puntos de γ sean ≤ 0 . Entonces, para todo $w \in T_{\gamma(0)}(V)$, se cumple que $\|J_w(s)\| \geq \|w\|s$.

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que $w \neq 0$. Como en las pruebas de los teoremas precedentes, escribiremos $J = J_w$. El teorema anterior nos da que $\langle J, J \rangle'' \geq 0$ y, si $J(s) \neq 0$, además

$$\|J\|'' = \frac{1}{\|J\|^3} Q(\nabla J/ds, J) + \frac{1}{\|J\|} R_2(\gamma', J) \geq 0.$$

De la primera desigualdad deducimos que $\langle J, J \rangle'$ es creciente y, puesto que $\langle J, J \rangle'(0) = 2\langle \nabla J/ds|_0, J(0) \rangle = 0$, de hecho $\langle J, J \rangle' \geq 0$. A su vez, esto implica que $\langle J, J \rangle$ es creciente. Si existiera un $s > 0$ tal que $J(s) = 0$, entonces $J|_{[0, s]}$ sería idénticamente nulo, pero entonces, por la unicidad de las condiciones iniciales J sería idénticamente nulo. Por lo tanto J sólo se anula en 0 y por consiguiente $\|J\|'' \geq 0$ para todo $s > 0$.

Sea $f(s)$ la extensión de $\|J\|$ definida en la prueba del teorema 8.6, que, según hemos visto, es diferenciable en un entorno de 0 y $f'(0) = \|w\|$. Por continuidad, $f''(s) \geq 0$ para todo $s \geq 0$.

Ahora consideramos la función $h(s) = f(s) - \|w\|s$, que es diferenciable en un entorno de 0 y cumple $h'(0) = 0$ y $h''(s) = f''(s) \geq 0$ para todo $s \geq 0$. Esto significa que h' es creciente en $[0, a]$, luego $h'(s) \geq 0$ para todo $s \in [0, a]$, luego h es creciente en $[0, a]$ y, como $h(0) = 0$, se cumple que $h(s) \geq 0$ en $[0, a]$, que es lo que había que probar. ■

El ejemplo que hemos mostrado para el caso de variedades con curvatura constante muestra que este resultado no es cierto para variedades de curvatura positiva.

8.2 Variaciones de geodésicas

Pasamos ya a mostrar el contexto geométrico en el que aparecen los campos de Jacobi. Nos basaremos en un resultado general sobre superficies parametrizadas:

Teorema 8.9 Sea $\alpha : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V$ una superficie parametrizada en una variedad semirriemanniana V y sea $v : A \rightarrow TV$ un campo de vectores tangentes sobre α . Entonces

$$\frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla v}{dt} - \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla v}{ds} = R\left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)v.$$

DEMOSTRACIÓN: Fijemos un punto $(s_0, t_0) \in A$, sea $p = \alpha(s_0, t_0)$, tomemos una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ alrededor de p y expresemos

$$v(s, t) = \sum_i v^i(s, t) \partial_{x_i}|_{\alpha(s, t)}.$$

Entonces

$$\frac{\nabla v}{dt} = \sum_i v^i \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i},$$

y a su vez,

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla v}{dt} &= \sum_i v^i \frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial s} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &+ \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial t} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_i \frac{\partial^2 v^i}{\partial t \partial s} \frac{\partial}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Intercambiando s y t y restando obtenemos

$$\frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla v}{dt} - \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla v}{ds} = \sum_i v^i \left(\frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial}{\partial x_i} \right).$$

Pongamos que $x(\alpha(s, t)) = (x^1(s, t), \dots, x^n(s, t))$, con lo que

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} = \nabla_{\partial \alpha / \partial t} \partial_{x_i} = \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial t} \nabla_{\partial_{x_k}} \partial_{x_i},$$

y a su vez

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} &= \sum_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial t \partial s} \nabla_{\partial_{x_k}} \partial_{x_i} + \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial t} \nabla_{\partial \alpha / \partial s} \nabla_{\partial_{x_k}} \partial_{x_i} \\ &= \sum_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial t \partial s} \nabla_{\partial_{x_k}} \partial_{x_i} + \sum_{j,k} \frac{\partial x^j}{\partial s} \frac{\partial x^k}{\partial t} \nabla_{\partial_{x_j}} \nabla_{\partial_{x_k}} \partial_{x_i}. \end{aligned}$$

Nuevamente intercambiamos los papeles de s y t y restamos:

$$\frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j,k} \frac{\partial x^j}{\partial s} \frac{\partial x^k}{\partial t} (\nabla_{\partial_{x_j}} \nabla_{\partial_{x_k}} \partial_{x_i} - \nabla_{\partial_{x_k}} \nabla_{\partial_{x_j}} \partial_{x_i}).$$

Por consiguiente:

$$\frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{dt} v - \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} v = \sum_{i,j,k} v^i \frac{\partial x^j}{\partial s} \frac{\partial x^k}{\partial t} R(\partial_{x_j}, \partial_{x_k}) \partial_{x_i} = R\left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right) v. \quad \blacksquare$$

Las superficies parametrizadas que nos van a interesar son las siguientes:

Definición 8.10 Si $\gamma : [0, a] \rightarrow V$ es una geodésica no constante en una variedad semirriemanniana V , una *variación* de γ es una superficie parametrizada $\alpha : [0, a] \times]-\delta, \delta[\rightarrow V$ tal que cada curva α_t sea una geodésica y $\alpha_0 = \gamma$.

El *campo de Jacobi* asociado a α es el campo $J : [0, a] \rightarrow TV$ sobre γ dado por

$$J(s) = \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(s,0)}.$$

El teorema anterior aplicado al campo $v = \partial \alpha / \partial s$ prueba que J es realmente un campo de Jacobi sobre γ , pues nos da que

$$\frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial s} - \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial \alpha}{\partial s} = R\left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right) \frac{\partial \alpha}{\partial s}.$$

Ahora bien, como α_t es una geodésica, su derivada $\alpha'_t = \partial \alpha / \partial s$ cumple

$$\frac{\nabla}{ds} \frac{\partial \alpha}{\partial s} = 0$$

y, teniendo en cuenta además la relación (7.5), obtenemos que

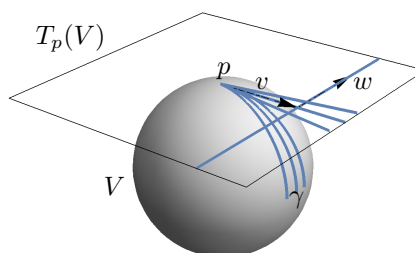
$$\frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = R\left(\frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right) \frac{\partial \alpha}{\partial s}.$$

Al evaluar en $(s, 0)$ llegamos finalmente a la ecuación de Jacobi

$$\frac{\nabla^2 J}{ds^2} = R(\gamma', J)\gamma'.$$

No es difícil probar que todo campo de Jacobi sobre γ puede obtenerse a partir de una variación adecuada, pero nos interesa especialmente el caso de los campos que cumplen $J(0) = 0$. Para obtenerlos consideramos una geodésica no constante $\gamma : [0, a] \rightarrow V$ en una variedad semirriemanniana V , llamamos $p = \gamma(0)$ y $v = \gamma'(0) \in T_p(V)$, de manera que $\gamma(s) = \exp_p(sv)$. Fijamos un vector $w \in T_p(V)$, que se corresponde con $w_v = \theta_v^{-1}(w) \in T_v(T_p(V))$. Sea $v(t)$ una curva en $T_p(V)$ tal que $v(0) = v$ y $v'(0) = w_v$. Por ejemplo, podemos tomar $v(t) = v + tw$. Consideramos la superficie parametrizada¹ $\tilde{\alpha} : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p(V)$ dada por $\tilde{\alpha}(s, t) = sv(t)$ y su composición con la exponencial $\alpha(s, t) = \exp_p(sv(t))$. Claramente α es una variación de γ .

En realidad todos los cálculos valen para w arbitrario, pero nos interesará especialmente el caso en que w es linealmente independiente de v . Así las curvas $\tilde{\alpha}_t(s)$ (para valores $s \geq 0$) forman un haz de semirrectas en $T_p(V)$ de origen 0 y las curvas $\alpha_t(s)$ (también para $s \geq 0$) forman un haz de geodésicas que parten de p .



El campo de Jacobi asociado a α es

$$J(s) = \frac{\partial \alpha}{\partial t} \Big|_{(s,0)} = d \exp_p |_{sv}(sw_{sv}),$$

y claramente cumple $J(0) = 0$. Veamos que $\nabla J/ds|_0 = w$, con lo que será $J = J_w$. En efecto, por una parte $\alpha(0, t)$ es constante igual a p y, por otra,

$$\begin{aligned} \frac{\nabla J}{ds} &= \frac{\nabla}{ds} d \exp_p |_{sv}(sw_{sv}) = \frac{\nabla}{ds}(s d \exp_p |_{sv}(w_{sv})) \\ &= d \exp_p |_{sv}(w_{sv}) + s \frac{\nabla}{ds} d \exp_p |_{sv}(w_{sv}), \end{aligned}$$

luego

$$\frac{\nabla J}{ds} \Big|_0 = d \exp_p |_0(w_0) = w.$$

Así hemos probado lo siguiente:

¹Comparar con la prueba del lema de Gauss 7.21.

Teorema 8.11 Sea $\gamma : [0, a] \rightarrow V$ una geodésica no constante en una variedad semirriemanniana V . Sea $p = \gamma(0)$ y $v = \gamma'(0) \in T_p(V)$, fijemos un vector $w \in T_p(V)$ y sea $w_v = \theta_v^{-1}(w) \in T_v(T_p(V))$. Sea $v(t)$ una curva en $T_p(V)$ tal que $v(0) = v$ y $v'(0) = w_v$. Consideramos la variación de γ dada por $\alpha(s, t) = \exp_p(sv(t))$. Entonces

$$J_w(s) = \left. \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right|_{(s,0)} = d \exp_p|_{sv}(sw_{sv}).$$

Podríamos dar una construcción análoga de los campos de Jacobi con $J(0)$ arbitrario, pero no la vamos a necesitar. (Básicamente se trata de considerar haces de geodésicas que no partan del mismo punto, sino que sus puntos de partida recorran una curva que parta de $\gamma(0)$ con velocidad $J(0)$.)

En general, el campo de Jacobi asociado a una variación de γ mide la velocidad a que se alejan de γ sus geodésicas cercanas, es decir, la velocidad en el punto $\gamma(s)$ de las curvas $t \mapsto \alpha_t(s)$. Para precisar esta idea en el contexto del teorema anterior podemos considerar el siguiente caso particular del teorema 8.6:

Teorema 8.12 Sea $\gamma : [0, a] \rightarrow V$ una geodésica no constante en una variedad de Riemann V . Supongamos que γ está parametrizada por el arco (de modo que $v = \gamma'(0)$ cumple $\|v\| = 1$) y sea $w \in T_p(V)$ un vector tal que $\|w\| = 1$ y $\langle w, v \rangle = 0$, entonces

$$\|J_w\| = s - \frac{1}{6} K_p(\langle v, w \rangle) s^3 + \dots$$

Si comparamos esta expresión para $\|J_w\|$ con $\|\partial_t \tilde{\alpha}|_{(s,0)}\| = \|sw_{sv}\| = s$, vemos que, para un $s > 0$ fijo, las semirrectas $\tilde{\alpha}_t(s)$ se alejan de $\tilde{\alpha}_0(s)$ a velocidad s , en el sentido de que, al variar t , la curva $t \mapsto \tilde{\alpha}_t(s)$ tiene velocidad de norma s en $t = 0$. En cambio, las geodésicas correspondientes en V se alejan de $\gamma(s)$ a velocidad s sólo en una aproximación de primer orden (e incluso de segundo orden), pero si consideramos una aproximación de tercer orden, entonces la velocidad de alejamiento es algo menor que s si la curvatura seccional es positiva y algo mayor que s si la curvatura seccional es negativa.

El teorema 8.11 nos permite probar una versión con menos hipótesis del lema de Gauss 7.21:

Teorema 8.13 (Lema de Gauss) Sea V una variedad semirriemanniana, sea $p \in V$, sea $z \in T_p(V)$ tal que esté definida la geodésica $\gamma_{p,z} : [0, 1] \rightarrow V$. Consideremos dos vectores $v_z, w_z \in T_z(T_p(V))$ con v_z radial. Entonces

$$\langle d \exp_p|_z(v_z), d \exp_p|_z(w_z) \rangle = \langle v_z, w_z \rangle.$$

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $v = \theta_z(v_z)$, $w = \theta_z(w_z)$. Por hipótesis tenemos que $v = \lambda z$, para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$. Por una parte, $\gamma_{p,z}(s) = \exp_p(sz)$, luego $\gamma'_{p,z}(s) = d \exp_p|_{sz}(z_{sz})$, y en particular $\gamma'_{p,z}(1) = d \exp_p|_z(z_z)$, luego

$$d \exp_p|_z(v_z) = \lambda d \exp_p|_z(z_z) = \lambda \gamma'_{p,z}(1).$$

Por otra parte consideramos el campo de Jacobi $J_w(s) = d\exp_p|_{sz}(sw_{sz})$, de modo que $J_w(1) = d\exp_p|_z(w_z)$. De acuerdo con el teorema 8.4:

$$\langle d\exp_p|_z(v_z), d\exp_p|_z(w_z) \rangle = \lambda \langle \gamma'_{p,z}(1), J_w(1) \rangle = \lambda \langle z, w \rangle = \langle v_z, w_z \rangle. \quad \blacksquare$$

Veamos ahora que los campos de Jacobi caracterizan los puntos singulares de la aplicación exponencial:

Definición 8.14 Sea $\gamma : [0, a] \rightarrow V$ una geodésica en una variedad semirriemanniana V . Se dice que un punto $\gamma(s_0)$ (con $0 < s_0 \leq a$) es *conjugado* con $\gamma(0)$ si existe un campo de Jacobi J sobre γ no idénticamente nulo tal que $J(0) = 0$ y $J(s_0) = 0$.

Es claro que los campos de Jacobi que cumplen las condiciones $J(0) = 0$ y $J(s_0) = 0$ forman un subespacio vectorial de $\text{Jac}_0(\gamma)$. Su dimensión recibe el nombre de *multiplicidad* de $\gamma(t_0)$ como conjugado con $\gamma(0)$.

Como $\text{Jac}_0(\gamma)$ tiene dimensión n y contiene a $J(s) = s\gamma'(s)$, que no se anula más que en 0, la multiplicidad de un punto conjugado con $\gamma(0)$ puede ser a lo sumo $n - 1$.

Teorema 8.15 Sea $\gamma : [0, a] \rightarrow V$ una geodésica no constante en una variedad semirriemanniana V y $0 < s_0 \leq a$. Entonces $\gamma(s_0)$ es conjugado con $\gamma(0)$ si y sólo si $v_0 = s_0\gamma'(s_0)$ es un punto crítico de \exp_p . En tal caso, la multiplicidad de $\gamma(s_0)$ es la dimensión del núcleo de $d\exp_p|_{v_0}$.

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $v = \gamma'(0)$. Los campos de Jacobi sobre γ no idénticamente nulos que cumplen $J(0) = 0$ son los de la forma $J_{0,w}$, para cierto $w \in T_p(V)$ no nulo. Por el teorema 8.11 sabemos que

$$J_{0,w}(s_0) = d\exp_p|_{s_0v}(s_0w_{s_0v}),$$

luego $\gamma(s_0)$ es conjugado con γ si y sólo si existe un vector $w \neq 0$ tal que $d\exp_p|_{s_0v}(s_0w_{s_0v}) = 0$, lo cual equivale a que $d\exp_p|_{s_0v}$ no sea un isomorfismo, es decir, a que s_0v sea un punto crítico de \exp_p .

En tal caso, el núcleo de $d\exp_p|_{s_0v}$ está formado por los vectores λw_{s_0v} tales que $J_{0,w}$ cumple la definición de conjugación, de donde se sigue claramente la igualdad de las dimensiones. \blacksquare

Por ejemplo, del cálculo de los campos de Jacobi sobre variedades de curvatura constante se sigue que los puntos conjugados de la esfera S_r^n son los pares de puntos antípodos, y tienen multiplicidad $n - 1$. En efecto, podemos tomar $n - 1$ vectores $w \in T_p(S_r^n)$ linealmente independientes y ortogonales a v , con los que formar $n - 1$ campos de Jacobi linealmente independientes J_w , todos los cuales se anulan exactamente cuando s es múltiplo de π . Esto prueba que los únicos puntos conjugados con p son p y $-p$, y que la exponencial $\exp_p : T_p(S_r^n) \rightarrow S_r^n$ tiene rango máximo en todos los vectores v salvo en los de norma múltiplo (no nulo) de π , que son los puntos críticos de \exp_p , donde el rango es 1.

Del mismo modo podemos razonar que en las variedades de Riemann de curvatura constante negativa las geodésicas no tienen puntos conjugados, pero en realidad la hipótesis de curvatura constante es innecesaria:

Teorema 8.16 *Sea $\gamma : [0, a] \rightarrow V$ una geodésica no constante en una variedad de Riemann tal que todas las curvaturas seccionales en cada punto $\gamma(s)$ sean ≤ 0 . Entonces no hay puntos conjugados con $\gamma(0)$. En particular, si todas las curvaturas seccionales de V son ≤ 0 la función $\exp_p : U \subset T_p(V) \rightarrow V$ es un difeomorfismo local en su dominio.*

DEMOSTRACIÓN: El teorema 8.8 implica que los campos de Jacobi no nulos de $\text{Jac}_0(J)$ sólo se anulan en 0. ■

Nota Más explícitamente, los teoremas 8.8 y 8.11 nos dan que, en una variedad de Riemann de curvatura ≤ 0 , para todo $v \in T_p(V)$ donde esté definida la exponencial y todo $w \in T_v(T_p(V))$, se cumple la relación

$$\|d\exp_p|_v(w)\| \geq \|w\|.$$

Esto muestra que el núcleo de $d\exp_p|_v$ es trivial. ■

Como consecuencia:

Teorema 8.17 *Si V es una variedad de Riemann conexa y geodésicamente completa en $q \in V$, es decir, tal que está definida $\exp_q : T_q(V) \rightarrow V$, y todas sus curvaturas seccionales son ≤ 0 , entonces \exp_q es un cubrimiento, luego es el cubrimiento universal de V .*

DEMOSTRACIÓN: Aplicamos el teorema 7.37 a $f = \exp_q$. Por la nota anterior sabemos que $\|df|_v(w)\| \geq \|w\|$, para todo vector $v \in T_p(V)$ y todo $w \in T_v(T_p(V))$, que es justo la hipótesis que necesitamos. Como $T_p(V)$ es simplemente conexo (es difeomorfo a \mathbb{R}^n) es el cubrimiento universal de V . ■

En particular, toda variedad de Riemann completa simplemente conexa con curvaturas seccionales ≤ 0 es difeomorfa a \mathbb{R}^n (pues es su propio cubrimiento universal). Además dos puntos cualesquiera p y q pueden unirse por una única geodésica, pues $\exp_p : T_p(V) \rightarrow V$ es un difeomorfismo y las geodésicas que parten de p se corresponden con las rectas en $T_p(V)$ que pasan por el origen, y pasa exactamente una por cada punto.

Notemos que esto es falso para variedades de curvatura positiva, como muestran las esferas, por ejemplo, que son completas y simplemente conexas.

8.3 Métrica, curvatura y transporte paralelo

La métrica de una variedad de Riemann determina la conexión de Levi-Civita, que a su vez determina el transporte paralelo y la curvatura. Ahora vamos a probar un teorema de Cartan en virtud del cual el transporte paralelo y la curvatura determinan la métrica.

Para ello consideramos dos variedades de Riemann V y V' de la misma dimensión y fijamos puntos $p \in V$, $p' \in V'$. Sea $i : T_p(V) \rightarrow T_{p'}(V')$ una isometría.

Tomamos un abierto $U'^* \subset T_{p'}(V')$ (que contenga a 0) sobre el que esté definida la exponencial $\exp_{p'} : U'^* \rightarrow V'$ y un entorno normal U de p con el difeomorfismo correspondiente $\exp_p|_{U^*} : U^* \rightarrow U$ de modo que $U^* \subset i^{-1}[U'^*]$. Esto nos permite definir una aplicación diferenciable $f : U \rightarrow f[U] \subset U'$ mediante

$$\begin{array}{ccc} U^* & \xrightarrow{i} & U'^* \\ \exp_p \downarrow & & \downarrow \exp_{p'} \\ U & \xrightarrow{f} & U' \end{array}$$

Por la observación tras el teorema 6.20 es claro que $df|_p = i$. Para cada $q \in U$, llamamos $v = \exp_p|_{U^*}^{-1}(q) \in U^*$, de modo que la geodésica $\gamma_{p,v}$ cumple $\gamma_{p,v}(0) = p$, $\gamma_{p,v}(1) = q$. Sea $v' = i(v) \in U'^*$ y consideramos la geodésica $\gamma_{p',v'}$, que cumple $\gamma_{p',v'}(0) = p'$ y

$$\gamma_{p',v'}(1) = \exp_{p'}(i(v)) = f(q).$$

Definimos la isometría $\phi_q : T_q(V) \rightarrow T_{f(q)}(V')$ mediante la composición

$$\begin{array}{ccc} T_p(V) & \xrightarrow{i} & T_{p'}(V') \\ T_\gamma \downarrow & & \downarrow T_{\gamma'} \\ T_q(V) & \xrightarrow{\phi_q} & T_{f(q)}(V') \end{array}$$

donde T_γ y $T_{\gamma'}$ son los transportes paralelos sobre γ y γ' , respectivamente.

Teorema 8.18 (Cartan) *En las condiciones precedentes, si para todo $q \in U$ y todos los vectores $u, v, x, y \in T_q(V)$ se cumple que*

$$R_q(u, v, x, y) = R_{f(q)}(\phi_q(u), \phi_q(v), \phi_q(x), \phi_q(y)),$$

entonces $f : U \rightarrow f[U]$ es una isometría local y $df|_p = i$.

DEMOSTRACIÓN: Fijemos un punto $q \in U$, $q \neq p$ y un vector $w \in T_q(V)$. Sea $v = \exp_p|_{U^*}^{-1}(q)$ y consideremos la geodésica $\gamma = \gamma_{p,v} : [0, 1] \rightarrow U$ que cumple $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$. Sea $w_0 = \theta_v(\exp_p|_{U^*}^{-1}(w)) \in T_p(V)$. Así, según el teorema 8.11, el campo $J = J_{w_0}$ sobre γ cumple $J(1) = d\exp_p|_v((w_0)_v) = w$.

Sea $e_1 = v/\|v\|, e_2, \dots, e_n$ una base ortonormal de $T_p(V)$ y sea $e_i(s)$ su transporte paralelo sobre γ . Podemos expresar $J_w(s) = \sum_i y^i(s)e_i(s)$, para ciertas funciones $y^i(s)$, de modo que

$$(y^j)''(s) = \sum_i \|v\|^2 y^i \langle R(e_1, e_i)e_1, e_j \rangle.$$

Consideremos ahora la geodésica $\tilde{\gamma} = \gamma_{p', i(v)} : [0, 1] \rightarrow U'$ que cumple $\tilde{\gamma}(0) = p'$ y $\tilde{\gamma}(1) = f(q)$, y el campo sobre $\tilde{\gamma}$ dado por $\tilde{J}(s) = \phi_{\gamma(s)}(J(s))$. Llamemos $\tilde{e}_i(s) = \phi_{\gamma(s)}(e_i(s))$, de modo que

$$\tilde{J}(s) = \sum_i y^i(s) \tilde{e}_i.$$

Por hipótesis $R(e_1, e_i, e_1, e_j) = R(\tilde{e}_1, \tilde{e}_i, \tilde{e}_1, \tilde{e}_j)$, luego

$$(y^j)''(s) = \sum_i \|i(v)\|^2 y^i \langle R(\tilde{e}_1, \tilde{e}_i) \tilde{e}_1, \tilde{e}_j \rangle.$$

De aquí se sigue que \tilde{J} es un campo de Jacobi sobre $\tilde{\gamma}$ con $\tilde{J}(0) = 0$. Además, por el teorema 6.12, tenemos que

$$\left. \frac{\nabla \tilde{J}}{ds} \right|_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\text{tp}_{\tilde{\gamma}}^{-1}(\tilde{J}(s))}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{i(\text{tp}_{\tilde{\gamma}}^{-1}(J(s)))}{s} = i \left(\left. \frac{\nabla J}{ds} \right|_0 \right) = i(w_0).$$

Según el teorema 8.11,

$$\begin{aligned} \tilde{J}(1) &= d \exp_p |_{i(v)}(i(w_0)_v) = d \exp_p |_{i(v)}(di_v(w_{0v})) = \\ &= d \exp_p |_{i(v)}(di|_v(\exp_p^{-1}(w))) = df_q(w). \end{aligned}$$

Por último, como $\phi_{\gamma(s)}$ es una isometría, resulta que

$$\|df_q(w)\| = \|\tilde{J}(1)\| = \|\phi_q(J(1))\| = \|J(1)\| = \|w\|.$$

Así pues, df_q es un isomorfismo que conserva normas, luego es una isometría, y, por definición, entonces f es una isometría local. ■

Nota Conviene recordar que si $\exp_{p'} : T_{p'}(V') \rightarrow V'$ está definida en todo el espacio tangente, entonces la isometría local f del teorema anterior está definida en cualquier entorno normal de p , y que si $\exp_{p'}$ es un isomorfismo, entonces f es una isometría. ■

Así pues, la métrica de una variedad de Riemann está determinada por el tensor de Riemann y por el transporte paralelo (que define las isometrías ϕ_q). La situación es especialmente simple en el caso de variedades de curvatura constante, pues en tal caso podemos prescindir de las aplicaciones ϕ_q y, por consiguiente, del transporte paralelo:

Teorema 8.19 Sean V y V' dos variedades de Riemann de la misma dimensión y de curvatura constante K . Fijemos puntos $p \in V$ y $p' \in V'$ y una isometría local $i : T_p(V) \rightarrow T_{p'}(V')$. Entonces existe una isometría $f : U \rightarrow U'$ de un entorno de p en un entorno de p' , tal que $f(p) = p'$ y $df|_p = i$.

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que, por el teorema 7.51, la condición sobre el tensor de Riemann del teorema anterior se cumple trivialmente, porque las aplicaciones ϕ_q son isometrías. ■

Observemos que 7.52 es el caso particular de este teorema para $K = 0$. Ahora tenemos en general que todas las variedades de curvatura constante K son indistinguibles localmente, es decir, que alguien que viva, por ejemplo, en una variedad de curvatura 1 no puede saber si vive en una esfera o en un espacio proyectivo observando únicamente los puntos de su alrededor, y alguien que viva en una variedad de curvatura 0 no puede saber si vive en \mathbb{R}^n o en un cilindro n -dimensional.

Veamos ahora un resultado global:

Teorema 8.20 *El cubrimiento universal de toda variedad de Riemann completa y conexa V de curvatura constante 1 es una isometría local $S^n \rightarrow V$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea V una variedad en las condiciones del enunciado y sea $p \in V$. La completitud se traduce en que $\exp_p : T_p(V) \rightarrow V$ está definida en todo el espacio tangente. Por otra parte, consideremos S^n (donde, naturalmente n es la dimensión de V). Si $p_0 \in S^n$ es un punto arbitrario, es claro que $S^n \setminus \{-p_0\}$ es un entorno normal de p_0 , de modo que

$$\exp_{p_0} : B_\pi(0_{p_0}) \rightarrow S^n \setminus \{-p_0\}$$

es un difeomorfismo. Esto hace que la isometría local del teorema 8.19 sea de la forma $f_0 : S^n \setminus \{-p_0\} \rightarrow V$.

Ahora tomamos otro punto $p_1 \in S^n$ distinto de $\pm p_0$ y consideramos la aplicación correspondiente dada por el teorema 8.19 construida a partir de la isometría $i_1 = df_0|_{p_1} : T_{p_1}(S^n) \rightarrow T_{f_0(p_1)}(V)$. Así obtenemos otra isometría local $f_1 : S^n \setminus \{-p_1\} \rightarrow V$, de modo que $f_1(p_1) = f_0(p_1)$ y $df_1|_{p_1} = i_1 = df_0|_{p_1}$.

Así pues, las isometrías locales f_0 y f_1 están ambas definidas en el abierto $S^n \setminus \{-p_0, -p_1\}$ y tienen la misma diferencial en p_1 . El teorema 7.15 nos da que ambas coinciden en su dominio común, luego ambas se extienden a una isometría local $p : S^n \rightarrow V$. El teorema [TA 1.52] nos da que p es un cubrimiento, y como S^n es simplemente conexa, se trata del cubrimiento universal de V . ■

En particular:

Teorema 8.21 *Toda variedad de Riemann completa y simplemente conexa de curvatura constante 1 es isométrica a S^n .*

Obviamente, los dos teoremas precedentes valen para variedades de curvatura constante $K > 0$ sin más que cambiar S^n por la esfera de radio $1/\sqrt{K}$.

La situación es más sencilla para el caso de variedades de curvatura constante ≤ 0 , pero antes de entrar en ello conviene que presentemos un ejemplo de variedad de curvatura constante negativa:

Ejemplo: El espacio hiperbólico Definimos el *espacio hiperbólico* como el abierto $H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ con la métrica que en coordenadas cartesianas viene dada por

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{(x^n)^2}.$$

De momento vamos a trabajar en un contexto ligeramente más general, con una métrica de la forma

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{F^2},$$

donde $F : H^n \rightarrow]0, +\infty[$ es una función diferenciable. La métrica del espacio hiperbólico se obtiene tomando $F = x^n$.

Observemos que $g^{ij} = F^2 \delta_{ij}$. Llamemos $f = \log F$. Observemos que

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = -\frac{2\delta_{ik}}{F^3} \frac{\partial F}{\partial x_j} = -\frac{2\delta_{ik}}{F^2} \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Según (7.4), los símbolos de Christoffel vienen dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} \sum_l \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right) g^{lk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) F^2 \\ &= -\delta_{jk} \frac{\partial f}{\partial x_i} - \delta_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \delta_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

De aquí se sigue que $\Gamma_{ij}^k = 0$ cuando los tres índices son distintos, y en caso contrario

$$\Gamma_{ij}^i = -\frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad \Gamma_{ii}^j = \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad \Gamma_{ij}^j = -\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \Gamma_{ii}^i = -\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

De la expresión

$$R_{ijkl} = \frac{1}{F^2} R_{ijk}^l = \frac{1}{F^2} (\partial_{x_i} \Gamma_{jk}^l - \partial_{x_j} \Gamma_{ik}^l + \sum_u (\Gamma_{iu}^l \Gamma_{jk}^u - \Gamma_{ju}^l \Gamma_{ik}^u))$$

deducimos que si los cuatro índices son distintos, entonces $R_{ijkl} = 0$, pues en todos los términos aparece un símbolo de Christoffel con tres índices distintos. Por otra parte:

$$R_{ijij} = \frac{1}{F^2} \left(\partial_{x_i} \Gamma_{ji}^j - \partial_{x_j} \Gamma_{ii}^j + \sum_l (\Gamma_{il}^j \Gamma_{ji}^l - \Gamma_{jl}^j \Gamma_{ii}^l) \right),$$

luego, para $i \neq j$,

$$\begin{aligned} F^2 R_{ijij} &= -\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{l \neq i, j} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial f}{\partial x_l} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_j} \\ &= -\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} + \sum_{l \neq i, j} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial f}{\partial x_l}. \end{aligned}$$

A su vez:

$$\begin{aligned} K(\langle \partial_{x_i}, \partial_{x_j} \rangle) &= -\frac{R_{ijij}}{g_{ii}g_{jj}} = R_{ijij} F^4 \\ &= -F^2 \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} + \sum_{l \neq i, j} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial f}{\partial x_l} \right). \end{aligned}$$

Dejamos al lector la comprobación de que, cuando hay tres índices distintos,

$$R_{ijki} = \frac{1}{F^2} \left(-\frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \right), \quad R_{ijkj} = \frac{1}{F^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \right),$$

$$R_{ijkk} = 0.$$

Ahora particularizamos al caso de H^n , en que $F = x^n$. Vemos claramente que $R_{ijkl} = 0$ siempre que hay tres o cuatro índices distintos dos a dos. Por otra parte, si $i, j \neq n$ la expresión para la curvatura seccional se reduce a

$$K(\langle \partial_{x_i}, \partial_{x_j} \rangle) = -(x^n)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^2 = -1.$$

Y si $j = n$ queda

$$K(\langle \partial_{x_i}, \partial_{x_n} \rangle) = -(x^n)^2 \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \right) = -1.$$

De aquí se sigue la igualdad

$$R(\partial_{x_i}, \partial_{x_j}, \partial_{x_k}, \partial_{x_l}) = -(\langle \partial_{x_i}, \partial_{x_k} \rangle \langle \partial_{x_j}, \partial_{x_l} \rangle - \langle \partial_{x_i}, \partial_{x_l} \rangle \langle \partial_{x_j}, \partial_{x_k} \rangle)$$

para todos los índices i, j, k, l . En el caso (i, j, i, j) o (i, j, j, i) por el cálculo de las curvaturas seccionales, y en los demás casos porque ambos miembros son nulos. A su vez, esto implica la igualdad

$$R(U, V, W, X) = -(\langle U, W \rangle \langle V, X \rangle - \langle U, X \rangle \langle V, W \rangle)$$

para campos vectoriales arbitrarios, de la cual se sigue a su vez que todas las curvaturas seccionales son iguales a -1 .

Los símbolos de Christoffel no nulos son

$$\Gamma_{in}^i = \Gamma_{ni}^i = -\frac{1}{x^n}, \quad \Gamma_{ii}^n = \frac{1}{x^n} \quad (\text{para } i \neq n),$$

luego la aceleración covariante de una curva $x(t)$ es

$$\begin{aligned} \frac{\nabla x'}{dt} &= \left(\frac{d^2 x^1}{dt^2} - \frac{2}{x^n} \frac{dx^1}{dt} \frac{dx^n}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \left(\frac{d^2 x^{n-1}}{dt^2} - \frac{2}{x^n} \frac{dx^{n-1}}{dt} \frac{dx^n}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^{n-1}} \\ &+ \left(\frac{d^2 x^n}{dt^2} + \frac{1}{x^n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{dx^i}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dx^n}{dt} \right)^2 \right) \right) \frac{\partial}{\partial x^n}. \end{aligned}$$

Por ejemplo, de aquí se sigue que las rectas (parametrizadas por el arco) de la forma $x(t) = (a_1, \dots, a_{n-1}, e^t)$ tienen derivada covariante nula, luego son geodésicas (definidas sobre todo \mathbb{R}).

Consideremos ahora una semicircunferencia con extremos en el hiperplano $x_n = 0$. Será de la forma

$$x(t) = (a_1 + b_1 \cos t, \dots, a_{n-1} + b_{n-1} \cos t, b \sin t), \quad b^2 = b_1^2 + \cdots + b_{n-1}^2.$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \frac{\nabla x'}{dt} &= b_1 \cos t \partial_{x_1} + \cdots + b_{n-1} \cos t \partial_{x_{n-1}} - b \frac{\cos^2 t}{\sin t} \partial_{x_n} \\ &= \frac{\cos t}{\sin t} (b_1 \sin t \partial_{x_1} + \cdots + b_{n-1} \sin t \partial_{x_{n-1}} - b \cos t \partial_{x_n}) = -\frac{\cos t}{\sin t} x'(t). \end{aligned}$$

Según el teorema 7.17, esto prueba que al reparametrizar las semicircunferencias por el arco obtenemos geodésicas. Notemos que el elemento de longitud es

$$ds = \sqrt{1 + \cot^2(t)} dt$$

y, como tiende a ∞ tanto en 0 como en π , es fácil concluir que los dos cuartos de circunferencia definidos sobre $]0, \pi/2]$ y sobre $[\pi/2, \pi[$ tienen ambos longitud infinita, de donde se sigue que las geodésicas correspondientes están definidas sobre todo \mathbb{R} .

Es fácil comprobar que para cada punto $p \in H^n$ y cada $v \in T_p(H^n)$ existe una geodésica de uno de los dos tipos descritos (recta o semicircunferencia) que pasa por p con tangente v , luego, por la unicidad de las geodésicas, éstas son todas las geodésicas de H^n . En particular, como todas ellas están definidas sobre \mathbb{R} , concluimos que H^n es una variedad de Riemann completa.

Más aún, si llamamos *subvariedades hiperbólicas* de H^n a sus subvariedades completas, conexas y totalmente geodésicas (y, en particular, hablamos de rectas y planos hiperbólicos cuando tienen dimensión 1 o 2, respectivamente), una comprobación rutinaria muestra que para cada $p \in H^n$ y cada subespacio vectorial $S \subset T_p(H^n)$ existe una única subvariedad hiperbólica W de H^n tal que $T_p(W) = S$.

En efecto, basta considerar subvariedades de la forma

$$W = V \times]0, +\infty[\subset H^n,$$

donde V es una subvariedad afín de \mathbb{R}^{n-1} , o bien semiesferas de la forma

$$W = (V \times]0, +\infty[) \cap \{p \in H^n \mid \|p - p_0\| = r\},$$

donde $p_0 \in V \times \mathbb{R}$ tiene su última componente nula. (Para ver que son totalmente geodésicas hay que probar que todas las geodésicas de H^n tangentes a W en un punto están contenidas en W .) Por el teorema 7.39 tenemos la unicidad.

Si W es cualquier subvariedad hiperbólica de H^n de dimensión $d \geq 2$, (admitiendo el caso $W = H^n$) y $p \in W$, el teorema 7.46 nos da que también tiene curvatura constante -1 . Por la forma que hemos visto que tienen estas variedades es claro que $\exp_p : T_p(W) \rightarrow W$ es biyectiva y por 8.16 es un difeomorfismo, luego por el teorema 8.19 (teniendo en cuenta la nota posterior a 8.18) concluimos que, para cada isometría $i : T_p(W) \rightarrow T_{p'}(H^d)$, existe una isometría $f : W \rightarrow H^d$ tal que $f(p) = p'$ y $df|_p = i$. Además f es única por 7.15.

De aquí deducimos:

Teorema 8.22 *Si W_1 y W_2 son subvariedades hiperbólicas de H^n de la misma dimensión y $p_1 \in W_1$, $p_2 \in W_2$, existe una isometría $f : H^n \rightarrow H^n$ tal que $f(p_1) = p_2$ y $f[W_1] = W_2$.*

DEMOSTRACIÓN: Fijemos una isometría $T_{p_1}(W_1) \rightarrow T_{p_2}(W_2)$, que a su vez podemos extender a otra isometría $i : T_{p_1}(H^n) \rightarrow T_{p_2}(H^n)$, la cual, por las observaciones precedentes, determina una isometría $f : H^n \rightarrow H^n$ tal que $f(p_1) = p_2$ y $df|_{p_1} = i$. Entonces $f[W_1]$ es una subvariedad hiperbólica tal que $T_{p_2}(f[W_1]) = T_{p_2}(W_2)$. El teorema 7.39 nos da que $f[W_1] = W_2$. ■

En particular, dos subvariedades hiperbólicas de H^n la misma dimensión son isométricas al espacio hiperbólico correspondiente. El hecho de que algunas sean “semiespacios” y otras “semiesferas” en H^n no tiene ningún significado intrínseco.

Nota En [G 11.18] vimos que el plano hiperbólico H^2 es un modelo de la geometría hiperbólica tomando como rectas sus geodésicas [G 11.19]. Más en general, puede comprobarse que H^n satisface todos los axiomas de la geometría euclídea n -dimensional salvo el axioma de las paralelas.² Para ello podemos definir la congruencia de segmentos como $\overline{pq} \equiv \overline{rs}$ si y sólo si existe una isometría que transforma p en r y q en s , y la relación “estar entre” como $p - q - r$ si y sólo si existe una geodésica γ y tres números reales $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ tales que $\gamma(t_1) = p$, $\gamma(t_2) = q$, $\gamma(t_3) = r$. ■

Teorema 8.23 *El cubrimiento universal de toda variedad de Riemann completa y conexa V de curvatura constante -1 es una isometría local $H^n \rightarrow V$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea V una variedad de Riemann completa y conexa de curvatura constante $K = -1$ o bien $K = 0$. Sea $E = H^n$ en el primer caso y $E = \mathbb{R}^n$ en el segundo. En ambos casos, si $p \in E$, tenemos que $\exp_p(E) \rightarrow E$ es un difeomorfismo, luego la isometría local dada por el teorema 8.19 está definida en todo E , es decir, es de la forma $p : E \rightarrow V$. Por 7.37 es un cubrimiento, y como E es simplemente conexo se trata del cubrimiento universal de V . ■

En resumen, hemos probado lo siguiente:

Teorema 8.24 *Toda variedad completa y simplemente conexa de curvatura constante es, salvo un cambio de escala, isométrica a \mathbb{R}^n , S^n o H^n , según si la curvatura es nula, positiva o negativa. Toda variedad completa y conexa de curvatura constante tiene por cubrimiento universal a una de estas tres variedades y el cubrimiento es (siempre salvo un cambio de escala) una isometría local.*

²Un sistema de axiomas es, por ejemplo, el formado por los axiomas de Tarski distintos del axioma de las paralelas (véase mi libro *El álgebra y la geometría elemental*.) La comprobación de todos los axiomas salvo los de dimensión se reduce a través de isometrías al caso del plano hiperbólico, donde ya sabemos que se cumplen. Los de dimensión se comprueban fácilmente una vez se prueba que las variedades afines de la geometría de Tarski son las subvariedades hiperbólicas.

8.4 Las ecuaciones de estructura

En esta sección consideramos una variedad diferencial V en la que hay definido un sistema de referencia $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(V)$. Hay muchas variedades para las que no existe tal sistema de referencia (la esfera S^2 , sin ir más lejos), pero siempre existe uno en un entorno de cada punto (por ejemplo, el asociado a una carta). Más aún, el teorema 4.6 afirma que en una variedad semiriemanniana siempre es posible tomar un sistema de referencia ortonormal en un entorno de cada punto (aunque ya no necesariamente asociado a una carta).

El sistema de referencia determina (y está determinado por) el *sistema de referencia dual* $\theta^1, \dots, \theta^n \in \Lambda(V)$ que cumple $\theta^i(E_k) = \delta_k^i$.

La diferenciabilidad de las formas θ^i se demuestra considerando una carta $x: U \rightarrow \tilde{U}$ alrededor de un punto arbitrario, respecto de la cual $E_i = \sum_j a_i^j \partial_{x_j}$, para ciertas funciones $a_i^j \in C^\infty(U)$, y observando que entonces $\theta^i = \sum_j b_j^i dx^j$, donde (b_j^i) es la matriz inversa de (a_i^j) .

En una variedad diferencial, poco más podemos decir, pero supongamos ahora que en V hay definida una conexión afín D . Entonces

$$D_{E_i} E_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k E_k,$$

para ciertas funciones $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(V)$, que a su vez determinan las formas

$$\theta_j^k = \sum_i \Gamma_{ij}^k \theta^i \in \Lambda^1(V).$$

La conexión D está completamente determinada por las formas θ_j^k (y el sistema de referencia dado), pues en primer lugar

$$D_{E_i} E_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k E_k = \sum_k \theta_j^k(E_i) E_k$$

y, más en general, por linealidad, para todo $X \in \mathfrak{X}(V)$ se cumple que

$$D_X E_j = \sum_k \theta_j^k(X) E_k.$$

A su vez, expresando $Y = \sum_k \theta^k(Y) E_k \in \mathfrak{X}(V)$, un simple cálculo nos da que

$$D_X Y = \sum_k (X(\theta^k(Y)) + \sum_j \theta^j(Y) \theta_j^k(X)) E_k. \quad (8.1)$$

Recíprocamente, dadas formas arbitrarias $\theta_j^k \in \mathfrak{X}(V)$, es fácil ver que la fórmula anterior define una conexión afín D en V , para la cual $\Gamma_{ij}^k = \theta_j^k(E_i)$, por lo que las formas θ_j^k definidas por D son las dadas.

En resumen, fijado un sistema de referencia en V , las conexiones afines en V se corresponden biunívocamente con las matrices (θ_j^k) de formas diferenciales en $\Lambda^1(V)$ a través de la fórmula (8.1).

Teorema 8.25 *La conexión D asociada a unas formas θ_j^k es simétrica si y sólo si éstas satisfacen las relaciones*

$$d\theta^k = \sum_j \theta^j \wedge \theta_j^k.$$

DEMOSTRACIÓN: La fórmula (3.12) se particulariza a

$$d\theta^k(X, Y) = X(\theta^k(Y)) - Y(\theta^k(X)) - \theta^k([X, Y]).$$

Por otra parte, por la definición del producto exterior,

$$(\theta^j \wedge \theta_j^k)(X, Y) = \theta^j(X)\theta_j^k(Y) - \theta^j(Y)\theta_j^k(X).$$

Ahora calculamos

$$\begin{aligned} D_X Y - D_Y X &= \sum_k (X(\theta^k(Y)) - Y(\theta^k(X)) + \sum_j \theta^j(Y)\theta_j^k(X) - \theta^j(X)\theta_j^k(Y))E_k \\ &= \sum_k (\theta^k([X, Y]) + d\theta^k(X, Y) - \sum_j (\theta^j \wedge \theta_j^k)(X, Y))E_k \\ &= [X, Y] + \sum_k (d\theta^k(X, Y) - \sum_j (\theta^j \wedge \theta_j^k)(X, Y))E_k, \end{aligned}$$

de donde se sigue inmediatamente la equivalencia del enunciado. \blacksquare

Conviene señalar que una conexión simétrica no cumplirá $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ a menos que $[E_i, E_j] = 0$.

Similarmente caracterizamos la compatibilidad con un tensor métrico:

Teorema 8.26 *Si V es una variedad semirriemanniana y $g_{ij} = \langle E_i, E_j \rangle$, entonces la conexión asociada a unas formas θ_j^k es compatible con el tensor métrico si y sólo si*

$$dg_{ij} = \sum_k (\theta_i^k g_{kj} + \theta_j^k g_{ki}).$$

DEMOSTRACIÓN: Cambiando el índice j por i , la ecuación (8.1) se convierte en

$$D_X Y = \sum_k (X(\theta^k(Y)) + \sum_i \theta^i(Y)\theta_i^k(X))E_k.$$

Ahora multiplicamos por $Z = \sum_j \theta^j(Z)E_j$, y así obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle D_X Y, X \rangle &= \sum_{kj} (X(\theta^k(Y)) + \sum_i \theta^i(Y)\theta_i^k(X))\theta^j(Z)g_{kj} \\ &= \sum_{kj} X(\theta^k(Y))\theta^j(Z)g_{kj} + \sum_{ij} \theta^i(Y)\theta^j(Z) \sum_k \theta_i^k(X)g_{kj} \\ &= \sum_{ij} X(\theta^i(Y))\theta^j(Z)g_{ij} + \sum_{ij} \theta^i(Y)\theta^j(Z) \sum_k \theta_i^k(X)g_{kj}. \end{aligned}$$

Desarrollamos análogamente $\langle Y, D_X Z \rangle$ y sumamos, con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} \langle D_X Y, X \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle &= \sum_{ij} (X(\theta^i(Y))\theta^j(Z)g_{ij} + \theta^i(Y)X(\theta^j(Z))g_{ij} \\ &\quad + \theta^i(Y)\theta^j(Z) \sum_k (\theta_i^k(X)g_{kj} + \theta_j^k(X)g_{ki})). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} X(\langle Y, Z \rangle) &= \sum_{ij} X(\theta^i(Y)\theta^j(Z)g_{ij}) \\ &= \sum_{ij} (X(\theta^i(Y))\theta^j(Z)g_{ij} + \theta^i(Y)X(\theta^j(Z))g_{ij} + \theta^i(Y)\theta^j(Z)X(g_{ij})). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta además que $X(g_{ij}) = dg_{ij}(X)$, la igualdad

$$X(\langle Y, Z \rangle) = \langle D_X Y, X \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle$$

es equivalente a

$$\sum_{ij} \theta^i(Y)X(\theta^j(Z))(dg_{ij}(X) - \sum_k (\theta_i^k(X)g_{kj} + \theta_j^k(X)g_{ki})) = 0.$$

Haciendo que Y, Z recorran los campos E_i, E_j , vemos que esta igualdad implica que

$$dg_{ij}(X) - \sum_k (\theta_i^k(X)g_{kj} + \theta_j^k(X)g_{ki}) = 0$$

y, recíprocamente, si se da esta igualdad para todo campo X , se tiene la precedente para todos los campos Y, Z . Por lo tanto, la compatibilidad de D con el tensor métrico equivale a que esta última ecuación se cumpla para todo campo X , lo cual es precisamente lo que afirma el enunciado. ■

Así pues, en una variedad semirriemanniana sobre la que haya definido un sistema de referencia, la conexión de Levi-Civita está determinada por unas formas que reciben el nombre de *formas de conexión* y que satisfacen las ecuaciones:

$$d\theta^k = \sum_j \theta^j \wedge \theta_j^k, \quad dg_{ij} = \sum_k (\theta_i^k g_{kj} + \theta_j^k g_{ki}).$$

Cuando el sistema de referencia es ortonormal es costumbre escribir ω^k, ω_j^k en lugar de θ^k, θ_j^k para el sistema de referencia dual y las formas de conexión, y en tal caso las ecuaciones precedentes se convierten en

$$d\omega^k = \sum_j \omega^j \wedge \omega_j^k, \quad \omega_i^j = -\omega_j^i.$$

Ahora consideramos las componentes del tensor de Riemann en el sistema de referencia dado: $R(E_i, E_j)(E_k) = \sum_l R_{ijl}^l E_l$ y definimos las *formas de curvatura*:

$$\Omega_k^l = \sum_{i < j} R_{ijk}^l \theta^i \wedge \theta^j = \frac{1}{2} \sum_{ij} R_{ijk}^l \theta^i \wedge \theta^j \in \Lambda^2(V).$$

Así

$$R(E_i, E_j)(E_k) = \sum_l R_{ijl}^k E_l = \sum_l \Omega_k^l(E_i, E_j) E_l$$

y por bilinealidad, para todos los campos $X, Y \in \mathfrak{X}(V)$, se cumple que

$$R(X, Y)(E_k) = \sum_l \Omega_k^l(X, Y) E_l,$$

de modo que $(\Omega_k^l(X, Y))$ es, en cada punto p , la matriz del endomorfismo $R_p(X, Y)$, por lo que las formas de curvatura determinan el tensor de Riemann. Claramente $\Omega_k^l(X, Y) = -\Omega_k^l(Y, X)$.

Teorema 8.27 *Si V es una variedad semirriemanniana en la que hay definido un sistema de referencia, se cumple que*

$$d\theta_i^j = \Omega_i^j + \sum_k \theta_i^k \wedge \theta_k^j.$$

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que probar que ambos miembros actúan igual sobre un par de campos vectoriales X, Y , es decir, que

$$\Omega_i^j(X, Y) = d\theta_i^j(X, Y) - \sum_k (\theta_i^k \wedge \theta_k^j)(X, Y).$$

A su vez, esto equivale a que

$$R(X, Y)(E_i) = \sum_j \Omega_i^j(X, Y) E_j = \sum_j (d\theta_i^j(X, Y) - \sum_k (\theta_i^k \wedge \theta_k^j)(X, Y)) E_j.$$

Por definición,

$$\begin{aligned} R(X, Y)(E_i) &= \nabla_X(\nabla_Y E_i) - \nabla_Y(\nabla_X E_i) - \nabla_{[X, Y]} E_i \\ &= \nabla_X(\sum_j \theta_i^j(Y) E_j) - \nabla_Y(\sum_j \theta_i^j(X) E_j) - \sum_j \theta_i^j(\nabla_{[X, Y]}) E_j \\ &= \sum_j (X(\theta_i^j(Y)) E_j + \theta_i^j(Y) \nabla_X E_j - Y(\theta_i^j(X)) E_j - \theta_i^j(X) \nabla_Y E_j) - \sum_j \theta_i^j(\nabla_{[X, Y]}) E_j. \end{aligned}$$

Ahora usamos la fórmula (3.12):

$$\begin{aligned} &= \sum_j (d\theta_i^j(X, Y) E_j + \theta_i^j(Y) \sum_k \theta_j^k(X) E_k - \theta_i^j(X) \sum_k \theta_j^k(Y) E_k) \\ &= \sum_j (d\theta_i^j(X, Y) E_j + \sum_k (\theta_i^j(Y) \theta_j^k(X) - \theta_i^j(X) \theta_j^k(Y)) E_k) \\ &= \sum_j d\theta_i^j(X, Y) E_j - \sum_{jk} (\theta_i^j \wedge \theta_k^j)(X, Y) E_k \\ &= \sum_j d\theta_i^j(X, Y) E_j - \sum_{jk} (\theta_i^k \wedge \theta_k^j)(X, Y) E_j. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Recapitulamos los resultados que hemos obtenido para el caso de un sistema de referencia ortonormal:

Teorema 8.28 (Ecuaciones estructurales de Cartan) *Todo sistema de referencia ortonormal en una variedad semirriemanniana V determina unívocamente unas formas diferenciales que cumplen:*

1. $d\omega^i = \sum_j \omega^j \wedge \omega_j^i$.
2. $\omega_i^j = -\omega_j^i$.
3. $d\omega_i^j = \Omega_i^j + \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j$.

Muchos resultados de la geometría semirriemanniana que ya hemos probado admiten demostraciones alternativas a través de las ecuaciones estructurales. Veamos como ejemplo un resultado que no hemos probado anteriormente:

Teorema 8.29 *Sea V una variedad de Riemann conexa de dimensión ≥ 3 tal que todas las curvaturas seccionales en cada punto coincidan entre sí (pero no suponemos que coincidan en puntos distintos). Entonces V tiene curvatura constante.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $K \in C^\infty(V)$ la función tal que las curvaturas seccionales en el punto p valen K_p . Tenemos que probar que K es constante. Por la conexión basta ver que es localmente constante. Para ello tomamos, alrededor de un punto arbitrario, un entorno conexo en el que haya definido un sistema de referencia ortonormal E_1, \dots, E_n . Veamos en primer lugar que, una ligera variante del argumento empleado tras la definición 7.48 muestra que

$$R(U, V, W, X) = -K(\langle U, W \rangle \langle V, X \rangle - \langle U, X \rangle \langle V, W \rangle).$$

En efecto, si llamamos $R'(U, V, W, X)$ al miembro derecho y definimos a su vez $R'_2(U, V) = R'(U, V, U, V)$, tenemos que R' (como R) satisface las propiedades 1–4 enunciadas antes de la definición 7.41, y esto basta para que le sea aplicable la prueba del teorema 7.42, de modo que para probar que $R = R'$ basta ver que $R_2 = R'_2$. Ahora bien, esto se debe a que, por la definición de curvatura seccional,

$$R_2(U, V) = -K(\langle U, U \rangle \langle V, V \rangle - \langle U, V \rangle^2) = R'_2(U, V).$$

En particular,

$$R_{ijkl}^l = R_{ijkl} = R(E_i, E_j, E_k, E_l) = -K(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}).$$

Por lo tanto:

$$\Omega_k^l = \frac{1}{2} \sum_{ij} R_{ijk}^l \omega^i \wedge \omega^j = -K \omega^k \wedge \omega^l.$$

Ahora calculamos la diferencial exterior de la tercera ecuación estructural:

$$\begin{aligned} 0 &= d\Omega_i^j + \sum_k (d\omega_i^k \wedge \omega_k^j - \omega_i^k \wedge d\omega_k^j) \\ &= -dK \wedge \omega^i \wedge \omega^j - K d\omega^i \wedge \omega^j + K \omega^i \wedge d\omega^j + \sum_k (d\omega_i^k \wedge \omega_k^j - \omega_i^k \wedge d\omega_k^j). \end{aligned}$$

Al sustituir los valores de las diferenciales usando las ecuaciones estructurales primera y la tercera y simplificar, la expresión se reduce a $dK \wedge \omega^i \wedge \omega^j = 0$. Por otra parte, podemos expresar

$$dK = f_1 \omega^1 + \cdots + f_n \omega^n$$

y las formas $\omega^k \wedge \omega^i \wedge \omega^j$ (para $i < j$ fijos y $k \neq i, j$) son linealmente independientes, lo que nos da que todos los f_k con $k \neq i, j$ son nulos, y como esto vale para todo $i < j$, todos los f_k son nulos y $dK = 0$, luego K es constante. ■

En particular hemos probado lo siguiente:

Teorema 8.30 *En una variedad semiriemanniana en la que está definido un sistema de referencia ortonormal, la curvatura es constante K si y sólo si las formas de curvatura son $\Omega_i^j = -K\omega^i \wedge \omega^j$.*

8.5 El teorema de Gauss-Bonnet

En [G] vimos que la suma de los ángulos de un triángulo hiperbólico (cuyos lados sean geodésicas) es siempre menor que π , mientras que la de un triángulo esférico es siempre mayor que π y, más aún, que la diferencia es en ambos casos el área del triángulo. Ahora vamos a probar un resultado mucho más general que incluye a estos casos particulares. La clave es la consecuencia siguiente de las ecuaciones estructurales:

Teorema 8.31 *Si V es una superficie que puede cubrirse por un sistema de referencia ortonormal, entonces*

$$d\omega_1^2 = \Omega_1^2 = -K\omega^1 \wedge \omega^2,$$

donde K es la curvatura de Gauss (y claramente $d\sigma = \omega^1 \wedge \omega^2$ es el elemento de área de V).

DEMOSTRACIÓN: En principio tenemos que

$$d\omega_1^2 = \Omega_1^2 + \omega_1^1 \wedge \omega_1^2 + \omega_1^2 \wedge \omega_2^2 = \Omega_1^2,$$

pues la segunda ecuación estructural implica que $\omega_1^1 = \omega_2^2 = 0$. Por otra parte, según la definición 7.48:

$$K = -\langle R(E_1, E_2)(E_1), E_2 \rangle =$$

$$-\langle \Omega_1^1(E_1, E_2)E_1 + \Omega_1^2(E_1, E_2)E_2, E_2 \rangle = -\Omega_1^2(E_1, E_2),$$

y, como Ω_1^1 es antisimétrica, $\Omega_1^2 = \Omega_1^2(E_1, E_2)\omega^1 \wedge \omega^2 = -K\omega^1 \wedge \omega^2$. ■

Esto nos dice que la forma diferencial $K d\sigma = -d\omega_1^2 = d\omega_2^1$ es exacta, por lo que le podemos aplicar el teorema de Stokes para obtener una expresión para la integral de la curvatura de Gauss en un recinto en términos de la integral de la forma ω_2^1 en su frontera. Antes de entrar en ello introduciremos algunos conceptos para encontrar el significado geométrico de tal integral.

Definición 8.32 Sea α una curva regular en una superficie de Riemann orientada V y sea $N \in \mathfrak{X}(V)_\alpha$ el campo vectorial unitario normal a α' y tal que la base α', N esté orientada en cada punto. Definimos la *curvatura geodésica* de α como $\kappa = \langle \nabla \alpha' / dt, N \rangle$.

Equivalentemente, la curvatura geodésica es el módulo de la componente normal de la velocidad de α (medida sobre V), salvo que la hemos dotado de un signo que indica el sentido de giro. En el caso en que $V = \mathbb{R}^2$, es positivo cuando α gira en sentido antihorario y negativo si gira en sentido horario.

Supongamos que V puede cubrirse por un sistema de referencia E_1, E_2 , que podemos tomar ortonormal y orientado y consideremos una curva regular α parametrizada por el arco. Entonces, $u = \langle \alpha', E_1 \rangle$ y $v = \langle \alpha', E_2 \rangle$ son funciones diferenciables tales que $\alpha' = uE_1 + vE_2$. Si el dominio de α es un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, entonces la aplicación $I \rightarrow S^1$ dada por $t \mapsto (u(t), v(t))$ se eleva³ a una aplicación diferenciable $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha(t) = \cos \theta(t) E_1(\alpha(t)) + \sin \theta(t) E_2(\alpha(t)),$$

$$N(t) = -\sin \theta(t) E_1(\alpha(t)) + \cos \theta(t) E_2(\alpha(t)),$$

y θ está unívocamente determinada salvo múltiplos de 2π . Observemos que $\theta(t)$ es el ángulo que α' forma con E_1 .

Ahora calculamos

$$\frac{\nabla \alpha'}{dt} = -\sin \theta \theta' E_1 + \cos \theta \nabla_{\alpha'} E_1 + \cos \theta \theta' E_2 + \sin \theta \nabla_{\gamma'} E_2.$$

Ahora usamos que, por definición, $\nabla_X E_i = \omega_i^1 E_1 + \omega_i^2 E_2$, luego

$$\begin{aligned} \frac{\nabla \alpha'}{dt} &= -\sin \theta \theta' E_1 + \cos \theta \omega_1^2(\alpha') E_2 + \cos \theta \theta' E_2 + \sin \theta \omega_2^1(\alpha') E_1 = \\ &= -\sin \theta \theta' E_1 - \cos \theta \omega_2^1(\alpha') E_2 + \cos \theta \theta' E_2 + \sin \theta \omega_2^1(\alpha') E_1 = (\theta' - \omega_2^1(\alpha')) N. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la curvatura normal de α es $\kappa = \theta' - \omega_2^1(\alpha')$.

Incidentalmente, esto prueba que θ' no depende de la elección del sistema de referencia ortonormal E_1, E_2 . Ahora también es inmediato que una curva regular parametrizada por el arco es una geodésica si y sólo si su curvatura normal es nula en todo punto.

Definición 8.33 Sea V una superficie de Riemann orientada cubierta por una única carta. Un *polígono curvilíneo* en V es un abierto $P \subset V$ de clausura compacta cuya frontera pueda parametrizarse por un arco $\alpha : [a, b] \rightarrow V$ cerrado, simple y regular a trozos. Cerrado significa que $\alpha(a) = \alpha(b)$ y simple que $\alpha|_{[a, b]}$ es inyectiva.

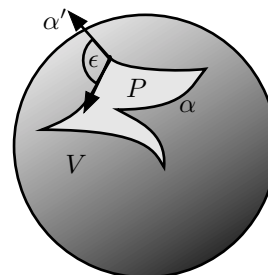
³Por el teorema [TA 8.9], teniendo en cuenta la nota posterior, que garantiza que la elevación es diferenciable.

El arco α se puede tomar siempre parametrizado por el arco. Los puntos $\alpha(t)$ tales que α no es regular en t (incluyendo $\alpha(a) = \alpha(b)$ si la concatenación de α consigo misma no es regular en b) se llaman *vértices* de P . Cabe la posibilidad de que P no tenga vértices, pero, si los tiene, modificando α podemos exigir que uno de ellos sea $\alpha(a) = \alpha(b)$, con lo que tenemos una partición

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$$

tal que los vértices de P son precisamente los puntos $\alpha(t_i)$. Los arcos regulares $\alpha_i = \alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ se llaman *lados* de P .

Si llamamos ∂P al conjunto de los puntos de la frontera topológica de P distintos de los $\alpha(t_i)$, el teorema 3.43 implica que $P \cup \partial P$ es una variedad con frontera. Podemos elegir el sentido de α de modo que α' sea positivo respecto a la orientación que P induce en ∂P (donde a su vez la orientación de P es la inducida por la orientación de V). Notemos que esta orientación no sólo depende de V , sino también de P , pues es la orientación respecto a la cual, para cada punto $\alpha(t)$, el vector normal a ∂P que apunta hacia afuera de P forma una base orientada de $T_{\alpha(t)}(V)$ cuando se completa con $\alpha'(t)$.



Definimos el ángulo exterior $-\pi < \epsilon_i < \pi$ de α en t_i como el ángulo que forman los vectores $\alpha'_i(t_i)$, $\alpha'_{i+1}(t_i)$, con signo positivo si forman una base orientada de $T_{\alpha(t_i)}(V)$ y negativo en caso contrario. Si $\alpha'_i(t_i) = \alpha'_{i+1}(t_i)$ entendemos que dicho ángulo es 0 y, para evitar el problema de la elección de signo cuando $\alpha'_i(t_i) = -\alpha'_{i+1}(t_i)$, es decir, cuando α tiene una *cúspide* en t_i , vamos a excluir, por definición, este caso de la definición de polígono curvilíneo, como hicimos en la sección 8.3 de [TA]:

En lo sucesivo consideraremos como parte de la definición de polígono curvilíneo que el arco α que parametriza su frontera no tenga cúspides, es decir, no exista ningún punto $\alpha(t)$ donde $\alpha'_-(t) = \lambda \alpha'_+(t)$, con $\lambda < 0$.

Ahora podemos generalizar el teorema del giro de la tangente [TA 8.20]:

Teorema 8.34 (Teorema del giro de la tangente) *Sea P un polígono curvilíneo en una superficie de Riemann orientada V cubierta por una sola carta, sea $\alpha : [a, b] \rightarrow V$ la curva cerrada regular a trozos parametrizada por el arco que recorre su frontera, sea $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ la partición de $[a, b]$ tal que los lados $\alpha_i = \alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$ son regulares, sea θ_i una determinación continua del ángulo que α'_i forma con el vector E_1 de un sistema de referencia ortonormal orientado de V y sean $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ los ángulos exteriores de P . Entonces*

$$\sum_{i=1}^m (\theta_i(t_i) - \theta_i(t_{i-1})) + \sum_{i=1}^m \epsilon_i = 2\pi.$$

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $G(\alpha)$ al miembro izquierdo de la igualdad del enunciado, y vamos a probar en primer lugar que tiene que ser un múltiplo de 2π . El argumento es el mismo que en el caso de \mathbb{R}^2 . Sea E_1, E_2 un sistema de referencia ortonormal en V .

Construimos como sigue una función $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Partimos de la elevación $\theta_1 : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ de α_1 , pero la modificamos en t_1 sumándole ϵ_1 . De este modo $\alpha'_2(t_1) = \cos \theta(t_1)E_1 + \sin \theta(t_1)E_2$ y $\theta(t_1) - \theta(t_0) = \theta_1(t_1) - \theta_1(t_0) + \epsilon_1$. Seguidamente extendemos θ hasta $[t_0, t_2]$ con la elevación de α'_2 que parte de $\theta(t_1)$, pero la modificamos en t_2 sumándole ϵ_2 . Continuando de este modo llegamos a una función θ tal que $\theta(t_i) - \theta(t_{i-1}) = \theta_i(t_i) - \theta_i(t_{i-1}) + \epsilon_i$, luego $G(\alpha) = \theta(b) - \theta(a)$ y además

$$\alpha'_1(t_0) = \cos \theta(a)E_1 + \sin \theta(a)E_2 = \cos \theta(b)E_1 + \sin \theta(b)E_2,$$

por lo que $\theta(b) - \theta(a)$ es múltiplo de 2π .

La definición que hemos dado de polígono curvilíneo en V hace que al transformar P mediante la carta considerada obtengamos un polígono curvilíneo \bar{P} en un abierto U de \mathbb{R}^2 según la definición considerada en la sección [TA 8.3]. No obstante, hay que tener presente que la carta no es necesariamente una isometría, por lo que los giros $G(\alpha_i) = \theta_i(t_i) - \theta_i(t_{i-1})$ y los ángulos ϵ_i no tienen por qué coincidir con sus correspondientes en \bar{P} , así que el hecho de que sepamos que \bar{P} cumple el teorema del giro de la tangente no implica en principio que P lo tenga que cumplir.

Llamemos g_0 al tensor de Riemann usual en U y g_1 a la imagen por la carta del tensor de Riemann de V . De este modo, sobre la misma variedad diferencial U tenemos dos estructuras de variedad de Riemann, y es claro que si $0 \leq s \leq 1$ el tensor $g_s = (1-s)g_0 + sg_1$ es también un tensor de Riemann en U , con lo que ahora tenemos infinitas estructuras de variedad de Riemann.

Observemos que la parametrización por el arco $\bar{\alpha}_s : [a, b(s)] \rightarrow \mathbb{R}$ de la frontera de \bar{P} será distinta respecto de cada métrica y, aunque \bar{P} tendrá los mismos vértices respecto de todas ellas, éstos no tienen por qué tener asignados los mismos parámetros, sino que tendremos que distinguir

$$a = t_0(s) < t_1(s) < \dots < t_m(s) = b(s).$$

Para cada s podemos calcular el $G_s(\bar{\alpha}_s)$ correspondiente. Por el teorema ya probado para \mathbb{R}^2 sabemos que $G_0(\bar{\alpha}_0) = 2\pi$ y lo que queremos probar es que también $G(\alpha) = G_1(\bar{\alpha}_1) = 2\pi$. Para ello basta probar que la aplicación $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $s \mapsto G_s(\bar{\alpha}_s)$ es continua, pues como sólo puede tomar valores múltiplos de 2π , tendrá que ser constante.

A su vez, descomponemos

$$G(\bar{\alpha}_s) = \sum_{i=1}^m G_i(s) + \sum_{i=1}^m \epsilon_i(s),$$

donde $G_i(s) = G((\bar{\alpha}_s)_i)$ es el giro de la tangente de $(\bar{\alpha}_s)_i$ y $\epsilon_i(s)$ es el ángulo exterior del i -ésimo vértice de \bar{P} , medido respecto de g_s . Basta probar que cada uno de los sumandos es continuo.

A partir de la carta de U correspondiente a las coordenadas cartesianas podemos formar un sistema de referencia ortonormal $E_1(s), E_2(s)$ para g_s por el procedimiento de Gram-Schmidt, y las aplicaciones $E_i : [0, 1] \times U \rightarrow TU$ son continuas. Esto puede probarse sin más que calcular las expresiones explícitas:

$$E_1(s) = \|\partial_x\|_s^{-1} \partial_x,$$

$$E_2(s) = (\|\partial_y\|_s^2 - \|\partial_x\|_s^{-2} \langle \partial_x, \partial_y \rangle_s^2)^{-1} (-\langle \partial_x, \partial_y \rangle_s \|\partial_x\|_s^{-2} \partial_x + \partial_y).$$

Si las dos derivadas de $\bar{\alpha}_0$ en un vértice son opuestas, entonces $\epsilon_i(s) = \pm\pi$ es independiente de s , luego la aplicación $s \mapsto \epsilon_i(s)$ es trivialmente continua. En otro caso,

$$\epsilon_i(s) = \arccos \langle (\bar{\alpha}_s)'_i(t_i(s)), (\bar{\alpha}_s)'_i(t_{i+1}(s)) \rangle_s =$$

$$\arccos \langle \|\bar{\alpha}_0\|_s^{-1} (\bar{\alpha}_0)'_i(t_i(0)), \|\bar{\alpha}_0\|_s^{-1} (\bar{\alpha}_0)'_i(t_{i+1}(0)) \rangle_s$$

también es una aplicación continua.

Veamos por último la continuidad de las aplicaciones $G_i(s)$. Por simplificar la notación vamos a considerar $i = 1$ y llamaremos $\bar{\alpha}_s = (\bar{\alpha}_s)_1$. Lo que queremos probar depende exclusivamente del lado $\bar{\alpha}_0$ (y sus reparametrizaciones), por lo que podemos prescindir de su relación con \bar{P} y el resto de su frontera. Así, podemos considerar que $\bar{\alpha}_0 : [u, v] \rightarrow U$. La función

$$L(s) = \int_u^v \|\bar{\alpha}'_0(t)\|_s dt$$

es continua, y el conjunto $C = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq L(s)\}$ es compacto. Si llamamos

$$t(s, \bar{t}) = \int_u^{\bar{t}} \|\bar{\alpha}'_0(t)\|_s dt,$$

tenemos que la función $[0, 1] \times [u, v] \rightarrow C$ dada por $(s, \bar{t}) \mapsto (s, t(s, \bar{t}))$ es biyectiva y continua, luego es un homeomorfismo. Su inversa es $(s, t) \mapsto (s, \bar{t}(s, t))$, donde $\bar{t}(s, t)$ es la reparametrización de $\bar{\alpha}_0$ por el arco respecto de g_s , es decir, que

$$\bar{\alpha}_s(t) = \bar{\alpha}_0(\bar{t}(s, t)).$$

Ahora definimos

$$\begin{aligned} u(s, t) &= \langle \bar{\alpha}'_s(t), E_1(s)(\bar{\alpha}_s(t)) \rangle_s = \\ &= \langle \|\bar{\alpha}'_0(\bar{t}(s, t))\|^{-1} \bar{\alpha}'_0(\bar{t}(s, t)), E_1(s)(\bar{\alpha}_0(\bar{t}(s, t))) \rangle_s, \\ v(s, t) &= \langle \bar{\alpha}'_s(t), E_2(s)(\bar{\alpha}_s(t)) \rangle_s = \\ &= \langle \|\bar{\alpha}'_0(\bar{t}(s, t))\|^{-1} \bar{\alpha}'_0(\bar{t}(s, t)), E_2(s)(\bar{\alpha}_0(\bar{t}(s, t))) \rangle_s, \end{aligned}$$

de modo que $\bar{\alpha}'_s(t) = u(s, t)E_1(s)(\bar{\alpha}_s(t)) + v(s, t)E_2(s)(\bar{\alpha}_s(t))$.

La función $C \rightarrow S^1$ dada por $(s, t) \mapsto (u(s, t), v(s, t))$ es continua, y es fácil ver que C es simplemente conexo (porque es homeomorfo a un rectángulo),

luego por [TA 8.9] tenemos que C se eleva al cubrimiento $\theta \mapsto (\cos \theta, \text{sen } \theta)$, es decir, que existe una aplicación continua $\theta(s, t)$ definida sobre C tal que

$$\alpha'_s(t) = \cos \theta(s, t)E_1(s)(\bar{\alpha}_s(t)) + \text{sen } \theta(s, t)E_2(s)(\bar{\alpha}_s(t)).$$

Esto implica que $G_1(s) = \theta(s, L(s)) - \theta(s, 0)$ es continua. ■

Con esto ya es fácil demostrar una primera versión local del resultado que perseguimos:

Teorema 8.35 (Gauss-Bonnet) *Si P es un polígono curvilíneo en una superficie de Riemann orientada V cubierta por una sola carta, $\alpha : [a, b] \rightarrow V$ es la curva cerrada regular a trozos que recorre su frontera con la orientación inducida desde P y $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ son sus ángulos exteriores, entonces*

$$\int_P K d\sigma + \int_a^b \kappa(t) dt + \sum_{i=1}^m \epsilon_i = 2\pi,$$

donde K es la curvatura de Gauss de V y κ la curvatura geodésica de α .

DEMOSTRACIÓN: Consideremos las funciones θ_i según el teorema anterior. Sabemos que la curvatura normal de α_i satisface la relación $\kappa(t) = \theta'_i - \omega_2^1(\alpha')$. Por otra parte hemos visto que la curvatura de Gauss cumple $K d\sigma = d\omega_2^1$, luego por el teorema de Stokes con singularidades resulta que⁴

$$\begin{aligned} \int_P K d\sigma &= \sum_{i=1}^m \int_{\alpha_i} \omega_2^1 = \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \omega_2^1(\alpha'(t)) dt = \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} (\theta'_i(t) - \kappa(t)) dt \\ &= \sum_{i=1}^m (\theta_i(t_i) - \theta_i(t_{i-1})) - \int_a^b \kappa(t) dt = 2\pi - \sum_{i=1}^m \epsilon_i - \int_a^b \kappa(t) dt. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Si sustituimos los ángulos exteriores por los interiores: $\delta_i = \pi - \epsilon_i$, obtenemos una expresión para la suma de los ángulos interiores de un polígono curvilíneo:

$$\sum_{i=1}^m \delta_i = (m - 2)\pi + \int_P K d\sigma + \int_a^b \kappa(t) dt.$$

Si los lados son geodésicas desaparece el último término, y si la curvatura es ± 1 entonces el segundo término se reduce a \pm el área de P .

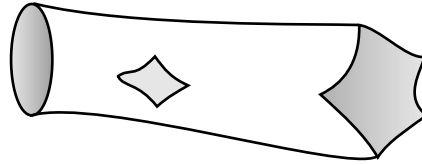
Seguidamente veremos que la hipótesis de que el polígono curvilíneo esté contenido en un abierto coordenado puede eliminarse. Para ello necesitamos algunas definiciones. En primer lugar necesitamos una noción más general que la de polígono curvilíneo:

⁴El teorema de Stokes con singularidades lo hemos demostrado para abiertos en \mathbb{R}^n , pero podemos transportar P , K , $d\sigma$ y γ al dominio de una carta de V , aplicar allí el teorema y volver a V .

Definición 8.36 Una *región regular* en una superficie de Riemann orientada V es un abierto $R \subset V$ que cumpla las propiedades siguientes:

- R es conexo.
- Su clausura \overline{R} es compacta.
- ∂R es la unión de (las imágenes de) un número finito de arcos cerrados, simples, regulares a trozos, sin cúspides y disjuntos dos a dos.

Si V es compacta, consideraremos que $R = V$ es una región regular con frontera vacía. La figura muestra un ejemplo de región regular en una superficie.



Podemos definir los vértices, los lados y los ángulos interiores y exteriores en los vértices de una región regular exactamente igual que en el caso de los polígonos curvilíneos, pero ahora vamos a adoptar el convenio siguiente:

Si R es una región regular en una superficie de Riemann orientada V y $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ son los arcos disjuntos que parametrizan ∂R (que podemos suponer parametrizados por el arco), llamaremos vértices de V a cualquier conjunto finito de puntos de ∂V que contenga al menos a todos los vértices (en el sentido precedente) $\alpha_j(t)$ donde α_j no es de clase C^1 , es decir, donde las derivadas de $\alpha_j(t)$ por la izquierda y por la derecha no coinciden.

Esto supone, por una parte, que no consideraremos necesariamente como vértices los puntos $\alpha_j(t)$ donde un α_j no es regular, pero donde las derivadas laterales coinciden, con lo que el ángulo exterior es nulo y el interior vale π . Por otra parte, cualquier punto $\alpha_j(t)$ donde α_j es regular puede considerarse como vértice de R si así resulta conveniente (y las definiciones de ángulo interior y exterior dan en este caso que el ángulo exterior es nulo y el interior vale π). Con este convenio, si $\alpha_j : [a_j, b_j] \rightarrow V$, tenemos una partición

$$a_j = t_{j0} < t_{j1} < \dots < t_{j,m_j} = b_j$$

de modo que los vértices de V son los puntos $\alpha_j(t_{ji})$ y, respecto a esta elección de vértices, los lados son los arcos $\alpha_j|_{[t_{j,i-1}, t_{j,i}]}$ son regulares a trozos, pero ahora ya no podemos asegurar que sean regulares, sino únicamente de clase C^1 .

Un *triángulo* T en una superficie de Riemann orientada V es un polígono curvilíneo en V con tres vértices y tal que \overline{T} es homeomorfo a una bola cerrada en \mathbb{R}^2 a través de un homeomorfismo que hace corresponder T con la bola abierta.

Una *triangulación* de una región regular R de una superficie diferencial S es un conjunto finito \mathcal{T} de triángulos que cumplan las condiciones siguientes:

- Las clausuras de los triángulos de \mathcal{T} cubren \overline{R} .
- La intersección de las clausuras de dos triángulos de \mathcal{T} (o de un triángulo de \mathcal{T} y ∂R) es vacía, consiste en un único vértice común o bien en un lado común.
- Cada vértice de ∂R es el vértice de al menos uno de los triángulos.

Teniendo en cuenta que el triángulo

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

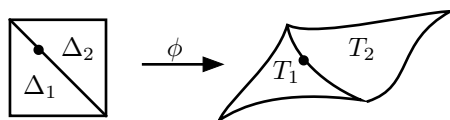
es homeomorfo a una bola cerrada en \mathbb{R}^2 , un triángulo en V en el sentido que acabamos de definir no es más que la imagen de un triángulo en el sentido de [TA 2.25] con el requisito adicional de que la su frontera admita una parametrización por un arco regular a trozos con tres vértices (entendiendo que puede haber más no considerados como tales con tal de que los ángulos exteriores sean nulos).

En [TA 2.29] se demuestra que toda superficie topológica es triangulable. En la sección 8.6 mostramos cómo se puede adaptar la demostración para probar que toda región regular R en una superficie diferencial S es triangulable en el sentido que acabamos de introducir (teorema 8.46)

Veamos algunas propiedades topológicas de las triangulaciones:

Teorema 8.37 *Si \mathcal{T} es una triangulación de una región regular R de una superficie de Riemann orientada V , entonces cada lado de un triángulo de \mathcal{T} contenido en R (salvo tal vez sus extremos) es compartido exactamente por dos triángulos, mientras que los lados contenidos en ∂R pertenecen a un único triángulo.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que un punto $p \in \overline{R}$ está en el lado común a dos triángulos T_1 y T_2 (y no es un vértice). Podemos definir homeomorfismos entre cada lado de T_1 y T_2 y los lados de un cuadrado y una de sus diagonales, de modo que el lado común se corresponda con la diagonal (no necesitamos que guarden ninguna relación con las parametrizaciones regulares a trozos de las fronteras de los triángulos). Podemos hacerlo de modo que la imagen de cada extremo común a dos lados sea la misma por los dos homeomorfismos correspondientes, y esto hace que todos ellos determinen un homeomorfismo ϕ entre las fronteras de los dos pares de triángulos.



El hecho de que todo homeomorfismo entre dos circunferencias se pueda extender a un homeomorfismo entre los círculos correspondientes implica que todo homeomorfismo entre las fronteras de dos triángulos se pueda extender a un homeomorfismo entre sus clausuras. Si extendemos las restricciones de ϕ a

las fronteras de los triángulos Δ_i a homeomorfismos entre Δ_i y \overline{T}_i , como éstos coinciden en la intersección de sus dominios, determinan un homeomorfismo ϕ entre el cuadrado y la unión de las clausuras de los triángulos, que a su vez se restringe a un homeomorfismo entre el interior del cuadrado y $U_0 = T_1 \cup a \cup T_2$ (donde a es el lado común sin sus extremos).

Así pues, $U_0 \subset V$ es homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^2 y contiene a p . Pero p tiene un entorno abierto U en V homeomorfo a un abierto en \mathbb{R}^2 , y $U_0 \cap U$ es un entorno de p en U_0 , que también será homeomorfo a un abierto en \mathbb{R}^2 , pero el teorema de invarianza del dominio [TA 2.10] implica que un espacio homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^2 es abierto en cualquier espacio homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^2 en el que esté contenido, luego $U_0 \cap U$ es abierto en U , luego en V .

Vemos así que $U_0 = T_1 \cup a \cup T_2$ es entorno de todos los puntos de a , y obviamente de todos los de $T_1 \cup T_2$, que son abiertos en V , luego U_0 es abierto en V y, como $U_0 \subset \overline{R}$, de hecho $U_0 \subset R$. Esto implica que a no puede formar parte de más triángulos, pues entonces p estaría en la clausura de un tercer triángulo, disjunto de U_0 , lo que contradice que U_0 sea abierto.

Ahora también tenemos que una arista contenida en ∂R sólo puede pertenecer a un triángulo, pues si estuviera el dos, hemos visto que todos sus puntos salvo a lo sumo sus vértices estarían en R .

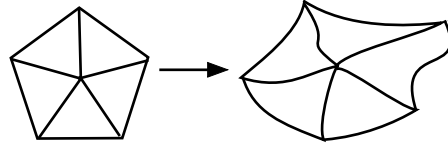
Sólo falta probar que una arista contenida en R no puede estar en un único triángulo. Si así fuera, a través de un homeomorfismo ϕ_1 como antes, concluiríamos que un punto de la frontera de Δ_1 tendría un entorno $U \subset \Delta_1$ homeomorfo a un abierto en \mathbb{R}^2 , pero eso es imposible, de nuevo por la invarianza de los dominios, ya que entonces U sería abierto en \mathbb{R}^2 , pero tiene puntos en la clausura de su complementario. ■

Teorema 8.38 *Sea \mathcal{T} una triangulación de una región regular R de una superficie de Riemann orientada V . Si $p \in R$ es un vértice de un triángulo, los lados de triángulos de \mathcal{T} con extremo p pueden ordenarse cíclicamente a_1, \dots, a_n de modo que cada par de arcos a_{i-1}, a_i (al igual que a_n y a_1) son lados de un mismo triángulo T_i .*

Si $p \in \partial R$ es un vértice de un triángulo y a y b son los lados de R con extremo p , los lados de triángulos con extremo p pueden ordenarse en la forma $a = a_0, \dots, a_n = b$, de modo que cada par de arcos consecutivos son lados de un mismo triángulo.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $p \in R$ y sea $a = a_0$ un lado de un triángulo T_1 con extremo en p . Sea a_1 el otro lado de T_1 con extremo en p . Por el teorema anterior, como a_1 no está contenido en ∂R , a_1 debe ser también el lado de un segundo triángulo T_2 y llamamos a_2 al segundo lado de T_2 con extremo p . Si $a_2 = a_0$, tenemos ya un ciclo como el descrito en el enunciado. En caso contrario, a_2 tiene que ser el lado de un tercer triángulo T_3 y podemos llamar a_3 al segundo lado de T_3 con extremo p . No puede ocurrir que a_3 coincida con a_1 o a_2 , pues estos lados sólo pueden ser compartidos por los triángulos T_1 y T_2 . Si a_3 coincide con a_0 cerramos el ciclo, y en caso contrario encontramos un cuarto triángulo T_4 . Como el número total de triángulos es finito, tras un

número finito de pasos tenemos que encontrar un ciclo como el descrito en el enunciado. Falta probar que los lados que forman parte del ciclo son todos los lados con extremo en p . Ahora bien, empleando la misma técnica que en la prueba del teorema anterior, podemos construir un homeomorfismo entre un polígono regular en \mathbb{R}^2 y la unión de las clausuras de los triángulos del ciclo (primero definimos un homeomorfismo entre los lados del polígono regular y los radios que unen sus vértices con su centro y luego lo extendemos a los triángulos:



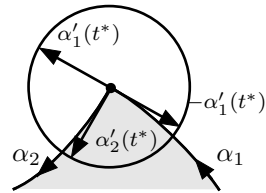
Como en el teorema anterior se razona entonces que la unión de los triángulos, sus lados comunes y el vértice p forman un abierto U_0 en V , por lo que no puede haber más lados con extremo en p , pues serían disjuntos de U_0 y tendrían a p en su clausura.

Si $p \in \partial R$ el razonamiento es similar: partimos de $a = a_0$ y vamos formando una sucesión de lados y triángulos, pero esta vez no puede terminar cerrando el ciclo con un $a_m = a_0$, pues por el caso anterior esto implicaría que $p \in R$, luego el proceso sólo puede terminar cuando se llega a un $a_n = b$. Los lados así obtenidos son todos los que llegan a p , pues si hubiera más, con ellos podríamos formar un ciclo de lados y triángulos que no podría llegar nunca ni a a ni a b , pues sólo forman parte de un triángulo, con lo que acabaríamos con un ciclo cerrado y, por el mismo argumento del apartado anterior, concluiríamos que $p \in R$. ■

De estos resultados topológicos deducimos un resultado métrico:

Teorema 8.39 *Si \mathcal{T} es una triangulación de una región regular R de una superficie de Riemann orientada V , entonces los ángulos interiores de todos los vértices iguales a p de todos los triángulos de \mathcal{T} suman 2π si $p \in R$ y suman el ángulo interior de ∂R en p si $p \in \partial R$.*

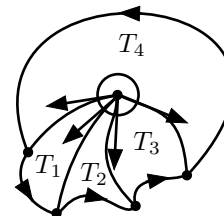
DEMOSTRACIÓN: Analicemos con más detalle la definición de ángulo exterior e interior de un polígono curvilíneo T en un vértice p . Pongamos que, fijada una parametrización de ∂T , el lado de T que llega a p es α_1 , y lo hace en $\alpha_1(t^*) = p$, mientras que el lado que sale de p es α_2 . Entonces hemos definido el ángulo exterior ϵ de T en p como el ángulo entre los vectores $\alpha'_1(t^*)$ y $\alpha'_2(t^*)$ con un signo dependiente de la orientación de P . Esto hace que el ángulo interior $\delta = \pi - \epsilon$ sea uno de los dos ángulos que determinan los vectores $-\alpha'_1(t^*)$ y $\alpha'_2(t^*)$, es decir, los vectores tangentes a los dos lados de T con extremo p , pero parametrizados de modo que ambos salgan de p .



Consideremos la circunferencia unitaria en $T_p(V)$, dividida en dos arcos complementarios por los vectores $-\alpha'_1(t^*)$ y $\alpha'_2(t^*)$. El ángulo interior es la medida

de uno de estos dos arcos, y analizando la definición se concluye que, concretamente, es el que tiene la propiedad de que las curvas que salen de p con vector tangente en el arco interior empiezan tomando valores dentro de T . En el ejemplo de la figura, el ángulo interior es el menor si la zona sombreada está en T y es el mayor si es la zona blanca la que está en T .

Pasando ya a la prueba, si $p \in R$, según el teorema anterior, los triángulos de \mathcal{T} con vértice p se pueden ordenar cíclicamente T_1, \dots, T_m de modo que cada uno comparte un lado de extremo p con el anterior y con el siguiente (incluyendo T_1 y T_m). Los vectores tangentes a los lados con un extremo en p (parametrizados de modo que salgan de p) determinan m puntos en la circunferencia unitaria en $T_p(V)$, y las consideraciones precedentes implican que los arcos correspondientes a los ángulos interiores determinan una partición de la circunferencia, por lo que suman 2π .



Si $p \in \partial R$ la situación es similar, pero ahora no obtenemos una partición de la circunferencia, sino una partición del arco correspondiente al ángulo interior de R en p . ■

Con esto ya podemos probar la versión global del teorema de Gauss-Bonnet:

Teorema 8.40 (Gauss-Bonnet) *Si R es una región regular en una superficie de Riemann orientada V , $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ son las curvas cerradas regulares a trozos que recorren las componentes conexas de su frontera (con la orientación inducida desde R), $\kappa_i(t)$ es la curvatura geodésica de α_i y $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ son los ángulos exteriores de las curvas α_i , entonces*

$$\int_R K d\sigma + \sum_{i=1}^s \int_{\alpha_i} \kappa_i(t) dt + \sum_{i=1}^m \epsilon_i = 2\pi \chi(R),$$

donde K es la curvatura de Gauss de V y $\chi(R)$ es la característica de Euler del espacio R (def. [TA, 10.25]).

DEMOSTRACIÓN: Observemos en primer lugar que el hecho de que toda región regular puede ser triangulada (teorema 8.46) implica que es un complejo celular [TA 3.24], luego está definida su característica de Euler y, de acuerdo con [TA 10.28] puede calcularse como el número $V - A + C$ de vértices menos aristas más caras de cualquier triangulación.

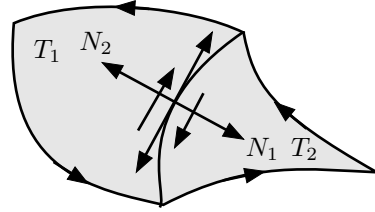
Fijamos una triangulación $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_C\}$ de la región R de forma que la clausura de cada triángulo esté contenida en un abierto coordenado de S . El teorema 8.35 se puede aplicar a cada triángulo T_j , con lo que obtenemos la relación

$$\int_{T_j} K d\sigma + \sum_{i=1}^3 \int_{\alpha_{ji}} k_i dt + \sum_{i=1}^3 \epsilon_{ji} = 2\pi.$$

Notemos que los lados α_{ji} no son necesariamente regulares, sino que pueden ser regulares a trozos, pero en los puntos en los que falla la regularidad α_{ji} es,

en cualquier caso, de clase C^1 , por lo que los ángulos exteriores son nulos y no influyen en la fórmula de 8.35, y las integrales sobre los “auténticos” lados de T_j (contando todos los vértices en los que falla la regularidad) pueden sumarse para formar las integrales sobre los lados α_{ji} que estamos considerando aquí.

Otro hecho fundamental es que la orientación del arco α_j que parametriza ∂T_j es la inducida por T , pues si tomamos la contraria cambiaría el signo del segundo término del primer miembro. Esta orientación hace que si un lado es compartido por dos triángulos contiguos, su parametrización en uno de ellos es la opuesta a la del otro. En efecto, la parametrización de un triángulo T_1 es la que hace que el vector normal N_1 a T_1 que apunta hacia afuera de T_1 forme una base orientada cuando se completa con α'_j , pero el vector normal que apunta hacia afuera de T_1 es el opuesto al vector N_2 que apunta hacia afuera de otro triángulo adyacente T_2 , lo que invierte el sentido de las parametrizaciones.



Como consecuencia, al sumar la igualdad precedente para todos los triángulos de \mathcal{T} , las integrales correspondientes a lados contenidos en R se cancelan por parejas, y sólo sobreviven las integrales sobre los lados que cubren ∂R :

$$\int_R K d\sigma + \sum_{i=1}^s \int_{\alpha_i} \kappa_i(t) dt + \sum_{j=1}^C \sum_{i=1}^3 \epsilon_{ji} = 2\pi C.$$

En términos de los ángulos interiores $\delta_{ji} = \pi - \epsilon_{ji}$, tenemos que

$$\sum_{j=1}^C \sum_{i=1}^3 \epsilon_{ji} = 3\pi C - \sum_{j=1}^C \sum_{i=1}^3 \delta_{ji}.$$

Llamamos V_i al número de vértices interiores de la triangulación (los contenidos en R), de modo que el número total de vértices es $V = V_i + m$ (donde m , de acuerdo con el enunciado, es el número de vértices en ∂R). Si agrupamos los ángulos δ_{ij} correspondientes a un mismo vértice, la suma de cada grupo correspondiente a un vértice interior es 2π , mientras que la suma de cada grupo correspondiente a un vértice de la frontera es el ángulo interior correspondiente, digamos δ_i . Por lo tanto:

$$\sum_{j=1}^C \sum_{i=1}^3 \epsilon_{ji} = 3\pi C - 2\pi V_i - \sum_{j=1}^m \delta_i = 3\pi C - 2\pi V_i - m\pi + \sum_{j=1}^m \epsilon_i.$$

Así pues, el miembro izquierdo de la fórmula del enunciado resulta ser igual a

$$2\pi C - 3\pi C + 2\pi V_i + \pi m.$$

Descomponemos el número de aristas de la triangulación como $A = A_i + A_f$, donde A_i es el número de lados interiores (contenidos en R salvo a lo sumo por sus extremos) y A_f el número de lados fronterizos (contenidos en ∂R). Ahora bien, como ∂R está parametrizado por un número finito de curvas simples, es

claro que su número de vértices es igual al número de lados, luego $A_f = m$. Por otra parte, como cada lado interior está en dos triángulos y cada lado fronterizo sólo en uno, al contar el número de lados como 3 veces el número de triángulos, estamos contando dos veces cada lado interior, por lo que se cumple la relación $3C = 2A_i + m$. Sustituyendo esto en la fórmula precedente queda

$$2\pi C - 3\pi C + 2\pi V_i + \pi m = 2\pi C - 2\pi A_i - \pi m + 2\pi V_i + \pi m = 2\pi C + 2\pi(V_i - A_i).$$

Ahora bien, de las relaciones $V = V_i + m$, $A = A_i + m$ resulta la relación $V_i - A_i = V - A$, luego en total queda

$$2\pi(C - A + V) = 2\pi\chi(R). \quad \blacksquare$$

Un caso particular especialmente simple, pero no por ello menos destacable, se da cuando aplicamos el teorema anterior a una superficie compacta V , tomando $R = V$ con frontera vacía:

Teorema 8.41 (Gauss-Bonnet) *Si V es una superficie de Riemann compacta orientada y K es su curvatura de Gauss, entonces*

$$\int_V K d\sigma = 2\pi\chi(V).$$

Esto significa que si, por ejemplo, tomamos una esfera de radio 1 en \mathbb{R}^3 (con lo que tiene curvatura constante igual a 1) y la retorremos todo lo que queramos, podremos alterar su curvatura, pero la integral de la curvatura seguirá siendo igual a 4π , por lo que si hacemos negativa la curvatura en una zona, necesariamente ésta crecerá en otra zona todo lo necesario para que la integral siga tomando el mismo valor positivo.

Una consecuencia inmediata de este resultado es que toda superficie riemanniana compacta de curvatura positiva es homeomorfa a una esfera, pues la integral de la curvatura será positiva y la esfera es la única superficie compacta con característica de Euler-Poincaré positiva.

Otro caso particular sencillo se da cuando R es un triángulo geodésico, es decir, cuyos lados son arcos de geodésica:

Teorema 8.42 *Si T es un triángulo geodésico en una superficie de Riemann orientada, la suma de sus ángulos (interiores) es*

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \pi + \int_T K d\sigma,$$

donde K es la curvatura de Gauss de la superficie.

Si la curvatura es nula obtenemos el resultado propio de la geometría euclídea, según el cual la suma de los ángulos de un triángulo (rectilíneo) es igual a π . En general, vemos que la suma difiere de π en una cantidad determinada simplemente por la curvatura de la superficie sobre el triángulo. Cuanto menor sea el triángulo menor será la discrepancia con el caso euclídeo. En particular, si la curvatura es constante K , la suma de los ángulos de un triángulo geodésico es $\pi + KS$, donde S es el área de T .

8.6 Triangulaciones

Terminamos justificando que toda región regular en una superficie diferencial admite una triangulación en las condiciones que hemos considerado para la prueba del teorema de Gauss-Bonnet. El argumento que vamos a seguir es una adaptación del argumento para superficies topológicas dado en [TA 2.29]. Conviene introducir algunos términos:

Definición 8.43 Un *arco de Jordan* (resp. una *curva de Jordan*) en una superficie diferencial V es un arco regular a trozos $\sigma : [a, b] \rightarrow V$ inyectivo (resp. salvo por que $\sigma(a) = \sigma(b)$). Representaremos por $\sigma^* = \sigma[[a, b]]$ a la imagen de σ .

Una región regular R en una superficie diferencial V es *simple* si su clausura es homeomorfa a una bola cerrada en \mathbb{R}^2 de modo que el homeomorfismo se restrinja a un homeomorfismo entre R y la bola abierta.

Un *dominio de Jordan* en V es una región regular simple cuya clausura está contenida en un abierto difeomorfo a una bola abierta en \mathbb{R}^2 .

Si R es una región regular simple en una superficie diferencial S , un *corte* en R es un arco de Jordan $\sigma : [a, b] \rightarrow R$ tal que $\sigma[[a, b]]$ está contenido en R , mientras que $\sigma(a), \sigma(b) \in \partial R$ y $\sigma'(a), \sigma'(b)$ no son múltiplos de las derivadas de los arcos que parametrizan la frontera en $\sigma(a)$ y $\sigma(b)$.

El teorema siguiente es consecuencia inmediata de [TA 2.22]. Las condiciones de diferenciabilidad en las hipótesis implican directamente las de la conclusión:⁵

Teorema 8.44 Sea S una superficie diferencial, sea $R \subset V$ una región regular simple y sea σ un corte en R . Entonces $R \setminus \sigma^*$ tiene exactamente dos componentes conexas, que son regiones regulares simples y cuyas fronteras son unión de σ^* y cada uno de los arcos en ∂R que unen los extremos de σ .

El teorema [TA 2.21] es válido con hipótesis de diferenciabilidad y para una región R con la misma prueba:

Teorema 8.45 Sea R una región regular en una superficie diferencial V , sea $J \subset R$ un dominio de Jordan y ϕ una curva de Jordan con $\phi^* \subset \bar{J}$. Entonces $R \setminus \phi^*$ tiene dos componentes conexas, ambas con ϕ^* como frontera (en R), de las cuales una es un dominio de Jordan y está contenida en J .

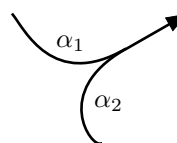
El propósito de esta sección es demostrar el teorema siguiente:

⁵En [TA 2.22] se toma como hipótesis que R es un dominio de Jordan, que, desde un punto de vista topológico, es un poco más fuerte que la hipótesis de que R sea una región simple, pero en realidad no se usa en la prueba, pues lo primero que se hace en ella es pasar a una bola cerrada en \mathbb{R}^2 , cosa que también podemos hacer bajo la hipótesis de que R es simple, y “ser simple” en \mathbb{R}^2 es lo mismo que ser un dominio de Jordan.

Teorema 8.46 Si V es una superficie diferencial, R_0 es una región regular en V y \mathcal{U} es un cubrimiento abierto de R_0 , existe una triangulación de R_0 formada por triángulos contenidos en abiertos de \mathcal{U} . En particular, toda superficie diferencial compacta admite una triangulación.

A partir de aquí fijamos la superficie V , la región regular R_0 y el cubrimiento \mathcal{U} . Sumergiendo V en un espacio \mathbb{R}^n podemos dotar a V de estructura de una métrica de Riemann. Según indicábamos, el proceso de construcción de la triangulación será esencialmente el empleado en [TA 2.29], pero ahora tenemos que asegurar que los triángulos que obtenemos no tienen cúspides. Para ello conviene introducir algunos conceptos:

Definición 8.47 Dos arcos regulares $\alpha_i : [a_i, b_i] \rightarrow V$ (para $i = 1, 2$) parametrizados por el arco con un extremo en común p forman una *cúspide* en p si éste es el origen o el extremo de ambos arcos y la derivada es la misma (es decir, si $\alpha_i(a_i) = p$ para $i = 1, 2$ y $\alpha'_1(a_1) = \alpha'_2(a_2)$) o bien se cumple esto mismo cambiando a por b o bien p es el origen de uno y el extremo de otro y las derivadas son opuestas ($\alpha_1(a_1) = p = \alpha_2(b_2)$ y $\alpha'_1(a_1) = -\alpha'_2(b_2)$) o viceversa.



Diremos que un conjunto finito de arcos regulares en V parametrizados por el arco *está en buena posición* si dos cualesquiera de ellos no tienen puntos en común salvo a lo sumo un extremo y, en tal caso no forman una cúspide.

Si R es una región regular, por definición su frontera está parametrizada por un número finito de curvas de Jordan regulares a trozos sin cúspides, lo que se traduce en que puede descomponerse en unión de un número finito de arcos de Jordan regulares en buena posición. Cuando no haya confusión llamaremos también ∂R a una familia de arcos en estas condiciones.

Si \mathcal{J} y \mathcal{J}' son dos familias finitas de arcos de Jordan regulares en V en buena posición, diremos que son *compatibles* si cuando $\alpha \in \mathcal{J}$ y $\alpha' \in \mathcal{J}'$, se cumple uno de los casos siguientes:

- $\alpha^* \cap \alpha'^*$ consta de un número finito de puntos (tal vez ninguno) de modo que las derivadas de ambas curvas en cada punto de intersección sean linealmente independientes.
- $\alpha^* \cap \alpha'^*$ es la imagen de un subarco final de α y de un subarco inicial de α' o viceversa.
- α^* es la imagen de un subarco de α' o viceversa (admitiendo $\alpha^* = \alpha'^*$).

La figura ilustra los dos primeros casos:



En estas condiciones podemos subdividir los arcos de ambas familias en un número finito de subarcos de modo que, tomando la unión (y eliminando arcos que tengan la misma imagen que otros) obtenemos una familia \mathcal{J}'' de arcos de Jordan regulares en la que dos cualesquiera de ellos se cortan a lo sumo en un extremo y todo arco de \mathcal{J} o \mathcal{J}' es unión de un número finito de arcos de \mathcal{J}'' . Además, la definición de compatibilidad garantiza que los arcos de \mathcal{J}'' no pueden formar cúspides, es decir, que \mathcal{J}'' está en buena posición. Representaremos a esta familia por $\mathcal{J}'' = \mathcal{J} \cup \mathcal{J}'$.

La clave del argumento que usaremos para evitar la aparición de cúspides en la construcción de la triangulación de R_0 es que dos arcos de geodésica minimizantes están necesariamente en una de las tres posibilidades que permite la definición de compatibilidad, pues si tienen un punto en común, el teorema 6.14 nos garantiza que es único (si sus derivadas son distintas) o bien que ambos arcos se prolongan hasta una misma geodésica, luego se encuentran en el segundo o tercer caso de la definición. No podemos trabajar exclusivamente con arcos de geodésica porque los arcos que componen ∂R_0 no tienen por qué serlo, pero podemos alejarnos lo menos posible de esa situación ideal:

Diremos que una familia de arcos de Jordan regulares \mathcal{J} está subordinada a R_0 si todos sus arcos tienen imagen en $\overline{R_0}$ y son subarcos de la parametrización de ∂R_0 o bien arcos de geodésica minimizantes. Una región regular R está subordinada a R_0 si $R \subset R_0$ y la familia de arcos regulares ∂R está subordinada a R_0 .

Probamos ahora una versión diferencial de [TA 2.28]:

Teorema 8.48 *Sea $R \subset R_0$ una región regular subordinada a R_0 , sea \mathcal{J} una familia finita de arcos de Jordan regulares subordinada a R_0 y compatible con ∂R_0 . Entonces todo par de puntos de \overline{R} puede unirse por un arco de Jordan contenido en R salvo a lo sumo por sus extremos, que se descompone en una familia finita de arcos de Jordan regulares subordinada a R_0 , compatible con \mathcal{J} , con ∂R y con ∂R_0 .*

DEMOSTRACIÓN: Llamemos J a la unión de las imágenes de los arcos de \mathcal{J} .

Supongamos en primer lugar que los dos puntos están en R . Consideremos en R la relación según la cual dos puntos están relacionados si pueden unirse por un arco de Jordan en R formado por una familia finita de arcos de geodésica minimizantes. Se trata de una relación de equivalencia, pues si tenemos un arco α que une p con q y otro β que une q con r , podemos seguir α hasta el primer punto en que corte a β^* y a partir de ahí seguir β , con lo que tenemos un arco de Jordan formado por arcos de geodésica minimizantes que une p con r .

Se cumple que las clases de equivalencia son abiertas pues, si $p \in R$, podemos tomar una bola geodésica $B_\epsilon(p) \subset R$ y, como todo punto de la bola se une a p mediante una geodésica minimizante, la bola está contenida en la clase de equivalencia de p .

Esto implica que las clases de equivalencia también son cerradas (pues el complementario de una es la unión de las demás) y, como R es conexo, existe

de hecho una única clase de equivalencia igual a todo R . Por consiguiente, cualquier par de puntos $p, q \in R$ puede unirse mediante un arco de Jordan α en R formado por arcos de geodésica minimizantes. Además, una tal familia está obviamente subordinada a R_0 y es compatible con \mathcal{J} , pues, al estar contenida en $R \subset R_0$, sus arcos sólo pueden cortar a arcos de \mathcal{J} que sean también arcos de geodésica minimizantes, y ya hemos señalado que la intersección de dos arcos de geodésica minimizantes está necesariamente en una de las tres posibilidades que permite la noción de compatibilidad. La compatibilidad con ∂R y ∂R_0 es trivial, pues α^* es disjunto de ambas fronteras.

Tomemos ahora un punto $p_0 \in \partial R$ y otro $q \in R$, sea $B_\epsilon(p_0)$ una bola geodésica y consideremos una geodésica radial γ que una el punto p_0 con un punto $p \in B_\epsilon(p_0) \cap R$ cuya derivada en p_0 sea linealmente independiente de la de cualquier arco en \mathcal{J} , ∂R o ∂R_0 que pase por p . (Podemos elegir la derivada entre infinitos valores posibles, luego siempre hay uno que cumple esto.) Por el apartado anterior podemos unir p con q mediante una curva de Jordan formada por un número finito de arcos de geodésica minimizantes contenida en R . Recorremos dicho arco desde q hasta el primer punto en el que corte a γ y desde él vamos a p_0 a través de γ . El resultado es una curva de Jordan compuesta por arcos de geodésica minimizantes que une p_0 con q , trivialmente subordinada a R_0 y compatible con ∂R_0 , ∂R y \mathcal{J} , por el hecho de estar formada por arcos de geodésica y por la elección de la derivada en p_0 .

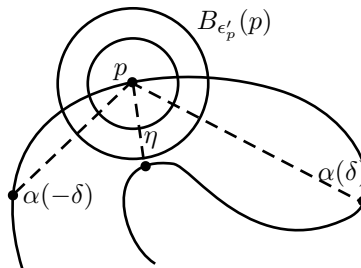
Por último, si tenemos dos puntos p_0 y q_0 en ∂R , basta unirlos con un punto cualquiera $p \in R$ mediante arcos en las condiciones del enunciado y combinar ambos eliminando las autointersecciones para obtener un arco de Jordan, como cuando hemos probado la transitividad de la relación de equivalencia en R . ■

Ahora probamos que toda región regular admite lo que en [TA 2.26] llamamos un cubrimiento de carácter finito formado por dominios de Jordan:

Teorema 8.49 *Sea R una región regular subordinada a R_0 compatible con ∂R_0 y sea \mathcal{U} un cubrimiento abierto de R . Entonces existen dominios de Jordan J_1, \dots, J_k subordinados a R_0 cuyas clausuras cubren \bar{R} , están contenidas en abiertos de \mathcal{U} y con fronteras compatibles entre sí, así como con ∂R y con ∂R_0 .*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $p \in \bar{R}$ sean $0 < \epsilon_p < \epsilon'_p < \epsilon''_p$ tales que la bola $B_{\epsilon''_p}(p)$ esté contenida en un abierto de \mathcal{U} , sea geodésica y, en caso de que $p \in \partial R$, las intersecciones $B_{\epsilon_p}(p) \cap \partial R$ y $B_{\epsilon'_p}(p) \cap \partial R$ son imágenes de dos arcos de Jordan regulares salvo a lo sumo en p que cortan a las fronteras de las bolas en dos puntos.

Esto es posible, pues, si $\alpha(t)$ es una parametrización de la componente conexa de ∂R que contiene a p y $\alpha(0) = p$, el hecho de que la derivada $\alpha'(0) \neq 0$ (tanto por la izquierda como por la derecha, aunque las derivadas laterales puedan ser distintas) implica que existe un intervalo $[-\delta, \delta]$ en el que la distancia de $\alpha(t)$ a p es decreciente a la



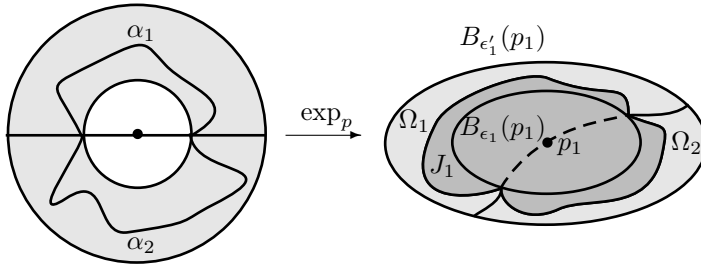
izquierda de 0 y creciente a la derecha. Basta tomar ϵ'_p menor que $d(p, \alpha(\delta))$, $d(p, \alpha(-\delta))$, $\eta = d(p, R \setminus \alpha[-\delta, \delta])$.

Por la compacidad de \bar{R} existe un número finito de puntos $p_1, \dots, p_k \in \bar{R}$ tales que $\bar{R} \subset B_{\epsilon_1}(p_1) \cup \dots \cup B_{\epsilon_k}(p_k)$, donde llamamos $\epsilon_j = \epsilon_{p_j}$ e igualmente llamaremos $\epsilon'_j = \epsilon'_{p_j}$.

Fijemos una familia finita \mathcal{J} de arcos de Jordan regulares en buena posición, subordinada a R_0 y compatible con ∂R_0 y con ∂R y sea J la unión de sus imágenes.

Consideremos el punto p_1 y supongamos en primer lugar que $p_1 \in R$, con lo que $B_{\epsilon'_1}(p_1) \subset R$. Tomemos dos puntos opuestos $q_1, q_2 \in \partial B_{\epsilon_1}(p_1)$. Los arcos de geodésicas radiales de origen p que van desde q_1 y q_2 hasta los puntos donde cortan a $\partial B_{\epsilon'_1}(p)$ dividen al anillo $\bar{B}_{\epsilon'_1}(p) \setminus B_{\epsilon_1}(p)$ en dos regiones regulares simples Ω_1 y Ω_2 . Aquí hay que tener presente que la función \exp_p hace corresponder las bolas geodésicas con discos de centro 0 en $T_p(V)$ y las geodésicas radiales con radios de dichos discos, por lo que la afirmación anterior es equivalente a una afirmación elemental sobre discos en \mathbb{R}^2 .

Por el teorema anterior los puntos q_1 y q_2 pueden unirse por dos arcos de Jordan regulares a trozos contenidos en Ω_1 y Ω_2 , respectivamente, salvo por sus extremos, formados por arcos regulares subordinados a R_0 y compatibles con \mathcal{J} . La unión de estos dos arcos es una curva de Jordan regular a trozos y, por 8.45, es la frontera de un dominio de Jordan J_1 , cuya frontera está subordinada a R_0 y es compatible con \mathcal{J} (y trivialmente con ∂R y ∂R_0 , pues es disjunta de ambas fronteras).



Observemos que $B_{\epsilon_1}(p_1) \subset \bar{J}_1$. En efecto, aplicando la inversa de la función exponencial, en $T_{p_1}(S)$ tenemos la situación que muestra la figura anterior: dos arcos de Jordan

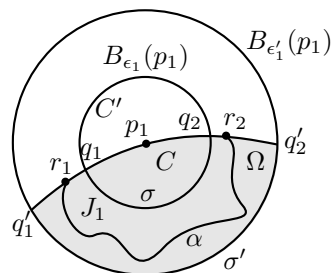
$$\alpha_1, \alpha_2 : [0, 1] \longrightarrow B_{\epsilon'_1}(0) \setminus \bar{B}_{\epsilon_1}(0)$$

que unen los puntos $(\epsilon_1, 0)$ y $(-\epsilon_1, 0)$, uno contenido en el semiplano superior y otro en el semiplano inferior. Si consideramos una determinación continua del argumento del primero, digamos $\theta(t)$ que empieza en $\theta(0) = 0$, tenemos que $\theta(t)$ no puede tomar valores múltiplos de π salvo en sus extremos, luego por continuidad, teniendo en cuenta que toma valores en $[0, \pi]$, sólo puede variar en $[0, \pi]$, por lo que $\theta(1) = \pi$. Similarmente, si consideramos una determinación continua del segundo arco (con origen en $(-\epsilon_1, 0)$) tal que $\theta(0) = \pi$, vemos

que sólo puede variar en $[\pi, 2\pi]$, luego $\theta(1) = 2\pi$, luego la concatenación de ambos arcos de Jordan tiene una determinación continua del argumento tal que $\theta(0) = 0$ y $\theta(1) = 2\pi$, luego su índice alrededor de 0 es 1, luego, según el teorema [TA 1.58], el origen 0 está en la componente conexa acotada, luego lo mismo vale para $B_{\epsilon_1}(0)$. Al aplicar la exponencial concluimos que $B_{\epsilon_1}(p_1) \subset J_1$, como queríamos probar.

Supongamos ahora que $p_1 \in \partial R$. Por construcción $B_{\epsilon_1}(p_1) \cap \partial R$ es un arco de Jordan regular salvo a lo sumo en el punto p_1 que corta a $\partial B_{\epsilon_1}(p_1)$ en dos puntos q_1 y q_2 y que se prolonga hasta un arco en las mismas condiciones que corta a $\partial B_{\epsilon'_1}(p_1)$ en otros dos puntos q'_1 y q'_2 .

El arco en ∂R que une q_1 con q_2 es un corte regular de $B_{\epsilon_1}(p_1)$, luego por el teorema 8.44 divide a la bola en dos componentes conexas con p en su frontera. Los interiores de dichas componentes no cortan a ∂R , luego están contenidas en R o bien en $B_{\epsilon'_1}(p_1) \setminus \bar{R}$. Como ambos abiertos tienen puntos en $B_{\epsilon_1}(p_1)$, tiene que haber una componente conexa contenida en cada uno de ellos. Concretamente, las componentes conexas serán



$C = B_{\epsilon_1}(p_1) \cap R$ y $C' = B_{\epsilon_1}(p_1) \setminus \bar{R}$. En particular, de los dos arcos que unen q_1 con q_2 en $\partial B_{\epsilon_1}(p_1)$, sólo hay uno contenido en \bar{R} , al que llamaremos σ , que forma, junto al arco $q_1 q_2$, la frontera de C . Igualmente hay un único arco σ' en $B_{\epsilon'_1}(p_1)$ que une q'_1 con q'_2 contenido en \bar{R} .

Por 8.45 los arcos σ, σ' y los arcos en ∂R que unen q_i con q'_i forman una curva de Jordan que delimita una región regular simple que llamaremos Ω . Puesto que p_1 puede unirse con un punto del arco complementario de σ y éste con un punto del arco complementario de σ' sin cortar a $\partial\Omega$ salvo en el propio p_1 , concluimos que p_1 está en el exterior de Ω .

Tomemos puntos r_i entre q_i y q'_i . Por el teorema 8.48 existe un arco de Jordan α regular a trozos que une r_1 con r_2 y está contenido en Ω salvo por sus extremos, y que es compatible con $\partial R_0, \partial R, \mathcal{J}$ y $\partial\Omega$.

El arco que une r_1 con r_2 unido a α forma una curva de Jordan que delimita un dominio de Jordan $J_1 \subset R$ (por el teorema 8.44, ya que α es un corte en R) claramente subordinado a R_0 , cuya frontera es compatible con $\partial R_0, \partial R$ y \mathcal{J} y cuya clausura contiene a $B_{\epsilon_1}(p_1) \cap \bar{R} \subset \bar{C}$. En efecto, sabemos que $p_1 \in \partial J_1$, luego $B_{\epsilon_1}(p_1)$ debe cortar a J_1 y a $B_{\epsilon'_1}(p_1) \setminus \bar{J}_1$. Lo mismo vale para $B_{\epsilon_1}(p_1) \setminus \partial R = C \cup C'$ y como C y C' son conexos y no cortan a ∂J_1 , uno de ellos tiene que estar contenido en J_1 y el otro en $B_{\epsilon'_1}(p_1) \setminus \bar{J}_1$, pero $C' \cap R = \emptyset$, luego tiene que ser C la componente contenida en J_1 .

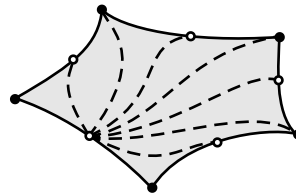
En ambos casos hemos obtenido un dominio de Jordan J_1 subordinado a R_0 , cuya frontera es compatible con $\partial R_0, \partial R$ y \mathcal{J} y cuya clausura contiene a $B_{\epsilon_1}(p_1) \cap \bar{R}$. Sea, concretamente, J_1 el dominio obtenido de esta forma con $\mathcal{J} = \emptyset$. Ahora podemos aplicar el mismo proceso a p_2 , pero tomando como \mathcal{J} la familia de arcos que parametrizan a ∂J_1 . Así obtenemos un dominio de Jordan

J_2 que contiene a $B_{\epsilon_2}(p_2) \cap \bar{R}$ y también está subordinado a R_0 y su frontera es compatible con ∂R_0 , ∂R y ∂J_1 . A continuación repetimos el proceso con p_3 y $\mathcal{J} = \partial J_0 \cup \partial J_1$. Es claro que los k dominios de Jordan J_1, \dots, J_k que obtenemos de este modo cumplen lo requerido. ■

DEMOSTRACIÓN (de 8.46): La prueba del teorema [TA 2.27] vale literalmente en nuestro contexto (simplificada a causa de que, por la compacidad, podemos trabajar con cubrimientos finitos). El teorema anterior nos proporciona un cubrimiento de \bar{R} de carácter finito al que se puede aplicar [TA 2.27], usando 8.44 y 8.45 en lugar de sus versiones topológicas. Las fronteras de los triángulos se obtienen por subdivisiones finitas de las fronteras de los dominios del cubrimiento dado o por la aplicación del teorema 8.48. En cualquier caso obtenemos una triangulación de R_0 formada por una familia finita de arcos en buena posición y compatible con ∂R_0 , de modo que ninguno de los triángulos tiene cúspides.

Sólo la parte final de la prueba requiere una modificación mínima y una consideración adicional: cuando ya tenemos R descompuesta en dominios de Jordan J'_i disjuntos dos a dos, para formar los triángulos no podemos llevar \bar{J}'_i a B^2 , pues lo haríamos con una aplicación continua y no tendríamos garantizada la regularidad de los lados de los triángulos que formáramos.

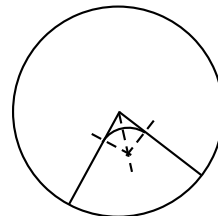
Ahora bien, tenemos un número finito de puntos en $\partial J'_i$ que en [TA 2.27] se unen con un mismo punto interior de J'_i para convertirlos en vértices de triángulos, y lo que hacemos ahora es usar sucesivamente el teorema 8.48 para unir uno de los puntos de la frontera con todos los demás salvo sus dos contiguos. Si los vamos uniendo cíclicamente, en cada paso desgajamos un triángulo de otro dominio menor con un punto menos pendiente de ser convertido en vértice de un triángulo y tras un número finito de pasos obtenemos una triangulación sin cúspides.



No obstante, todavía falta un punto por ajustar, y es que los lados de los triángulos que obtenemos de este modo no son regulares, sino meramente regulares a trozos, cuando la definición diferencial de triángulo que hemos dado exige que los lados sean regulares a trozos y al menos de clase C^1 en los puntos donde no son regulares.

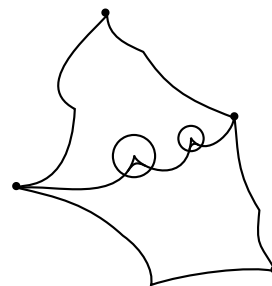
Los lados contenidos en ∂R_0 son de clase C^∞ , porque todos los puntos de ∂R_0 donde la parametrización no es diferenciable son vértices de triángulos, luego el problema sólo afecta a los arcos contenidos en R salvo a lo sumo uno de sus extremos, que son concatenaciones de un número finito de arcos de geodésica minimizantes.

Ahora bien, si un lado tiene un punto p distinto de sus extremos donde no es regular, es decir, donde se enlazan dos arcos de geodésica minimizantes, podemos tomar una bola geodésica $B_\epsilon(p)$ y radio suficientemente pequeño como para que la intersección de todos los lados de la triangulación con p se reduzca a un entorno de p en el lado, es decir, en dos



arcos de geodésicas radiales, que a través de la exponencial se transformarán en dos segmentos de recta con un extremo común, y transformar dos segmentos de recta con un extremo común en un arco de clase C^1 sustituyendo el pico por un arco de circunferencia es una construcción de geometría elemental.

Al repetir esto con todos los puntos no regulares de un mismo lado l , obtenemos un arco de Jordan l' de clase C^1 con los mismos extremos y que se diferencia de l tan sólo en entornos arbitrariamente pequeños de un número finito de sus puntos. Si T_1 y T_2 son los triángulos que comparten el lado l (recordemos que l no está en la frontera de R_0) sus otros cuatro lados forman una región regular simple a la que podemos aplicar el teorema 8.44 con el corte l' , con lo que $\bar{T}_1 \cup \bar{T}_2 = \bar{T}'_1 \cup \bar{T}'_2$, donde T'_1 y T'_2 son dos triángulos con l' como lado común y cuyos otros dos lados son los mismos que los de T_1 y T_2 . Así, sustituyendo T_1 y T_2 por T'_1 y T'_2 en la triangulación obtenemos otra que se diferencia de la que teníamos únicamente en que uno de sus lados ya es de clase C^1 . Repitiendo con todos los lados que no sean de clase C^1 obtenemos una triangulación en las condiciones requeridas. ■



Capítulo IX

Elementos de topología diferencial

La topología diferencial estudia las variedades diferenciales sin ninguna estructura adicional, como pueda ser una conexión afín o una métrica de Riemann o, dicho de otro modo, estudia los conceptos y propiedades de las variedades diferenciales que se conservan por difeomorfismos. Así, los contenidos de los tres primeros capítulos de este libro se enmarcan dentro de la topología diferencial, al igual que otros más avanzados, como el hecho de que toda superficie diferencial compacta es triangulable (hecho que en realidad puede generalizarse a todas las variedades diferenciales, aunque la prueba es mucho más complicada).

Sin embargo, los resultados puramente topológicos (diferenciales) que hemos probado hasta ahora han sido los necesarios para servir de fundamento a los conceptos y resultados métricos de la geometría riemanniana. Aquí presentamos los preliminares necesarios para obtener en el capítulo siguiente una clasificación de las superficies diferenciales compactas análoga a la clasificación de las superficies topológicas compactas presentada en [TA].

9.1 Aproximación de funciones de clase C^k .

En 1.29 probamos un teorema de aproximación de funciones continuas en \mathbb{R}^k por funciones diferenciables. Usando entornos tubulares es fácil generalizarlo a funciones con imagen en una variedad compacta:

Teorema 9.1 *Si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación continua de una variedad diferencial V en un variedad compacta y $A \subset V$ es un subconjunto cerrado tal que $f|_A$ es diferenciable, existe $g : V \rightarrow W$ diferenciable tal que $g|_A = f|_A$. Más aún, si d es una distancia en W que induce su topología, dado $\epsilon > 0$, podemos exigir que para todo $x \in V$ se cumpla $d(f(x), g(x)) < \epsilon$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema de Whitney podemos suponer que W es una subvariedad de \mathbb{R}^m . Si d es una distancia en W , como W es compacto,

la identidad en W es uniformemente continua respecto a la distancia d y la distancia inducida por la norma euclídea en \mathbb{R}^m , luego, dado $\epsilon > 0$, existe $\epsilon' > 0$ tal que si $\|x - y\| < \epsilon'$, entonces $d(x, y) < \epsilon$. Por lo tanto, no perdemos generalidad si demostramos el teorema respecto a la métrica usual de \mathbb{R}^m .

Por el teorema 2.20, reduciendo ϵ si es preciso, podemos tomar un entorno tubular $W_{\epsilon/2}$ de W . Considerando $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$, podemos aplicar el teorema 1.29, que nos da una aplicación diferenciable $g_0 : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $g_0|_A = f|_A$ y, $\|f(x) - g_0(x)\| < \epsilon/2$, para todo $x \in V$, luego $g_0 : V \rightarrow W_{\epsilon/2}$.

Ahora observamos que existe una retracción diferenciable $r : W_{\epsilon/2} \rightarrow W$, a saber, la composición del difeomorfismo $W_{\epsilon/2} \rightarrow N(W, \epsilon/2)$ dado por 2.20 con la retracción $N(W, \epsilon/2) \rightarrow W$ dada por $(p, v) \mapsto p$.

Llamamos $g = g_0 \circ r : V \rightarrow W$. Claramente es una aplicación diferenciable, cumple $g|_A = f|_A$ y, si $x \in V$, entonces

$$\|f(x) - g(x)\| \leq \|f(x) - g_0(x)\| + \|g_0(x) - g(x)\| < \epsilon. \quad \blacksquare$$

Nota La aplicación g construida en la prueba del teorema anterior es homotópica a f , pues una homotopía es $f_t(x) = r((1-t)g_0(x) + tf(x))$. \blacksquare

Este teorema permite generalizar a variedades topológicas resultados demostrados, en principio, para variedades diferenciales. Sin embargo, en muchos casos su utilidad es muy limitada. Por ejemplo, si lo aplicamos a un arco regular a trozos, obtenemos una aplicación diferenciable, pero no necesariamente regular. A continuación veremos que las aplicaciones de clase C^1 pueden aproximarse por aplicaciones diferenciables de modo que también se aproximen las diferenciales. Empezamos con el caso de aplicaciones entre abiertos de \mathbb{R}^n :

Teorema 9.2 Consideremos conjuntos $A \subset V \subset \bar{V} \subset U \subset \mathbb{R}^m$, donde A es compacto y U, V son abiertos. Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^r , con $r \geq 1$ y sea $\delta > 0$. Entonces existe $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:

1. g es de clase C^∞ en un entorno de A .
2. $g|_{U \setminus V} = f|_{U \setminus V}$.
3. Para todo $x \in U$, se cumple que $\|f(x) - g(x)\| < \delta$ y $\|Jf(x) - Jg(x)\| < \delta$.
4. g es de clase C^k en cada abierto donde f sea de clase C^k .
5. Existe una homotopía de clase C^r entre $f_0 = f$ y $f_1 = g$, de modo que cada f_t cumple las condiciones 2-4.

DEMOSTRACIÓN: Identificamos el espacio de matrices $n \times m$ con \mathbb{R}^{nm} , de modo que la norma que aparece en el apartado 3 puede ser cualquiera de las normas (todas ellas equivalentes) de \mathbb{R}^{nm} . En la prueba consideraremos, concretamente, la norma dada por el máximo del valor absoluto de las entradas de la matriz.

Cubriendo A con un número finito de abiertos de clausura compacta contenidos en V , podemos suponer que la clausura \bar{V} es compacta.

Sea W un abierto tal que $A \subset W \subset \overline{W} \subset V$ y sea $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^∞ que valga 1 en un entorno de A y que valga 0 fuera de W (basta considerar una partición de la unidad subordinada a $\{W, \mathbb{R}^m \setminus A\}$). Sea $\bar{f} = \psi \cdot f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, que claramente es de clase C^r .

Sea $\epsilon > 0$ y fijemos una función $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$ de clase C^∞ que sea positiva en el cubo $C =]-\epsilon, \epsilon[^m$ y nula en su complementario. Multiplicándola por una constante podemos suponer que

$$\int_{\overline{C}} \phi(y) dy = 1.$$

Sea $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$h(x) = \int_{\overline{C}} \phi(y) \bar{f}(x+y) dy.$$

Si elegimos ϵ de modo que $\sqrt{m}\epsilon < d(\overline{W}, \mathbb{R}^m \setminus V)$ (la distancia es positiva porque \overline{W} es compacta), entonces h se anula en $\mathbb{R}^m \setminus V$, pues si $y \in C$, entonces $\|y\| \leq \sqrt{m}\epsilon$, luego $x+y \notin W$ y $\bar{f}(x+y) = 0$.

Notemos además que h es una función de clase C^∞ , pues, haciendo el cambio de variable $z = x+y$,

$$h(x) = \int_{x+\overline{C}} \phi(z-x) \bar{f}(z) dz = \int_{\overline{W}} \phi(z-x) \bar{f}(z) dz,$$

pues el integrando se anula fuera de \overline{W} , y así podemos aplicar [An 5.27].

Finalmente definimos $g(x) = f(x)(1 - \psi(x)) + h(x)$.

Como ψ y h se anulan en $U \setminus V$, se cumple la condición 2. Como ψ vale 1 en un entorno de A , en dicho entorno se cumple que $g = h$, luego se cumple la condición 1. La condición 4 también es inmediata, pues ϕ y h son funciones de clase C^∞ . Observemos ahora que

$$g(x) = f(x) + (h(x) - \bar{f}(x)) = \int_{\overline{C}} \phi(y) (\bar{f}(x+y) - \bar{f}(x)) dy,$$

luego

$$|g_i(x) - f_i(x)| \leq \int_{\overline{C}} \phi_i(y) |\bar{f}_i(x+y) - \bar{f}_i(x)| dy$$

Como \bar{f} tiene soporte compacto, es uniformemente continua, luego podemos tomar $\epsilon > 0$ tal que si $\|y\| \leq \sqrt{m}\epsilon$ entonces $|\bar{f}_i(x+y) - \bar{f}_i(x)| \leq \delta/2$, y así $|g_i(x) - f_i(x)| < \delta$ y se cumple la mitad de la condición 3. Por otra parte, por el teorema [An 5.27],

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \int_{\overline{C}} \phi(y) \left(\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j} \Big|_{x+y} - \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j} \right) dy$$

y concluimos que, con un ϵ suficientemente pequeño, también se cumple la segunda parte de la condición 3, usando ahora que las derivadas de \tilde{f}_i también son uniformemente continuas.

Finalmente, sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona creciente de clase C^∞ que valga 0 para $t \leq 1/3$ y que valga 1 para $t \geq 2/3$ y definamos

$$f_t(x) = \alpha(t)g(x) + (1 - \alpha(t))f(x).$$

Claramente es una homotopía de clase C^r entre f y g , y es de clase C^p en cualquier abierto donde lo sea f (y por lo tanto g). Fuera de V se cumple que $g = f$, luego también $f_t = f$. Además

$$f_t(x) - f(x) = \alpha(t)(g(x) - f(x)),$$

de donde se sigue inmediatamente la propiedad 3 para f_t . ■

A la hora de generalizar este resultado a aplicaciones entre variedades diferenciales, la mayor dificultad está en expresar el punto 3) del teorema anterior. Para ello necesitamos algunas definiciones:

Ante todo, diremos que una función $f : V \rightarrow W$ entre variedades diferenciales es de clase C^k (para $k \geq 1$) si sus lecturas respecto de cartas arbitrarias son de clase C^k (y es fácil ver que basta con que esto suceda para una carta alrededor de cada punto $p \in V$ y otra alrededor de $f(p)$).

Definición 9.3 Sea V una variedad de Riemann, sea $\delta : V \rightarrow]0, +\infty[$ una función continua y $f, g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ dos funciones de clase C^1 . Diremos que g es una δ -aproximación de f si, para todo punto $p \in V$, se cumple

$$\|f(p) - g(p)\| < \delta(p)$$

y para todo $v \in T_p(V)$ se cumple que

$$\|df|_p(v) - dg|_p(v)\| < \delta(p)\|v\|_p,$$

donde consideramos $df|_p : T_p(V) \rightarrow \mathbb{R}^m$ a través de la identificación natural $T_{f(p)}(\mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^m$.

Si W es otra variedad diferenciable, fijamos una inmersión $i : W \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dadas dos aplicaciones $f, g : V \rightarrow W$ de clase C^1 , diremos que g es una δ -aproximación de f si $g \circ i$ es una δ -aproximación de $f \circ i$.

Nota Si llamamos $F(V, W)$ al conjunto de todas las aplicaciones de clase C^1 de V en W , es fácil ver que los conjuntos $U(f, \delta)$ de todas las δ -aproximaciones de f forman la base de una topología en $F(V, W)$, y ésta resulta ser independiente tanto de la métrica de Riemann considerada en V como de la inmersión de W en \mathbb{R}^m . No obstante, como vamos a usar las δ -aproximaciones de forma auxiliar, no vamos a necesitar este hecho. ■

El resultado siguiente es un hecho elemental que usaremos a menudo:

Teorema 9.4 Sea V un espacio topológico normal, sean $\{C_i\}_{i \in I}$ y $\{U_i\}_{i \in I}$ cubrimientos localmente finitos de V tales que $C_i \subset U_i$ con C_i cerrado y U_i abierto, sea $\{\delta_i\}_{i \in I}$ una familia de números reales positivos. Entonces existe una función continua $\delta : V \rightarrow]0, +\infty[$ tal que $\delta(p) < \delta_i$ para todo $p \in C_i$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $f_i : V \rightarrow [\delta_i, 1]$ una función continua que valga δ_i en C_i y que valga 1 en $V \setminus U_i$. Como cada $p \in V$ pertenece a un número finito de abiertos U_i , la función $\delta(p) = \min_{i \in I} f_i(p)$ es continua y cumple lo requerido. ■

Veamos ahora que la condición 3 del teorema 9.2 es precisamente la expresión en coordenadas de la definición de δ -aproximación:

Teorema 9.5 Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación de clase C^1 entre dos subvariedades de \mathbb{R}^m y $\mathbb{R}^{m'}$, respectivamente. Sea $x : U \rightarrow \tilde{U}$ una carta de V , sea $C \subset U$ un conjunto compacto y sea $x' : U' \rightarrow \tilde{U}'$ una carta en W tal que $f[C] \subset U'$. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $g : V \rightarrow W$ es una función de clase C^1 tal que $g[C] \subset U'$ y $\tilde{f} = x^{-1} \circ f \circ x'$, $\tilde{g} = x^{-1} \circ g \circ x'$ cumplen

$$\|\tilde{f}(x) - \tilde{g}(x)\| < \delta, \quad \|J\tilde{f}(x) - J\tilde{g}(x)\| < \delta,$$

para todo $x \in x[C]$, entonces, para todo $p \in C$ y todo $v \in T_p(V)$,

$$\|f(p) - g(p)\| < \epsilon, \quad \|df|_p(v) - dg|_p(v)\| < \epsilon\|v\|$$

DEMOSTRACIÓN: La función x'^{-1} es uniformemente continua en el compacto $x'[f[C]] = \tilde{f}[x[C]]$, luego, dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $y, y' \in x'[f[C]]$ cumplen $\|y - y'\| < \delta$, entonces $\|x'^{-1}(y) - x'^{-1}(y')\| < \epsilon$. En particular, si g cumple las condiciones del enunciado y $p \in C$, tenemos que los puntos $\tilde{f}(x(p)), \tilde{g}(x(p)) \in x'[f[C]]$ cumplen $\|\tilde{f}(x(p)) - \tilde{g}(x(p))\| < \delta$, luego $\|f(p) - g(p)\| < \epsilon$.

Si f no cumple el teorema, existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta = 1/k$ suficientemente pequeño (como para que se cumpla la primera parte de la conclusión, ya demostrada) existe una función g_k tal que $g_k[C] \subset U'$ y \tilde{f}, \tilde{g}_k cumplen las condiciones del enunciado (y la primera parte de la conclusión), pero existen puntos $p_k \in C$ y vectores $v_k \in T_{p_k}(V)$ (necesariamente $v_k \neq 0$) tales que $\|df|_{p_k}(v_k) - dg_k|_{p_k}(v_k)\| \geq \epsilon\|v_k\|$. Equivalentemente, si llamamos $u_k = v_k/\|v_k\|$, tenemos que

$$\|df|_{p_k}(u_k) - dg_k|_{p_k}(u_k)\| \geq \epsilon.$$

Por la compacidad de C y de la esfera unitaria de \mathbb{R}^m , tomando una subsucesión, podemos suponer que la sucesión p_k converge a un punto $p \in C$ y que u_k (identificado con un vector unitario en \mathbb{R}^m) converge a un $u \in T_p(V)$, unitario también.

Por hipótesis $\|\tilde{f}(x(p_k)) - \tilde{g}_k(x(p_k))\| < 1/k$, y el primer sumando tiende a $\tilde{f}(x(p))$, luego $\tilde{g}_k(x(p_k)) = x'_k(g_k(p_k))$ también tiende a $\tilde{f}(x(p)) = x'_k(f(p))$, luego $g_k(p_k)$ tiende a $f(p)$.

Sea $\tilde{u}_k = dx|_{p_k}(u_k) \in \mathbb{R}^n$ (donde n es la dimensión de V). Así

$$d\tilde{f}|_{x(p_k)}(\tilde{u}_k) = \tilde{u}_k J\tilde{f}(x(p_k)), \quad d\tilde{g}_k|_{x(p_k)}(\tilde{u}_k) = \tilde{u}_k J\tilde{g}_k(x(p_k)),$$

luego, por la hipótesis sobre las matrices jacobianas,

$$\|d\tilde{f}|_{x(p_k)}(\tilde{u}_k) - d\tilde{g}_k|_{x(p_k)}(\tilde{u}_k)\| = \|\tilde{u}_k(J\tilde{f}(x(p_k)) - J\tilde{g}_k(x(p_k)))\| \leq n\|\tilde{u}_k\|/k.$$

No podemos asegurar que $\|\tilde{u}_k\| = 1$, porque la carta x no es una isometría, pero, considerando la expresión en coordenadas de la métrica de V , la compacidad de C y el hecho de que $\|u_k\| = 1$ implican que la sucesión $\|\tilde{u}_k\|$ está acotada, luego el miembro derecho de la desigualdad anterior tiende a 0.

Por otra parte, la expresión de $d\tilde{f}$ en términos de las derivadas parciales (continuas) de \tilde{f} muestra que $d\tilde{f}|_{x(p_k)}(\tilde{u}_k)$ converge a $d\tilde{f}|_{x(p)}(\tilde{u})$, luego también $d\tilde{g}_k|_{x(p_k)}(\tilde{u}_k) = dx'_{g_k(p_k)}(dg_k|_{p_k}(u_k))$ converge a $d\tilde{f}|_{x(p)}(\tilde{u}) = dx'_{f(p)}(df|_p(u))$.

Considerando a $x'^{-1} : \tilde{U}' \rightarrow \mathbb{R}^{m'}$ y a $dx'^{-1} : \tilde{U}' \times \mathbb{R}^{n'} \rightarrow \mathbb{R}^{m'}$, tenemos que $dg_k|_{p_k}(u_k)$ converge a $df|_p(u)$, lo que contradice la elección de ϵ . ■

Ahora ya podemos generalizar el teorema 9.2 a aplicaciones entre variedades arbitrarias:

Teorema 9.6 *Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación de clase C^k ($k \geq 1$) entre subvariedades sin frontera de \mathbb{R}^m y $\mathbb{R}^{m'}$, respectivamente, sea $A \subset V$ cerrado tal que $f|_A$ sea de clase C^∞ y sea $\delta : V \rightarrow]0, +\infty[$ una función continua. Entonces f tiene una δ -aproximación diferenciable g (de clase C^∞) tal que $g|_A = f|_A$.*

DEMOSTRACIÓN: Por definición existe un abierto $A \subset U$ donde la función f es de clase C^∞ . Para cada $p \in V$ tomamos un abierto coordenado U'_p alrededor de $f(p)$ y un abierto coordenado de clausura compacta H_p alrededor de p tal que $f[\overline{H}_p] \subset U'_p$. Podemos exigir además que $H_p \subset U$ o bien $H_p \subset V \setminus A$.

Los abiertos $\{H_p\}$ forman un cubrimiento abierto de V , luego podemos tomar un refinamiento localmente finito, $\{G_i\}_{i=0}^\infty$. Así, G_i es un abierto coordenado de clausura compacta tal que $f[\overline{G}_i] \subset U'_i$, para cierto abierto coordenado U'_i de W .

Tomamos abiertos $W_i \subset \overline{W}_i \subset V_i \subset \overline{V}_i \subset U_i \subset \overline{U}_i \subset G_i$ de modo que $\{W_i\}$ sea un cubrimiento de V . (En principio podemos tomar, para cada punto $p \in V$, abiertos $W_p \subset \overline{W}_p \subset V_p \subset \overline{V}_p \subset U_p \subset \overline{U}_p \subset G_i$, y luego unimos todos los W_p , V_p , U_p contenidos en un mismo G_i .)

Sea $\epsilon_i = d(f[\overline{U}_i], W \setminus U'_i) > 0$. Así, si $\|f(p) - g(p)\| < \epsilon_i$ para todo $p \in \overline{U}_i$, entonces $g[\overline{U}_i] \subset U'_i$.

Por el teorema 9.4 existe una función δ' tal que $0 < \delta'(p) \leq \epsilon_i$, para todo $p \in \overline{U}_i$. Podemos cambiar δ por $\min\{\delta, \delta'\}$ sin pérdida de generalidad (pues toda aproximación para la nueva δ lo es para la original), y así toda δ -aproximación g de f cumple igualmente $g[\overline{U}_i] \subset U'_i$.

Fijemos cartas $x_i : G_i \rightarrow \tilde{G}_i$, $x'_i : U'_i \rightarrow \tilde{U}'_i$. Llamemos $f_0 = f$ y supongamos definida $f_i : V \rightarrow W$ de clase C^∞ en $U \cup W_0 \cup \dots \cup W_{i-1}$, tal que $f_i|_A = f|_A$ y que sea una $(1 - 1/2^i)\delta$ -aproximación de f (entendido esto trivialmente si $i = 0$).

Sea $g_i = x_i^{-1} \circ f_i \circ x'_i : \tilde{G}_i \rightarrow \tilde{U}'_i$, que es una función de clase C^k . Sea $\delta = d(g_i[\overline{U}_i], \mathbb{R}^n \setminus U'_i)$, de modo que si $\|g_i(x) - g(x)\| < \delta$, para todo $x \in \tilde{U}_i$, entonces $g[\overline{U}_i] \subset U'_i$.

El teorema 9.5 nos da que, reduciendo δ si es necesario, podemos aplicar el teorema 9.2 para obtener una función $g_{i+1} : U_i \rightarrow U'_i$ que es de clase C^∞ en un entorno de $x_i[\overline{W}_i]$, que coincide con g_i fuera de $x_i[V_i]$ y de modo que la función $\bar{g}_{i+1} = x_i \circ g_{i+1} \circ x_i'^{-1}$ cumple, para todo $p \in U_i$ y todo $v \in T_p(V)$,

$$\|f_i(p) - \bar{g}_{i+1}(p)\| < \frac{1}{2^{i+1}} \min_{q \in \overline{U}_i} \delta(q), \quad \|df_i|_p(v) - dg_{i+1}(v)\| < \frac{1}{2^{i+1}} \min_{q \in \overline{U}_i} \delta(q) \|v\|.$$

Como \bar{g}_{i+1} coincide con f_i en $U_i \setminus V_i$, podemos definir

$$f_{i+1}(p) = \begin{cases} f_i(p) & \text{si } p \in V \setminus \overline{V}_i, \\ \bar{g}_{i+1}(p) & \text{si } p \in U_i, \end{cases}$$

que es una aplicación diferenciable (de clase C^∞) en $U \cup W_0 \cup \dots \cup W_i$ (porque, por el teorema anterior, \bar{g}_{i+1} lo es donde ya lo era f_i) y que es una $\delta/2^{i+1}$ -aproximación de f_i , luego una $(1 - 1/2^{i+1})\delta$ -aproximación de f .

La construcción de los abiertos U_i nos da dos posibilidades, o bien $U_i \subset V \setminus A$, en cuyo caso el hecho de que $f_i|_U = f|_U$ implica que también $f_{i+1}|_A = f|_A$, o bien $U_i \subset U$, en cuyo caso anulamos la construcción anterior y definimos simplemente $f_{i+1} = f_i$, que cumple las mismas condiciones, pues f_i es diferenciable en U , luego en W_i , y además $f_{i+1}|_A = f|_A$.

Definimos $g(p) = \lim_i f_i(p)$. La sucesión f_i es finalmente constante en un entorno de cada punto p , luego claramente $g : V \rightarrow W$ es de clase C^∞ en V , cumple que $g|_A = f|_A$ y es una δ -aproximación de f . ■

Nota Usando el apartado 5) de 9.2 podemos probar que la δ -aproximación de f construida en el teorema anterior es homotópica a f , de modo que todas las aplicaciones de la homotopía son también δ -aproximaciones de f , pero no vamos a necesitar este hecho. ■

El teorema siguiente muestra la importancia de no aproximar únicamente las funciones, sino también sus diferenciales:

Teorema 9.7 Si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación de clase C^1 entre subvariedades sin frontera de \mathbb{R}^m y $\mathbb{R}^{n'}$, respectivamente. Si f es una inmersión, una inmersión regular o un difeomorfismo, existe una función $\delta : V \rightarrow]0, +\infty[$ continua tal que toda δ -aproximación de f cumple lo mismo.

DEMOSTRACIÓN: Como en la prueba del teorema anterior podemos tomar un cubrimiento $\{U_i\}_{i=0}^\infty$ localmente finito de abiertos coordenados y abiertos de clausura compacta $W_i \subset \overline{W}_i \subset U_i$ de modo que $\{W_i\}$ también sea un cubrimiento de V y $f[\overline{W}_i] \subset U'_i$, para ciertos abiertos coordenados U'_i de W .

Sean n y n' las dimensiones de V y W , respectivamente. Fijemos cartas $x_i : U_i \rightarrow \tilde{U}_i$, $x'_i : U'_i \rightarrow \tilde{U}'_i$ y sea \tilde{f}_i la lectura de f en las cartas x_i, x'_i .

Supongamos que f es una inmersión, con lo que la matriz $J\tilde{f}_i(x)$ tiene rango n en todo punto $x \in \tilde{U}_i$. Podemos identificar el conjunto $\text{Mat}_{n \times n'}(\mathbb{R})$

de todas las matrices $n \times n'$ con coeficientes en \mathbb{R} con $\mathbb{R}^{nn'}$. Sea \mathcal{M} el subespacio formado por las matrices de rango n . Se trata de un abierto en $\mathbb{R}^{nn'}$, pues la aplicación $f : \mathbb{R}^{nn'} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada matriz le asigna la suma de los cuadrados de los determinantes de todas sus submatrices $n \times n$ es continua y $\mathcal{M} = f^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]$.

Por otra parte, $K = \{J\tilde{f}_i(x) \mid x \in x_i[\overline{W}_i]\} \subset \mathcal{M}$ es compacto. Llamemos $\delta_i = d(K, \mathbb{R}^{nn'} \setminus \mathcal{M}) > 0$. Por el teorema 9.4 existe una aplicación continua $\delta : V \rightarrow]0, +\infty[$ tal que $\delta(p) < \delta_i$ para todo $p \in \overline{W}_i$. Es claro entonces que si g es una δ -aproximación de f y \tilde{g}_i son las lecturas de g en las cartas consideradas, se cumple que $d(J\tilde{f}_i(x) - J\tilde{g}_i(x)) < \delta_i$ para todo $x \in x_i[W_i]$, luego $J\tilde{g}_i(x) \in \mathcal{M}$, luego g es una inmersión.

Supongamos ahora que f es una inmersión regular y veamos que existe un $\delta_i > 0$ tal que si $\delta(p) < \delta_i$ para todo $p \in \overline{W}_i$ (y sabemos que siempre existen funciones que cumplen esto), entonces toda δ -aproximación g de f cumple que $g|_{\overline{W}_i}$ es inyectiva.

En caso contrario, existiría una sucesión de funciones continuas δ_k tales que $\delta_k(p) < 1/k$ para todo $p \in \overline{W}_i$ y una sucesión de δ_k -aproximaciones g_k de f y puntos $p_k \neq q_k$ en \overline{W}_i tales que $g_k(p_k) = g_k(q_k)$. Pasando a una subsucesión podemos suponer que las sucesiones p_k y q_k convergen a p y $q \in \overline{W}_i$, respectivamente, así como que

$$\frac{x_i(p_k) - y_i(p_k)}{\|x_i(p_k) - y_i(p_k)\|}$$

converge a un punto $u \in S^{n-1}$.

Pero entonces $g_k(p_k) = g_k(q_k)$ convergen a $f(p) = f(q)$, luego $p = q$. Sea \tilde{g}_k la lectura de g_k en las cartas i -ésimas. Por el teorema del valor medio aplicado a las funciones $\tilde{g}_k^j : \tilde{U}_i \rightarrow \mathbb{R}$, existe un punto z_{kj} entre $x_i(p_k)$ y $x_i(q_k)$ tal que

$$0 = \tilde{g}_k^j(x(p_k)) - \tilde{g}_k^j(x(q_k)) = \nabla \tilde{g}_k^j(z_{kj})(x(p_k) - x(q_k)).$$

(Podemos suponer que el abierto \tilde{U}_i es convexo.) Claramente z_{kj} converge al punto $x(p)$, luego $\nabla \tilde{f}^j(p)(u) = 0$ para todo j , luego $uJ\tilde{f}(p) = 0$, lo cual es imposible si la jacobiana tiene rango máximo.

Veamos ahora que existe una función δ tal que toda δ -aproximación de f es inyectiva. Para ello tomamos otro cubrimiento V_i de V tal que $V_i \subset \overline{W}_i \subset W_i$. Sea $\epsilon_i = d(f[\overline{W}_i], f[V \setminus W_i]) > 0$. Tomemos una función δ que garantice la inyectividad de f en cada \overline{W}_i y además $\delta(p) < \epsilon_i/2$ para cada $p \in \overline{W}_i$.

Si g es una δ -aproximación de f y existen $p, q \in V$ tales que $g(p) = g(q)$, digamos con $p \in V_i$, $q \in V_j$ y $\epsilon_i \leq \epsilon_j$, entonces

$$\|f(p) - f(q)\| \leq \|f(p) - g(p)\| + \|g(q) - f(q)\| < \epsilon_i/2 + \epsilon_j/2 \leq \epsilon_j,$$

pero g es inyectiva en W_j , luego $p \notin W_j$, luego $\|f(p) - f(q)\| \geq \epsilon_j$, contradicción.

Ahora probamos que existe una función δ tal que toda δ -aproximación g de f es una inmersión regular. Sólo falta garantizar que g es un homeomorfismo en su imagen.

En general, si $f : V \rightarrow W$ es una función continua, llamamos $L(f) \subset W$ al conjunto de los puntos $w \in W$ para los que existe una sucesión $\{p_k\}$ en V sin subsucesiones convergentes de modo que $f(p_k)$ converge a w .

Observemos que $L(f)$ es cerrado.

En efecto, podemos expresar $V = \bigcup_n G_n$, donde $G_n \subset G_{n+1}$ son abiertos de clausura compacta. Si $q \in \overline{L(f)}$, existe un $q' \in L(f)$ tal que $\|q' - q\| < 1/2n$ y a su vez q' es límite de una sucesión $f(x_k)$, donde $\{x_k\}$ no tiene subsucesiones convergentes. Esto implica que sólo un número finito de x_k puede estar contenido en G_n , luego existe un $x_k \in V \setminus G_n$ tal que $\|f(x_k) - q'\| < 1/2n$, luego, llamando $y_n = x_k \in V \setminus G_n$, tenemos que $\|f(y_n) - q\| < 1/n$, luego $\{f(y_n)\}$ converge a q y la sucesión $\{y_n\}$ no tiene subsucesiones convergentes, ya que si una subsucesión convergiera a $y \in G_n$, existiría un $n_0 > n$ tal que $y_{n_0} \in G_n \subset G_{n_0}$, contradicción. Por lo tanto, $q \in L(f)$.

En el caso de la aplicación f que estamos considerando, el hecho de que sea un homeomorfismo en su imagen se traduce en que $L(f) \cap f[V] = \emptyset$.

Sea $\epsilon_i < 1/(i+1)$, $\epsilon_i < d(f[\overline{W}_i], L(f))$. Sea δ una función continua tal que $\delta(p) < \epsilon_i$ para todo $p \in \overline{W}_i$ y tal que las δ -aproximaciones de f sean inmersiones yectivas.

Sea g una δ -aproximación de f y veamos que $L(g) = L(f)$. Si $\{x_n\}$ es una sucesión en V sin subsucesiones convergentes, entonces cada \overline{W}_i contiene un número finito de términos de la sucesión, luego $\|f(x_k) - g(x_k)\| < 1/i+1$ para casi todo k , luego $\{f(x_n)\}$ converge a un punto q si y sólo si $\{g(x_n)\}$ converge a q , luego, en efecto, $L(g) = L(f)$.

Veamos seguidamente que $L(g) \cap g[V] = \emptyset$. En caso contrario, existiría un $x \in \overline{W}_i$ tal que $g(x) \in L(g) = L(f)$, pero $\|f(x) - g(x)\| < \epsilon_i$, en contradicción con la elección de ϵ_i .

A su vez, $L(g) \cap g[V] = \emptyset$ implica que g es un homeomorfismo en su imagen. Basta ver que si $C \subset V$ es cerrado, entonces $g[C]$ es cerrado en $G[V]$. Para ello tomamos $\{x_k\}$ en C tal que $\{g(x_k)\}$ converja a un punto $g(x)$. Como $g(x) \notin L(g)$, la sucesión $\{x_k\}$ tiene una subsucesión $\{x_{k_l}\}$ convergente a un $x_0 \in C$, luego $\{g(x_{k_l})\}$ converge a $g(x) = g(x_0) \in g[C]$.

Supongamos, por último que $f : V \rightarrow W$ es un difeomorfismo y veamos que existe una función δ tal que toda δ -aproximación es un difeomorfismo. De hecho, basta probar que toda δ -aproximación es suprayectiva.

Por el teorema 1.19, existe un cubrimiento localmente finito $\{U'_i\}_{i=0}^\infty$ de W de modo que existen cartas $x'_i : U'_i \rightarrow B_3(0)$ y los abiertos $x'^{-1}_i[B_1(0)]$ también son un cubrimiento.

Componiendo las cartas con la homotecia de razón $2/3$ podemos considerar cartas $x'_i : U'_i \rightarrow B_2(0)$ de modo que los abiertos $x'^{-1}_i[B_{2/3}(0)]$ también son un cubrimiento.

Sea $V'_i = x'^{-1}_i[B_1(0)]$, $V_i = f^{-1}[V'_i]$, $W'_i = x'^{-1}_i[B_{2/3}(0)]$ y $W_i = f^{-1}[W'_i]$.

Como x'_i es uniformemente continua en el compacto \overline{V}'_i , existe un δ_i tal que si $p, q \in \overline{V}'_i$ cumplen $\|p - q\| < \delta_i$, entonces $\|x'(p) - x'(q)\| < 1/3$. Por 9.4 existe una función continua $\delta : V \rightarrow]0, +\infty[$ tal que $\delta(p) < \delta_i$ para todo $p \in \overline{V}_i$.

Sea g una δ -aproximación de f , que, por la parte ya probada, es un homeomorfismo en su imagen. Tenemos que $\|f(p) - g(p)\| < \delta_i$ para todo $p \in \overline{V}_i$, luego $\|x'(f(p)) - x'(g(p))\| < 1/3$, luego $x'(g(p)) \in \overline{B}_{4/3}(0) \subset B_2(0)$, luego $g(p) \in U'_i$. Así pues, $g[\overline{V}_i] \subset U'_i$.

Tenemos el difeomorfismo $f \circ x'_i : \overline{V}_i \rightarrow B^n$, con lo que podemos considerar la composición $h = (f \circ x'_i)^{-1} \circ g \circ x'_i : B^n \rightarrow B_2(0)$, que es un homeomorfismo en su imagen.

Vamos a probar que $\overline{B}_{2/3}(0) \subset h[B^n]$, lo cual implica que

$$f[\overline{W}_i] = x'^{-1}_i[\overline{B}_{2/3}(0)] \subset g[\overline{V}_i],$$

y esto, para todo índice i , implica que $g[V] = W$.

Para ello observamos que si $x \in h[S^{n-1}]$, entonces $x = x'_i(f(p))$, para cierto $p \in \overline{V}_i$, de modo que $\|x'_i(f(p))\| = 1$, luego, por la δ -aproximación, se cumple que $\|h(x)\| = \|x'_i(g(p))\| > 2/3$. Así pues, $h[S^{n-1}]$ está fuera de la bola $B_{2/3}(0)$.

El mismo argumento prueba que $\|h(0)\| < 1/3$, luego $h(0) \in B_{2/3}(0)$.

Por el teorema de Jordan-Brouwer [TA 10.10], $\mathbb{R}^n \setminus h[S^{n-1}]$ tiene dos componentes conexas, una de las cuales es $h[B_1(0)]$, pues por el teorema de invarianza de los dominios [TA 2.9] es abierto en \mathbb{R}^n , luego en $\mathbb{R}^n \setminus h[S^{n-1}]$, y claramente también es cerrado.

Y como $h(0) \in B_{2/3}(0) \cap h[B_1(0)]$, la componente conexa que contiene a $B_{2/3}(0)$ es $h[B_1(0)]$, es decir, $B_{2/3}(0) \subset h[B_1(0)]$ y $\overline{B}_{2/3}(0) \subset h[B^n]$. ■

Ahora ya podemos deducir consecuencias puramente topológico-diferenciales:

Teorema 9.8 *Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación de clase C^k entre dos variedades diferenciales sin frontera y sea $A \subset V$ un cerrado tal que $f|_A$ sea de clase C^∞ . Entonces existe $g : V \rightarrow W$ diferenciable (de clase C^∞) tal que $g|_A = f|_A$. Si f es una inmersión, una inmersión regular o un difeomorfismo, podemos exigir que g también lo sea.*

Para probarlo basta sumergir las variedades en espacios \mathbb{R}^m y $\mathbb{R}^{m'}$ considerar una δ -aproximación adecuada de f .

En particular, si dos variedades son difeomorfas mediante un difeomorfismo de clase C^1 , entonces son difeomorfas (mediante un difeomorfismo de clase C^∞).

Arcos diferenciables He aquí una primera aplicación sencilla:

Teorema 9.9 *Dos puntos distintos de una variedad diferencial conexa pueden unirse mediante un arco diferenciable que no se corte a sí mismo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea V una variedad diferencial y $p, q \in V$ dos puntos distintos. Dotando a V de una métrica de Riemann, es claro que p y q pueden unirse mediante un arco geodésico a trozos, digamos $\gamma :]-\epsilon, 1 + \epsilon[\rightarrow V$, de modo que $\gamma(0) = p$ y $\gamma(1) = q$. Podemos suponer que no se corta a sí mismo, pues si lo hace, uniendo el arco desde el origen hasta el primer punto de corte con la parte final desde la última vez que el arco pasa por dicho punto, eliminamos un bucle de γ y con él el punto de corte. Tras un número finito de pasos, no quedan puntos de corte.

Si $\gamma(t_0)$ es un punto donde γ no es regular, tomamos una bola geodésica centrada en $\gamma(t_0)$, y así, a través de $\exp_{\gamma(t_0)} : T_{\gamma(t_0)} \rightarrow W$ la restricción de γ a un entorno de t_0 se corresponde con dos segmentos unidos en 0, pero es fácil eliminar la punta de dos segmentos sustituyéndola por un pequeño arco de circunferencia de modo que el resultado sea de clase C^1 en los dos puntos de enlace (ya usamos esto en la prueba del teorema 8.46, véase la figura en la página 384). Repitiendo esto con cada punto donde γ no sea regular obtenemos un arco regular a trozos $\gamma^* :]-\epsilon, 1 + \epsilon[\rightarrow V$ que es de clase C^∞ salvo en un número finito de puntos, donde es al menos de clase C^1 . En otras palabras, se trata de una inmersión regular de clase C^1 , y todos los puntos donde no es C^∞ están en $]0, 1[$. Por el teorema anterior existe una inmersión regular $\bar{\gamma} :]-\epsilon, 1 + \epsilon[\rightarrow V$ de clase C^∞ , es decir, un arco regular, que coincide con γ^* en el cerrado $]-\epsilon, 0] \cup [1, 1 + \epsilon[$, luego sigue cumpliendo $\bar{\gamma}(0) = p$ y $\bar{\gamma}(1) = q$. ■

9.2 Pegado de difeomorfismos

Un hecho topológico elemental es que si una función es continua en dos cerrados de un espacio topológico, también lo es en su unión. Sin embargo, esto es falso para aplicaciones diferenciables. Basta pensar en la concatenación de dos arcos diferenciables tales que el extremo de uno sea el origen del otro. Se trata de una aplicación $\gamma : [0, 1] \rightarrow V$ diferenciable en $[0, 1/2]$ y en $[1/2, 1]$ lo que garantiza que es continua, pero no que sea diferenciable alrededor de $1/2$, pues las derivadas en $1/2$ de las restricciones de γ a ambos intervalos no tienen por qué coincidir.

En el último ejemplo de la sección anterior hemos visto cómo un arco regular a trozos puede convertirse en regular modificándolo en un entorno arbitrariamente pequeño de cada punto donde no lo es. Aquí vamos a probar un resultado análogo válido para aplicaciones entre variedades diferenciales. Necesitamos algunos resultados previos.

Teorema 9.10 *Dados números reales $0 < \delta < M$, existe una función diferenciable $\alpha : [\delta, M] \times [\delta, M] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que las funciones $\alpha_{uv} : I \rightarrow I$ cumplen $\alpha_{uv}(0) = 0$, $\alpha_{uv}(1) = 1$ y la derivada α'_{uv} es estrictamente positiva y toma el valor u en un entorno de 0 y el valor v en un entorno de 1.*

DEMOSTRACIÓN: Sean ϕ_1 , ϕ_2 y ϕ_3 tres funciones diferenciables como indica la figura. Notemos que ϕ_1 es constante igual a 1 alrededor de 0 y ϕ_3 es constante igual a 1 alrededor de 1. Sea

$$A_i = \int_0^1 \phi_i(t) dt.$$

Así, si $u, v \in [\delta, M]$, se cumple que $uA_1, vA_3 < 1/3$. Sea $0 < \epsilon < \delta, \epsilon < 1/3$. Definimos

$$g(u, v, t) = \epsilon + (u - \epsilon)\phi_1(t) + (v - \epsilon)\phi_3(t) + \frac{1 - \epsilon - (u - \epsilon)A_1 - (v - \epsilon)A_3}{A_2}\phi_2(t).$$

Así $g_{uv} \geq \epsilon$ es constante igual a u alrededor de 0, es constante igual a v alrededor de 1, y además

$$\int_0^1 g_{uv}(t) dt = 1.$$

Basta tomar $\alpha(u, v, s) = \int_0^s g_{uv}(t) dt$. ■

El teorema siguiente nos permitirá modificar una función para hacerla de clase C^1 donde no lo es, lo cual nos permitirá a su vez aplicar los resultados de la sección anterior:

Teorema 9.11 Sea V una variedad diferencial compacta sin frontera, sean $u_0, u_1 : V \rightarrow]0, +\infty[$ funciones diferenciables y $X_0, X_1 \in \mathfrak{X}(V)$. Entonces existe un difeomorfismo $\phi : I \times V \rightarrow I \times V$ tal que $\phi|_{\{0,1\} \times V}$ es la identidad y $d\phi|_{(i,v)} : T_i(I) \times T_v(V) \rightarrow T_i(I) \times T_v(V)$ es la identidad en $T_v(V)$ y

$$d\phi|_{(i,v)}(\partial_t|_i) = u_i(v)\partial_t|_i + X_{i,v}.$$

DEMOSTRACIÓN: Consideramos en primer lugar el caso en que $u_0 = u_1 = 1$ y $X_1 = 0$. Sea $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable que valga 1 en un entorno de 0 y se anule fuera de $] -1/2, 1/2[$. Sea $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times V)$ el campo dado por $X_{t,v} = \partial_t|_t + \eta(t)X_0$. El teorema 3.18 nos da que es completo. Sea $\Phi_X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times V \rightarrow \mathbb{R} \times V$ el grupo uniparamétrico que genera.

Podemos descomponer

$$\Phi_X(s, t, v) = (\Phi_X^1(s, t, v), \Phi_X^2(s, t, v)).$$

La curva $\Phi_{X,(t,v)}(s)$ es la curva integral de X que pasa por $\Phi_{X,(t,v)}(0) = (t, v)$, de modo que

$$\Phi'_{X,(t,v)}(s) = d\Phi_{X,(t,v)}|_s(\partial_t|_s) = X_{(t,w)}.$$

Si aplicamos $dt|_{(t,v)}$ a esta igualdad obtenemos que

$$(\Phi_{X,(t,w)}^1)'(s) = \partial_t|_{(t,v)}.$$

Como además $\Phi_{X,(t,v)}^1(0) = t$, la unicidad de las curvas integrales de un campo implica que $\Phi_{X,(t,v)}^1(s) = s + t$. Equivalentemente,

$$\Phi_X(s, t, v) = (s + t, \Phi_X^2(s, t, v)).$$

Sea $\phi(t, v) = (t, \Phi_X^2(t, t, v))$. Claramente $\phi(0, v) = (0, v)$ y, como η se anula en $[1/2, +\infty[$, las funciones $\Phi_{X,t,v}^2(s)$ son constantes cuando $t > 1/2$ y $s \geq 0$, luego también $\phi(t, v) = (t, v)$ si $t > 1/2$.

Se cumple que ϕ es un difeomorfismo, pues su inverso es

$$\phi^{-1}(t, v) = (t, \Phi_X^2(-t, 2t, v)).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} (2t, v) &= \Phi_X(t, \Phi_X(-t, 2t, v)) = \Phi_X(t, t, \Phi_X^2(-t, 2t, v)) \\ &= (2t, \Phi_X^2(t, t, \Phi_X^2(-t, 2t, v))), \end{aligned}$$

luego

$$\phi(\phi^{-1}(t, v)) = (t, \Phi_X^2(t, t, \Phi_X^2(-t, 2t, v))) = (t, v).$$

Igual se comprueba que la composición en orden inverso es la identidad.

El hecho de que $\phi(t, v) = (t, v)$ en un entorno de $t = 1$ implica que $d\phi|_{(t,v)}$ es la identidad en dicho entorno. De $\phi(0, v) = (0, v)$ se sigue que $d\phi|_{(0,v)}$ es la identidad en $T_p(V)$. Por último, podemos descomponer $\Phi_X^2(t, t, v)$ como $\iota \circ \Phi_X \circ \pi$, donde $\iota(t, v) = (t, t, v)$ y $\pi(t, v) = v$. Así,

$$d\iota|_{(0,v)}(\partial_t|_0) = \partial_s|_0 + \partial_t|_0,$$

luego

$$d(\iota \circ \Phi_X)|_{(0,v)}(\partial_t|_0) = \Phi_X'(\partial_s|_0) + \partial_t|_0 = X_{0,v} + \partial_t|_0 = 2\partial_t|_0 + X_{0,v},$$

donde hemos usado que $\Phi_X(0, t, v) = (t, v)$, luego $d\Phi_X|_{(0,0,v)}(\partial_t|_0) = \partial_t|_0$. Finalmente, al componer con $d\pi|_{(0,0,v)}$, que es la proyección en $T_v(V)$, queda $d(\iota \circ \Phi_X \circ \pi)|_{(0,v)}(\partial_t|_0) = X_{0,v}$, luego

$$d\phi|_{(0,v)}(\partial_t|_0) = \partial_t|_0 + X_{0,v}.$$

Esto termina la prueba del caso particular que hemos considerado. Mediante una reparametrización podemos conseguir un difeomorfismo

$$\phi_0 : [0, 1/2] \times V \longrightarrow [0, 1/2] \times V$$

que sea la identidad en $[1/4, 1/2] \times V$, $d\phi|_{(0,v)}$ es la identidad en $T_v(V)$ y

$$d\phi|_{(0,v)}(\partial_t|_0) = \partial_t|_0 + X_{0,v}.$$

Otra reparametrización obvia, partiendo ahora del campo X_1 , nos da un difeomorfismo

$$\phi_1 : [1/2, 1] \times V \longrightarrow [0, 1/2] \times V$$

que es la identidad en $[1/2, 3/4] \times V$, $d\phi|_{(1,v)}$ es la identidad en $T_v(V)$ y

$$d\phi|_{(1,v)}(\partial_t|_1) = \partial_t|_1 + X_{1,v}.$$

Al unir ambos difeomorfismos obtenemos un difeomorfismo $\phi : I \times V \rightarrow I \times V$ (puesto que en $[1/4, 3/4] \times V$ es la identidad) que cumple el enunciado con los campos X_0, X_1 y las funciones $u_0 = u_1 = 1$.

Por compacidad, las funciones dadas cumplen $u_i : V \rightarrow [\delta, M]$, para ciertos números reales $0 < \delta < M$. Por el teorema anterior podemos construir una aplicación diferenciable

$$\alpha : I \times V \rightarrow I$$

tal que cada $\alpha_v : I \rightarrow I$ es un difeomorfismo creciente con $\alpha'_v(i) = u_i(v)$, para $i = 0, 1$. Entonces la aplicación $\bar{\alpha} : I \times V \rightarrow I \times V$ dada por $\bar{\alpha}(t, v) = (\alpha(t, v), v)$ es un difeomorfismo (claramente es biyectiva y la matriz jacobiana de su lectura en cualquier carta de la forma $1 \times x$ es regular), y también lo es la composición $\tilde{\phi} = \alpha \circ \phi : I \times V \rightarrow I \times V$.

Es claro que $d\bar{\alpha}|_{(i,v)}(\partial_t|_i) = u_i(v)\partial_t|_i + Y_{i,v}$, donde $Y_i \in \mathfrak{X}(V)$ son campos vectoriales que dependen únicamente de $\bar{\alpha}$ (pero no de ϕ). Por otra parte, $d\bar{\alpha}|_{(i,v)}$ se restringe a la identidad en $T_v(V)$. Esto implica que $d\tilde{\phi}|_{(i,v)}$ se restringe a la identidad en $T_v(V)$ y

$$d\tilde{\phi}|_{(i,v)}(\partial_t|_i) = u_i(v)\partial_t|_i + Y_{i,v} + X_{i,v}.$$

Por lo tanto, si construimos ϕ con los campos $X_i - Y_i$ en lugar de X_i , al pasar a $\tilde{\phi}$ obtenemos un difeomorfismo en las condiciones del enunciado. ■

Con esto ya podemos ajustar una función diferenciable a trozos para volverla diferenciable donde no lo es. Empezamos con un caso particular que se ajusta a las condiciones del teorema anterior:

Teorema 9.12 *Sea V una variedad compacta sin frontera y $\phi : I \times V \rightarrow I \times V$ una función continua tal que*

$$\phi_1 = \phi|_{[0,1/2] \times V} : [0, 1/2] \times V \rightarrow [0, 1/2] \times V,$$

$$\phi_2 = \phi|_{[1/2,1] \times V} : [1/2, 1] \times V \rightarrow [1/2, 1] \times V$$

sean inmersiones regulares. Dado $0 < \delta < 1/2$, existe un una inmersión regular

$$\Phi : I \times V \rightarrow I \times V$$

con la misma imagen y tal que

$$\Phi|_{[0,1/2-\delta] \times V} = \phi_1|_{[0,1/2-\delta] \times V}, \quad \Phi|_{[1/2+\delta,1] \times V} = \phi_2|_{[1/2+\delta,1] \times V}.$$

DEMOSTRACIÓN: De las hipótesis se desprende que los difeomorfismos¹

$$\phi_i|_{\{1/2\} \times V} : \{1/2\} \times V \rightarrow \{1/2\} \times V$$

¹Notemos que, por [TA 2.10] una inmersión regular de una variedad compacta en sí misma tiene que ser un difeomorfismo.

son el mismo, para $i = 1, 2$. Llamamos $f : V \rightarrow V$ al difeomorfismo que resulta de eliminar la primera componente, es decir, el dado por $\phi_i(1/2, v) = (1/2, f(v))$. Entonces, la restricción de

$$d\phi_i|_{(1/2, v)} : T_{1/2}I \times T_v(V) \rightarrow T_{1/2}I \times T_{f(v)}(V)$$

a $T_v(V)$ es $df|_v$, mientras que

$$d\phi_i|_{(1/2, v)}(\partial_t|_{1/2}) = u_i(f(v))\partial_t|_{1/2} + X_{i, f(v)},$$

para ciertas funciones $u_i : V \rightarrow]0, +\infty[$ y ciertos campos $X_i \in \mathfrak{X}(V)$.

Por el teorema anterior existe un difeomorfismo $\bar{\phi}_0 : I \times V \rightarrow I \times V$ que es la identidad en $\{0, 1\} \times V$ y, para $i = 0, 1$, se cumple

$$d\bar{\phi}_0|_{(i, v)}(\partial_t|i) = u_i(v)\partial_t|i + X_{i, v}.$$

Consideramos $\bar{\phi}_0 : I \times V \rightarrow I \times V$ dado por $\bar{\phi}_0(t, v) = \phi_0(t, f(v))$. Así $\bar{\phi}_0(i, v) = (i, f(v))$, para $i = 0, 1$, la restricción de $d\bar{\phi}_0|_{(i, v)}$ a $T_v(V)$ es $df|_v$ y

$$d\bar{\phi}_0|_{(i, v)}(\partial_t|i) = u_i(f(v))\partial_t|i + X_{i, f(v)}.$$

Así podemos definir $\Psi : [0, 2] \times V \rightarrow [0, 2] \times V$ yuxtaponiendo $\phi_1, \bar{\phi}_0$ y ϕ_2 , es decir,

$$\Psi(t, v) = \begin{cases} \phi_1(t, v) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ (\bar{\phi}_0 \circ T_{1/2})(t - 1/2, v) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 3/2, \\ (\phi_2 \circ T_1)(t - 1, v) & \text{si } 3/2 \leq t \leq 2, \end{cases}$$

donde $T_s(t, v) = (s + t, v)$.

Notemos que Ψ está bien definida y es una aplicación continua porque para $t = 1/2$ y $t = 3/2$ las dos definiciones simultáneas coinciden. Obviamente Ψ es diferenciable (de clase C^∞) en los tres cerrados $[0, 1/2] \times V$, $[1/2, 3/2] \times V$ y $[3/2, 2] \times V$. Más aún, la construcción de $\bar{\phi}_0$ garantiza que, para $t = 1/2, 3/2$, la diferencial $d\Psi|_{(t, v)} : T_t([0, 2]) \times T_v(V) \rightarrow T_t([0, 2]) \times T_{f(v)}(V)$ es la misma respecto a las dos restricciones diferenciables de Ψ .

Esto implica que, tomando cartas x y x' de V alrededor de v y de $f(v)$ y considerando las cartas $1 \times x, 1 \times x'$, las derivadas parciales de la lectura de Ψ son continuas (son continuas en dos cerrados y coinciden en la intersección de ambos), luego Ψ es un homeomorfismo de clase C^1 cuya diferencial es un isomorfismo en todo punto, luego, por el teorema de la función inversa (que claramente vale para funciones de clase C^1) tenemos que Ψ es un difeomorfismo de clase C^1 , y es de clase C^∞ salvo en el cerrado $\{1/2, 3/2\} \times V$.

Observemos ahora que $\phi[0, 1[\times V$ es abierto en $I \times V$ y contiene al compacto $\{1/2\} \times V$. Por lo tanto, reduciendo δ si es preciso, podemos suponer que

$$[1/2 - \delta, 1/2 + \delta] \times V \subset \phi[0, 1[\times V \subset \phi[I \times V].$$

El teorema 9.8 aplicado al difeomorfismo

$$\Psi : [0, 2] \times V \rightarrow \Psi[[0, 2] \times V]$$

nos da otro difeomorfismo,² es decir, otra inmersión completa (de clase C^∞) con la misma imagen

$$\bar{\Psi} : [0, 2] \times V \longrightarrow [0, 2] \times V$$

que coincide con Ψ en $[0, 1/2 - \delta] \cup [3/2 + \delta, 2]$.

Por último consideramos un difeomorfismo $\alpha : [0, 2] \longrightarrow [0, 1]$ que deje invariante a $[0, 1/2 - \delta]$ y que sea la traslación $t \mapsto t - 1$ en $[3/2 + \delta, 2]$, con el que transformamos $\bar{\Psi}$ en una inmersión completa Φ en las condiciones del enunciado.

En particular, observemos que la imagen es la misma, pues los puntos de $[0, 2] \times V$ que no tienen antiimagen por Ψ son los puntos de $[0, 1/2] \times V$ que no tienen antiimagen por ϕ_1 (contenidos en $[0, 1/2 - \delta] \times V$) y los puntos de $[3/2, 2] \times V$ que son trasladados de puntos de $[1/2, 1] \times V$ sin antiimagen por ϕ_2 (contenidos en $[3/2 + \delta, 2] \times V$), y éstos mismos son los puntos que no tienen antiimagen por $\bar{\Psi}$ y, como $\alpha \times 1$ deja invariantes a los primeros y se limita a trasladar a los segundos, los puntos sin antiimagen por Φ son los mismos que los que no tienen antiimagen por ϕ . ■

A su vez, de aquí obtenemos un resultado general:

Teorema 9.13 Sean $f : V \longrightarrow W$ un homeomorfismo entre dos variedades diferenciales. Supongamos que tenemos descomposiciones en subvariedades con frontera

$$V = V_1 \cup V_2, \quad W = W_1 \cup W_2$$

tales que las intersecciones $V_1 \cap V_2$ y $W_1 \cap W_2$ son compactas y constan de una o varias componentes conexas de las fronteras de las subvariedades. Supongamos además que f se restringe a dos difeomorfismos $f|_{V_i} : V_i \longrightarrow W_i$. Entonces f puede modificarse en un entorno arbitrariamente pequeño de $V_1 \cap V_2$ hasta un difeomorfismo $\bar{f} : V \longrightarrow W$.

DEMOSTRACIÓN: Sean $V_0 = V_1 \cap V_2$ y $W_0 = W_1 \cap W_2$. Puesto que V_0 es la unión de componentes conexas de ∂V_1 y ∂V_2 , se trata de una variedad (compacta) sin frontera. Lo mismo sucede con W_0 .

Si $p \in V_0$, diremos que un vector $v \in T_p(V)$ apunta hacia V_1 si existe un arco regular $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow V$ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma]-\epsilon, 0[\subset V_2$, $\gamma]0, \epsilon[\subset V_1$ y $\gamma'(0) = v$.

Esto tiene una caracterización útil en términos de cartas. Por el teorema del rango, existe una carta $x : U \longrightarrow \tilde{U}$ tal que $x(p) = 0$, las últimas $n - 1$ coordenadas restringidas a V_0 forman una carta de V_0 y la coordenada x^1 vale 0 en V_0 . Restringiendo U podemos suponer que es conexo y que x^1 sólo se anula en los puntos de $V_0 \cap U$. Entonces, por conexión, cambiando el signo a x^1 si es preciso, se cumple que $V_0 \cap U = \{q \in U \mid x^1(q) = 0\}$,

$$V_1 \cap U = \{q \in U \mid x^1(q) \geq 0\}, \quad V_2 \cap U = \{q \in U \mid x^1(q) \leq 0\}.$$

²Hemos probado 9.8 para variedades sin frontera, por lo que tenemos que aplicarlo a la restricción de Ψ a $]0, 2[\times V$. El difeomorfismo que obtenemos se extiende de nuevo a $[0, 2] \times V$ gracias a que coincide con Ψ en un entorno de $\{0, 2\} \times V$.

Respecto de una carta en estas condiciones, los vectores v que apuntan hacia V_1 son los que cumplen $v(x^1) > 0$. En efecto, si γ es una curva según la definición, se cumple que $x^1(\gamma(t))$ toma valores negativos a la izquierda de 0 y positivos a la derecha, luego su derivada (que al ser γ regular no puede ser nula) es positiva, y dicha derivada es $v(x^1) = \gamma'(0)(v)$. Recíprocamente, si $v(x^1) > 0$, entonces v es la derivada de $\gamma(t) = x^{-1}(v(x^1)t, \dots, v(x^n)t)$, que está en V_2 para valores negativos de t y en V_1 para valores positivos.

De aquí se desprende que toda combinación lineal con coeficientes positivos de vectores que apuntan hacia V_1 apunta hacia V_1 . También es inmediato que el campo $\partial_{x^1} \in \mathfrak{X}(U)$ de una carta en las condiciones anteriores apunta hacia V_1 en todos los puntos de $V_0 \cap U$.

Por lo tanto, si X_p es un campo con esta propiedad definido en un entorno U_p de p y $\{h_p\}_{p \in V_0} \cup \{h_0\}$ es una partición de la unidad de V subordinada al cubrimiento $\{U_p\}_{p \in V_0} \cup \{V \setminus V_0\}$, entonces

$$X = \sum_{p \in V_0} h_p X_p \in \mathfrak{X}(V)$$

es un campo que apunta hacia V_1 en todos los puntos de V_0 y que se anula fuera de un entorno compacto de V_0 . Por el teorema 3.15 es completo, luego podemos considerar su grupo uniparamétrico

$$\Phi_X : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V.$$

Sea $h : \mathbb{R} \times V_0 \longrightarrow V$ la restricción de Φ_X . Teniendo en cuenta que $h(0, p) = p$ y que $h'_p(0) = X_p$, que es un vector que apunta hacia V_0 , tenemos que la curva $h_p(t)$ está en V_2 para valores negativos de t y en V_1 para valores positivos (suficientemente pequeños).

Considerando la lectura de h respecto de una carta de V en las condiciones de la definición de vector que apunta hacia V_1 y su restricción a V_0 , es fácil ver que $dh|_{(0,p)}$ se restringe a la identidad en $T_p(V)$ y $dh|_{(0,0)}(\partial_t|_0) = X_p \notin T_p(V)$, de donde se sigue que $dh|_{(0,p)}$ es un isomorfismo.

Por consiguiente, h es un difeomorfismo en un entorno de cada punto $(0, p)$, y por la compacidad de V_0 podemos tomar un $\delta > 0$ tal que la diferencial de la restricción $h :]-\delta, \delta[\times V_0 \longrightarrow V$ es un isomorfismo en todo punto. Veamos a continuación que, tomando δ menor aún si es necesario, podemos conseguir que h sea inyectiva, luego un homeomorfismo en su imagen, luego una inmersión regular. Además la imagen será abierta en V por el teorema de la función inversa.

En efecto, en caso contrario existiría una sucesión $\{\delta_k\}$ convergente a 0 tal que existirían pares $(t_k, p_k) \neq (t'_k, p'_k) \in]-\delta_k, \delta_k[\times V_0$ con $h(t_k, p_k) = h(t'_k, p'_k)$. Pasando a una subsucesión podemos suponer que $\{p_k\}$ y $\{p'_k\}$ convergen a p , p' , respectivamente (y, desde luego, $\{t_k\}$, $\{t'_k\}$ convergen a 0), pero entonces $h(0, p) = h(0, p')$, luego $p = p'$ y la sucesión contradice la inyectividad de h en un entorno de p .

Reduciendo δ podemos exigir que $h(t, p)$ esté en V_2 siempre que $t < 0$ y en V_1 siempre que $t > 0$. Cambiando h por $(t, p) \mapsto h(t\delta, p)$ obtenemos una inmersión regular

$$h : [-1, 1] \times V_0 \longrightarrow V$$

tal que $h(0, v) = v$ y que se restringe a inmersiones regulares

$$[-1, 0] \times V_0 \longrightarrow V_2, \quad [0, 1] \times V_0 \longrightarrow V_1.$$

Igualmente podemos construir una inmersión regular $h' : [-1, 1] \times W_0 \longrightarrow W$ en las mismas condiciones. Ahora observamos que $h^{-1}[f^{-1}[h'[-1, 1] \times W_0]]$ es un entorno de $\{0\} \times V_0$, luego por la compacidad de V_0 podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que

$$[-\delta, \delta] \times V_0 \subset h^{-1}[f^{-1}[h'[-1, 1] \times W_0]].$$

Cambiando de nuevo h por $(t, p) \mapsto h(t\delta, p)$ conseguimos que

$$[-1, 1] \times V_0 = h^{-1}[f^{-1}[h'[-1, 1] \times W_0]],$$

es decir, que $(h \circ v)[[-1, 1] \times V_0] \subset h'[-1, 1] \times W_0$. Equivalentemente, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} [-1, 1] \times V_0 & \xrightarrow{\tilde{f}} & [-1, 1] \times W_0 \\ h \downarrow & & \downarrow h' \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

donde \tilde{f} se define precisamente como la composición de las otras tres aplicaciones. Las hipótesis sobre f hacen que \tilde{f} sea continua y que se restrinja a inmersiones regulares

$$[-1, 0] \times V_0 \longrightarrow [-1, 0] \times W_0, \quad [0, 1] \times V_0 \longrightarrow [0, 1] \times W_0.$$

Observemos ahora que, de las hipótesis del teorema, se sigue que f se restringe a un difeomorfismo $f|_{V_0} : V_0 \longrightarrow W_0$. Para aproximarnos a la situación del teorema anterior, definimos

$$f^* : [-1, 1] \times V_0 \longrightarrow [-1, 1] \times V_0$$

mediante $f^*(t, p) = (1 \times (f|_{V_0})^{-1})(\tilde{f}(t, p))$, y $\bar{h} : [-1, 1] \times V_0 \longrightarrow W$ mediante $\bar{h}(t, p) = h'(t, f(p))$. Así el diagrama pasa a ser

$$\begin{array}{ccc} [-1, 1] \times V_0 & \xrightarrow{f^*} & [-1, 1] \times V_0 \\ h \downarrow & & \downarrow \bar{h} \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

Salvo una reparametrización obvia, la función f^* cumple las condiciones del teorema anterior, luego podemos sustituirla por una inmersión regular f^{**} con la misma imagen y que coincida con f^* en un cerrado $([-1, -\delta] \cup [\delta, 1]) \times V_0$. Así podemos definir $\bar{f} : V \rightarrow W$ mediante

$$\bar{f}(p) = \begin{cases} (h^{-1} \circ f^{**} \circ \bar{h})(p) & \text{si } p \in h[[-1, 1[\times V_0], \\ f(p) & \text{si } p \in V \setminus h[[-\delta, \delta] \times V_0], \end{cases}$$

que es una aplicación diferenciable (de clase C^∞). Notemos que $h[[-1, 1[\times V_0]$ es abierto en V por el teorema de la función inversa (de hecho, toda inmersión regular entre variedades sin frontera es abierta). ■

9.3 Cocientes

En esta sección presentaremos diversas técnicas de construcción de nuevas variedades diferenciales a partir de otras mediante la formación de cocientes, pero antes conviene observar que en la prueba del teorema 9.13 hemos realizado una construcción simétrica respecto de las subvariedades V_1 y V_2 que es posible llevar a cabo igualmente cuando $V_0 \subset \partial V$, de modo que V no se extiende a ambos lados de V_0 , sino únicamente hacia un lado. La construcción es esencialmente la misma, pero hay que tener cuidado con los grupos uniparamétricos, pues no los hemos definido para variedades con frontera.

Definición 9.14 Sea V una variedad con frontera y sea $p \in \partial V$. Diremos que un vector $v \in T_p(V)$ apunta hacia adentro (resp. hacia afuera) de V si existe un arco regular $\gamma : [0, \delta] \rightarrow V$ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma[0, 1] \cap \partial V = \emptyset$ y $\gamma'(0) = v$ (resp. $\gamma'(0) = -v$).

Sea $x : U \rightarrow]-1, 0] \times]-1, 1[^{n-1}$ una carta cúbica alrededor de p . Entonces $\tilde{\gamma} = \gamma \circ x^{-1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ cumple que $\tilde{\gamma}(0) = 0$ y $\tilde{\gamma}(t) < 0$, para todo $t > 0$, luego $\tilde{\gamma}'(0) < 0$. Esto equivale a que $\gamma'(0)(x^1) < 0$, es decir, a que $v(x^1) < 0$ si v apunta hacia adentro o a que $v(x^1) > 0$ si apunta hacia afuera.

Recíprocamente, si se cumple que $v(x^1) < 0$ para cualquier carta en las condiciones precedentes, entonces v apunta hacia adentro de V , pues la curva $\gamma = \tilde{\gamma} \circ x^{-1}$, donde $\tilde{\gamma}(t) = (v(x^1)t, \dots, v(x^n)t)$, cumple $\gamma'(0)(x^i) = v(x^i)$, luego $\gamma'(0) = v$ y satisface la definición. Por lo tanto, si $v(x^1) > 0$, es que v apunta hacia afuera.

Teorema 9.15 Si V es una variedad diferencial con frontera no vacía, existe un campo $X \in \mathfrak{X}(V)$ tal que, para todo $p \in V$, el vector X_p apunta hacia adentro de V .

DEMOSTRACIÓN: Dado $p \in V$, sea $x : U_p \rightarrow]-1, 0] \times]-1, 1[^{n-1}$ una carta cúbica alrededor en p . Entonces $X(p) = -\partial_{x^1} \in \mathfrak{X}(U_p)$ es un campo vectorial que apunta hacia dentro de V en todos los puntos de $\partial V \cap U_p$. Los abiertos U_p junto con $U_0 = V \setminus \partial V$ forman un cubrimiento abierto de V . Sea $\{\phi_p\}_{p \in \partial V} \cup \{\phi_0\}$

una partición de la unidad subordinada según el teorema 1.21. Basta considerar el campo

$$X = \sum_{p \in \partial V} \phi_p X_p$$

y tener en cuenta que una combinación lineal de vectores que apuntan hacia adentro de V con coeficientes no negativos y no todos nulos apunta necesariamente hacia adentro de V . ■

Teorema 9.16 (de existencia de collares) *Sea V una variedad con frontera compacta $\partial V \neq \emptyset$. Entonces existe una inmersión regular $h : I \times \partial V \rightarrow V$ tal que $h(0, p) = p$ para todo $p \in \partial V$ y cuya imagen es un entorno de ∂V .*

DEMOSTRACIÓN: Fijemos un campo vectorial $X \in \mathfrak{X}(V)$ que apunte hacia adentro de V en los puntos de ∂V . Para cada $p \in \partial V$ consideramos una carta cúbica $x : U_0 \rightarrow \tilde{U}_0$ centrada en p . Imitamos la prueba del teorema 3.8, para lo cual expresamos

$$X|_{U_0} = \sum_i f^i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

con $f^i \in C^\infty(U_0)$. Llamamos $\tilde{f}^i = x^{-1} \circ f^i$, con lo que tenemos una función diferenciable $\tilde{f} :]-1, 0] \times]-1, 1[^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Por definición de diferenciability en un abierto con frontera, existe un $\epsilon > 0$ tal que \tilde{f} se extiende a una función diferenciable en $\tilde{U}_1 =]-\epsilon_0, \epsilon_0[^n$.

Reduciendo U_0 podemos suponer que $\tilde{U}_0 =]-\epsilon_0, 0] \times]-\epsilon_0, \epsilon_0[^{n-1} \subset \tilde{U}_1$. Consideramos el problema de Cauchy

$$\left. \begin{aligned} x'(t, x_0) &= \tilde{f}(x) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \right\}$$

que tiene solución $x :]-\epsilon_1, \epsilon_1[\times]-\epsilon_1, \epsilon_1[^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, de modo que

$$x'(t, x_0) = \tilde{f}(x(t, x_0)), \quad x(0, x_0) = x_0.$$

Reduciendo ϵ_1 podemos exigir que la imagen de x esté contenida en \tilde{U}_1 . Llamamos $\tilde{x} :]-\epsilon_1, \epsilon_1[\times]-\epsilon_1, \epsilon_1[^{n-1} \rightarrow \tilde{U}_1$ a la función dada por

$$\tilde{x}(t, x_2, \dots, x_n) = x(t, 0, x_2, \dots, x_n).$$

Claramente, su matriz jacobiana en 0 es de la forma

$$J\tilde{x}(0) = \begin{pmatrix} \tilde{f}^1(0) & \tilde{f}^2(0) & \cdots & \tilde{f}^n(0) \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

donde $\tilde{f}^1(0) = X_p(x^1) < 0$, luego el determinante es no nulo. Por el teorema de la función inversa [An 5.19] (junto con el teorema de inyectividad local), reduciendo ϵ_1 podemos exigir que \tilde{x} sea un difeomorfismo en un abierto $\tilde{U}_2 \subset \tilde{U}_1$.

Ahora usamos que el campo X apunta hacia adentro de V . Esto se traduce en que $x'^1(t, x_0) < 0$ siempre que $x^1(t, x_0) = 0$. A su vez, esto implica que $x^1(t, x_0) < 0$ para todo $0 < t < \epsilon_1$.

En efecto, por una parte, como $x'^1(0, x_0) < 0$, tenemos que $x^1(t, x_0) < 0$ para todo $t > 0$ suficientemente pequeño, y si existe un $t > 0$ donde $x^1(t, x_0) \geq 0$, por conexión existe otro $t_0 > 0$ donde $x^1(t_0, x_0) = 0$. Podemos tomar el mínimo de todos (necesariamente > 0) y entonces tenemos una contradicción, pues, al ser $x'^1(t_0, x_0) < 0$ los valores de $x^1(t, x_0)$ anteriores a t_0 tendrían que ser positivos, pero son negativos por definición de t_0 .

Igualmente concluimos que $x^1(t, x_0) > 0$ para todo $-\epsilon_1 < t < 0$, y esto se traduce en que la imagen por \tilde{x} de $[0, \epsilon_1[\times]-\epsilon_1, \epsilon_1[^{n-1}$ es precisamente $\tilde{U}_2 \cap \tilde{U}_0$ (el conjunto los puntos de la imagen de \tilde{x} con primera coordenada ≤ 0), que un entorno de $\{0\} \times]-\epsilon_1, \epsilon_1[^{n-1}$ en \tilde{U}_2 .

Por lo tanto, \tilde{x} induce un difeomorfismo $h_p : [0, \epsilon_p[\times U_p \rightarrow U'_p$ dado por

$$h_p(t, x^{-1}(0, x_2, \dots, x_n)) = x^{-1}(\tilde{x}(t, x_2, \dots, x_n)),$$

donde llamamos $U_p = x^{-1}[\{0\} \times]-\epsilon_1, \epsilon_1[^{n-1}$ es un entorno abierto de p en ∂V y $U'_p = x^{-1}[\tilde{U}_2 \cap \tilde{U}_0]$ es un entorno abierto de U_p en V .

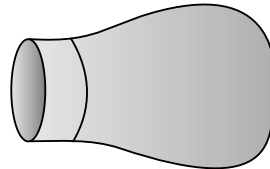
Podemos cubrir ∂V por un número finito de abiertos U_p y tomar el mínimo $\epsilon > 0$ de los ϵ_p correspondientes. El hecho de que cada curva $h_{p,q}(t)$ sea precisamente la curva integral de X que pasa por q en $t = 0$ se traduce en que las distintas funciones h_p coinciden sobre la parte común de sus dominios, luego podemos reunir las en una misma aplicación suprayectiva $h^* : [0, \epsilon[\times \partial V \rightarrow U' \subset V$, donde U' es un entorno abierto de ∂V .

Las curvas $h^*_q(t)$ son curvas integrales del campo X , luego no pueden cortarse. Esto implica que h^* es también inyectiva. Además, por construcción se restringe a difeomorfismos entre un entorno abierto de cualquier punto de su dominio y un abierto de U' , lo que implica que es un difeomorfismo local abierto, luego es un difeomorfismo.

Ahora basta definir $h : I \times \partial V \rightarrow \partial V$ mediante $h^*(t, p) = h(t\epsilon/2, p)$, que es un difeomorfismo en $h[[0, \epsilon/2[\times \partial V]$, que es un entorno de ∂V , pues contiene al abierto $h[[0, \epsilon/2[\times \partial V]$. ■

Definición 9.17 Un *collar* de una variedad diferencial ∂V es una inmersión regular $h : I \times \partial V \rightarrow U \subset V$ tal que U es un entorno de ∂V y $h(0, p) = p$ para todo $p \in \partial V$.

La figura muestra un collar de una variedad V con frontera $\partial V \cong S^1$. El collar es difeomorfo a un cilindro $I \times S^2$.



Notemos que, aunque ∂V no sea compacta, el teorema anterior se puede aplicar igualmente a una componente conexa compacta de ∂V , y en tal caso hablamos de un *collar* de dicha componente conexa. (Alternativamente, podemos aplicar el teorema anterior a un entorno abierto de la componente conexa que no tenga más puntos de ∂V .)

Pasemos ya a estudiar la formación de cocientes de variedades diferenciales. El punto de partida es la definición [TA 1.51] junto con el teorema [TA 1.52], que nos permiten formar una variedad diferencial identificando dos abiertos de otra. Esto incluye la posibilidad de identificar dos abiertos U_i de dos variedades distintas V_i formando para ello su suma topológica $V_1 \oplus V_2$ (definición [TA .48]), que tiene una estructura natural de variedad diferencial cuando V_1 y V_2 son variedades diferenciales.

En la sección 1.7 de [TA] vimos una aplicación del teorema [TA 1.52] a la construcción de variedades diferenciales, a saber, la construcción de la suma conexa $V_1 \# V_2$ de dos variedades diferenciales. A continuación vamos a generalizar dicha construcción.

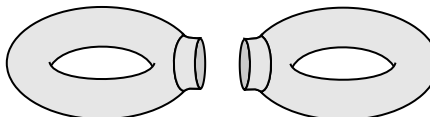
Teorema 9.18 Sean $\phi_i : I \times V_0 \rightarrow V_i$, para $i = 1, 2$, dos inmersiones regulares entre variedades diferenciales tales que $\phi_i|_{\{0\} \times V_0} : V_0 \rightarrow W_i \subset \partial V_i$ sea un difeomorfismo entre V_0 y una unión finita W_i de componentes conexas compactas de V_i , y de manera que $\phi_i[I \times V_0] \cap \partial V_i = W_i$. Sea $U_i = \phi_i[]0, 1[\times V_0]$ y sea V el cociente de $(V_1 \setminus W_1) \oplus (V_2 \setminus W_2)$ respecto del difeomorfismo $\phi : U_1 \rightarrow U_2$ dado por $\phi = \phi_1^{-1} \circ \alpha \circ \phi_2$, donde $\alpha : I \times V_0 \rightarrow I \times V_0$ es el difeomorfismo dado por $\alpha(t, v) = (1 - t, v)$.

Entonces V es una variedad diferencial tal que existen inmersiones regulares $\iota_i : V_i \rightarrow V$ de modo que, si identificamos a V_i con una subvariedad de V a través de ι_i , entonces $V = V_1 \cup V_2$ y tenemos el diagrama conmutativo de inmersiones regulares:

$$\begin{array}{ccc}
 I \times V_0 & \xrightarrow{\phi_1} & V_1 & \xrightarrow{\iota_1} & V \\
 \alpha \downarrow & & & \nearrow \iota_2 & \\
 I \times V_0 & \xrightarrow{\phi_2} & V_2 & &
 \end{array}$$

cuya imagen en V es precisamente $V_1 \cap V_2$.

La figura muestra dos superficies con frontera difeomorfa a $V_0 = S^1$ en la que hemos seleccionado dos collares, que son las imágenes de las inmersiones ϕ_i .



DEMOSTRACIÓN: Por hipótesis, la restricción de ϕ_i a $]0, 1[\times V_0$ es una inmersión regular con imagen en $V_i \setminus \partial V_i$, luego es abierta, luego U_i es abierto en $V_i \setminus W_i$. Observemos que la definición de ϕ hace que $\phi(\phi_1(t, v)) = \phi_2(1 - t, v)$, de modo que los puntos de la frontera de una variedad se identifican con puntos interiores de la otra.

El teorema [TA 1.52] nos da que V es un espacio topológico de Hausdorff, pues una sucesión en U_1 es de la forma $\{\phi_1(x_k)\}_k$, para cierta sucesión $\{x_k\}$ en $]0, 1[\times V_0$, que tendrá una subsucesión convergente a un punto $(t_0, p_0) \in I \times V_0$. Si la sucesión de partida converge a un punto de ∂U_1 (en la suma topológica), será $t_0 = 0, 1$, pero $t_0 = 0$ es imposible, ya que entonces $\phi_1(x_k)$ convergería

a $\phi_1(0, p_0) \in W_1$, luego $t_0 = 1$, y entonces $\phi(\phi_1(x_k)) = \phi_2(x_k)$ convergerá a $\phi_2(0, p_0) \in W_2$, luego no convergerá en la suma topológica.

Por consiguiente, el teorema [TA 1.52] nos da también que V admite una única estructura de variedad diferencial que convierte a la proyección

$$\pi : (V_1 \setminus W_1) \oplus (V_2 \setminus W_2) \longrightarrow V$$

en un difeomorfismo local. Más aún, podemos definir $\iota_1 : V_1 \longrightarrow V$ mediante

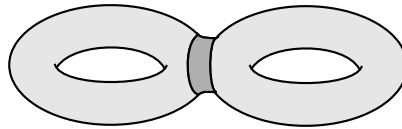
$$\iota_1(p) = \begin{cases} \pi(p) & \text{si } p \in V_1 \setminus W_1, \\ (\phi_1^{-1} \circ \alpha \circ \phi_2 \circ \pi)(p) & \text{si } p \in \phi_1[[0, 1[\times V_0]. \end{cases}$$

La intersección de los dos abiertos que intervienen en la definición es U_1 y en ella ambas definiciones coinciden, pues son $\pi(p) = \pi(\phi_1(p))$. Por lo tanto ι_1 es diferenciable y es fácil ver que es una inmersión regular. Análogamente podemos construir una inmersión regular $\iota_2 : V_2 \longrightarrow V$ y es claro que se cumplen las condiciones del enunciado. ■

Se dice que V es la variedad obtenida pegando V_1 y V_2 a través de las inmersiones regulares ϕ_i .

Conviene destacar que todos los puntos de $V_1 \cap V_2$ son puntos interiores de V , de modo que ∂V está formada por (las imágenes a través de ι_i de) los puntos de $\partial V_i \setminus W_i$. En particular, si $W_i = \partial V_i$, entonces V es una variedad sin frontera.

Nota La figura muestra el resultado de pegar las dos superficies de la figura precedente. Se trata de la suma conexa de dos toros, pero conviene destacar que la definición de suma conexa parte de los toros, e incluye el hecho de que hay que agujerearlos como primer paso para formar la suma, mientras que la construcción que hemos descrito aquí parte de los toros ya agujereados y dotados de una frontera difeomorfa a S^1 .



La suma conexa se reduce a esta construcción sin más que observar que si en una superficie V tomamos un cerrado C difeomorfo a B^n y le quitamos la imagen por el difeomorfismo de una bola abierta menor, obtenemos una superficie con frontera S^1 (además del resto de puntos frontera que ya pudiera tener V) y el difeomorfismo de B^n en C se puede modificar ahora para formar un difeomorfismo $I \times S^1 \longrightarrow V$. ■

Volviendo a la situación general del teorema 9.18, observemos que α deja invariantes los puntos de $\{1/2\} \times V_0$, por lo que

$$V_0^* = \iota_1[\{1/2\} \times V_0] = \iota_2[\{1/2\} \times V_0]$$

es una subvariedad de V difeomorfa a V_0 .

Más aún, si llamamos $V_i^* = \iota_i[V_i \setminus \phi_i[[0, 1/2[\times V_0]]$, se cumple igualmente que $V = V_1^* \cup V_2^*$, pero ahora $V_1^* \cap V_2^* = V_0^*$. De hecho, V_0^* es una unión de componentes conexas de cada ∂V_i^* .

Además, un difeomorfismo $[0, 1] \rightarrow [1/2, 1]$ que deje invariantes a los puntos de un entorno de 1, induce un difeomorfismo $I \times V_0 \rightarrow [1/2, 1] \times V_0$ y a partir de él es fácil construir difeomorfismos $V_i \cong V_i \setminus \phi_i[[0, 1/2[\times V_0]]$, y a su vez difeomorfismos $V_i \cong V_i^*$.

Así pues, V es la unión de dos subvariedades V_i^* difeomorfas a V_i de modo que $V_1^* \cap V_2^* = \partial V_1^* \cap \partial V_2^*$, luego cumple las hipótesis del teorema 9.13.

Quizá el lector se sienta tentado a concluir que V está determinada salvo isomorfismo por V_1 , V_2 y la elección de las componentes conexas de sus fronteras que identificamos, pero no es así. Como —por otra parte— es razonable sospechar, la identificación depende de las inmersiones regulares de partida. Si construimos otra variedad \bar{V} identificando las mismas componentes conexas de ∂V_i mediante otras inmersiones regulares, podemos construir sin duda difeomorfismos $f_i : V_i^* \rightarrow \bar{V}_i^*$, pero para aplicar el teorema 9.13 necesitaríamos que $f_1|_{V_0^*} = f_2|_{V_0^*}$, y nada nos permite asegurar que esto vaya a cumplirse.

Lo que sí es cierto es que V sólo depende de los difeomorfismos $\psi_i : V_0 \rightarrow V_i$ dados por $\psi_i(v) = \phi_i(1/2, v)$, que cumplen $\psi_1 \circ \iota_1 = \psi_2 \circ \iota_2$ (por el diagrama conmutativo precedente).

En efecto, sean $\phi'_i : I \times V_0 \rightarrow V_i$ otras inmersiones regulares que coincidan con cada ϕ_i en $\{1/2\} \times V_0$ con las que construimos otro cociente V' .

Por la construcción, los difeomorfismos $V_i \rightarrow V_i^*$, $V_i \rightarrow V_i'^*$ restringidos a W_i vienen dados por $\phi_i(0, v) \mapsto \iota_i(\phi_i(1/2, v))$, $\phi'_i(0, v) \mapsto \iota_i(\phi'_i(1/2, v))$, respectivamente, luego al componer uno con el inverso del otro obtenemos dos difeomorfismos $f_i : V_i^* \rightarrow V_i'^*$ que sobre V_0^* vienen dados por la relación $\iota_i(\phi_i(1/2, v)) \mapsto \iota'_i(\phi'_i(1/2, v))$, y esto no depende de i , luego $f_1|_{V_0^*} = f_2|_{V_0^*}$. El teorema 9.13 nos da entonces que $V \cong V'$.

En realidad podemos pegar dos variedades identificando una o varias componentes conexas de su frontera sin necesidad de cortarles un trozo:

Teorema 9.19 Sean V_1 y V_2 variedades con frontera. Sean $W_i \subset \partial V_i$ uniones finitas de componentes conexas compactas de ∂V_i y sean $\psi_i : V_0 \rightarrow W_i$ dos difeomorfismos. Entonces existe una variedad diferencial V , única salvo difeomorfismo, tal que existen inmersiones regulares $\iota_i : V_i \rightarrow V$ de modo que, llamando $V_i^* = \iota_i[V_i]$, se cumple que $V = V_1^* \cup V_2^*$ y tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\iota_1} & V \\ \psi_1 \uparrow & & \uparrow \iota_2 \\ V_0 & \xrightarrow{\psi_2} & V_2 \end{array}$$

cuya imagen en V es $V_1^* \cap V_2^*$.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos el difeomorfismo $\psi = \psi_1^{-1} \circ \psi_2 : W_1 \rightarrow W_2$ y sea V la suma amalgamada de $V_1 \oplus V_2$ a través de ψ , es decir, el espacio topológico cociente que resulta de identificar cada punto de W_1 con su imagen por ψ . Según [TA 1.50], se trata de un espacio de Hausdorff.

Fijemos collares $\phi_i^* : I \times W_i \rightarrow V_i$. Con un difeomorfismo $I \rightarrow [1/2, 1]$ que sea la identidad en un entorno de 1, podemos construir un difeomorfismo $I \times W_i \rightarrow [1/2, 1] \times W_i = (I \times W_i) \setminus ([0, 1/2[\times W_i)$, que a su vez induce un difeomorfismo $V_i \rightarrow V_i \setminus \phi_i^*[[0, 1/2[\times W_i] \subset V_i$ que envía cada punto $w = \phi_i^*(0, w) \in W_i$ a $\phi_i^*(1/2, w)$.

Ahora bien, identificando V_i con su imagen por este difeomorfismo, podemos afirmar que existen variedades diferenciales \bar{V}_i e immersiones regulares

$$\phi_i^* : I \times W_i \rightarrow \bar{V}_i, \quad \chi_i : V_i \rightarrow \bar{V}_i$$

de modo que $\chi_i[V_i] = \bar{V}_i \setminus \phi_i^*[[0, 1/2[\times W_i]$ y, para todo $w \in W_i$, se cumple que $\chi_i(w) = \phi_i^*(1/2, w)$. Sean $\phi_i = (1 \times \psi_i) \circ \phi_i^*$ y $\bar{\psi}_i = \psi_i \circ \chi_i$, de modo que

$$\phi_i : I \times V_0 \rightarrow \bar{V}_i, \quad \bar{\psi}_i : V_0 \rightarrow \bar{V}_i$$

son immersiones regulares que cumplen

$$\bar{\psi}_i(v) = \chi_i(\psi_i(w)) = \phi_i^*(1/2, \psi_i(v)) = \phi_i(1/2, v).$$

De este modo, las immersiones ϕ_i están en las condiciones de la discusión previa a este teorema, por lo que podemos considerar la variedad diferencial V que resulta de pegar \bar{V}_1 y \bar{V}_2 a través de ϕ_1 y ϕ_2 .

Observemos que $V_i^* = \bar{\iota}_i[\bar{V}_i \setminus \phi_i[[0, 1/2[\times V_0]] = \bar{\iota}_i[\chi_i[V_i]]$, luego llamando $\iota_i = \chi_i \circ \bar{\iota}_i$, tenemos immersiones regulares $\iota_i : V_i \rightarrow V$ en las condiciones del enunciado. En efecto,

$$\psi_1 \circ \iota_1 = \psi_1 \circ \chi_1 \circ \bar{\iota}_1 = \bar{\psi}_1 \circ \bar{\iota}_1 = \bar{\psi}_2 \circ \bar{\iota}_2 = \psi_2 \circ \chi_2 \circ \bar{\iota}_2 = \psi_2 \circ \iota_2.$$

La unicidad es inmediata, pues si tenemos otra variedad V' con immersiones ι'_1 y ι'_2 que conmutan con ψ_1 y ψ_2 como indica el enunciado, en particular tenemos dos difeomorfismos $\psi_0 : V_0 \rightarrow V_1^* \cap V_2^*$, $\psi'_0 : V_0 \rightarrow V_1'^* \cap V_2'^*$, dados por $\psi_0 = \psi_1 \circ \iota_1 = \psi_2 \circ \iota_2$, e igualmente con ψ'_0 .

A su vez, podemos construir difeomorfismos $f_i = \iota_i^{-1} \circ \iota'_i : V_1^* \rightarrow V_1'^*$ que sobre $V_1^* \cap V_2^*$ coinciden con $\psi_0^{-1} \circ \psi_0'^{-1}$, luego el teorema 9.13 nos da un difeomorfismo $V \cong V'$. ■

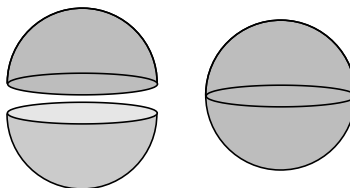
Observaciones Un caso particular (que en realidad no es más restrictivo) se obtiene tomando $V_0 = W_1$ y ψ_1 la identidad, con lo que el difeomorfismo ψ considerado en la prueba es el mismo $\psi_2 : W_1 \rightarrow W_2$. Así pues, el teorema anterior nos permite pegar dos variedades a través de un difeomorfismo entre uniones finitas de componentes conexas de sus fronteras respectivas.

Como en la construcción precedente al teorema, ∂V está formada por las imágenes por las identificaciones ι_i de los puntos de $\partial V_i \setminus W_i$.

Una diferencia destacable entre la construcción del teorema 9.18 y la del teorema 9.19 es que en la primera, partiendo de immersiones $\phi_i : I \times V_0 \rightarrow V_i$, solapamos las variedades y obtenemos una estructura diferencial unívocamente determinada por las immersiones ϕ_i . En la segunda, partimos de immersiones $\psi_i : V_0 \rightarrow \partial V_i$ y el pegado se hace sin solapamiento, pero sólo obtenemos una estructura diferencial determinada salvo difeomorfismo. ■

La duplicación de una variedad La construcción precedente se puede aplicar en el caso particular en que V_1 y V_2 son una misma variedad compacta V con frontera tomando $V_0 = W_1 = W_2 = \partial V$ y como difeomorfismos ϕ_i la identidad.

La variedad resultante recibe el nombre de *duplicación de V* y se representa por $2V$. Se trata de una variedad compacta sin frontera. Topológicamente es el cociente de la suma topológica $V \times \pm 1$ respecto del homeomorfismo que identifica los puntos $(v, 1)$ y $(v, -1)$, con $v \in \partial V$.



Ejemplos Se cumple que $2B^n \cong S^n$.

En efecto, basta tomar como $\iota_1 : B^n \rightarrow S^n$ la inversa de la proyección estereográfica, cuya imagen es el hemisferio sur de la esfera, si proyectamos desde el polo norte, y $\iota_2 = \iota_1 \circ s$, donde s es la simetría ecuatorial dada por $s(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1})$, de modo que la imagen de ι_2 es el hemisferio norte. Se cumplen las condiciones del teorema 9.19 (tomando como $\psi_i : \partial B^n \rightarrow B^n$ la inclusión), luego $S^n \cong 2B^n$.

Si $C = I \times S^1$ es un cilindro, entonces $2C$ es difeomorfo a un toro.

Se razona análogamente al caso anterior. Basta tomar como ι_1 un difeomorfismo entre C y medio toro y como ι_2 la composición de ι_1 con una simetría que tenga por imagen la otra mitad y deje invariante a ∂C . ■

Veamos una aplicación de la duplicación de una variedad:

Teorema 9.20 *Sea V una variedad diferencial con frontera compacta y W una subvariedad de la misma dimensión tal que $\partial W \subset \partial V$. Entonces W es abierta en V .*

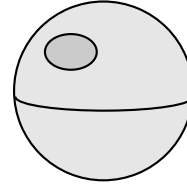
DEMOSTRACIÓN: Es fácil ver que $2W$ puede identificarse con una subvariedad de $2V$ (de hecho, para esta prueba nos basta con que $2W$ es una variedad topológica homeomorfa a una subvariedad de $2V$). Pero $2W$ y $2V$ son variedades topológicas (sin frontera), luego por [TA 2.10] concluimos que $2W$ es abierta en $2V$. Cortando con una de las dos copias de V en $2V$ llegamos a que W es abierto en V . ■

En particular, si V es una variedad diferencial con frontera compacta no vacía y $h : I \times \partial V \rightarrow V$ es una inmersión regular, tenemos que $h[[0, 1[\times \partial V]$ es una subvariedad de V cuya frontera es ∂V , luego por el teorema anterior es abierto en V , por lo que h es un collar de V . En otras palabras, en la definición de collar no hace falta exigir que la imagen de la inmersión sea un entorno de ∂V , sino que lo es necesariamente.

Tapado de agujeros esféricos Otro caso de cociente de interés se da cuando tenemos una variedad V cuya frontera tiene una componente conexa C difeomorfa a S^{n-1} .

Si $\psi_1 : S^{n-1} \rightarrow C$ es un difeomorfismo, tomamos $\psi_2 : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1} \subset B^n$ la identidad, y con ambos difeomorfismos formamos un cociente $W = V \cup B^n$, de modo que $V \cap B^n = S^n$. Se dice entonces que V se ha obtenido tapando el agujero C .

Por ejemplo, la construcción de $2B^n$ es, por definición, exactamente la misma que se requiere para tapan el único agujero de B^n . (El agujero se ve mejor si tenemos en cuenta que B^n es difeomorfa a S^n menos un casquete.)



Es importante que la variedad que resulta de tapan un agujero depende, en principio, del difeomorfismo que empleamos para pegarle la bola cerrada. En cambio, si tapamos sucesivamente varios agujeros de una misma variedad correspondientes a componentes conexas C_1, \dots, C_k (distintas dos a dos) mediante difeomorfismos $\psi_j : S^{n-1} \rightarrow C_j$, la variedad resultante no depende del orden en que adjuntamos las esferas, porque podemos adjuntarlas todas a la vez, es decir, podemos considerar el difeomorfismo

$$\psi_1 \oplus \dots \oplus \psi_k : S^{n-1} \oplus \dots \oplus S^{n-1} \rightarrow C_1 \cup \dots \cup C_k$$

y la identidad $S^{n-1} \oplus \dots \oplus S^{n-1} \rightarrow S^{n-1} \oplus \dots \oplus S^{n-1} \subset B^n \oplus \dots \oplus B^n$. El cociente que obtenemos según el teorema 9.19 a estos isomorfismos cumple las mismas condiciones de unicidad que el obtenido tapando los agujeros sucesivamente en cualquier orden. ■

Ejemplo: La cinta de Möbius En la sección [An 7.1] definimos la cinta de Möbius como una cierta subvariedad de \mathbb{R}^3 . En [TA] vimos que, como espacio topológico, podía definirse como el cociente que resulta de identificar dos lados opuestos de un cuadrado recorridos en sentidos opuestos. Veamos ahora que M también admite una definición similar como variedad diferencial (con frontera). Para ello consideremos la variedad $V_0 =]-1/2, 1[\times]-1/2, 1/2]$, los abiertos

$$U_1 =]-1/2, 0[\times]-1/2, 1/2], \quad U_2 =]1/2, 1[\times]-1/2, 1/2]$$

y el difeomorfismo $\phi : U_1 \rightarrow U_2$ dado por $\phi(x, y) = (x + 1, -y)$. Definimos la *cinta de Möbius* como la variedad cociente M que resulta de identificar en V_0 los abiertos U_1 y U_2 a través de ϕ , según la definición [TA 1.51].

Notemos que, por [TA 1.52] se cumple la propiedad de Hausdorff, pues si una sucesión $\{p_k\}$ en U_1 converge a un punto de $p \in \partial U_1$, entonces $p = (0, y)$, con lo que $\{\phi(p_k)\}$ converge en \mathbb{R}^2 a $(1, -y)$, luego no converge en V_0 .

Sea $\pi : V_0 \rightarrow M$ la proyección en el cociente y sea $p : \mathbb{R} \times]-1/2, 1/2] \rightarrow M$ la aplicación dada por

$$p(x, y) = \begin{cases} [(E[x], y)] & \text{si } E[x] \text{ es par,} \\ [(E[x], -y)] & \text{si } E[x] \text{ es impar.} \end{cases}$$

Veamos que p es un cubrimiento de M . Para ello consideramos un abierto de la forma $U_m =]m, m+1[\times [-1/2, 1/2]$, con $m \in \mathbb{Z}$ y observamos que $f|_{U_m}$ es la composición del difeomorfismo

$$U_m \longrightarrow U' =]0, 1[\times [-1/2, 1/2]$$

dado por $(x, y) \mapsto (x - m, y)$ o bien por $(x, y) \mapsto (x - m, -y)$ (según la paridad de m) con la proyección π , que es un difeomorfismo de U' en su imagen en M (porque $U' \cap U_1 = \emptyset$). Notemos que $p[U_m] = \pi[U']$ es abierto en M , pues

$$\pi^{-1}[\pi[U']] = V_0 \setminus (\{0\} \times [-1/2, 1/2]),$$

y $p^{-1}[p[U_m]] = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} U_k$, de donde se sigue que $p[U_m]$ es un entorno fundamental de todos sus puntos.

Consideremos ahora $U_m^* =]m - 1/2, m + 1/2[\times [-1/2, 1/2]$ y supongamos, por ejemplo, que m es impar. El caso en que m es par es análogo.

Si $m - 1/2 < x < m$ tenemos que $p(x, y) = [x - m + 1, y] = [x - m, -y]$, pues $(x - m, -y) \in U_1$, mientras que si $m \leq x < m + 1/2$, también se cumple $p(x, y) = [x - m, -y]$, luego $p|_{U_m^*}$ es la composición del difeomorfismo

$$U_m^* \longrightarrow U'' =]-1/2, 1/2[\times [-1/2, 1/2]$$

dado por $(x, y) \mapsto (x - m, -y)$ con la proyección π , que también es un difeomorfismo de U'' en su imagen (porque $U'' \cap U_2 = \emptyset$). Nuevamente, $p[U_m^*] = \pi[U'']$ es abierto en M , pues

$$\pi^{-1}[\pi[U'']] = V_0 \setminus (\{1/2\} \times [-1/2, 1/2]),$$

y $p^{-1}[p[U_m^*]] = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} U_k^*$, luego $p[U_m^*]$ es un entorno fundamental de todos sus puntos, y así todo punto de M tiene un entorno fundamental.

En particular p es un difeomorfismo local, y podemos considerar como cartas de M las inversas de las restricciones de p a los abiertos U_m y U_m^* .

Observemos que $p|_{I \times [-1/2, 1/2]} : I \times [-1/2, 1/2] \longrightarrow M$ es suprayectiva, y la inyectividad falla únicamente por las identificaciones $p(0, y) = p(1, -y)$. Esto implica que, como espacio topológico, M es homeomorfo al cociente que resulta de identificar dos lados opuestos de un cuadrado recorridos en sentidos opuestos, es decir, que M es una banda de Möbius en el sentido topológico. Veamos ahora que M también es difeomorfa a la variedad definida en [An] (salvo por el hecho de que aquí hemos definido M con frontera y en [An] la definimos sin frontera, de modo que la variedad de [An] es en realidad difeomorfa a $M \setminus \partial M$).

Conviene observar que si llamamos $\sigma : \mathbb{R} \times [-1/2, 1/2] \longrightarrow \mathbb{R} \times [-1/2, 1/2]$ al difeomorfismo $\sigma(x, y) = (x+1, -y)$, se cumple que $p(\sigma(x, y)) = p(x, y)$, así como que $p(x, y) = p(x', y')$ si y sólo si existe un $m \in \mathbb{Z}$ tal que $(x', y') = \sigma^m(x, y)$.

Si $f : \mathbb{R} \times [-1/2, 1/2] \longrightarrow V$ es una aplicación diferenciable en otra variedad V que cumple $f(x+1, -y) = f(x, y)$, es decir, $\sigma \circ f = f$, es claro que si

$p(x, y) = p(x', y')$, entonces $f(x, y) = f(x', y')$, luego f induce una aplicación $\bar{f} : M \rightarrow V$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times [-1/2, 1/2] & \xrightarrow{f} & V \\ p \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ M & & \end{array}$$

El hecho de que p sea un difeomorfismo local se traduce en que \bar{f} es diferenciable.

Por ejemplo, ahora ya es inmediato que la parametrización

$$X : \mathbb{R} \times [-1/2, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

dada por

$$X(u, v) = \left(\left(1 + \frac{v}{2} \cos \pi u\right) \cos 2\pi u, \left(1 + \frac{v}{2} \cos \pi u\right) \sin 2\pi u, \frac{v}{2} \sin \pi u \right)$$

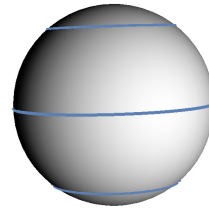
cumple la relación $X(u + 1, -v) = X(u, v)$, luego induce una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}^3$. El hecho de que X sea localmente una inmersión regular (lo único que falla es la inyectividad global) se traduce en que f es una inmersión regular, y un difeomorfismo entre M y la cinta de Möbius definida en [An] modificada para añadirle su frontera. Equivalentemente, f se restringe a un difeomorfismo entre $M \setminus \partial M$ y la variedad M definida en [An].

Consideremos ahora la aplicación $f : \mathbb{R} \times [-1/2, 1/2] \rightarrow S^2$ dada por

$$f(x, y) = (\sin y \cos \pi x, \sin y \sin \pi x, \cos y).$$

Vemos que $f(x + 1, -y) = -f(x, y)$, luego la composición de f con la proyección $S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sí que cumple la relación $f^*(x + 1, y) = f^*(x, y)$, luego f induce una aplicación diferenciable $\bar{f} : M \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ que también resulta ser una inmersión regular.

La imagen de f es una banda alrededor del ecuador de la esfera, pero, considerada como subconjunto del plano proyectivo, podemos suprimir la parte que queda por debajo del ecuador, pues cada uno de sus puntos se corresponde con su antípoda, que está ya considerado en la parte septentrional de la banda. Es claro entonces que $\bar{f}[\partial M]$ es una circunferencia contenida completamente en el hemisferio norte (aunque tiene su réplica en el hemisferio sur).



A su vez, esto implica que $W = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \bar{f}[M]$ es difeomorfo a un disco abierto y que \bar{W} es difeomorfo a un disco cerrado, de modo que

$$\bar{W} \cap \bar{f}[M] = \partial W = \partial \bar{f}[M] = \bar{f}[\partial M].$$

Esto se interpreta como que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ se obtiene tapando el agujero esférico determinado por la frontera de la cinta de Möbius. ■

9.4 Adjunción de asas

El proceso de adjunción de asas a una variedad diferencial que vamos a describir a continuación puede verse como un análogo de la adjunción de celdas a un espacio topológico.

Fijados dos números naturales $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$, representaremos los puntos de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ como pares (x, y) , con $x \in \mathbb{R}^k$ e $y \in \mathbb{R}^{n-k}$. Esto supone el convenio de que $\mathbb{R}^0 = \{0\}$, aunque en la práctica, en los casos $k = 0$ o $k = n$, consideraremos simplemente $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ o $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k$, sin añadir el factor trivial, de modo que en el primer caso escribiremos $y \in \mathbb{R}^n$ y en el segundo $x \in \mathbb{R}^n$.

Definimos un *asa* de dimensión n e índice k como el espacio

$$A_k^n = B_1^k(0) \times B^{n-k},$$

que es una variedad con frontera $\partial A_k^n = B_1^k(0) \times S^{n-k-1}$. Consideramos también el abierto

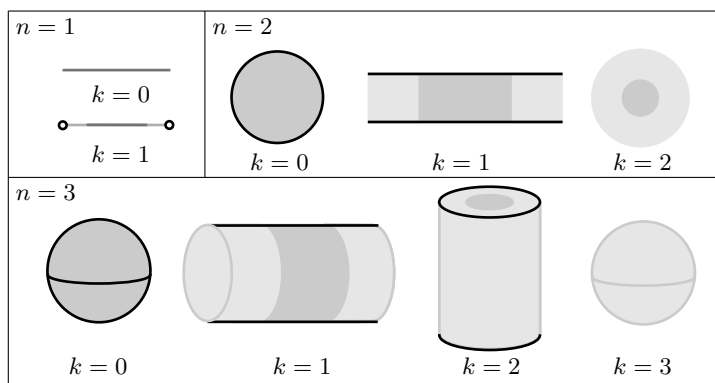
$$U_k^n = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \frac{1}{2} < \|x\|^2 < 1\} \times B^{n-k} \subset A_k^n.$$

Es importante que en esta definición incluimos los casos triviales que resultan de considerar que

$$B^0 = B_1^0(0) = \{0\}, \quad S^0 = \{\pm 1\}, \quad S^{-1} = \emptyset.$$

Así, para $k = 0$ tenemos que $A_0^n = B^n$ y convenimos en que $U_0^n = \emptyset$.

La tabla siguiente muestra todas las asas de dimensión $n = 1, 2, 3$. En cada una, la región sombreada en gris claro es el abierto U_k^n . En el dibujo de A_3^3 no se puede apreciar que U_3^3 es una corona esférica.



Nuestro propósito es pegar asas a variedades diferenciales solapando U_k^n . Así, para $k = 0$ tenemos que $U_0^n = \emptyset$ y no hay solapamiento: adjuntar un asa de índice 0 será simplemente añadir una bola B^n como suma topológica, sin identificar nada. El caso típico que da nombre a las asas es $k = 1$, el único en que U_k^n tiene dos componentes conexas, de modo que al solaparlas con parte de una variedad se forma realmente un “asa”.

Las asas de índice $k > 1$ tapan diferentes clases de agujeros. El caso más simple es $k = n$, en el que al identificar una bola B^n solapando una corona esférica estaremos tapando un agujero esférico en el sentido descrito en el apartado precedente. En cambio, un asa A_2^3 está pensada para tapar agujeros como el de un toro sólido.

Ahora definimos el espacio que determinará la forma que tiene que tener una región de una variedad diferencial para solaparse con el abierto U_k^n de un asa:

$$T_k^n = B^n \setminus (\{0\} \times B^{n-k}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 + \|y\|^2 \leq 1, x \neq 0\}$$

$$S_{k-1}^n = S^{k-1} \times \{0\} \subset \partial T_k^n.$$

Notemos que ∂T_k^n hace referencia a la frontera de T_k^n como variedad diferencial, y no a su frontera topológica como subespacio de \mathbb{R}^n . Concretamente,

$$\partial T_k^n = S^{n-1} \setminus (\{0\} \times S^{n-k-1}) = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 + \|y\|^2 = 1, x \neq 0\}.$$

Observemos que $T_0^n = \emptyset$.

Nota En lo sucesivo omitiremos los superíndices n . ■

Para interpretar T_k consideramos, por una parte, la inversión

$$\mu : \{x \in \mathbb{R}^k \mid 0 < \|x\|^2 < 1\} \longrightarrow \{x \in \mathbb{R}^k \mid \frac{1}{2} < \|x\|^2 < 1\}$$

dada por

$$\mu(x) = \frac{\sqrt{1 - \|x\|^2/2}}{\|x\|} x.$$

Se trata de inversión η que usamos en la sección [TA 1.7] para construir la suma conexas de variedades, pero compuesta con $x \mapsto x/\sqrt{2}$, de modo que transforma la bola perforada $B_1(0) \setminus \{0\}$, no en ella misma, sino en la corona esférica indicada. Así, μ transforma los puntos de norma próxima a 0 en los puntos de norma próxima a 1, y los de norma próxima a 1 en los de norma próxima a $1/\sqrt{2}$.

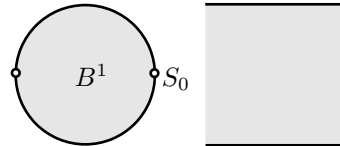
Por otra parte, consideramos el difeomorfismo

$$\lambda : B^n \setminus (S^{k-1} \times \{0\}) \longrightarrow B_1^k(0) \times B^{n-k}$$

dado por

$$\lambda(x, y) = \left(x, \frac{1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} y \right).$$

Lo que hace λ es estirar cada segmento vertical hasta que llene la bola B^{n-k} sin modificar la coordenada horizontal. La figura muestra el caso $n = 2, k = 1$. También ilustra el caso $n = 3, k = 1$ si entendemos que la figura de la izquierda es una esfera y la de la derecha un cilindro con las bases en vertical, y también



el caso $n = 3$, $k = 2$ si entendemos que la figura de la izquierda es una esfera, los dos puntos son el ecuador S_1 y que la figura de la derecha es un cilindro con las bases en horizontal.

En general, observemos que λ fija a los puntos con $x = 0$, por lo que

$$\lambda[T_k \setminus S_{k-1}] = (B_1^k(0) \setminus \{0\}) \times B^{n-k},$$

con lo que podemos combinar μ y λ para formar un difeomorfismo

$$\alpha : T_k \setminus S_{k-1} \longrightarrow U_k$$

mediante $\alpha = \lambda \circ (\mu \times 1)$. Explícitamente,

$$\alpha(x, y) = \left(\frac{\sqrt{1 - \|x\|^2/2}}{\|x\|} x, \frac{1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}} y \right).$$

Definición 9.21 Un *marco* para un asa de índice $k > 0$ en una variedad n -dimensional V es una inmersión regular

$$f : T_k^n \longrightarrow V$$

cuya imagen sea abierta en V , lo cual implica en particular que $f[\partial T_k^n] \subset \partial V$.

Llamaremos *adjunción de un asa de índice k* a una variedad diferencial V de dimensión n a través de un marco $f : T_k^n \longrightarrow V$ a la variedad cociente que resulta de identificar en $(V \setminus f[S_{k-1}]) \oplus A_k^n$ los abiertos $U = f[T_k^n \setminus S_{k-1}]$ y U_k^n a través del difeomorfismo $\phi = f^{-1} \circ \alpha$.

La *adjunción de un asa de índice 0* a una variedad V de dimensión n será simplemente la suma topológica $V \oplus A_0^n$.

El teorema [TA 1.52] garantiza que el cociente que obtenemos al adjuntar un asa es un espacio de Hausdorff, pues si una sucesión $f(x_m, y_m)$ en U converge a un punto ∂U (la frontera topológica calculada en $V \setminus f[S_{k-1}]$), en particular no converge en U , luego (x_m, y_m) no converge en $T_k \setminus S_{k-1}$. Ahora bien, por compacidad (x_m, y_m) tiene que tener una subsucesión convergente a un punto $(x_0, y_0) \in B^n$. No puede ser que $(x_0, y_0) \in S_{k-1}$, pues entonces $f(x_m, y_m)$ convergería a un punto de $f[S_{k-1}]$, que no está en ∂U , luego tiene que ser $(x_0, y_0) \in \{0\} \times B^{n-k}$, es decir, $x_0 = 0$. Entonces una subsucesión de $\alpha(x_m, y_m) = \phi(f(x_m, y_m))$ converge a un punto (x'_0, y'_0) con $\|x'_0\| = 1$, luego no converge en A_k . En particular, no converge a ningún punto de ∂U_k (en A_k).

Por lo tanto, la adjunción de un asa es ciertamente una variedad diferencial.

Vemos así que, salvo en el caso trivial $k = 0$, la adjunción de un asa a V requiere en primer lugar quitar un cerrado de su frontera difeomorfo a S^{k-1} , al que llamaremos la *esfera base* de la adjunción, y luego solapar U_k con un entorno adecuado de dicha esfera base. El marco determina tanto la esfera base como el entorno que se solapa.

Observemos que la esfera base tiene dimensión $k-1$ y está contenida en ∂V , que tiene dimensión $n-1$, luego en el caso $k=n$ tiene que ser una componente conexa de C de ∂V (por [TA 2.10]).

La restricción que hace que α no esté definido en S_{k-1} se debe a que λ no lo está, pero en el caso $n=k$ no existe λ realmente, por lo que α se extiende a un difeomorfismo (véase la fórmula explícita para α , a la que ahora le sobra la segunda componente)

$$\alpha : T_n = B^n \setminus \{0\} \longrightarrow \{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{2} \leq \|x\|^2 < 1\},$$

lo que nos permite definir una inmersión regular $\iota : V \longrightarrow V^*$ (donde V^* es la adjunción del asa) mediante

$$\iota_1(p) = \begin{cases} (f^{-1} \circ \alpha \circ \pi)(p) & \text{si } p \in f[T_n], \\ \pi(p) & \text{si } p \in V \setminus f[S_{n-1}], \end{cases}$$

donde $\pi : (V \setminus f[S_{n-1}]) \oplus A_n \longrightarrow V^*$ es la proyección en el cociente. Si llamamos $V_1 = \iota_1[V]$, tenemos que V_1 es una subvariedad de V^* difeomorfa a V , de modo que la esfera base $C = f[S_{n-1}]$ se identifica con $\pi[\partial B_{1/\sqrt{2}}(0)]$.

Por otra parte tenemos la inmersión regular $\iota_2 : A_n \longrightarrow V^*$, que no es sino la restricción de π , y que podemos restringir a su vez a $\overline{B}_{1/\sqrt{2}}(0)$. Componiéndola con la homotecia de razón $1/\sqrt{2}$ resulta una inmersión regular $\iota_2 : B^n \longrightarrow V^*$ tal que $\iota_2[S^{n-1}] = \pi[\partial B_{1/\sqrt{2}}(0)] = C$.

Así pues, si llamamos $V_2 = \iota_1[B^n]$, tenemos que V_2 es una subvariedad de V^* difeomorfa a B^n , y es fácil ver que $V^* = V_1 \cup V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \partial V_1 \cap \partial V_2 = C$.

Teniendo en cuenta la unicidad que proporciona el teorema 9.19, hemos demostrado el teorema siguiente:

Teorema 9.22 *La adjunción de un asa de índice n a una variedad diferencial V a través de un marco $f : B^n \setminus \{0\} \longrightarrow V$ es difeomorfa a la variedad que resulta de tapan el agujero esférico $f[S^{n-1}] \subset \partial V$ mediante la inmersión regular $\psi_1 = f|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \longrightarrow V$.*

Nota Conviene hacer una precisión al teorema anterior, y es que toda variedad que resulte de tapan un agujero esférico en otra es también la adjunción de un asa de índice n . Basta tener en cuenta que si $\psi_1 : S^{n-1} \longrightarrow V$ es un difeomorfismo en una componente conexa C de ∂V , podemos tomar un collar $h : I \times C \longrightarrow V$ alrededor de C , y definir $f : B^n \setminus \{0\} \longrightarrow V$ como la composición

$$B^n \setminus \{0\} \longrightarrow [0, 1[\times S^{n-1} \xrightarrow{1 \times \psi_1} I \times C \xrightarrow{h} V$$

donde el primer difeomorfismo es $x \mapsto (1 - \|x\|, x/\|x\|)$. Así f es un marco para un asa de índice n tal que $f|_{S^{n-1}} = \psi_1$, luego la adjunción del asa es difeomorfa a la variedad que se obtiene tapando el agujero con ψ_1 . ■

9.5 Isotopías

En cierto sentido, se puede decir que todos los collares, o todos los entornos tubulares de una variedad diferencial son “esencialmente el mismo”. Para formular esto con precisión necesitamos el concepto de isotopía que vamos a introducir aquí. Entre otras cosas, también nos permitirá probar que, en ciertos casos, algunos cocientes en las condiciones del teorema 9.19 no dependen de las inmersiones con que se calculan.

Definición 9.23 Sean $f_0, f_1 : V \rightarrow W$ dos inmersiones regulares entre variedades diferenciales. Una *isotopía* entre ellas es una homotopía (diferenciable) $f : I \times V \rightarrow W$ entre ambas tal que cada aplicación $f_t : V \rightarrow W$ sea una inmersión regular. Si existe una isotopía entre f_0 y f_1 se dice que son inmersiones *isotópicas*. Si cada f_t es un difeomorfismo se dice que f es una *difeotopía*.

El mismo argumento empleado para homotopías tras la definición 5.41 prueba que las isotopías se pueden componer, de modo que la relación de isotopía entre inmersiones regulares es una relación de equivalencia.

Dos inmersiones regulares $f, g : V \rightarrow W$ son *ambientalmente isotópicas* si existe una difeotopía $h : I \times W \rightarrow W$ tal que h_0 es la identidad y $f \circ h_1 = g$.

Notemos que en tal caso $f \circ h_t$ es una isotopía entre f y g .

Nota Podemos suponer sin pérdida de generalidad que todas las homotopías e isotopías que consideremos entre dos variedades diferenciales V y W son aplicaciones $f : \mathbb{R} \times V \rightarrow W$.

La razón es que si tenemos $f : I \times V \rightarrow W$, basta considerar una aplicación creciente diferenciable $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que valga 0 para $t \leq 0$ y 1 para $t \geq 1$ y entonces $f'(\alpha(t), x) = f(\alpha(t), x)$ es una aplicación diferenciable tal que $f'_t = f_{\alpha(t)}$, luego se restringe a una homotopía entre f_0 y f_1 y, si f es una isotopía, entonces todas las aplicaciones f'_t son inmersiones regulares. ■

Empecemos mostrando algunos ejemplos de difeotopías. El teorema [G 5.39] afirma que todas biyecciones afines $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que conservan la orientación son difeotópicas a la identidad. Más aún:

Teorema 9.24 *Todo difeomorfismo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es difeotópico a su diferencial $df|_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.*

DEMOSTRACIÓN: La difeotopía $h(t, x) = f(x) - tf(0)$ muestra que f es difeotópico a $f - f(0)$ (y ambos difeomorfismos tienen la misma diferencial en 0), luego no perdemos generalidad si suponemos que $f(0) = 0$. Supongamos además que $df|_0$ es la identidad. Entonces definimos

$$h(t, x) = \begin{cases} f(tx)/t & \text{si } t \neq 0, \\ x & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Por el teorema de Taylor [VC 2.9] tenemos que

$$f(x) = x + (xA_1(x)x^t, \dots, xA_n(x)x^t),$$

para ciertas matrices $A_i(x)$ de funciones de clase C^∞ , luego

$$h(t, x) = x + t(xA_1(tx)x^t, \dots, xA_n(tx)x^t),$$

tanto para $t = 0$ como para $t \neq 0$, y con esta expresión es claro que la homotopía h es de clase C^∞ y, de hecho se trata de una difeotopía, pues h_0 es la identidad y $h_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es claramente un difeomorfismo. Además $h_1 = f$.

Si $df|_0$ no es la identidad, aplicamos el caso anterior a $g = (df|_0)^{-1} \circ f$, que es un difeomorfismo que cumple $g(0) = 0$ y $dg|_0 = 1$. Concluimos que existe una isotopía $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $h_0 = 1$ y $h_1 = (df|_0)^{-1} \circ f$, pero entonces

$$h'(t, x) = h(t, df|_0(x))$$

es una isotopía entre $df|_0$ y f . ■

Combinando esto con la observación precedente al teorema tenemos:

Teorema 9.25 *Dos difeomorfismos $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ son difeotópicos si y sólo si ambos conservan o ambos invierten la orientación.*

DEMOSTRACIÓN: Si f y g conservan o invierten la orientación, entonces $f^{-1} \circ g$ conserva la orientación, luego es difeotópico a su diferencial en 0 y ésta a su vez es difeotópica a la identidad. Sea, pues, $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una difeotopía tal que $h_0 = 1$ y $h_1 = f^{-1} \circ g$. Entonces

$$h'(t, x) = h(t, f(x))$$

es una difeotopía entre $h'_0 = f$ y $h'_1 = g$.

Por otro lado, si h es una difeotopía entre f y g , entonces el determinante jacobiano $|J_{h_t}|_0$ es una función continua de t que no se anula, luego tiene que ser siempre positiva o siempre negativa, luego la matriz jacobiana de f y g en 0 tiene el mismo signo, luego ambos conservan o ambos invierten la orientación. ■

No es cierto en general que dos difeomorfismos $f, g : S^n \rightarrow S^n$ sean difeotópicos si y sólo si ambos conservan o invierten la orientación. Sin embargo:

Teorema 9.26 *Todo difeomorfismo $f : S^1 \rightarrow S^1$ es difeotópico a la identidad o a la simetría $f(x, y) = (x, -y)$.*

DEMOSTRACIÓN: Componiendo f con un giro (que es difeotópico a la identidad, luego la composición es difeotópica a f) podemos suponer que f cumple $f(1, 0) = (1, 0)$. Sea $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ el cubrimiento dado por

$$\pi(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t).$$

Entonces, por [TA 8.9] (véase la nota posterior) existe $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f} \circ \pi = \pi \circ f$ y $\tilde{f}(0) = 0$.

Como π es un difeomorfismo local, la derivada de \tilde{f} no se anula, luego \tilde{f} es estrictamente creciente o estrictamente decreciente. Además

$$\pi(\tilde{f}(t+1)) = f(\pi(t+1)) = f(\pi(t)) = \pi(\tilde{f}(t)),$$

luego existe un $r_t \in \mathbb{Z}$ tal que $\tilde{f}(t+1) = \tilde{f}(t) + r_t$. Por conexión r_t tiene que ser constante, luego $\tilde{f}(t+1) = \tilde{f}(t) + f(1)$. Más en general, $\tilde{f}(t+r) = \tilde{f}(t) + rf(1)$.

Tiene que ser $\tilde{f}(1) = \pm 1$, pues si fuera $|\tilde{f}(1)| > 1$ existiría un t con $0 < |t| < 1$ tal que $\tilde{f}(t) = \pm 1$, pero entonces sería $f(\pi(t)) = (1, 0)$ y f no sería inyectiva. Así pues, $\tilde{f}(t+r) = \tilde{f}(t) \pm r$. Definimos

$$\tilde{f}_s(t) = (1-s)\tilde{f}(t) + st\tilde{f}(1).$$

Claramente, $\tilde{f} : I \times \mathbb{R} \rightarrow I \times \mathbb{R}$ es diferenciable y es una homotopía entre $\tilde{f}_0 = \tilde{f}$ y $\tilde{f}_1(t) = \tilde{f}(1)t = \pm t$.

No puede ocurrir que $\tilde{f}'_s(t) = 0$, pues sería $\tilde{f}'_s(t) = (1-s)\tilde{f}'(t) + s\tilde{f}(1) = 0$, luego

$$\tilde{f}'(t) = -\frac{s}{1-s}\tilde{f}(1),$$

pero claramente \tilde{f} es creciente o decreciente según si $\tilde{f}(1) = 1$ o $\tilde{f}(1) = -1$, luego el signo de $\tilde{f}'(t)$ no puede ser opuesto al de $\tilde{f}(1)$. Más aún, la expresión de la derivada muestra que \tilde{f}_s es creciente si y sólo si lo es \tilde{f} .

Una comprobación sencilla muestra que $\tilde{f}_s(0) = 0$, $\tilde{f}_s(1) = \tilde{f}(1)$, así como que $\tilde{f}_s(t+1) = \tilde{f}_s(t) + \tilde{f}(1)$. Esto implica que existe una única aplicación f que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} I \times S^1 & \xrightarrow{f} & I \times S^1 \\ 1 \times \pi \uparrow & & \uparrow 1 \times \pi \\ I \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & I \times \mathbb{R} \end{array}$$

pues dos antiimágenes de (s, x) son de la forma (s, t) y $(s, t+r)$, con $r \in \mathbb{Z}$, luego $\tilde{f}_s(t+r) = \tilde{f}_s(t) + rf(1)$, luego $\pi(\tilde{f}_s(t+r)) = \pi(\tilde{f}_s(t))$.

Como $1 \times \pi$ es un difeomorfismo local, f es diferenciable, como $\tilde{f}_s|_I$ es biyectiva en $[0, 1]$ o en $[-1, 0]$, también f_s es biyectiva, luego un homeomorfismo, y como \tilde{f}_s es un difeomorfismo, también lo es f_s , luego f es una difeotopía entre $f_0 = f$ y f_1 , que cumple

$$f_1(x, y) = f_1(\pi(t)) = \pi(\pm t) = (x, \pm y). \quad \blacksquare$$

Vamos a extraer una consecuencia de este hecho, pero antes conviene probar algunos resultados generales:

Si $h : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ es una homotopía, definimos su *rastro* como la aplicación $H : \mathbb{R} \times V \rightarrow \mathbb{R} \times W$ dada por $H(t, x) = (t, h(t, x))$.

Teorema 9.27 Sea $h : \mathbb{R} \times V \rightarrow W$ una homotopía y consideremos su rastro $H : \mathbb{R} \times V \rightarrow \mathbb{R} \times W$.

1. Si H es una inmersión regular, entonces h es una isotopía.
2. Si h es una isotopía, entonces H es una inmersión, y si además V es compacto, entonces H es una inmersión regular.

DEMOSTRACIÓN: Si H es una inmersión regular, como $\iota_t : V \rightarrow \mathbb{R} \times W$ dada por $\iota_t(x) = (t, x)$ es una inmersión regular, también lo es $\iota_t \circ H$, cuya imagen está contenida en $\{t\} \times W$, luego $\iota_t \circ H : V \rightarrow \{t\} \times W$ es una inmersión regular, y sigue siéndolo si se compone con el difeomorfismo $\pi : \{t\} \times W \rightarrow W$ dado por la proyección, pero $\iota_t \circ H \circ \pi = h_t$, luego h es una isotopía.

Recíprocamente, si h es una isotopía, el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times V & \xrightarrow{H} & \mathbb{R} \times W \\ \uparrow \iota_t & & \uparrow \iota_t \\ V & \xrightarrow{h_t} & W \end{array}$$

implica que, al identificar $T_{(t,p)}(\mathbb{R} \times V) = T_t(\mathbb{R}) \oplus T_p(V)$ a través de $d\iota_p|_t$ y $d\iota_t|_p$, e igualmente, con $\mathbb{R} \times W$, la diferencial $dH|_{(t,p)}$ extiende a $dh_t|_p$, luego el rango de la restricción es $\dim V$. Por otra parte, es inmediato que $dH|_{(t,p)}(\partial t|_t) = \partial t|_t$, por lo que el rango de $dH|_{(t,p)}$ es $\dim V + 1 = \dim(\mathbb{R} \times V)$, luego H es una inmersión.

Sea $Z = H[\mathbb{R} \times V]$. Claramente $H : \mathbb{R} \times V \rightarrow Z$ es biyectiva, pues su inversa es $(t, y) \mapsto (t, h_t^{-1}(y))$. Si V es compacto, entonces cada restricción

$$H|_{[a,b] \times V} : [a, b] \times V \rightarrow Z \cap ([a, b] \times W)$$

es biyectiva y continua, luego es un homeomorfismo, que se restringe a un homeomorfismo $H|_{]a,b[\times V} :]a, b[\times V \rightarrow Z \cap (]a, b[\times W)$. Como estos abiertos cubren ambos espacios, concluimos que H es un homeomorfismo en su imagen, luego H es una inmersión regular. ■

Teorema 9.28 Sea V una variedad diferencial y $W \subset \partial V$ una unión finita de componentes conexas compactas de ∂V . Si $f : W \rightarrow W$ es un difeomorfismo difeotópico a la identidad, f se extiende a un difeomorfismo $\bar{f} : V \rightarrow V$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $s : I \rightarrow I$ una función diferenciable que valga 0 en un entorno de 0 y tal que $s(1) = 1$. Si $h : I \times W \rightarrow W$ es una difeotopía entre $h_0 = 1$ y $h_1 = f$, entonces $f(t, x) = h(s(t), x)$ es también una difeotopía entre $f_0 = 1$ y $f_1 = f$ con la propiedad adicional de f_t es la identidad para todo t en un entorno de 0, digamos para $t < \delta$.

Por el teorema anterior el rastro $F : I \times W \rightarrow I \times W$ es una inmersión regular, pero el hecho de que f sea una difeotopía implica además que F es suprayectiva, luego es un difeomorfismo y se restringe a un difeomorfismo

$$F :]0, 1[\times W \rightarrow]0, 1[\times W.$$

Consideremos, por otra parte, un collar $h : I \times W \rightarrow V$, sea $U = h[]0, 1[\times W]$, que es un entorno abierto de W , y consideremos el difeomorfismo

$$h^* :]0, 1[\times W \rightarrow U$$

dado por $h^*(t, w) = h(1 - t, w)$. Con ellos podemos formar el difeomorfismo $f^* = h^{*-1} \circ F \circ h^* : U \rightarrow U$. Así, si $w \in W$, se cumple

$$f^*(w) = h^*(F(1, w)) = h^*(1, f(w)) = f(w),$$

luego f^* extiende a f , y si $p \in U_0 = h^*[]0, \delta[\times W]$, que es un abierto en U , se cumple que $p = h^*(t, w) = h(1 - t, w)$, con $0 < t < \delta$ y

$$f^*(p) = h^*(F(t, w)) = h^*(t, h(t, w)) = h^*(t, w) = p,$$

luego f^* es la identidad. Por lo tanto, podemos definir $\bar{f} : V \rightarrow V$ mediante

$$\bar{f}(p) = \begin{cases} f^*(p) & \text{si } p \in U, \\ p & \text{si } p \in V \setminus h^*[]\delta/2, 1[\times W]. \end{cases}$$

Las dos definiciones coinciden en la intersección $h^*[]0, \delta/2[\times W]$, luego \bar{f} está bien definido y es claramente un difeomorfismo que extiende a f . ■

Combinando esto con 9.26 obtenemos:

Teorema 9.29 *Todo difeomorfismo $f : S^1 \rightarrow S^1$ se extiende a un difeomorfismo $\bar{f} : B^2 \rightarrow B^2$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la simetría $s(x, y) = (x, -y)$. Por 9.26 tenemos que f es difeotópico a la identidad o a $s|_{S^1}$. En el segundo caso, componiendo la difeotopía con s tenemos que $f \circ s$ es difeotópico a $s \circ s = 1$. Por el teorema anterior, o bien f o bien $f \circ s$ se extiende a un difeomorfismo $\bar{f} : B^2 \rightarrow B^2$. En el segundo caso, $\bar{f} \circ s$ es otro difeomorfismo que extiende a f . ■

Por [TA 1.25] toda curva diferenciable compacta es difeomorfa a S^1 , luego si V es una superficie diferencial y C es una componente conexa compacta de ∂V , necesariamente es difeomorfa a S^1 . Ahora podemos probar lo siguiente:

Teorema 9.30 *Sea V una superficie diferenciable y C una componente conexa compacta de ∂V . Entonces la superficie que resulta de tapar el agujero C no depende, salvo difeomorfismo, del difeomorfismo $S^1 \rightarrow C$ con que se construya.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos dos difeomorfismos $\psi_1, \psi'_1 : S^1 \rightarrow C$ y sea $\psi_2 : S^1 \rightarrow B^2$ la inclusión. Sean W y W' las superficies que resultan de tapan el agujero C con ψ_1 y ψ'_1 , respectivamente. Según el teorema 9.19, tenemos inmersiones regulares

$$\iota_1 : V \rightarrow W, \quad \iota'_1 : V \rightarrow W', \quad \iota_2 : B^2 \rightarrow W, \quad \iota'_2 : B^2 \rightarrow W'$$

de modo que si llamamos

$$V^* = \iota_1[V], \quad B^* = \iota_2[B^2], \quad S = \iota_1[\psi_1[S^1]] = \iota_2[S^1],$$

$$V'^* = \iota'_1[V], \quad B'^* = \iota'_2[B^2], \quad S' = \iota'_1[\psi'_1[S^1]] = \iota'_2[S^1],$$

entonces $W = V^* \cup B^*$, $W' = V'^* \cup B'^*$, $V^* \cap B^* = S$, $V'^* \cap B'^* = S'$.

De aquí obtenemos difeomorfismos

$$f_1 = \iota_1^{-1} \circ \iota'_1 : V^* \rightarrow V'^*, \quad f_2 = \iota_2^{-1} \circ \iota'_2 : B^* \rightarrow B'^*.$$

Todo lo dicho hasta aquí valdría para cualquier dimensión, pero el problema es que en general no tiene por qué cumplirse $f_1|_S = f_2|_S$. Sin embargo, por el teorema anterior, el difeomorfismo $f_1 \circ f_2^{-1} : S \rightarrow S$ se extiende a un difeomorfismo $h : B^* \rightarrow B'^*$, y así $h \circ f_2 : B^* \rightarrow B'^*$ tiene la propiedad de que $h \circ f_2|_S = f_1 \circ f_2^{-1} \circ f_2|_S = f_1|_S$. En otras palabras, cambiando f_2 por $h \circ f_2$ podemos suponer que $f_1|_S = f_2|_S$, y el teorema 9.13 nos da entonces que $W \cong W'$. ■

Así, por ejemplo, ahora podemos afirmar que si identificamos las fronteras de dos discos B^2 a través de cualquier difeomorfismo entre sus fronteras el resultado es difeomorfo a $2B^2 \cong S^2$, independientemente del difeomorfismo empleado.

Esto es falso en dimensiones superiores. Pegando dos bolas B^n a través de difeomorfismos de S^{n-1} no difeotópicos a la identidad se obtienen *esferas exóticas*, que son variedades diferenciales homeomorfas, pero no difeomorfas a esferas.

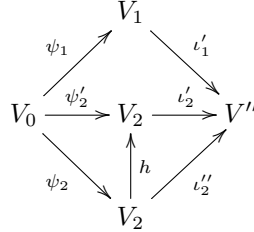
El teorema anterior admite una generalización parcial:

Teorema 9.31 Sean V_1, V_2 dos variedades diferenciales, sean $W_i \subset \partial V_i$ uniones finitas de componentes conexas compactas de sus fronteras, consideremos dos pares de difeomorfismos $\psi_i, \psi'_i : V_0 \rightarrow W_i$ tales que ψ_i y ψ'_i sean difeotópicos. Entonces la variedad V que resulta de identificar W_1 y W_2 según el teorema 9.19 con ψ_1 y ψ_2 es difeomorfa a la variedad V' que se obtiene con ψ'_1 y ψ'_2 .

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que la variedad V que se obtiene con ψ_1 y ψ_2 es difeomorfa a la variedad V'' que se obtiene con ψ_1 y ψ'_2 , pues por la misma razón ésta será difeomorfa a la obtenida con ψ'_1 y ψ'_2 .

La composición de $1 \times \psi'_2{}^{-1} : I \times W_2 \rightarrow I \times W_2$ con una isotopía entre ψ_2 y ψ'_2 es una isotopía entre la identidad y $\psi_2^{-1} \circ \psi'_2$. Por el teorema 9.28 existe un

difeomorfismo $h : V_2 \rightarrow V_2$ que extiende a $\psi_2^{-1} \circ \psi'_2$. Así, tenemos un diagrama conmutativo



El triángulo superior conmuta por la construcción de V'' , el triángulo inferior izquierdo por la construcción de h y el inferior derecho es la definición de ι''_2 . El resultado es que ι'_1, ι''_2 satisfacen las condiciones de unicidad del teorema 9.19, que nos permiten concluir que V'' es difeomorfa a V . ■

Vamos a probar un resultado más profundo sobre extensión de isotopías, para lo cual necesitamos la conexión siguiente entre las isotopías y los campos vectoriales no estacionarios (véase el último apartado de la sección 3.1):

Teorema 9.32 *Sea W una variedad diferencial sin frontera y consideremos un campo vectorial dependiente del tiempo $X : \mathbb{R} \times W \rightarrow TW$. Sea $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times W)$ el campo vectorial estacionario dado por $\tilde{X}_{(t,w)} = (\partial_t|_t, X_{(t,w)})$. Si \tilde{X} es completo, la aplicación $G : \mathbb{R} \times W \rightarrow \mathbb{R} \times W$ dada por $G(t, w) = \Phi_{\tilde{X}}(t, 0, w)$ es un difeomorfismo y es el rastro de una difeotopía $g : \mathbb{R} \times W \rightarrow W$ tal que g_0 es la identidad.*

DEMOSTRACIÓN: Recordemos que $t : \mathbb{R} \times W \rightarrow \mathbb{R}$ a la proyección en la primera coordenada, de modo que, a través de la identificación canónica

$$T_{(s,w)}(\mathbb{R} \times W) = T_s(\mathbb{R}) \oplus T_w(W)$$

la proyección en la primera componente se corresponde con $dt|_{(s,w)}$. Podemos descomponer

$$\Phi_{\tilde{X}}(t, s, w) = (\Phi_{\tilde{X}}^1(t, s, w), \Phi_{\tilde{X}}^2(t, s, w)).$$

Como en la prueba del teorema 9.11 concluimos que

$$\Phi_{\tilde{X}}(t, s, w) = (s + t, \Phi_{\tilde{X}}^2(t, s, w)).$$

En particular, $G(t, w) = \Phi_{\tilde{X}}(t, 0, w) = (t, \Phi_{\tilde{X}}^2(t, 0, w))$, luego G es el rastro de la homotopía³ $g(t, w) = \Phi_{\tilde{X}}^2(t, 0, w)$.

Para probar que G es un isomorfismo vamos a ver que su inverso es la aplicación

$$L : \mathbb{R} \times W \rightarrow \mathbb{R} \times W$$

³Viendo a X como un campo de velocidades en W que varía con el tiempo, $G_t(w)$ es el punto al que llega un objeto situado en w si se mueve durante un tiempo t desde $t_0 = 0$ siguiendo el campo de velocidades.

dada por $L(t, w) = (t, \Phi_{\bar{X}}^2(-t, t, w))$. En efecto:

$$\begin{aligned} G(L(t, w)) &= G(t, \Phi_{\bar{X}}^2(-t, t, w)) = \Phi_{\bar{X}}(t, 0, \Phi_{\bar{X}}^2(-t, t, w)) \\ &= \Phi_{\bar{X}}(t, \Phi_{\bar{X}}(-t, t, w)) = \Phi_{\bar{X}}(0, t, w) = (t, w). \\ L(G(t, w)) &= L(\Phi_{\bar{X}}(t, 0, w)) = L(t, \Phi_{\bar{X}}^2(t, 0, w)) \\ &= (t, \Phi_{\bar{X}}^2(-t, t, \Phi_{\bar{X}}^2(t, 0, w))) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (0, \Phi_{\bar{X}}^2(-t, t, \Phi_{\bar{X}}^2(t, 0, w))) &= \Phi_{\bar{X}}(-t, t, \Phi_{\bar{X}}^2(t, 0, w)) \\ &= \Phi_{\bar{X}}(-t, \Phi_X(t, 0, w)) = \Phi_{\bar{X}}(0, 0, w) = (0, w), \end{aligned}$$

luego $L(G(t, w)) = (t, w)$.

En particular G es una inmersión regular, luego g es una isotopía y el hecho de que G sea biyectiva implica que cada g_t también lo es luego las inmersiones regulares g_t son, de hecho, difeomorfismos, luego g es una difeotopía. ■

Con esto ya podemos probar:

Teorema 9.33 (De extensión de isotopías) *Sea $f : \mathbb{R} \times V \rightarrow W$ una isotopía en una variedad W sin frontera tal que su rastro $F : \mathbb{R} \times V \rightarrow \mathbb{R} \times W$ es una inmersión regular. Sea $K \subset V$ compacto. Entonces existe un difeomorfismo $G : \mathbb{R} \times W \rightarrow \mathbb{R} \times W$ que es el rastro de una difeotopía $g : \mathbb{R} \times W \rightarrow W$ tal que g_0 es la identidad y, para todo $t \in I$, se cumple que $f_t|_K = f_0|_K \circ g_t$. Además G es la identidad fuera de un subconjunto compacto de W .*

DEMOSTRACIÓN: Sea $Z = F[\mathbb{R} \times V]$, que es una subvariedad de $\mathbb{R} \times W$, y sea $K^* = F[I \times K] \subset Z$. El difeomorfismo $F : \mathbb{R} \times V \rightarrow Z$ nos permite transportar el campo vectorial $\partial_t \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times V)$ a un campo vectorial $X_0 \in \mathfrak{X}(Z)$, de modo que

$$X_{0F(t,v)} = dF|_{(t,v)}(\partial_t|_{(t,v)}).$$

Tomando una función diferenciable que valga 1 en K^* y que se anule fuera de un abierto $K^* \subset A \subset \mathbb{R} \times W$ con \bar{A} compacta, podemos extender $X_0|_{K^*}$ a un campo $X_1 \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times W)$ que se anule fuera de A .

Observemos que la curva $\alpha(t) = F(t, v)$ cumple que

$$\alpha'(t) = dF_v|_t(\partial_t|_t) = dF|_{(t,v)}(\partial_t|_{(t,v)}) = X_{0\alpha(t)},$$

es decir, que las curvas $F_v(t)$ son las curvas integrales⁴ de X_0 en Z .

La descomposición canónica $T_{(t,w)}(\mathbb{R} \times W) = T_t(\mathbb{R}) \oplus T_w(W)$ nos permite expresar

$$X_{1,(t,w)} = \alpha(t, w)\partial_t|_{(t,w)} + X_{(t,w)}.$$

⁴En realidad, sólo hemos hablado de curvas integrales de campos vectoriales en variedades sin frontera, mientras que Z puede tener frontera, pero esto no es un inconveniente, ya que podemos enunciar la observación precedente diciendo que las curvas $F_v(t)$ son curvas integrales de X_1 en $\mathbb{R} \times W$ para $t \in I$.

Sea $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R} \times W)$ dado por $\tilde{X}|_{(t,w)} = \partial_t|_{(t,w)} + X_{(t,w)}$.

Notemos que $X_{0,F(t,x)}(t) = dF|_{(t,x)}(\partial_t|_{(t,x)})(t) = 1$, luego $\alpha(t, w) = 1$ para todo $(t, w) \in K^*$, luego $\tilde{X}|_{K^*} = X_{1,(t,w)}|_{K^*} = X_{0,(t,w)}|_{K^*}$.

Como X_1 se anula fuera de A , resulta que $\tilde{X} = \partial_t$ fuera de V , y el teorema 3.18 nos da que el grupo uniparamétrico definido por \tilde{X} es global:

$$\Phi_{\tilde{X}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times W \longrightarrow \mathbb{R} \times W.$$

Esto nos permite aplicar el teorema anterior, según el cual la aplicación $G(t, w) = \Phi_{\tilde{X}}(t, 0, w)$ es un difeomorfismo y es el rastro de una difeotopía g . Además, si $v \in K$, hemos visto que la curva $F_v(t)$, para $t \in I$, es una curva integral de X_1 , pero $F_v(t) \in K^*$ para todo $t \in I$, y se cumple que $X_1|_{K^*} = \tilde{X}|_{K^*}$, luego $F_v(t)$ también es una curva integral de \tilde{X} .

Puesto que $F_v(0) = F(0, v) = (0, f_0(v))$, tiene que ser, concretamente,

$$F(t, v) = F_v(t) = \Phi_{\tilde{X}}(t, 0, f_0(v)) = G(t, f_0(v)),$$

lo que equivale a que $f_t|_K = f_0|_K \circ g_t$.

Finalmente, el hecho de que X_1 se anule fuera de $\bar{A} \subset \mathbb{R} \times W$ se traduce en que $\tilde{X} = \partial_t$ fuera \bar{A} , lo que a su vez implica que $\Phi_{\tilde{X}}(t, s, w) = (t + s, w)$, siempre que (t, s, w) está fuera de \bar{A} , luego $G(t, w) = (t, w)$ siempre que (t, w) está fuera de la proyección del compacto $\bar{A} \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) \times W$ en $\mathbb{R} \times W$, en particular siempre que w está fuera de la proyección en W de dicho compacto. ■

Notemos que el enunciado del teorema anterior se simplifica considerablemente cuando la variedad V es compacta:

Teorema 9.34 (De extensión de isotopías) *Si $f_0, f_1 : V \longrightarrow W \setminus \partial W$ son immersiones regulares isotópicas y V es compacta, entonces f_0 y f_1 son ambientalmente isotópicas.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : \mathbb{R} \times V \longrightarrow W \setminus \partial W$ una isotopía entre f_0 y f_1 . Por el teorema 9.27, su rastro F es una inmersión regular, luego el teorema anterior (con $K = V$) implica que existe un difeomorfismo

$$G : \mathbb{R} \times (W \setminus \partial W) \longrightarrow \mathbb{R} \times (W \setminus \partial W)$$

que es la identidad fuera de un subconjunto compacto de $(W \setminus \partial W)$, luego puede extenderse a un difeomorfismo $G : \mathbb{R} \times W \longrightarrow \mathbb{R} \times W$ que fije a los puntos de $\mathbb{R} \times \partial W$. Claramente sigue siendo el rastro de una difeotopía $g : \mathbb{R} \times W \longrightarrow W$ tal que $f_t = f_0 \circ g_t$ y de modo que g_0 es la identidad. Esto significa que f_0 y f_1 son ambientalmente isotópicas. ■

Por ejemplo, de aquí se deduce una versión fuerte de 1.23:

Teorema 9.35 *Si W es una variedad diferencial conexa y $a, b \in W \setminus \partial W$, existe un difeomorfismo $g : W \longrightarrow W$ difeotópico a la identidad tal que $g(a) = b$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 9.9, los puntos a y b pueden unirse mediante un arco diferenciable, que podemos extender a una aplicación diferenciable $f : \mathbb{R} \rightarrow W \setminus \partial W$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$. Podemos ver a f como una isotopía entre dos inmersiones $\{1\} \rightarrow W \setminus \partial W$. La prueba del teorema anterior es válida en este caso (y más simple, de hecho).⁵ El teorema nos da una difeotopía $g : \mathbb{R} \times (W \setminus \partial W) \rightarrow W \setminus \partial W$ tal que g_0 es la identidad y $f(t) = g_t(a)$. En particular $g_1(a) = f(1) = b$.

Además, $g(t, w) = w$ para todo w fuera de un compacto de $W \setminus \partial W$, lo que nos permite extender g a ∂W mediante $g(t, w) = w$, y así $g : \mathbb{R} \times W \rightarrow W$ sigue siendo una difeotopía entre la identidad y $g_1 : W \rightarrow W$ que cumple lo indicado en el enunciado. ■

Para variedades de dimensión $n \geq 2$ se cumple algo más general:

Teorema 9.36 *Si W es una variedad diferencial conexa de dimensión $n \geq 2$ y $\{a_1, \dots, a_k\}, \{b_1, \dots, b_k\}$ son dos conjuntos de k puntos (distintos) de $W \setminus \partial W$, entonces existe un difeomorfismo $g : W \rightarrow W$ difeotópico a la identidad tal que $g(a_i) = b_i$ para $i = 1, \dots, k$.*

DEMOSTRACIÓN: Lo probamos por inducción sobre k . El caso $k = 1$ es el teorema anterior. Si es cierto para k , existe un difeomorfismo $g_0 : W \rightarrow W$ difeotópico a la identidad tal que $g_0(a_i) = b_i$ para $i = 1, \dots, k$. Llamemos $b'_{k+1} = g_0(a_{k+1}) \in W \setminus \partial W$, que es distinto de b_1, \dots, b_k . Si $b'_{k+1} = b_{k+1}$ entonces g_0 cumple lo requerido. Supongamos lo contrario.

Como $n \geq 2$, la variedad $V \setminus (\partial W \cup \{b_1, \dots, b_k\})$ es conexa, luego b'_{k+1} , luego, por 9.9, podemos unir b'_{k+1} con b_{k+1} con un arco diferenciable $f : \mathbb{R} \rightarrow W \setminus \partial W$ que no pasa por b_1, \dots, b_k .

Como en la prueba del teorema anterior, podemos ver a $\{b_1, \dots, b_k, b'_{k+1}\}$ y $\{b_1, \dots, b_k, b_{k+1}\}$ como dos inmersiones $\{1, \dots, k+1\} \rightarrow W \setminus \partial W$ entre las que f determina una isotopía (que fija los k primeros puntos). De ella obtenemos un difeomorfismo $g_1 : W \rightarrow W$ difeotópico a la identidad que cumple $g_1(b_i) = b_i$, para $i = 1, \dots, k$ y $g_1(b'_{k+1}) = b_{k+1}$. Así, la composición $g = g_0 \circ g_1$ cumple lo requerido. ■

Nota El teorema anterior no es cierto para variedades de dimensión 1, pero vale al menos para S^1 y $k = 2$. En efecto, por 9.35 existe un difeomorfismo $g_0 : S^1 \rightarrow S^1$ difeotópico a la identidad tal que $g_0(a_1) = b_1$. Llamemos $b'_2 = g_0(a_2) \neq b_1$. Si $b'_2 = b_2$ es que g_0 cumple lo requerido. En caso contrario, de los dos arcos que unen b'_2 con b_2 , uno no contiene a b_1 , luego podemos tomar un arco abierto $C \subset S^2$ que contenga a b'_2 y a b_2 , pero no a b_1 . Aplicamos de nuevo el teorema 9.35, que nos da un difeomorfismo $g_1 : C \rightarrow C$ difeotópico a la identidad y tal que $g_1(b'_2) = b_2$. Más aún, observamos que este difeomorfismo se obtiene en última instancia del teorema 9.33, por lo que sabemos que es la identidad fuera de un compacto, luego podemos extenderlo a un difeomorfismo $g_1 : S^1 \rightarrow S^1$ que fija a $S^1 \setminus C$, en particular a b_1 y sigue siendo difeotópico a la

⁵Notemos que en ningún momento tenemos que trabajar con la “variedad” $V = \{0\}$, sino que en todo momento se trabaja con $\mathbb{R} \times \{0\} \cong \mathbb{R}$.

identidad (porque, de hecho, 9.33 nos da que la difeotopía entre g_1 y la identidad es la identidad fuera de un compacto, luego se extiende a una difeotopía en S^1). Ahora basta tomar $g = g_0 \circ g_1$. ■

He aquí un criterio que asegura la extensión de una inmersión regular a una variedad mayor:

Teorema 9.37 *Sea V una variedad diferencial, sea $K \subset V$ una subvariedad compacta y sean $f_0, f_1 : K \rightarrow W \setminus \partial W$ dos inmersiones regulares isotópicas. Si f_0 se extiende a una inmersión regular (resp. difeomorfismo) $f_0 : V \rightarrow W$, entonces f_1 también se extiende a una inmersión regular (resp. difeomorfismo) $f_1 : V \rightarrow W$ y las extensiones f_0, f_1 son isotópicas (resp. difeotópicas).*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : \mathbb{R} \times K \rightarrow W \setminus \partial W$ una isotopía entre f_0 y f_1 . Componiéndola con el difeomorfismo $1 \times f_0^{-1} : \mathbb{R} \times f_0[K] \rightarrow \mathbb{R} \times K$ obtenemos una isotopía $\bar{f} : \mathbb{R} \times f_0[K] \rightarrow W \setminus \partial W$ entre la inclusión y $f_0^{-1} \circ f_1$. Por el teorema 9.27 tenemos que su rastro $F : \mathbb{R} \times f_0[K] \rightarrow \mathbb{R} \times (W \setminus \partial W)$ es una inmersión regular, luego el teorema de extensión de isotopías nos da una difeotopía $g : \mathbb{R} \times W \rightarrow W$ (que hemos extendido a $\mathbb{R} \times \partial W$ como la identidad) tal que $\bar{f}_t|_{f_0[K]} = g_t|_{f_0[K]}$ y además g_0 es la identidad.

Ahora usamos la extensión de f_0 a V para definir $h : \mathbb{R} \times V \rightarrow W$ mediante $h(t, v) = g_t(f_0(v))$. Así h es una isotopía (y una difeotopía si f_0 es un difeomorfismo), $h_0 = f_0$ y, si $v \in K$, entonces

$$h_1(v) = g_1(f_0(v)) = \bar{f}_1(f_0(v)) = f_1(v),$$

luego $h_1|_K = f_1$. ■

Necesitaremos esta caracterización de la orientabilidad de una variedad:

Teorema 9.38 *Una variedad diferencial W es orientable si y sólo si no existe ningún difeomorfismo $f : W \rightarrow W$ difeotópico a la identidad tal que, en un punto $p \in W \setminus \partial W$, cumpla que $f(p) = p$ y $df|_p : T_p(W) \rightarrow T_p(W)$ invierte la orientación.*

DEMOSTRACIÓN: Fijemos $p \in W \setminus \partial W$ y una orientación en $T_p(W)$. Por el teorema 9.35 tenemos que para todo punto $q \in W \setminus \partial W$, existe un difeomorfismo $f : W \rightarrow W$ difeotópico a la identidad tal que $f(p) = q$.

Supongamos que, si f y g son dos difeomorfismos cualesquiera en estas condiciones, las diferenciales $df|_p, dg|_p : T_p(W) \rightarrow T_q(W)$ inducen la misma orientación en $T_q(W)$, y vamos a probar que entonces W es orientable.

En efecto, fijamos una base orientada $v_1, \dots, v_n \in T_p(W)$ y consideramos en cada espacio $T_q(W)$ la orientación respecto a la cual $df|_p(v_1), \dots, df|_p(v_n)$ es una base orientada, para cualquier difeomorfismo f difeotópico a la identidad que cumpla $f(p) = q$.

Sea $x : U \subset W \setminus \partial W \rightarrow \tilde{U}$ una carta de W definida en un abierto conexo U y tomemos dos puntos $q_1, q_2 \in U$. Al igual que en la prueba del teorema 9.35,

podemos tomar un arco diferenciable α contenido en U que una q_1 con q_2 y a partir de él obtener una difeotopía $g : \mathbb{R} \times W \rightarrow W$ tal que g_0 es la identidad y $g_t(q_1) = \alpha(t) \in U$.

Por otra parte consideramos una difeotopía $g^* : \mathbb{R} \times W \rightarrow W$ entre la identidad g_0^* y un difeomorfismo g_1^* tal que $g_1^*(p) = q_1$. La aplicación dada por $\bar{g}(t, x) = g(t, g_1^*(x))$ es una difeotopía entre g_1^* y $\bar{g}_1 = g_1^* \circ g_1$, de modo que $\bar{g}_1(p) = q_2$ y $\bar{g}_t(p) \in U$.

Al encadenar g^* y \bar{g} obtenemos otra difeotopía $f : \mathbb{R} \times W \rightarrow W$ entre la identidad f_0 y un difeomorfismo que cumple $f_1(p) = q_2$. Además $f_{1/2}(p) = q_1$ y la curva $f_t(p)$, para $1/2 \leq t \leq 1$ está contenida en U .

El determinante de la matriz de cambio de base entre $df_t|_p(v_1), \dots, df_t|_p(v_n)$ y $\partial_{x_1}|_{f_t(p)}, \dots, \partial_{x_n}|_{f_t(p)}$ no se anula para ningún $t \in [1/2, 1]$, luego tiene signo constante. Como $df_t|_p(v_1), \dots, df_t|_p(v_n)$ es una base orientada de $T_{f_t(p)}(W)$, concluimos que las bases $\partial_{x_1}|_q, \dots, \partial_{x_n}|_q$ están todas positivamente orientadas o todas negativamente orientadas en $T_q(W)$, para todo punto $q \in U$. Esto nos permite considerar el atlas de $W \setminus \partial W$ formado por todas las cartas x para las que las bases correspondientes están orientadas, y es fácil ver que este atlas define una orientación en $W \setminus \partial W$, que fácilmente se extiende a una orientación en W .

Por consiguiente, si la variedad W no es orientable, fijado arbitrariamente un punto $p \in W \setminus \partial W$, tiene que existir un punto $q \in W \setminus \partial W$ y dos difeomorfismos $f_1, f_2 : W \rightarrow W$ difeotópicos a la identidad tales que $f_1(p) = f_2(p) = q$, pero que inducen orientaciones opuestas en $T_q(W)$. Entonces $f = f_1 \circ f_2^{-1}$ cumple que $f(p) = p$ y $df|_p$ invierte la orientación.

Recíprocamente, si W es orientable, y f_t es una difeotopía entre la identidad f_0 y un difeomorfismo f_1 tal que $f_1(p) = p$, fijamos una base orientada $v_1, \dots, v_n \in T_p(W)$, y es fácil ver que el signo del determinante de la matriz de cambio de base entre $df_t|_p(v_1), \dots, df_t|_p(v_n)$ y cualquier base orientada de $T_{f_t(p)}(W)$ es una aplicación localmente constante, luego constante, y es 1 para $t = 0$, luego también tiene que ser 1 para $t = 1$, lo que significa que $df|_p$ conserva la orientación. ■

Con esto podemos probar un teorema nada trivial:

Teorema 9.39 (Teorema del disco) Sean $f_0, f_1 : B^n \rightarrow W \setminus \partial W$ dos inmersiones regulares en una variedad diferencial conexa W de dimensión n . Si W es orientable, supongamos además que ambas inmersiones conservan la orientación o ambas la invierten. Entonces f_0 y f_1 son ambientalmente isotópicas.

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema de extensión de isotopías basta probar que f_0 y f_1 son isotópicas. En particular podemos suponer que $\partial W = \emptyset$.

Por el teorema 9.35 existe un difeomorfismo $g : W \rightarrow W$ difeotópico a la identidad tal que $g(f_0(0)) = f_1(0)$. Entonces $f_0^* = f_0 \circ g$ es difeotópico a f_0 y cumple que $f_0^*(0) = f_1(0)$. Por consiguiente, podemos suponer que $f_0(0) = f_1(0) = p$.

Si W es orientable, entonces $df_0|_0 \circ (df_1|_0)^{-1} : T_0(B^n) \rightarrow T_0(B^n)$ conserva la orientación, por hipótesis, pero si W no es orientable puede suceder que la

invierta. En tal caso tomamos un difeomorfismo $g : W \rightarrow W$ difeotópico a la identidad tal que $dg|_p : T_p(W) \rightarrow T_p(W)$ invierta la orientación (notemos que en la prueba del teorema 9.38 se ve que podemos elegir p arbitrariamente) y, sustituyendo f_0 por $f_0 \circ g$ garantizamos que $df_0|_0 \circ (df_1|_0)^{-1}$ conserva la orientación.

Sea U un entorno de p en W difeomorfo a \mathbb{R}^n y tomemos un $\delta > 0$ tal que $f_i[\overline{B}_\delta(0)] \subset U$, para $i = 0, 1$. Sea $h : I \times B^n \rightarrow B^n$ dada por

$$h(t, x) = (1 - t + t\delta)x.$$

Claramente h es una isotopía entre la identidad h_0 y $h_1(x) = \delta x$, luego las composiciones $h \circ f_i$ son isotopías entre f_i y nuevas inmersiones con imagen contenida en U . Como $dh_1|_0$ conserva la orientación, al sustituir f_i por $h_1 \circ f_i$ se sigue conservando el hecho de que $df_0|_0 \circ (df_1|_0)^{-1}$ conserva la orientación. Así pues, podemos suponer que $f_i[B^n] \subset U$, pero esto nos permite a su vez suponer que $W = \mathbb{R}^n$.

Tenemos, pues, dos inmersiones regulares $f_i : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que ambas conservan o ambas invierten la orientación, y tenemos que probar que son isotópicas. Si ambas invierten la orientación, consideramos un difeomorfismo $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que invierta la orientación, de modo que las composiciones $f_i \circ g$ conservan la orientación. Si probamos que son isotópicas mediante una isotopía h , entonces $h \circ g^{-1}$ es una isotopía entre f_0 y f_1 , luego podemos suponer que f_0 y f_1 conservan la orientación. A su vez, esto reduce el problema a probar que toda inmersión regular $f_1 : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que conserve la orientación es isotópica a la inclusión $f_0 : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Como antes, podemos suponer que $f_1(0) = 0$ y, sustituyendo f_1 por la composición $f_1 \circ (df_1|_0)^{-1}$, podemos suponer que $df_1|_0 = 1$. Ahora basta observar que la construcción de la prueba del teorema 9.24 vale igualmente para inmersiones de B^n y nos da una isotopía h entre f_1 y la inclusión. ■

Veamos algunas consecuencias:

Teorema 9.40 *Si V es una variedad diferencial conexa y C_1, C_2 son dos componentes conexas de ∂V difeomorfas a S^{n-1} , entonces existe un difeomorfismo $h : V \rightarrow V$ tal que $h[C_1] = C_2$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $\psi_i : S^{n-1} \rightarrow C_i$ dos difeomorfismos y sea V' la variedad que resulta de tapan los dos agujeros a través de ellas. Identificando a V con una subvariedad de V' , tenemos que cada ψ_i se extiende a una inmersión regular $\psi_i : B^n \rightarrow V' \setminus \partial V'$. Si V' es orientable y ψ_1 y ψ_2 no conservan o invierten la orientación por igual, cambiamos uno de los dos componiéndolo con una simetría de B^n en sí misma para que ambos conserven la orientación. Esto no altera la imagen de ψ_i , que es lo único que nos va a importar.

Por el teorema anterior, ψ_1 y ψ_2 son ambientalmente isotópicas, lo cual implica en particular que existe un difeomorfismo $h : V' \rightarrow V'$ de manera que $h[\psi_1[B^n]] = \psi_2[B^n]$. Al restringirlo a $V = V' \setminus (\psi_1[B_1(0)] \cup \psi_2[B_1(0)])$ tenemos un difeomorfismo $h : V \rightarrow V$ tal que $h[C_1] = C_2$. ■

Esto nos permite refinar la conclusión del teorema 9.30, en el sentido de que si la frontera de una superficie conexa V tiene varias componentes conexas y tapamos una o varias de ellas, la superficie resultante es la misma (salvo difeomorfismo) independientemente de cuáles sean los agujeros tapados (siempre y cuando tapemos el mismo número de ellos, naturalmente).

Una variante del argumento empleado en la prueba del teorema anterior nos da fácilmente que si en una variedad V de dimensión n seleccionamos una subvariedad difeomorfa a B^n y eliminamos la bola abierta correspondiente, la variedad resultante no depende, salvo difeomorfismo, de la elección de la subvariedad.

La unicidad de la suma conexa En la sección [TA 1.7] definimos la suma conexa $X_1 \# X_2$ de dos variedades diferenciales X_1 y X_2 de dimensión n , que se unen a través de dos inmersiones regulares $f_i : B^n \rightarrow X_i \setminus \partial X_i$ eliminando los puntos $f_i(0)$, para formar la suma topológica

$$X_0 = (X_1 \setminus \{f_1(0)\}) \oplus (X_2 \setminus \{f_2(0)\})$$

y solapando las imágenes de los discos perforados mediante el difeomorfismo $f_1^{-1} \circ \eta \circ f_2$, donde $\eta : B_1(0) \setminus \{0\} \rightarrow B_1(0) \setminus \{0\}$ es el difeomorfismo dado por

$$\eta(x) = \frac{\sqrt{1 - \|x\|^2}}{\|x\|} x.$$

Ahora es fácil ver que si tomamos otras inmersiones $g_i : B^n \rightarrow X_i \setminus \partial X_i$ tales que g_i es isotópica a f_i , entonces las variedades $(X_1 \# X_2)_f$ y $(X_1 \# X_2)_g$ son difeomorfas.

En efecto, basta probar que ambas son difeomorfas a la variedad construida con f_1 y g_2 , pues esto implica a su vez que es isomorfa a la construida con g_1 y g_2 .

Si $K = f_2[B^n]$, la composición de $1 \times f_2^{-1} : I \times K \rightarrow I \times B^n$ con una isotopía entre f_2 y g_2 es una isotopía entre la inclusión y $f_2^{-1} \circ g_2$. Como la inclusión se extiende a la identidad en X_2 , el teorema 9.37 nos da que $f_2^{-1} \circ g_2$ también se extiende a un difeomorfismo $h : X_2 \rightarrow X_2$. Definimos $\bar{h} : X_0 \rightarrow X_0$ mediante

$$\bar{h}(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in X_1, \\ h(x) & \text{si } x \in X_2. \end{cases}$$

Así tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{\phi} & U_2 \\ \bar{h} \downarrow & & \downarrow \bar{h} \\ U_1 & \xrightarrow{\phi'} & U'_2 \end{array}$$

donde $\phi = f_1^{-1} \circ \eta \circ f_2$, $\phi' = f_1^{-1} \circ \eta \circ g_2$, $U'_2 = g_2[B_1(0) \setminus \{g_2(0)\}]$. Por [TA 1.52] tenemos que los cocientes definidos con f_1 , f_2 y con f_1 , g_2 son difeomorfos.

Ahora bien, el teorema del disco implica que si X_1 y X_2 son conexas, dos immersiones regulares cualesquiera $f_i, g_i : B^n \rightarrow X_i \setminus \partial X_i$ son isotópicas salvo que X_i sea orientable y $f_i \circ g_i^{-1}$ invierta la orientación.

Por lo tanto, si X_1 y X_2 no son orientables, el cociente X es independiente de las elecciones de las immersiones con las que se calcula.

Si sólo es orientable una de las dos, por ejemplo X_1 , en principio tenemos dos posibilidades, según si usamos una inmersión f_1 que conserve la orientación, o bien $\alpha \circ f_1$, donde $\alpha : B^n \rightarrow B^n$ es, por ejemplo, la aplicación dada por $\alpha(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$, que invierte la orientación. Ahora bien, sucede que el cociente calculado con $\alpha \circ f_1$ y f_2 es el mismo que el calculado con f_1 y $\alpha \circ f_2$, ya que en ambos casos la aplicación con la que se construye el cociente es

$$\phi = f_1^{-1} \circ \alpha \circ \eta \circ f_2 = f_1^{-1} \circ \eta \circ \alpha \circ f_2.$$

Y, como f_2 es isotópica a $\alpha \circ f_2$, tenemos que en este caso el cociente es también independiente de la elección de las immersiones.

Por último, si ambas variedades son orientables, en principio hay cuatro cocientes posibles, pero por el mismo truco anterior se reducen a dos, según si $f_1 \circ f_2^{-1}$ conserva o invierte la orientación.⁶

Habitualmente se define la suma conexas $X_1 \# X_2$ con el convenio de que si ambas variedades son orientables, entonces el difeomorfismo $f_1 \circ f_2^{-1}$ invierta la orientación. (Si la conserva tenemos lo que podemos llamar la *suma conexas inversa* de las dos variedades.) Con esta restricción adicional, hemos probado que la suma conexas de dos variedades diferenciales conexas es, salvo difeomorfismo, independiente de las immersiones con las que se construye.

Si tenemos tres variedades V, W, X de la misma dimensión, a la hora de calcular la suma conexas $(V \# W) \# X$, podemos calcular la segunda eligiendo la inmersión $B^n \rightarrow V \# W$ con imagen en W disjunta de la imagen de la inmersión con la que hemos calculado la suma $V \# W$, y entonces es claro que $(V \# W) \# X \cong V \# (W \# X)$, porque ambas variedades son difeomorfas al cociente que resulta de hacer ambas identificaciones simultáneamente.

La unicidad de los collares Vamos a probar que dos collares de una misma componente conexas C de ∂V son ambientalmente isotópicos. Necesitamos un resultado previo:

Teorema 9.41 *Sea W una variedad diferencial compacta sin frontera y sea $\phi : I \times W \rightarrow I \times W$ una inmersión regular tal que $\phi(0, w) = (0, w)$, para todo $w \in W$. Entonces existe $0 < \delta < 1$ tal que $\phi|_{[0, \delta] \times W} : [0, \delta] \times W \rightarrow I \times W$ es isotópico a la inclusión a través de una isotopía H que cumple $H_s(0, w) = (0, w)$.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos expresar $\phi(t, w) = (\phi_1(t, w), \phi_2(t, w))$, donde $\phi_1(0, w) = 0$ y $\phi_2(0, w) = w$. La lectura de ϕ respecto de una misma carta de

⁶En el último apartado de la sección [TA 12.5] se prueba que la suma conexas de dos planos proyectivos complejos $P^2(\mathbb{C}) \# P^2(\mathbb{C})$ da lugar a dos variedades no homeomorfas si invertimos la orientación de una de las immersiones de partida.

$I \times W$ de la forma $1 \times x$ tiene, en los puntos de la forma $(0, x)$, una matriz jacobiana de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & v \\ 0 & I_n \end{pmatrix},$$

donde $\alpha \neq 0$, pues ϕ es una inmersión. Más aún, $\alpha > 0$, pues $\phi_1(t, w) > 0$ para todo $t > 0$. Consideramos la homotopía

$$H : I \times I \times W \longrightarrow I \times W$$

dada por

$$H(s, t, w) = ((1-s)t + s\phi_1(st, w), \phi_2(st, w)).$$

Así $H_0(t, w) = (t, \phi_2(0, w)) = (t, w)$ y $H_1(t, w) = (\phi_1(t, w), \phi_2(t, w)) = \phi(t, w)$. Notemos también que $H(s, 0, w) = (0, w)$.

Vamos a probar que existe un $\delta > 0$ tal que todas las restricciones $H_s|_{[0, \delta] \times W}$ son inmersiones regulares. La lectura de H_s en una carta alrededor de un punto $(0, w)$ tiene jacobiana de la forma

$$\begin{pmatrix} 1-s+\alpha & sv \\ 0 & I_n \end{pmatrix},$$

luego $dH_s|_{(0, w)}$ es un isomorfismo. Por la compacidad de W existe un $\delta > 0$ tal que la diferencial de la restricción $H_s|_{[0, \delta] \times W} : [0, \delta] \times W \longrightarrow I \times W$ es un isomorfismo en todo punto para todo $s \in I$.

Vamos a probar que, reduciendo δ si es preciso, podemos conseguir que H_s sea inyectiva. En efecto, en caso contrario existen $s_k, (t_k, w_k) \neq (t'_k, w'_k)$ tales que $\{t_k\}$ tiende a 0 y $H_{s_k}(t_k, w_k) = H_{s_k}(t'_k, w'_k)$. Tomando subsucesiones podemos suponer que $\{s_k\}, \{w_k\}, \{w'_k\}$ convergen a s, w, w' , respectivamente, luego $w = H_s(0, w) = H_s(0, w') = w'$.

Sea $\bar{H} : I \times [0, \delta] \times W \longrightarrow I \times I \times W$ dada por $\bar{H}(s, t, w) = (s, H(s, t, w))$. Es fácil ver calcular la matriz jacobiana de la lectura de \bar{H} en una carta y concluir que $d\bar{H}|_{(s, 0, w)}$ es un isomorfismo, luego \bar{H} es inyectiva en un entorno de $(s, 0, w)$, pero en dicho entorno habrá dos ternas $(s_k, t_k, w_k) \neq (s_k, t'_k, w'_k)$ que contradicen dicha inyectividad.

Por consiguiente, $H_s|_{[0, \delta] \times W}$ es una inmersión regular y, al variar s , tenemos una isotopía entre la identidad y $\phi|_{[0, \delta] \times W}$ que cumple $H_s(0, w) = (0, w)$. ■

Teorema 9.42 *Si C es una unión finita de componentes conexas compactas de la frontera de una variedad diferencial V , dos collares cualesquiera de C en V son ambientalmente isotópicos a través de una difeotopía $g : I \times V \longrightarrow V$ que cumple $g(s, c) = c$, para todo $c \in C$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $f, g : I \times C \longrightarrow V$ dos collares de C y veamos en primer lugar que son isotópicos a través de una isotopía $F : I \times I \times C \longrightarrow V$ tal que $F_s(0, c) = c$, para todo $c \in C$.

Fijado $0 < \delta < 1$, la aplicación $F : I \times I \times C \longrightarrow V$ dada por

$$F(s, t, c) = f((1-s)t + s\delta, c)$$

es una isotopía entre f y otro collar $f_\delta(t, c) = f(t\delta, c)$ y, eligiendo δ suficientemente pequeño, podemos exigir que $f_\delta[I \times C] \subset g[I \times C]$.

Notemos además que $F_s(0, c) = f(0, c) = c$. Por lo tanto, podemos suponer que $f[I \times C] \subset g[I \times C]$. Esto nos permite definir $\phi = f \circ g^{-1} : I \times C \rightarrow I \times C$ y el teorema anterior nos da un $\delta > 0$ tal que $\phi|_{[0, \delta] \times C}$ es isotópico a la inclusión a través de una isotopía H que cumple $H_s(0, c) = (0, c)$. Entonces $H^* = H \circ g$ es una isotopía entre $f|_{[0, \delta] \times C}$ y $g|_{[0, \delta] \times C}$ tal que $H_s^*(0, c) = g(0, c) = c$.

A su vez, $H^{**}(s, t, c) = H^*(s, t\delta, c)$ es una isotopía entre f_δ y g_δ que sigue cumpliendo $H^{**}(s, 0, c) = H^*(s, 0, c) = c$. Por último, hemos visto que f_δ y g_δ son isotópicos a f y g , respectivamente, mediante isotopías que cumplen $(s, 0, c) \mapsto c$, luego también f y g son isotópicos a través de una isotopía que cumple esta condición.

No podemos aplicar directamente el teorema de extensión de isotopías porque V tiene frontera. Veamos cómo arreglarlo. Fijado un collar $f : I \times C \rightarrow V$, observamos que V es difeomorfa a $V \setminus f[[0, 1/2[\times C]]$. Basta considerar un difeomorfismo entre $[1/2, 1]$ y $[0, 1]$ que sea la identidad en un entorno de 1. Con él podemos construir un difeomorfismo entre $I \times C$ y $[1/2, 1] \times C$ que es la identidad en un entorno de $\{1\} \times C$, que a su vez podemos transportar a un difeomorfismo entre $f[I \times C]$ y $f[[1/2, 1] \times C]$ que se extiende al difeomorfismo requerido.

Por lo tanto, es equivalente probar que V cumple el teorema o que lo cumple $V \setminus f[[0, 1/2[\times C]]$. Si pasamos a llamar V a esta subvariedad y llamamos V^* a la V original, lo que tenemos es que V es una subvariedad de otra variedad $V^* = V \cup W$, donde W es difeomorfa a $[0, 1/2] \times C$ y $\partial W \cap V = C$. Además $C \cap \partial V^* = \emptyset$ y $W \setminus V$ es abierto y cerrado en $V^* \setminus C$.

Consideremos ahora dos collares f_0, f_1 de C en V y sea $f : \mathbb{R} \times C \rightarrow V$ una isotopía entre ellos tal que $f_s(0, c) = c$. Considerando a f como una isotopía $f : \mathbb{R} \times C \rightarrow V^* \setminus \partial V^*$, el teorema de extensión de isotopías nos da una difeotopía $g : \mathbb{R} \times (V^* \setminus \partial V^*) \rightarrow V^* \setminus \partial V^*$ tal que g_0 es la identidad y $f_s = f_0 \circ g_s$. Además, $g_s(v) = v$ para todo v fuera de un compacto en $V^* \setminus \partial V^*$, lo que nos permite extenderla a una difeotopía $g : \mathbb{R} \times V^* \rightarrow V^*$ que fija a ∂V^* .

Por otra parte, vemos que si $c \in C$, entonces

$$g_s(c) = g_s(f_0(0, c)) = f_s(0, c) = c.$$

Esto implica que, g_s se restringe a un difeomorfismo $V^* \setminus C \rightarrow V^* \setminus C$. Ahora observamos que $W \setminus V$ es una unión finita de componentes conexas de $V^* \setminus C$, luego la imagen por g_s de cada una de ellas es otra componente conexa y, como g_s fija los puntos de $\partial W \setminus V \cong C$, de hecho $g_w[W \setminus V] = W \setminus V$, luego también $g_s[V] = V$ y así g se restringe a una difeotopía $g : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ que fija a C y que prueba que los collares f_0 y f_1 son ambientalmente isotópicos. ■

La unicidad de la adjunción de 1-asa Ahora demostraremos que la adjunción de un asa de índice 1 a una variedad V depende únicamente de las componentes conexas de ∂V donde se realiza la adjunción y de la orientación del marco.

Retomamos la notación que empleábamos en la sección 9.4, por la que representaremos los elementos de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ como pares (x, y) .

Vamos a exigir una condición adicional en la definición de adjunción de un asa de índice 1 que en realidad es redundante, pero cuesta más comprobar que puede omitirse que verificarla en los casos que nos van a interesar.

Para ello observamos que $T_1 = B^n \setminus (\{0\} \times B^{n-1})$ puede descomponerse como unión de dos abiertos disjuntos $T_1 = T_1^- \cup T_1^+$, donde

$$T_1^- = \{(x, y) \in B^n \mid x < 0\}, \quad T_1^+ = \{(x, y) \in B^n \mid x > 0\},$$

por lo que un marco $f : T_1 \rightarrow V$ es lo mismo que dos immersiones regulares

$$f_1 : T_1^- \rightarrow V, \quad f_2 : T_1^+ \rightarrow V$$

con imágenes abiertas y disjuntas en V . De hecho, como T_1^+ y T_1^- son difeomorfos (a través de $(x, y) \mapsto (-x, y)$), esto es equivalente a tener dos immersiones regulares de T_1^+ en V con imágenes abiertas disjuntas.

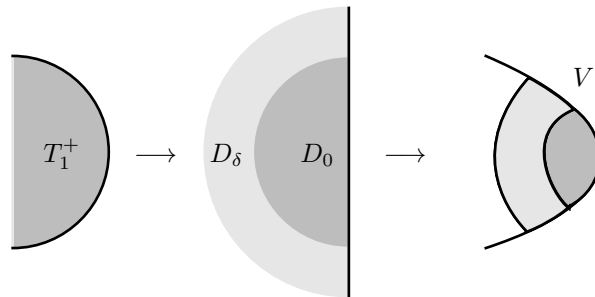
Llamemos $D_0 = \{(x, y) \in B_1(0) \mid x \leq 0\}$. La aplicación $\phi_2 : D_0 \rightarrow T_1^+$ dada por

$$\phi_2(x, y) = (x + \sqrt{1 - \|y\|^2}, y)$$

es un difeomorfismo,⁷ cuyo inverso es $\phi_2^{-1}(x, y) = (x - \sqrt{1 - \|y\|^2}, y)$. A su vez definimos $\phi_1 : D_0 \rightarrow T_1^-$ a la composición de ϕ_2 con el difeomorfismo $(x, y) \mapsto (-x, y)$. Es claro entonces que f está completamente determinado por las immersiones regulares $\psi_i = \phi_i \circ f : D_0 \rightarrow V$, que tienen imágenes abiertas y disjuntas.

Diremos que un marco f es *amplio* si existe un $\delta > 0$ tal que sus immersiones ψ_i asociadas pueden extenderse a immersiones regulares (siempre con imágenes abiertas disjuntas) $\psi_i : D_\delta \rightarrow V$, donde

$$D_\delta = \{(x, y) \in B_{1+\delta}(0) \mid x \leq 0\}.$$



Nota En lo sucesivo supondremos que todas las adjunciones de asas de índice 1 se realizan a través de marcos amplios, aunque puede probarse que toda

⁷La idea es que los puntos $(x, y) \in D_0$ correspondientes a un punto y fijo tienen su primera coordenada en el intervalo $]-\sqrt{1 - \|y\|^2}, 0]$, y ϕ transforma este intervalo en $]0, \sqrt{1 - \|y\|^2}]$, con lo que obtenemos un punto de T_1^+ .

adjunción a una variedad de un asa de índice 1 es difeomorfa a otra adjunción realizada mediante un marco amplio.

Es fácil probar algunos resultados que permiten modificar un marco sin alterar la variedad obtenida al adjuntar un asa a través de él. El primero vale en realidad para marcos de índice arbitrario:

Teorema 9.43 Sean $f_1, f_2 : T_k \rightarrow V$ dos marcos en una variedad V y sea $h : V \rightarrow V$ un difeomorfismo tal que $f_1 \circ h = f_2$. Entonces las variedades V_i^* que resultan de adjuntar un asa de índice k a V a través de f_i son difeomorfas.

DEMOSTRACIÓN: Sea $V_0^i = (V \setminus f_i[S_{k-1}]) \oplus A_k$ y sea $\bar{h} : V_0^1 \rightarrow V_0^2$ el difeomorfismo inducido por h y la identidad en A_k , sea $U^i = f_i[T_k \setminus S_{k-1}]$. Entonces tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U^1 & \xrightarrow{f_1^{-1} \circ \alpha} & U_k \\ \bar{h} \downarrow & & \downarrow \bar{h} \\ U^2 & \xrightarrow{f_2^{-1} \circ \alpha} & U_k \end{array}$$

que induce un difeomorfismo $h^* : V_1^* \rightarrow V_2^*$. ■

En el caso de asas de índice 1 tenemos otra simetría obvia, y es que al intercambiar los extremos del asa obtenemos variedades difeomorfas:

Teorema 9.44 Sea $f : T_1 \rightarrow V$ un marco para un asa de índice 1 y consideremos el marco opuesto $f^* : T_1 \rightarrow V$ dado por $f^*(x, y) = f(-x, y)$. Entonces, las variedades que resultan de adjuntar un asa con f y f^* son difeomorfas.

DEMOSTRACIÓN: Observemos que $S_0 = \{\pm 1, 0\}$, por lo que $f[S_0] = f^*[S_0]$. Sea $V_0 = (V \setminus f[S_0]) \oplus A_1$ y consideremos el difeomorfismo $g : A_1 \rightarrow A_1$ dado por $g(x, y) = (-x, y)$. Éste induce a su vez un difeomorfismo $\bar{g} : V_0 \rightarrow V_0$ que sobre $V \setminus f[S_0]$ es la identidad. Nuevamente tenemos un diagrama conmutativo como el del teorema anterior, en virtud del cual \bar{g} induce un difeomorfismo entre las adjunciones del asa con ambos marcos. ■

Es claro que el marco opuesto de un marco amplio es también amplio.

Hay otra modificación sencilla que puede hacerse a un marco f de índice 1 para la que ya no podemos asegurar que la adjunción dé lugar a una variedad difeomorfa. Llamamos f^{+-} al marco dado por

$$f^{+-}(x, y) = \begin{cases} f(x, -y_1, y_2, \dots, y_n) & \text{si } x > 0, \\ f(x, y) & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

e igualmente definimos f^{-+} (cambiando el signo sólo para $x < 0$) y f^{--} (cambiando el signo para todo x). Conviene definir entonces $f^{++} = f$.

Notemos que las inmersiones $\psi_i^{\pm\pm}$ asociadas a los marcos $f^{\pm\pm}$ se obtienen exactamente con la misma modificación del signo de la segunda variable, por lo

que, en particular, si f es un marco amplio, los cuatro marcos $f^{\pm\pm}$ son amplios también.

Según advertíamos, adjuntar asas con marcos modificados de este modo no tiene por qué dar lugar a variedades difeomorfas, pero en realidad no tenemos cuatro posibilidades, sino dos:

Teorema 9.45 *Si $f : T_1 \rightarrow V$ es un marco para un asa de índice 1, entonces las adjunciones de un asa a través de f^{++} y f^{--} dan lugar a variedades difeomorfas, al igual que las adjunciones a través de f^{+-} y f^{-+} .*

DEMOSTRACIÓN: En realidad, el segundo caso es el mismo que el primero, pues $f^{-+} = (f^{+-})^{--}$. Para el primero, observamos en primer lugar que $f^{++}(\pm 1, 0) = f^{--}(\pm 1, 0)$, por lo que la adjunción del asa respecto de ambos marcos es un cociente de la misma variedad $V_0 = (V \setminus f[S_0]) \oplus A_1$ (donde $S_0 = \{(\pm 1, 0)\}$). Consideramos el difeomorfismo $g : A_1 \rightarrow A_1$ dado por $g(x, y) = (x, -y_1, y_2, \dots, y_n)$, que induce a su vez un difeomorfismo $g : V_0 \rightarrow V_0$ que es la identidad en el primer sumando de V_0 . Si llamamos $U_{++} = f^{++}[T_1 \setminus S_0]$ y $U_{--} = f^{--}[T_1 \setminus S_0]$, nuevamente tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U_{++} & \xrightarrow{(f^{++})^{-1} \circ \alpha} & U_1 \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ U_{--} & \xrightarrow{(f^{--})^{-1} \circ \alpha} & U_1 \end{array}$$

que da lugar a un difeomorfismo entre los cocientes correspondientes a los marcos f^{++} y f^{--} . ■

Por ejemplo, veremos más adelante que al adjuntar un asa de índice 1 a un disco puede obtenerse un cilindro o bien una cinta de Möbius, según que usemos un marco f o bien f^{+-} .

Si $f : T_1 \rightarrow V$ es un marco para un asa de índice 1, entonces $f(\pm 1, 0) \in \partial V$. Si C_1 y C_2 son las componentes conexas de ∂V (tal vez la misma) a las que pertenecen estos puntos, diremos que f conecta C_1 con C_2 . En caso de que las componentes sean distintas, no precisamos cuál de los dos puntos $f(\pm 1, 0)$ está en cuál de ellas, de modo que decir que f conecta C_1 con C_2 es lo mismo que decir que conecta C_2 con C_1 .

Llamamos $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid x \leq 0\}$. Notemos que, para todo $\delta > 0$, se cumple que $D_\delta \subset H$. Con esto ya podemos enunciar y demostrar el resultado fundamental sobre unicidad de la adjunción de asas de índice 1:

Teorema 9.46 *Sea V una variedad diferencial, sean C_1 y C_2 dos componentes conexas compactas de ∂V (no necesariamente distintas), sean $p_i \in C_i$ dos puntos distintos, sean $x_i : U_i \rightarrow H$ cartas alrededor de p_i , de modo que $x_i(p_i) = 0$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Sea $f : T_1 \rightarrow V$ el marco determinado por las inmersiones $\psi_i : D_0 \rightarrow V$ dadas por $\psi_i = x_i^{-1}|_{D_0}$. Entonces, toda variedad que se obtenga*

de V mediante la adjunción de un asa de índice 1 a través de un marco (amplio) que conecte C_1 con C_2 es difeomorfa a la que se obtiene con f o con f^{+-} .

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : T_1 \rightarrow V$ un marco (amplio) arbitrario que conecte C_1 con C_2 , y vamos a probar que la adjunción de un asa a través de f es difeomorfa a la adjunción a través de uno de los dos marcos considerados en el enunciado.

En el caso en que $C_1 \neq C_2$, si $f(-1, 0) \in C_2$ y $f(1, 0) \in C_1$, cambiando f por el marco opuesto en el sentido del teorema 9.44 da lugar a una variedad difeomorfa, luego no perdemos generalidad si suponemos que $f(-1, 0) \in C_1$ y $f(1, 0) \in C_2$.

Observemos que si V tiene dimensión 2, entonces C_1 y C_2 son difeomorfas a S^1 , por el teorema de clasificación de las curvas diferenciales [TA 1.25]. Por lo tanto, el teorema 9.36 (teniendo en cuenta la nota posterior) nos da que existe un difeomorfismo $g : C_1 \cup C_2 \rightarrow C_1 \cup C_2$ difeotópico a la identidad tal que $g(f(-1, 0)) = p_1$, $g(f(1, 0)) = p_2$ (si $C_1 \neq C_2$, encontramos un difeomorfismo en cada C_i por separado y luego los combinamos). Por el teorema 9.28, este difeomorfismo se extiende a un difeomorfismo $g : V \rightarrow V$.

Así, $f^* = f \circ g$ es otro marco (amplio) que da lugar a una variedad difeomorfa al adjuntar un asa a través de él, y que cumple $f^*(-1, 0) = p_1$, $f^*(1, 0) = p_2$, luego no perdemos generalidad si suponemos que $f(-1, 0) = p_1$ y $f(1, 0) = p_2$.

Como el marco es amplio, existe un $\delta > 0$ tal que las inmersiones ψ_i asociadas a f se extienden a inmersiones regulares $\psi_i : D_\delta \rightarrow V$ con imágenes abiertas disjuntas. Observemos que $\psi_i(0) = p_i$.

Sea $0 < \eta < 1$ tal que $B_\eta(0) \cap D_\delta \subset \psi_i^{-1}[x_i^{-1}[D_0]]$. Sea $\alpha : [0, 1 + \delta] \rightarrow [0, 1]$ diferenciable creciente que valga η en $[0, 1 + \delta/2]$ y valga 1 en un entorno de 1.

Así la aplicación $\beta : D_\delta \rightarrow D_\delta$ dada por $\beta(q) = \alpha(\|q\|)q$ es un difeomorfismo. Notemos que es diferenciable en 0 porque restringida a $D_{\delta/2}$ es $q \mapsto \eta q$.

Sea $g_i : \psi_i[D_\delta] \rightarrow \psi_i[D_\delta]$ la aplicación $\psi_i^{-1} \circ \beta \circ \psi_i$, de modo que

$$g_i(\psi_i(q)) = \psi_i(\alpha(\|q\|)q).$$

Se trata de dos difeomorfismos iguales a la identidad fuera de un entorno de p_i contenido en U_i , luego podemos extenderlos a un difeomorfismo $\bar{g} : V \rightarrow V$, de modo que el marco $f \circ \bar{g}$ determina una variedad difeomorfa al adjuntar un asa a través de él y cumple además que $\psi_i[D_{\delta/2}] \subset x_i^{-1}[D_0]$.

Por lo tanto (cambiando δ por $\delta/2$) no perdemos generalidad si suponemos que $\psi_i[D_\delta] \subset x_i^{-1}[D_0]$. (Esto viene a decir que las dos bases del asa que se incrustan en V pueden hacerse tan pequeñas como se quiera.) Equivalentemente, las inmersiones regulares $\tilde{\psi}_i = \psi_i \circ x_i : D_\delta \rightarrow H$ tienen su imagen en D_0 .

Tanto D_δ como H tienen una orientación natural heredada de \mathbb{R}^n , y puede que las inmersiones $\tilde{\psi}_i$ conserven o inviertan dicha orientación. Cambiando f por uno de los cuatro marcos $f^{\pm\pm}$ podemos conseguir que las dos inmersiones $\tilde{\psi}_i$ conserven la orientación.

Esto hace que no perdamos generalidad si suponemos que las inmersiones $\tilde{\psi}_i$ conservan la orientación, pues si probamos que la adjunción de un asa a través

de uno de los marcos $f^{\pm\pm}$ da lugar a una variedad difeomorfa a la adjunción a través de uno de los dos marcos del enunciado, entonces la adjunción a través de la f será difeomorfa⁸ a la adjunción a través de uno de los cuatro marcos $f^{\pm\pm}$ correspondientes al marco f dado en el enunciado, que por el teorema anterior es difeomorfa a la correspondiente a f o a f^{+-} , como se requiere.

Como $\tilde{\psi}_i[\partial D_\delta] \subset \partial H$, de la propia definición de diferencial se sigue que $d\tilde{\psi}_i|_0[\partial H] = \partial H$, y a su vez que $d\tilde{\psi}_i|_0[H] = H$. Esto último implica que $d\psi_i|_0$ transforma el vector $e = (1, 0)$ en otro de la forma $\alpha e_1 + v$, con $v \in \partial H$ y $\alpha > 0$, por lo que $d\tilde{\psi}_i|_{\partial H}$ también conserva la orientación.

Por el teorema del disco aplicado a la inclusión $\partial D_\delta \rightarrow \partial H$ y a $\tilde{\psi}_i|_{\partial D_\delta}$, existen difeotopías $G_i : \mathbb{R} \times \partial H \rightarrow \partial H$ tales que $G_{i,1}$ es la identidad y $G_{i,0}|_{\partial D_\delta} = \tilde{\psi}_i|_{\partial D_\delta}$. De hecho, la prueba (basada en la aplicación del teorema de extensión de isotopías 9.33) muestra que G_i es la identidad fuera de un subconjunto compacto de $\mathbb{R} \times \partial H$. Claramente podemos exigir que $G_{i,t}$ sea la identidad para todo $t > 1$, con lo que la aplicación $g_i : H \rightarrow H$ dada por $g_i(x, y) = (x, G_i(-x, y))$ es un difeomorfismo tal que $g_i|_{\partial D_\delta} = \tilde{\psi}_i|_{\partial D_\delta}$ y es la identidad fuera de un entorno compacto de 0.

Por lo tanto, los difeomorfismos $x_i^{-1} \circ g_i$ son la identidad fuera de un compacto contenido en U_i , luego podemos combinarlos en un difeomorfismo $g : V \rightarrow V$, y cambiando ψ_i por $\psi_i \circ g^{-1}$ (lo que equivale a cambiar f por $f \circ g^{-1}$) obtenemos un nuevo marco tal que $\tilde{\psi}_i|_{\partial D_\delta}$ es la identidad, luego también $d\psi_i|_0|_{\partial H}$ es la identidad.

Por 1.22 podemos tomar un abierto $D_\delta \subset V_0 \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\tilde{\psi}_i$ se extiende a una función diferenciable en V_0 . Restringiéndolo podemos suponer que $d\tilde{\psi}_i|_q$ es un isomorfismo en todo $q \in V_0$ y que es localmente inyectiva. Sea

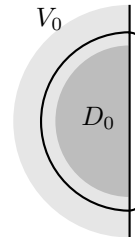
$$V_k = \{q \in \mathbb{R}^n \mid d(q, \overline{D_0}) < 1/k\}.$$

Así cada V_k es un entorno convexo de $\overline{D_0}$ y, para todo número natural $k > 0$ tal que $1/k < d(\overline{D_0}, \mathbb{R}^n \setminus V_0)$, se cumple que $\overline{D_0} \subset V_k \subset V_0$. Tomando k suficientemente grande, podemos exigir que $\tilde{\psi}_i$ sea inyectiva en V_k .

En efecto, en caso contrario podríamos formar dos sucesiones $\{x_k\}, \{y_k\}$ tales que $x_k, y_k \in V_k, x_k \neq y_k$ y $\psi_i(x_k) = \psi_i(y_k)$. Ambas sucesiones tendrían subsucesiones convergentes a $x, y \in \overline{D_0}$, pero entonces $\tilde{\psi}_i(x) = \tilde{\psi}_i(y)$, pero $\tilde{\psi}_i$ es inyectiva en $\overline{D_0}$, luego $x = y$, pero entonces $\tilde{\psi}_i$ no sería inyectiva en ningún entorno de x , contradicción.

Así pues, reduciendo V_0 , podemos suponer que es un entorno convexo de $\overline{D_0}$ y que $\tilde{\psi}_i : V_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una inmersión regular que fija a todos los puntos de $\partial H \cap V_0$ (notemos que $\tilde{\psi}_i$ es regular porque es abierta, por el teorema de la función inversa).

Además, $d\tilde{\psi}_i|_0|_{\partial H}$ es la identidad, por lo que la matriz de $(d\tilde{\psi}_i|_0)^{-1}$ es de la forma



⁸Aquí usamos que si dos marcos f y g dan lugar a adjunciones difeomorfas, lo mismo sucede con $f^{\pm\pm}$ y $g^{\pm\pm}$, para una misma elección de signos, lo cual se demuestra fácilmente, en la misma línea de las demostraciones de los teoremas precedentes.

$$\left(\begin{array}{c|ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \hline 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{array} \right),$$

donde $\alpha_1 > 0$. Por lo tanto, podemos definir difeotopías $G_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ determinadas por la matriz

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1-t+t\alpha_1 & t\alpha_2 & \cdots & t\alpha_n \\ \hline 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{array} \right),$$

de modo que $G_{i,0}$ es la identidad y $G_{i,1} = (d\tilde{\psi}_i|_0)^{-1}$. Claramente $G_{i,t}[H] = H$, luego $\tilde{\psi}_i \circ G_i$ es una isotopía entre $\tilde{\psi}_i$ y una inmersión regular

$$\chi_i = \tilde{\psi}_i \circ G_{i,1} : V_0 \rightarrow H$$

tal que $d\chi_i|_0$ es la identidad. La convexidad de V_0 permite llevar a cabo la misma construcción empleada en la prueba del teorema 9.24 para concluir que χ_i es isotópica a la inclusión, mediante una isotopía que fija a $V_0 \cap \partial H$, luego lo mismo vale para $\tilde{\psi}_i$.

Así pues, tenemos isotopías $g_i : \mathbb{R} \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ entre la inclusión $g_{i,0}$ y $g_{i,1} = \tilde{\psi}_i$ que cumplen además que $g_{i,t}(q) = q$ para todo $q \in V_0 \cap \partial H$. El rastro $G_i : \mathbb{R} \times V_0 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ de estas isotopías es una inmersión por el teorema 9.27, y es una inmersión regular porque una inmersión entre dos abiertos de \mathbb{R}^{n+1} es abierta, por el teorema de la función inversa.

Aplicamos el teorema 9.33 con $V = V_0$, $K = \overline{D}_0$, que nos da dos difeotopías $g_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que son la identidad fuera de un compacto y de modo que

$$\tilde{\psi}_i|_{D_0} = f_{i,0}|_{D_0} \circ \tilde{\psi}_i = g_{i,1}|_{D_0}.$$

Ahora bien, si analizamos la demostración de 9.33, en nuestro contexto podemos afirmar más (en el párrafo siguiente usamos la notación de dicha demostración):

Puesto que $F_i(t, q) = (t, q)$ para todo $q \in V_0 \cap \partial H$, el campo X_0 que se define en la prueba cumple $X_{0,(t,q)} = \partial_t|_{(t,q)}$ para todo punto $q \in V_0 \cap \partial H$, y el campo X_1 es de la forma $X_{1,(t,q)} = \alpha(t, q)\partial_t|_{(t,q)}$ para todo $q \in \partial H$, con lo que el campo \tilde{X} cumple que $\tilde{X}_{(t,q)} = \partial_t|_{(t,q)}$ para todo $q \in \partial H$. Esto se traduce en que $\Phi_{\tilde{X}}(t, s, q) = (t + s, q)$, para todo $q \in \partial H$, luego $G(t, q) = (t, q)$ y $g_i(t, q) = q$.

Así pues, los difeomorfismos $g_i = g_{i,1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ fijan a todos los puntos de ∂H , luego se restringen a difeomorfismos $g_i : H \rightarrow H$ que extienden a $\tilde{\psi}_i|_{D_0}$ y que son la identidad fuera de un compacto. Como antes, los difeomorfismos $x_i \circ g_i \circ x_i^{-1}$ se extienden a un difeomorfismo $g : V \rightarrow V$ de modo que si cambiamos f por $f \circ g^{-1}$ nos encontramos con que $\tilde{\psi}_i|_{D_0} : D_0 \rightarrow H$ es la inclusión, luego $\psi_i = x_i^{-1}|_{D_0}$, luego f es el marco descrito en el enunciado. ■

Capítulo X

La clasificación de las superficies compactas

En [TA 3.20] demostramos el teorema de clasificación de las superficies topológicas compactas. Concretamente, demostramos que toda superficie topológica compacta es homeomorfa a una de las superficies M_g o N_h , definidas como cocientes obtenidos al identificar por pares los lados de un polígono regular. Aquí demostraremos un teorema análogo para superficies diferenciales.

Llamaremos *superficies diferenciales* a las variedades diferenciales (con frontera) conexas de dimensión 2.

Vamos a probar que cualquier superficie diferencial sin frontera es también difeomorfa a una de las superficies M_g y N_h , pero para que esto tenga sentido tenemos que redefinirlas para que no sean meras variedades topológicas, sino que sean variedades diferenciales. Para ello nos apoyamos en que, según hemos visto en el capítulo anterior, la suma conexa de variedades diferenciales no depende de la elección de las inmersiones de discos con las que se calcula. Esto justifica la definición siguiente:

Definición 10.1 Diremos que una superficie diferencial V es de tipo M_0 si es una esfera S^2 , de tipo M_1 si es un toro $S^1 \times S^1$ y de tipo M_g , para $g \geq 2$, si es la suma conexa de g toros. Similarmente, definimos las superficies de tipo N_1 como las difeomorfas al plano proyectivo $P^2(\mathbb{R})$ y las de tipo N_h , para $h \geq 2$, como las difeomorfas a una suma conexa de h planos proyectivos.

La unicidad de la suma conexa implica que dos superficies cualesquiera de un mismo tipo M_g o N_h son difeomorfas. Toda superficie de tipo M_g o N_h es compacta. Como variedades topológicas, es claro que M_0 , M_1 y N_1 son las mismas definidas en [TA], y el teorema [TA 12.6] (véase el ejemplo siguiente) muestra que lo mismo vale para todas las variedades M_g y N_h .

Antes de enunciar el teorema de clasificación vamos a extender la definición de tipos de superficies para incluir a las superficies compactas con frontera.

Si $k \geq 0$, diremos que una superficie diferencial es de tipo $M_{g,k}$ o $N_{h,k}$ si resulta de eliminar k discos abiertos con clausuras disjuntas en una superficie de tipo M_g o N_h , respectivamente.

Así $M_{g,k}$ o $N_{g,h}$ es una superficie de tipo M_g o N_h con k agujeros circulares. El teorema del disco garantiza que no importa cuáles son concretamente los discos eliminados, sino que dos superficies de uno mismo de estos tipos son necesariamente difeomorfas.

El teorema de clasificación afirma lo siguiente:

Teorema 10.2 *Toda superficie diferencial compacta es de un único tipo $M_{g,k}$ o $N_{h,k}$.*

La unicidad es en realidad más fuerte aún, pues no sólo es cierto que dos variedades de tipos distintos no pueden ser difeomorfas, sino que ni siquiera pueden ser homeomorfas:

En efecto, supongamos que tenemos superficies V y V' de tipos $T_{u,k}$ y $T'_{u',k'}$, donde T y T' pueden ser M o N . Si son homeomorfas, un homeomorfismo $f : V \rightarrow V'$ se restringe a un homeomorfismo entre sus fronteras, pues, en general, como consecuencia del teorema de invarianza de los dominios [TA 2.9], los puntos frontera de una variedad diferencial de dimensión n están caracterizados topológicamente como los puntos que no poseen entornos homeomorfos a abiertos de \mathbb{R}^n . Por lo tanto, ∂V y $\partial V'$ tienen el mismo número de componentes conexas, es decir, $k = k'$.

Sean \hat{V} y \hat{V}' las superficies que resultan de tapan los k agujeros de cada superficie, que son de tipo T_u y $T'_{u'}$, respectivamente. Si llamamos $h : B^2 \rightarrow V$ y $h' : B^2 \rightarrow V'$ a las inmersiones que tapan un agujero $C \subset \partial V$ y su imagen $C' = f[C] \subset \partial V'$, el homeomorfismo $h \circ f \circ (h'|_{C'})^{-1} : S^1 \rightarrow S^1$ se extiende¹ a un homeomorfismo $B^2 \rightarrow B^2$, que a su vez da lugar a una extensión de f a un homeomorfismo que envía $h[B^2]$ en $h'[B^2]$. Al hacer lo mismo con los k agujeros, obtenemos un homeomorfismo $\hat{f} : \hat{V} \rightarrow \hat{V}'$.

Así pues, \hat{V} y \hat{V}' son dos superficies diferenciales de tipos T_u y $T'_{u'}$, que, como superficies topológicas, son homeomorfas, luego los tipos son el mismo, es decir, tanto T como T' son M o N y $u = u'$, lo cual, unido a que $k = k'$, nos da que V y V' son del mismo tipo como superficies diferenciales, luego son difeomorfas.²

Es importante señalar que la prueba que acabamos de dar parte del supuesto que las superficies dadas son de alguno de los tipos que hemos definido. Cuando

¹La prueba es elemental. La construcción del homeomorfismo está incluida, por ejemplo, hacia el final de la prueba del teorema [TA 3.15].

²Notemos la sutileza: del hecho de que dos superficies compactas sin frontera sean del mismo tipo como superficies topológicas no podemos deducir (sin haber probado el teorema de clasificación) que sean del mismo tipo como superficies diferenciales, pues, *a priori*, podría ocurrir que alguna de ellas no fuera de ningún tipo, por ejemplo, que fuera homeomorfa a una esfera S^2 , pero que su estructura diferencial no fuera la usual, con lo que sería de tipo M_1 como superficie topológica, pero de ningún tipo como superficie diferencial. Pero si sabemos que las superficies son de alguno de los tipos definidos como variedades diferenciales y son homeomorfas, entonces también son del mismo tipo como variedades diferenciales, pues sabemos que tipos diferenciales distintos se corresponden con tipos topológicos distintos.

hayamos probado que esto es siempre así, es decir, que toda superficie diferencial compacta es de alguno de los tipos $M_{g,k}$ o $N_{h,k}$, el argumento anterior prueba, de hecho, el teorema siguiente:

Teorema 10.3 *Dos superficies diferenciales compactas son difeomorfas si y sólo si son homeomorfas.*

Otra consecuencia inmediata es:

Teorema 10.4 *Toda superficie topológica compacta³ admite, salvo difeomorfismo, una única estructura de variedad diferencial.*

La unicidad es el teorema precedente, y la existencia se debe a que toda superficie de tipo M_g o N_h es homeomorfa a una superficie diferencial de este mismo tipo, y a través del homeomorfismo podemos traspasarle la estructura diferencial.

Cabe resaltar la importancia del “salvo difeomorfismo”. Por ejemplo, la aplicación $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es un homeomorfismo, luego podemos tomarla como única carta de un atlas en \mathbb{R} , que dota a \mathbb{R} de una estructura de variedad diferencial distinta de la usual, pues si representamos por \mathbb{R}^* a \mathbb{R} con dicha estructura, tenemos que $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en 0, mientras que considerando en \mathbb{R} la estructura usual no lo es. Sin embargo, \mathbb{R}^* y \mathbb{R} son variedades difeomorfas, pues el propio f es un difeomorfismo entre ellas. Por el teorema de clasificación de las curvas diferenciales [TA 1.25] sabemos que la estructura diferencial de \mathbb{R} es única salvo difeomorfismo, lo cual no impide, como vemos, que \mathbb{R} admita estructuras diferenciales distintas. Es fácil mostrar ejemplos similares en cualquier variedad.

Por otra parte, puede probarse que muchas variedades diferenciales, por ejemplo \mathbb{R}^4 o S^7 , admiten estructuras diferenciales llamadas “exóticas”, que no sólo son distintas de las usuales, sino que no son difeomorfas a ellas.

La prueba del teorema de clasificación que vamos a presentar se basa en la posibilidad de construir cualquier variedad diferencial mediante adjunciones sucesivas de asas a un disco. Para probar este hecho necesitamos exponer los resultados básicos de la llamada teoría de Morse.

10.1 Teoría de Morse

En la sección 2.4 estudiamos los valores regulares de las funciones diferenciables $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, donde V es una variedad diferencial sin frontera. Los resultados fundamentales que vimos son el teorema 2.25, que nos asegura que las antiimágenes de los valores regulares son subvariedades, y el teorema de

³En [TA] definimos únicamente variedades topológicas sin frontera, pero igualmente es posible definir variedades topológicas con frontera, y en tal caso este teorema se generaliza sin dificultad, sin más que tener en cuenta que en toda superficie topológica compacta podemos tapar sus agujeros para obtener una superficie compacta sin frontera, la cual admitirá una estructura diferencial, luego la superficie de partida también.

Sard, que nos asegura que casi todos los valores que toma una función diferenciable son regulares. Aquí vamos a llevar más lejos dicho estudio analizando también los valores críticos que cumplan a su vez una condición de regularidad de segundo orden. Para definir dicha condición necesitamos un pequeño cálculo sobre difeomorfismos entre abiertos de \mathbb{R}^n :

Teorema 10.5 *Sea $f : U \rightarrow V$ un difeomorfismo entre abiertos de \mathbb{R}^n , sea $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable y sea $p \in U$ un punto tal que $\nabla g(f(p)) = 0$. Entonces las matrices hessianas de f y $f \circ g$ satisfacen la relación*

$$H(f \circ g)(p) = (Jf(p))^t Hg(f(p)) Jf(p).$$

DEMOSTRACIÓN: Si llamamos y_1, \dots, y_n a las funciones coordenadas de f , la regla de la cadena nos da que

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x_i} = \sum_k \left(f \circ \frac{\partial g}{\partial y_k} \right) \frac{\partial y_k}{\partial x_i}$$

y, volviendo a derivar,

$$\frac{\partial^2(f \circ g)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_k \left(\sum_l f \circ \frac{\partial^2 g}{\partial y_k \partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \right) \frac{\partial y_k}{\partial x_i} + \sum_k \left(f \circ \frac{\partial g}{\partial y_k} \right) \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Al evaluar en p , el segundo sumatorio se anula y queda

$$\frac{\partial^2(f \circ g)}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_p = \sum_{k,l} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \Big|_p \frac{\partial^2 g}{\partial y_k \partial y_l} \Big|_{f(p)} \frac{\partial y_l}{\partial x_j} \Big|_p,$$

que se corresponde con la ecuación matricial del enunciado. ■

Definición 10.6 Si V es una variedad diferencial sin frontera, diremos que un punto crítico $p \in V$ de una función diferenciable $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ es *no degenerado* si, dada una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ alrededor de p , la matriz hessiana de su lectura $H(x^{-1} \circ f)(x^{-1}(p))$ es regular.

Observemos que p es un punto crítico si y sólo si $df|_p = 0$ y, por consiguiente, $\nabla(x^{-1} \circ f)(x^{-1}(p)) = 0$. El teorema anterior implica entonces que la definición no depende de la elección de la carta.

Teorema 10.7 *Los puntos críticos no degenerados de una función diferenciable $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ son aislados.*

DEMOSTRACIÓN: Pasando a una carta podemos suponer que V es un abierto en \mathbb{R}^n . Entonces podemos considerar al gradiente de f como una función diferenciable $\nabla f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, y entonces $d(\nabla f)|_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ no es sino la aplicación lineal determinada por la hessiana $Hf(x)$. Si p es un punto crítico de f no degenerado, tenemos que $\nabla f(p) = 0$ y que $d(\nabla f)(p)$ es un isomorfismo. Por el teorema de la función inversa existe un entorno U de p donde ∇f es inyectiva, luego ∇f no toma el valor 0 en $U \setminus \{p\}$, luego p es el único punto crítico de f en U . ■

Toda función diferenciable sobre una variedad compacta sin frontera tiene necesariamente puntos críticos, por ejemplo, donde alcanza los valores máximo y mínimo, pero sucede que siempre podemos encontrar funciones cuyos puntos críticos sean no degenerados, y éstas son precisamente las funciones de Morse:

Definición 10.8 Una *función de Morse* $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ en una variedad diferencial sin frontera V es una función diferenciable cuyos puntos críticos son no degenerados.

Tal y como anticipábamos, el primer resultado fundamental sobre funciones de Morse es que existen en toda variedad, y de hecho existen muchas:

Teorema 10.9 Si V es una subvariedad sin frontera de \mathbb{R}^m y $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ es cualquier función diferenciable, entonces, para casi todo $u \in \mathbb{R}^m$ (en el sentido de la medida de Lebesgue), la función $f_u : V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_u(v) = f(v) + u \cdot v$ es una función de Morse.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos en primer lugar que V es un abierto en \mathbb{R}^m . Sea $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ la función dada por $g(x) = \nabla g(x)$. Entonces tenemos que $\nabla f_u(x) = g(x) + u$. Por lo tanto, x es un punto crítico de f_u si y sólo si $g(x) = -u$. Observemos además que $Hf(x) = Hf_u(x) = Jg(x)$.

Que f_u sea una función de Morse equivale a que $Jg(x)$ sea una matriz regular para todo $x \in g^{-1}[u]$, pero esto es tanto como decir que $dg|_x$ sea suprayectiva para todo $x \in g^{-1}[u]$, es decir, que u sea un valor regular de g . Ahora basta tener en cuenta el teorema de Sard, que asegura que el conjunto de valores críticos de g tiene medida nula.

Consideramos ahora el caso general. La restricción $T_p^*(\mathbb{R}^m) \rightarrow T_p^*(V)$ es suprayectiva, luego, si x^1, \dots, x^m son las funciones coordenadas de \mathbb{R}^m , tenemos que $dx^1|_p, \dots, dx^m|_p$ son un sistema generador de $T_p^*(V)$, luego contienen una base, que podemos suponer que es $dx^1|_p, \dots, dx^n|_p$. Por 2.14 sabemos que, en un entorno de p , se cumple que x^1, \dots, x^n forman un sistema de coordenadas o, lo que es lo mismo, que la proyección en las n primeras coordenadas es una carta de V alrededor de p . Sea $X : \tilde{U} \rightarrow U \subset V$ la parametrización inversa, que será de la forma $X(x) = (x, g(x))$, para cierta función $g : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$.

Para cada $w \in \mathbb{R}^{m-n}$, sea $F_w : V \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$F_w(v) = f(v) + v \cdot (0, w)$$

y sea $h = X \circ F_w : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$. Explícitamente, $h(x) = f(X(x)) + g(x) \cdot w$. Por el caso ya probado, para casi todo $z \in \mathbb{R}^n$, se cumple que h_z es una función de Morse. Pero si $u = (z, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ y $x \in \tilde{U}$, entonces

$$\begin{aligned} f_u(X(x)) &= f(X(x)) + X(x) \cdot u = f(X(x)) + (x, g(x)) \cdot (z, w) \\ &= f(X(x)) + x \cdot z + g(x) \cdot w = h(x) + x \cdot z = h_z(x). \end{aligned}$$

Llamemos S al conjunto de los $u = (z, w) \in \mathbb{R}^m$ tales que $f_u|_U$ no es una función de Morse. Por definición esto es equivalente a que $X \circ f_u$ no sea una

función de Morse, luego $S_w = \{z \in \mathbb{R}^n \mid (z, w) \in S\}$ es el conjunto de los $z \in \mathbb{R}^n$ tales que h_z no es una función de Morse, luego es un conjunto nulo, y si S_w es nulo para todo w , por el teorema de Fubini resulta que S es nulo.

Finalmente, podemos cubrir V con una cantidad numerable de abiertos coordenados U_k , y hemos probado que el conjunto de los $u \in \mathbb{R}^m$ tales que $f_u|_{U_k}$ no es una función de Morse es nulo, luego también lo es la unión de todos ellos, que es precisamente el conjunto de los $u \in \mathbb{R}^m$ tales que f_u no es una función de Morse. ■

Como, por el teorema de Whitney, toda variedad puede sumergirse en un espacio \mathbb{R}^m , ahora es inmediato que en toda variedad diferencial hay muchas funciones de Morse. Más concretamente, no perdemos generalidad si suponemos que V está contenida en la bola unitaria de \mathbb{R}^m y, por otra parte, dado $\epsilon > 0$, siempre podemos tomar $u \in \mathbb{R}^m$ fuera de un conjunto nulo dado de modo que $\|u\| < \epsilon$, y así $|f_u(v) - f(v)| = |u \cdot v| \leq \|u\| \|v\| < \epsilon$. Por consiguiente, toda función diferenciable $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ puede aproximarse por una función de Morse. Más precisamente:

Teorema 10.10 *Dada una función diferenciable $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ y dado $\epsilon > 0$, existe una función de Morse $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo $v \in V$ se cumple $|f(v) - g(v)| < \epsilon$ y g toma valores distintos sobre puntos críticos distintos.*

DEMOSTRACIÓN: Por las observaciones precedentes, existe una función de Morse $f_0 : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|f(v) - f_0(v)| < \epsilon/2$, para todo $v \in V$.

Sean $\{p_k\}_k$ los puntos críticos de f_0 (que pueden ser una cantidad finita o infinita numerable). Como son aislados, podemos tomar entornos coordenados U_k disjuntos dos a dos de modo que p_k sea el único punto crítico contenido en U_k . Sea $h_k : V \rightarrow [0, 1]$ una función meseta que valga 1 en un entorno de p_k y valga 0 fuera de U_k . Sea $\{\epsilon_k\}$ una sucesión de números reales $0 < \epsilon_k < \epsilon/2$, con lo que $g = f_0 + \sum_k \epsilon_k h_k$ es una función diferenciable en V tal que, para todo $v \in V$, se cumple que $|f_0(v) - g(v)| < \epsilon/2$, luego $|f(v) - g(v)| < \epsilon$.

Vamos a ver que, eligiendo adecuadamente los números $\epsilon/2$, podemos conseguir que g sea una función de Morse con los mismos puntos críticos que f_0 , pero con $g(p_k) = \epsilon_k f_0(p_k)$.

En efecto, es claro que $f_0 + \epsilon_k h_k$ coincide con f_0 fuera de un cerrado contenido en U_k , luego sus puntos críticos fuera de U_k son los mismos que los de f_0 . Sólo tenemos que probar que, si ϵ_k es suficientemente pequeño, su único punto crítico en U_k es p_k . Aceptando esto, la conclusión es inmediata, pues, fijado ϵ_0 , podemos elegir ϵ_1 que cumpla lo requerido y además $f(p_1) + \epsilon_1 \neq f(p_0) + \epsilon_0$, luego elegimos ϵ_2 de modo que $f(p_1) + \epsilon_2$ sea distinto de $f(p_0) + \epsilon_0$ y $f(p_1) + \epsilon_1$, y así sucesivamente, con lo que la función g toma valores distintos en cada uno de sus puntos críticos.

Sea $x_k : U_k \rightarrow B_1(0)$ una carta tal que $x(p_k) = 0$. Entonces la lectura $f_k = x_k^{-1} \circ f_0$ es una función de Morse en $B_1(0)$ cuyo único punto crítico es 0, y $\bar{h}_k = x_k^{-1} \circ h_k : B_1(0) \rightarrow [0, 1]$ es una función que vale 1 en un entorno de 0 y vale 0 fuera de un compacto K . Basta probar que, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, se cumple que $f_k + \epsilon \bar{h}_k$ tiene a 0 como único punto crítico.

Sea $F : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ la función $F(x) = \nabla f(x)$. Como 0 es un punto crítico no degenerado de f_k , tenemos que $F(0) = 0$ y $dF|_0$ es un isomorfismo, luego por el teorema de la función inversa F se restringe a un difeomorfismo $F|_G : G \rightarrow F[G]$ en un entorno G de 0. Podemos tomarlo de modo que $\bar{G} \subset B_1(0)$. Por [An 5.44], la función $(F|_G)^{-1}$ tiene la propiedad de Lipschitz. En particular, existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $x \in F[G]$, se cumple que $\|F^{-1}(x)\| \leq C\|x\|$. Por lo tanto, si $x \in G$,

$$\|x\| = \|F^{-1}(F(x))\| \leq C\|F(x)\|,$$

es decir, llamando $C_1 = 1/C$, tenemos que $\|\nabla f_k(x)\| \geq C_1\|x\|$. Como ∇f_k no se anula en el compacto $K \setminus G$, tomando C_1 menor que el mínimo de $\|\nabla f_k\|/\|x\|$ en dicho compacto, la desigualdad vale para todo $x \in K$.

Igualmente, \bar{h}_k también tiene la propiedad de Lipschitz en K , luego existe una constante $C_2 > 0$ tal que $\|\nabla \bar{h}_k(x)\| \leq C_2\|x\|$.

Por consiguiente, para todo $0 < \epsilon < C_1/C_2$ y todo $x \in K \setminus \{0\}$, se cumple que

$$\epsilon\|\nabla \bar{h}_k(x)\| \leq \epsilon C_2\|x\| < C_1\|x\| \leq \|\nabla f_k(x)\|,$$

luego

$$\|\nabla(f_k + \epsilon\bar{h}_k)(x)\| = \|\nabla f_k(x) + \epsilon\nabla \bar{h}_k(x)\| \geq \|\nabla f_k(x)\| - \epsilon\|\nabla \bar{h}_k(x)\| > 0$$

Por otro lado, si $x \in B_1(0) \setminus K$, tenemos que $\nabla(f_k + \epsilon\bar{h}_k)(x) = \nabla f_k(x) \neq 0$, luego en cualquier caso, si $x \neq 0$ se cumple que $\nabla(f_k + \epsilon\bar{h}_k)(x) \neq 0$ y esto significa que 0 es el único punto crítico de $f_k + \epsilon\bar{h}_k$, obviamente regular, pues, como \bar{h}_k es constante en un entorno de 0, su hessiana es nula, y la hessiana de $f_k + \epsilon\bar{h}_k$ en 0 es la misma que la de f_k . ■

El interés de las funciones de Morse se debe al resultado siguiente, que determina completamente su forma alrededor de un punto crítico:

Teorema 10.11 (Lema de Morse) *Sea $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en una variedad V y sea $p \in V$ un punto crítico de f no degenerado. Entonces existe una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ alrededor de p tal que $x(p) = 0$ y en la que la lectura de f es*

$$\tilde{f}(x) = f(p) - \sum_{i=1}^k x_i^2 + \sum_{i=k+1}^n x_i^2.$$

DEMOSTRACIÓN: Claramente, no perdemos generalidad si suponemos que V es la bola unitaria en \mathbb{R}^n . Como $f(0) = 0$ y $\nabla f(0) = 0$, el teorema de Taylor [VC 2.9] nos da que

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n R_{ij}(x)x_i x_j,$$

donde las funciones R_{ij} son diferenciables (de clase C^∞) y $R_{ij} = R_{ji}$. Si llamamos $R(x)$ a la matriz formada por estas funciones, es fácil ver comprobar la relación $R(0) = (1/2)Hf(0)$, luego por hipótesis es una matriz regular. En

particular, existe un índice j_0 tal que $R_{n,j_0}(0) \neq 0$. Si $j_0 < n$, consideramos un cambio de coordenadas lineal de la forma

$$y_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i \neq j_0, \\ x_i - tx_n & \text{si } i = j_0. \end{cases}$$

Entonces $x_{j_0} = y_{j_0} + ty_{j_n}$ y al sustituir en la expresión de $f(x)$ obtenemos la lectura de f en la carta determinada por las coordenadas y^i , que es de la forma

$$f(y) = \sum_{i,j=1}^n S_{ij}(y)y_i y_j,$$

donde $S_{nn}(y) = R_{nn}(y) + 2tR_{n,j_0}(y) + t^2R_{j_0,j_0}(y)$, luego en $y = 0$ tenemos un polinomio de grado 2 en t y, tomando un valor de t que no sea ninguna de sus dos posibles raíces, se cumplirá que $S_{nn}(0) \neq 0$. Equivalentemente, podemos suponer que $R_{nn}(0) \neq 0$. Por continuidad, lo mismo vale en un entorno de 0.

Seguidamente completamos un cuadrado:

$$\begin{aligned} f(x) &= R_{nn}(x_n^2 + 2 \sum_{j<n} \frac{R_{nj}}{R_{nn}} x_n x_j) + \sum_{i,j<n} R_{ij} x_i x_j \\ &= R_{nn}(x_n + \sum_{j<n} \frac{R_{nj}}{R_{nn}} x_j)^2 + \sum_{i,j<n} T_{ij} x_i x_j. \end{aligned}$$

Llamamos $g(x) = \sqrt{|R_{nn}(x)|}$, y consideramos el cambio de coordenadas

$$y_i = \begin{cases} x_i & \text{si } i < n, \\ g(x)(x_n + \frac{\sum_{j<n} R_{nj}(x)x_j}{R_{nn}(x)}) & \text{si } i = n. \end{cases}$$

Notemos que el determinante jacobiano de la función $x \mapsto y$ en 0 es

$$\left. \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \right|_0 = g(0) \neq 0,$$

luego en efecto la función es un cambio de coordenadas (una carta) en un entorno de 0, y la lectura de f en las nuevas coordenadas es

$$f(y) = \sum_{j<n} T_{ij}(y)y_i y_j \pm y_n^2.$$

Equivalentemente, podemos suponer que

$$f(x) = \sum_{j<n} R_{ij}(x)x_i x_j \pm x_n^2.$$

El hecho de que la matriz $R(0)$ sea regular se traduce en que lo mismo vale para la submatriz formada por sus $n - 1$ primeras filas y columnas, lo que nos permite repetir el proceso anterior para encontrar un cambio de coordenadas

que deje invariante a x_n y de modo que, respecto de las nuevas coordenadas, la lectura de f sea de la forma

$$f(x) = \sum_{j < n-1} R_{ij}(x) x_i x_j \pm x_{n-1}^2 \pm x_n^2.$$

Tras un número finito de pasos llegamos a una expresión de la forma

$$f(x) = \pm x_1^2 \pm \cdots \pm x_n^2,$$

y un último cambio de coordenadas que consista en una mera permutación de éstas nos da la expresión del enunciado para f . ■

Observemos que, aunque las matrices hessianas de las lecturas de una función diferenciable en cartas distintas pueden ser distintas, el número k que aparece en el lema de Morse es el mismo respecto de todas las cartas que cumplan el teorema. En efecto, si x e y son dos cartas distintas en las condiciones del enunciado y $\phi = x^{-1}y$ es el cambio de coordenadas, entonces

$$x^{-1} \circ f = \phi \circ y^{-1} f,$$

y en la prueba del teorema 10.5 hemos encontrado la relación

$$H(y^{-1} \circ f)(0) = (J\phi(0))^t H(x^{-1} f)(0) J\phi(0),$$

de modo que las dos hessianas son congruentes en el sentido de [Al 6.47], y la ley de inercia de Sylvester [Al 6.51] afirma precisamente que si las hessianas son diagonales, el número k de coeficientes negativos debe ser el mismo en ambas. Esto justifica la definición siguiente:

Definición 10.12 Si $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable y $p \in V$ es un punto crítico no degenerado, entonces el número k dado por el lema de Morse se llama *índice* de f en p .

Obviamente, f tiene un mínimo local en sus puntos críticos de índice 0 y un máximo local en sus puntos críticos de índice n . En los demás casos diremos que f tiene un *punto de silla* en p .

Ejemplo Consideremos la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = y^2 + x^4 - 2x^2.$$

Sus puntos críticos cumplen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4x = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0,$$

luego son $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 0)$. Calculando las hessianas vemos que ninguno es degenerado, luego f es una función de Morse. Concretamente, las hessianas muestran que los dos primeros puntos tienen índice 0 (son mínimos locales), mientras que $(0, 0)$ tiene índice 1 (es un punto de silla). ■

Una función de Morse en el toro Consideremos la parametrización de un toro $T \subset \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(\phi, \theta) = ((2 + \cos \theta) \cos \phi, (2 + \cos \theta) \sin \phi, \sin \theta).$$

Se trata de un cubrimiento, de modo que la inversa de la restricción de X a un abierto adecuado sirve como carta de cualquier punto de T . Vamos a probar que la función $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ dada por la coordenada x es una función de Morse en T . Su lectura en una carta determinada por una inversa local de X es $\tilde{f}(\phi, \theta) = (2 + \cos \theta) \cos \phi$, luego

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \phi} = -(2 + \cos \theta) \sin \phi, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \theta} = -\sin \theta \cos \phi.$$

Para que la primera derivada se anule, tiene que ser $\sin \phi = 0$, luego $\phi = 0, \pi$ (cualquier otro valor corresponderá al mismo punto de T determinado por uno de estos dos). A su vez, esto implica que $\cos \phi \neq 0$, luego también $\sin \theta = 0$, lo que nos da cuatro puntos críticos, a saber,

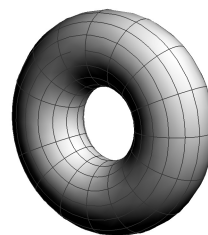
$$X(\pi, 0) = (-3, 0, 0), \quad X(\pi, \pi) = (-1, 0, 0), \quad X(0, \pi) = (1, 0, 0), \quad X(0, 0) = (3, 0, 0).$$

Las matrices hessianas respectivas son

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, los índices respectivos son 0, 1, 1 y 2.

La mejor forma de visualizar la función f es representar el toro con el eje X en vertical, de modo que f es la altura. Así vemos que los puntos $(\pm 3, 0, 0)$ son el mínimo y el máximo de f , lo que explica que tengan índices 0 y 2 respectivamente, mientras que los otros dos son puntos de silla, porque en $(-1, 0, 0)$ la función f crece en la dirección del eje Y y decrece en la dirección del eje Z , y al contrario en $(1, 0, 0)$. ■



Una función de Morse en el plano proyectivo Vamos a mostrar explícitamente una función de Morse en el plano proyectivo real $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Nos restringimos a este caso por simplificar los cálculos, pero el procedimiento se generaliza trivialmente a $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Fijemos números reales $a < b < c$ y definamos $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$f([x, y, z]) = \frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Consideramos el abierto coordenado $U_x = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mid x \neq 0\}$ y la carta $[x, y, z] \mapsto (y/x, z/x)$. La lectura de f en esta carta es

$$\tilde{f}(y, z) = \frac{a + by^2 + cz^2}{1 + y^2 + z^2}.$$

Para encontrar sus puntos críticos derivamos:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = \frac{2y(b-a + (b-c)z^2)}{(1+y^2+z^2)^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} = \frac{2z(c-a + (c-b)y^2)}{(1+y^2+z^2)^2} = 0.$$

Teniendo en cuenta que $c-a, c-b > 0$, la segunda ecuación implica que $z = 0$, y entonces la primera nos da también que $y = 0$. Así pues, el único punto crítico de f en U_x es $[1, 0, 0]$. Igualmente se comprueba que $[0, 1, 0]$ y $[0, 0, 1]$ son los únicos puntos críticos en los abiertos coordenados U_y y U_z , luego son todos los puntos críticos de f .

Volviendo a la lectura \tilde{f} , un simple cálculo muestra que

$$H\tilde{f}(0,0) = \begin{pmatrix} 2(b-a) & 0 \\ 0 & 2(c-a) \end{pmatrix},$$

luego se trata de un punto crítico no degenerado de índice 0. Lo mismo sucede con los otros dos, pero con la diagonal $2(a-b), 2(c-b)$ en el caso de $[0, 1, 0]$ y $2(a-c), 2(b-c)$ en el caso de $[0, 0, 1]$.

Concluimos que f es una función de Morse con tres puntos críticos de índices 0, 1 y 2 y con valores críticos a, b y c , respectivamente. ■

10.2 Descomposiciones en asas

Interrumpimos momentáneamente el estudio de los puntos críticos de las funciones de Morse para profundizar en el estudio de sus valores regulares. Sabemos que la antiimagen de un valor regular es una subvariedad, pero ahora vamos a estudiar las antiimágenes de intervalos de valores regulares:

Definición 10.13 Sea $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en una variedad sin frontera V . Para cada $r \in \mathbb{R}$ definimos $V_r = f^{-1}[-\infty, r]$ y, si $r < s$, llamamos $V_{r,s} = f^{-1}[r, s]$.

Observemos que $U = f^{-1}(-\infty, r)$ es abierto en V y $\partial U = f^{-1}[r]$. Vamos a probar que si r es un valor regular de f y $V_r \neq \emptyset$, entonces V_r es una variedad diferencial con frontera ∂U igual a su frontera topológica en V .

Esto es trivialmente cierto si $\partial U = \emptyset$. Supongamos, por el contrario, que existen puntos $p \in \partial U$.

Por 2.25 sabemos que ∂U es una subvariedad de V de dimensión $n-1$. Por el teorema del rango existen cartas de ∂U y de V alrededor de p respecto a las cuales la lectura de la inclusión $\partial U \rightarrow V$ viene dada simplemente por $(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$. Esto significa que, respecto a las coordenadas de la carta $x : U_0 \rightarrow \tilde{U}_0$ de V , se cumple que $\partial U \cap U_0$ está formado por

los puntos de U_0 con coordenada n -sima nula o, lo que es lo mismo, que, para todo punto $q \in U_0$, se cumple $f(q) = r$ si y sólo si $x^n(q) = 0$.

Notemos que f no puede tener un máximo ni un mínimo local en p , pues entonces p sería un punto crítico de f y r no sería un valor regular. Por lo tanto,

$$U_0 \setminus f^{-1}[r] = (U_0 \cap f^{-1}[-\infty, r]) \cup (U_0 \cap f^{-1}[r, +\infty))$$

es una descomposición de $U_0 \setminus f^{-1}[r]$ en dos abiertos no vacíos, al igual que

$$U_0 \setminus f^{-1}[r] = \{q \in U_0 \mid x^n(q) < 0\} \cup \{q \in U_0 \mid x^n(q) > 0\}.$$

Podemos suponer que \tilde{U}_0 es un cubo y que $x(p) = 0$, y entonces los dos últimos abiertos son conexos. Es claro entonces que

$$U_0 \cap U = U_0 \cap f^{-1}[-\infty, r] = \{q \in U_0 \mid x^n(q) < 0\}$$

o bien

$$U_0 \cap U = U_0 \cap f^{-1}[-\infty, r] = \{q \in U_0 \mid x^n(q) > 0\}.$$

Si se da, por ejemplo, el primer caso, tenemos que

$$U_0 \cap V_r = \{q \in U_0 \mid x^n(q) \leq 0\},$$

con lo que la restricción de la carta x a $V_r \cap U_0$ es un difeomorfismo entre $V_r \cap U$ y un abierto con frontera de \mathbb{R}^n , luego V_r es una variedad diferencial con frontera.

Similarmente se razona que si $r < s$ son valores regulares de f , entonces $V_{r,s}$ es una subvariedad con frontera de V cuya frontera es su frontera topológica $\partial V_{r,s} = f^{-1}[\{r, s\}]$.

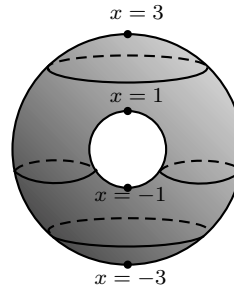
Teorema 10.14 *Sea $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse en una variedad compacta sin frontera V , sea $p \in V$ un mínimo local de f y sea $r = f(p)$. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, la componente conexa de p en $V_{r+\epsilon}$ es difeomorfa a B^n . Si p es un mínimo global, entonces $V_{r+\epsilon}$ tiene tantas componentes conexas como puntos de V donde se alcance dicho mínimo, y es, por consiguiente, unión de un número finito de discos cerrados disjuntos dos a dos.*

DEMOSTRACIÓN: Claramente p tiene que ser un punto crítico de índice 0. Sea $x : U \rightarrow \tilde{U}$ una carta en las condiciones del lema de Morse, es decir, tal que la lectura de f en ella sea $\tilde{f}(x) = r + \|x\|^2$. Sea $\delta > 0$ tal que \tilde{U} contenga un disco cerrado de centro 0 y radio 2δ , sea $\epsilon = r + \delta^2$, de modo que $x^{-1}[\overline{B}_\delta(0)] = V_{r+\epsilon} \cap U$ es abierto y cerrado en $V_{r+\epsilon}$, luego es la componente conexa de p en $V_{r+\epsilon}$, y es difeomorfa a un disco cerrado.

Si p_1, \dots, p_k son los mínimos globales de f (tienen que ser un número finito, pues son puntos críticos de f), entonces, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, las componentes conexas de los puntos p_i en $V_{r+\epsilon}$ son difeomorfas a discos cerrados, pero falta probar que su unión es todo $V_{r+\epsilon}$. En caso contrario podríamos construir una sucesión ϵ_m tendente a 0 tal que existirían puntos

$q_m \in V_{r+\epsilon_m}$ fuera de la unión de las componentes conexas de los puntos p_i . Tomando una subsucesión podemos suponer que $\{q_m\}$ converge a un punto q tal que $f(q) = r$, luego necesariamente $q = p_i$ para cierto índice i , luego existe un m tal que q_m está en el dominio U_i de una carta alrededor de p_i en las condiciones del lema de Morse, pero esto implica que q_m está en la componente conexa de p_i en $V_{r+\epsilon_m}$, contradicción. ■

Ejemplo Hemos visto antes que la coordenada x es una función de Morse en el toro de radio mayor $R = 2$ y radio menor $r = 1$, cuyos puntos críticos son $(-3, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$ y $(3, 0, 0)$, con índices $0, 1, 1, 2$, respectivamente.



La figura muestra que las superficies T_r son difeomorfos a bolas B^2 cuando $-2 < r < -1$, mientras que pasan a ser difeomorfos a cilindros $S^1 \times I$ cuando $-1 < r < 1$. Para $1 < r < 2$ son toros con un agujero y para $r > 2$ son todo el toro T .

El caso es que los cambios de forma se producen precisamente en los valores singulares de x . Esto no es casual, sino que es lo que a continuación vamos a probar que sucede en general. Dicho al revés, vamos a probar que, mientras no se supera un valor singular, las variedades V_r son difeomorfos entre sí. ■

Teorema 10.15 Si $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable en una variedad conexa sin frontera que no tiene valores singulares en un intervalo $[r, s]$ y la variedad $V_{r,s}$ es compacta, entonces $V_{r,s} \cong f^{-1}[r] \times [r, s]$ y $V_r \cong V_s$.

DEMOSTRACIÓN: Como $f[V] \subset \mathbb{R}$ es conexo, se trata de un intervalo, de modo que si f toma dos valores u y v , también toma todos los valores intermedios. Esto hace que $f[V_{r,s}]$ sea también un intervalo, cerrado por la compacidad de $V_{r,s}$. Más aún, tiene que ser $f[V_{r,s}] = [r, s]$. En efecto, supongamos que, por el contrario $f[V_{r,s}] = [r', s']$, con $r < r' \leq s$. Esto significaría que r' es el mínimo valor de f , pero entonces no sería un valor regular, en contra de la hipótesis. Igualmente tiene que ser $s' = s$.

Consideramos una métrica de Riemann en V , lo que nos permite a su vez considerar el gradiente $\nabla f \in \mathfrak{X}(V)$ (definición 4.33). Teniendo en cuenta la expresión en coordenadas del gradiente y que f no tiene puntos críticos en $V_{r,s}$, concluimos que ∇f no se anula en $V_{r,s}$, luego tampoco lo hace en un entorno G de $V_{r,s}$. Sea $\rho : V \rightarrow [0, 1]$ una función diferenciable que valga 1 en $V_{r,s}$ y que se anule fuera de un compacto $K \subset G$. Esto hace que el campo $X \in \mathfrak{X}(V)$ dado por

$$X_p = \frac{\rho(p)}{\|\nabla f(p)\|^2} \nabla f(p)$$

esté bien definido en V , entendiendo que es nulo en $V \setminus K$, pues así es diferenciable en G y en $V \setminus K$. El teorema 3.15 nos da que el grupo uniparamétrico definido por X es global:

$$\Phi_X : \mathbb{R} \times V \rightarrow V.$$

Consideremos la función $\alpha_p(t) = f(\Phi_X(t, p))$, que cumple

$$\alpha'_p(t) = df|_{\Phi_{X,p}(t)}(\Phi'_{X,p}(t)) = df|_{\Phi_{X,p}(t)}(X_{\Phi_{X,p}(t)}).$$

Si $p \in V$, o bien $X_{\Phi_{X,p}(t)} = 0$, en cuyo caso $\alpha'_p(t) = 0$ o, en caso contrario,

$$\begin{aligned} \alpha'_p(t) &= \frac{\rho(t)}{\|\nabla f(\Phi_{X,p}(t))\|^2} df|_{\Phi_{X,p}(t)}(\nabla f(\Phi_{X,p}(t))) \\ &= \frac{\rho(t)}{\|\nabla f(\Phi_{X,p}(t))\|^2} \langle \nabla f(\Phi_{X,p}(t)), \nabla f(\Phi_{X,p}(t)) \rangle_{\Phi_{X,p}(t)} = \rho(t). \end{aligned}$$

Vemos así que $\alpha_p(t)$ es siempre una función creciente y, mientras toma valores en V_{rs} , su derivada es concretamente igual a 1.

Por lo tanto, si $p \in f^{-1}[r]$, tenemos que $\alpha_p(0) = r$ y para todo $t \geq 0$ tal que $\alpha_p(t) \leq s$ su derivada es 1, luego $f(\Phi_X(t, p)) = \alpha_p(t) = r + t$ y esto vale, de hecho para todo $0 \leq t \leq s - r$.

Pero esto significa que $\Phi_{X,t}[f^{-1}[r]] \subset f^{-1}[r+t]$, pero igualmente probamos la inclusión opuesta: si $p \in f^{-1}[r+t]$, entonces $\alpha_p(0) = r+t \in [r, s]$ y, como la derivada es 1 para todo $s \leq 0$ tal que $\alpha_p(s) \in [r, s]$, resulta que $\alpha_p(s) = r+t+s$, luego $\alpha_p(-t) = r$. En suma: $\Phi_{X,t}[f^{-1}[r]] = f^{-1}[r+t]$, luego la aplicación

$$\psi : f^{-1}[r] \times [r, s] \longrightarrow V_{rs}$$

dada por $\psi(p, t) = \Phi_X(t - r, p)$ es un difeomorfismo (pues su inversa es la aplicación dada por $p \mapsto (\Phi_X(r - f(p), p), f(p))$).

Veamos ahora que $\Phi_{X,s-r}[V_r] \subset V_s$.

En efecto, si $p \in V_r$ pero $\Phi_{X,s-r}(p) \notin V_s$, entonces $f(\Phi_{X,p}(0)) < r$ y $f(\Phi_{X,p}(s-r)) > s$, luego existe un $0 < t_0 < s-r$ tal que $f(\Phi_{X,p}(t_0)) = s$, pero hemos visto que entonces $f(\Phi_{X,p}(t_0 - (s-r))) = r$, con lo que tenemos un $t_1 = t_0 - (s-r) < 0$ tal que $\Phi_{X,p}(t_1) > \Phi_{X,p}(0)$, contradicción.

También se da la inclusión opuesta: todo punto de V_s es de la forma $\Phi_{X,s-r}(p)$, para cierto $p \in V$. Si fuera $p \in V \setminus V_r$, entonces

$$r < f(\Phi_X(p, 0)) < f(\Phi_X(p, s-r)) \leq s,$$

pero esto es imposible, porque la derivada de $f(\Phi_{X,p}(t))$ para todo $0 < t < s-r$ vale 1, luego

$$f(\Phi_X(p, s-r)) = f(\Phi_X(p, 0)) + s - r.$$

Así pues, $\Phi_{X,s-r} : V_r \longrightarrow V_s$ es un difeomorfismo. ■

La teoría de Morse interviene al estudiar en qué consiste el cambio de forma cuando se supera un valor crítico:

Teorema 10.16 *Sea V una variedad compacta sin frontera y $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse. Sea $p \in V$ un punto crítico de índice k , sea $c = f(p)$ y supongamos que no hay más puntos críticos en $f^{-1}[c]$. Entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que $V_{c+\epsilon}$ se obtiene adjuntando un asa de índice k a $V_{c-\epsilon}$.*

DEMOSTRACIÓN: Cambiando f por $f - c$ podemos suponer que $c = 0$. Por el lema de Morse, existe una carta $x : U \rightarrow B_\delta(0)$ tal que $x(p) = 0$ y en la que la lectura de f es

$$(x^{-1} \circ f)(x) = - \sum_{i=1}^k x_i^2 + \sum_{i=k+1}^n x_i^2.$$

Si componemos la carta con la homotecia $x \mapsto 2x/\delta$ obtenemos una nueva carta $x : U \rightarrow B_2(0)$ en la que

$$\frac{\delta^2}{4}(x^{-1} \circ f)(x) = - \sum_{i=1}^k x_i^2 + \sum_{i=k+1}^n x_i^2.$$

Podemos cambiar f por $(\delta^2/4)f$ y así obtenemos de nuevo la relación

$$(x^{-1} \circ f)(x) = - \sum_{i=1}^k x_i^2 + \sum_{i=k+1}^n x_i^2.$$

Más aún, podemos tomar un difeomorfismo $B_2(\delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ que sea la identidad en $B_1(\delta)$, y al componerlo con la carta obtenemos una carta $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ que cumple la relación anterior para puntos $q \in U$ tales que $\|x(q)\| < 1$. Consideramos la parametrización inversa: $\phi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow U \subset V$, que cumple la relación

$$f(\phi(x, y)) = - \sum_{i=1}^k x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-k} y_i^2 = -\|x\|^2 + \|y\|^2, \quad \text{para } \|x\|^2 + \|y\|^2 < 1.$$

Tomemos $0 < \epsilon < 1/3$ tal que $[-\epsilon, \epsilon]$ no contenga ningún valor crítico de f aparte de 0. Sea $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que:⁴

1. $\mu(0) > \epsilon$ y es constante en un entorno de 0,
2. $\mu(t) = 0$ para $t \geq 2\epsilon$,
3. $-1 < \mu'(t) \leq 0$ para todo t .

Sea $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(q) = \begin{cases} f(q) & \text{si } q \in V \setminus U, \\ f(q) - \mu(\|x\|^2 + 2\|y\|^2) & \text{si } q = \phi(x, y) \text{ con } (x, y) \in B_1(0). \end{cases}$$

Observemos que la segunda definición coincide con la primera si $\|(x, y)\| \geq 2\epsilon$, luego F es diferenciable. A partir de aquí dividimos la prueba en varios pasos:

1. F es una función de Morse con los mismos puntos críticos de f y todos ellos del mismo índice.

Basta ver que el punto p es el único punto crítico de F en U y que tiene índice k .

⁴Basta definir $\mu(t) = g(2\epsilon) - \int_0^t g(s) ds$, donde $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ toma el valor $1 - \epsilon/4$ en $[\epsilon/4, 7\epsilon/4]$ y el valor 0 fuera de $[\epsilon/8, 2\epsilon]$.

Es claro que $\phi(x, y)$ será un punto crítico de F si y sólo si (x, y) lo es de la función $\tilde{F} = \phi \circ F : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{F}(x, y) = -\|x\|^2 + \|y\|^2 - \mu(\|x\|^2 + 2\|y\|^2)$$

tiene a 0 como único punto crítico y que éste tiene orden k . Ahora bien,

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{F} &= 2(-x, y) - 2\mu'(\|x\|^2 + 2\|y\|^2)(x, 2y) \\ &= 2(-(1 + \mu'(\|x\|^2 + 2\|y\|^2))x, (1 - 2\mu'(\|x\|^2 + 2\|y\|^2))y) \end{aligned}$$

y, teniendo en cuenta que $-1 < \mu' \leq 0$, vemos que $\nabla \tilde{F}$ sólo se anula en el punto $(0, 0)$, luego p es el único punto crítico de F en U . Como $F - f$ es constante en un entorno de p , es claro que se trata de un punto crítico no degenerado de índice k .

Usaremos la notación V_r^* para referirnos a los subconjuntos de V definidos por F en lugar de f .

2. $V_\epsilon = V_\epsilon^*$.

Es evidente que $F \leq f$, luego $V_\epsilon \subset V_\epsilon^*$. Recíprocamente, si se cumple $F(q) \leq \epsilon$, o bien $q \in V \setminus U$, en cuyo caso $f(q) = F(q) \leq \epsilon$, o bien $q = \phi(x, y)$, con $f(q) - \mu(\|x\|^2 + 2\|y\|^2) \leq \epsilon$.

Si $\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \geq 2\epsilon$, tenemos de nuevo que $F(q) = f(q) \leq \epsilon$, mientras que si $\|x\|^2 + 2\|y\|^2 < 2\epsilon$, entonces

$$f(q) = -\|x\|^2 + \|y\|^2 \leq \frac{\|x\|^2 + 2\|y\|^2}{2} \leq \epsilon.$$

3. $V_{-\epsilon}^* \cong V_{-\epsilon}$.

En $F^{-1}[[-\epsilon, \epsilon]]$ no hay puntos críticos de F (luego de f), pues si q fuera uno, no puede ser $q \in V \setminus U$, pues entonces $F(q) = f(q) \in [-\epsilon, \epsilon]$, luego $F(q) = 0$ (pues no hay más valores singulares de f en dicho intervalo), pero eso implica que $q = p$, contradicción. La alternativa es que $q \in U$, lo que de nuevo nos lleva a que $q = p$, pero entonces $F(q) = f(p) = -\mu(0) < -\epsilon$, y de nuevo tenemos una contradicción.

El teorema 10.15 nos da que $V_{-\epsilon}^*$ es difeomorfo a $V_\epsilon^* = V_\epsilon$.

Así pues, basta demostrar que la variedad $V_{-\epsilon}^*$ se obtiene adjuntando un asa de índice k a $V_{-\epsilon}$. Vamos a ver que $V_{-\epsilon}^* \cap U$ se obtiene adjuntando un asa de índice k a $V_{-\epsilon} \cap U$, y al terminar la prueba razonaremos que lo mismo vale para las variedades $V_{-\epsilon}^*$ y $V_{-\epsilon}$.

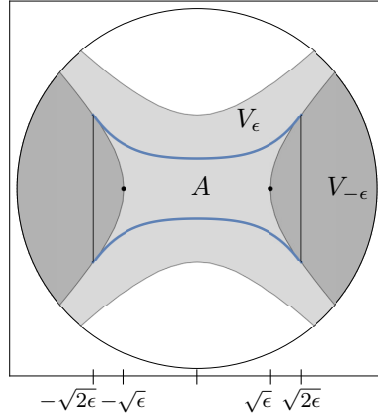
Así podemos cambiar V por $B_1(0)$ y f y F por $\phi \circ f$ y $\phi \circ F$, respectivamente, con lo que, a partir de ahora,

$$f(x, y) = -\|x\|^2 + \|y\|^2, \quad F(x, y) = -\|x\|^2 + \|y\|^2 - \mu(\|x\|^2 + 2\|y\|^2).$$

En este punto es fácil comprobar los casos $k = 0$ y $k = n$, pues si $k = 0$ tenemos que $V_{-\epsilon} = \emptyset$ y V_ϵ es una bola cerrada, mientras que si $k = n$ entonces $V_{-\epsilon}$ es una corona esférica y V_ϵ es $B_1(0)$, y en ambos casos V_ϵ resulta de adjuntar un asa a $V_{-\epsilon}$, es decir, o bien de sumar topológicamente una bola cerrada, o bien de tapar un agujero esférico. Más aún, es claro que en estos casos lo mismo vale para las variedades originales. Por lo tanto, podemos descartar estos dos casos extremos.

La figura representa el caso $n = 2, k = 1$. La zona sombreada total es V_ϵ , mientras que la zona sombreada más oscura es $V_{-\epsilon}$. Probaremos que $V_{-\epsilon}^*$ es la unión de $V_{-\epsilon}$ y un asa A como la que se muestra.

La misma figura ilustra también el caso $n = 3, k = 1$ si entendemos que representa una sección de $B_1(0)$, de modo que los espacios correspondientes son los que resultan de hacerla girar sobre el eje X . Así, $V_{-\epsilon}$ consta de dos “montañas” laterales, V_ϵ es un tubo estrechado por su centro y el asa es otro tubo que une las dos montañas.



También podemos visualizar con ella el caso correspondiente a $n = 3, k = 2$ si hacemos girar la figura sobre el eje Y , de modo que $V_{-\epsilon}$ es un toro y el asa es un tubo que tapa su agujero.

4. Si $x \in \mathbb{R}^k$, entonces

$$V_{-\epsilon}^* \cap (\{x\} \times \mathbb{R}^{n-k}) = \{x\} \times \overline{B}_{r(\|x\|^2)}^{n-k}(0),$$

para cierta función diferenciable $r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que, para $u \geq 2\epsilon$, cumple $r(u) = \sqrt{u - \epsilon}$. En particular $V_{-\epsilon}^* = V_{-\epsilon} \cup A$, donde

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 < 2\epsilon, \|y\|^2 \leq r(\|x\|^2)^2\}.$$

La intersección $V_{-\epsilon}^* \cap (\{x\} \times \mathbb{R}^{n-k})$ está formada por los puntos (x, y) tales que

$$-\|x\|^2 + \|y\|^2 - \mu(\|x\|^2 + 2\|y\|^2) \leq -\epsilon.$$

Si llamamos $t = \|x\|^2 + 2\|y\|^2$, esto equivale a

$$\mu(t) - \frac{t}{2} + \frac{3}{2}\|x\|^2 \geq \epsilon.$$

La función $\mu(t) - t/2$ es estrictamente decreciente y en 0 es $> \epsilon$, luego hay un único $t_0 > 0$ para el que la igualdad anterior es una igualdad, y la desigualdad se cumple si y sólo si $\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \leq t_0$ o, equivalentemente, si y sólo si $\|y\|^2 \leq (t_0 - \|x\|^2)/2$.

Más concretamente, t_0 está definido por la ecuación

$$\mu(t) - \frac{t}{2} + \frac{3}{2}u = \epsilon,$$

donde $u = \|x\|^2$. El teorema de la función implícita nos da una función diferenciable $t :]-2\epsilon/3, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\mu(t(u)) - t(u)/2 + 3u/2 = \epsilon$ y $t_0 = t(\|x\|^2)$.

Como $\mu'(t) > -1$, la función $\mu(t) + t$ es creciente, luego si $t \geq 0$, se cumple que $\mu(t) + t \geq \mu(0) > \epsilon$. Por lo tanto

$$\epsilon = \mu(t(u)) - \frac{t(u)}{2} + \frac{3}{2}u = \mu(t(u)) + t(u) - \frac{3}{2}(t(u) - u) > \epsilon - \frac{3}{2}(t(u) - u),$$

luego $t(u) > u$. Definimos $r(u) = \sqrt{(t(u) - u)/2}$. De este modo, la condición $\|y\|^2 \leq (t_0 - \|x\|^2)/2$ se expresa en la forma $\|y\|^2 \leq r(\|x\|^2)^2$.

Si $u \geq 2\epsilon$, entonces $t(u)$ está definido por

$$\mu(t(u)) - t(u)/2 = \epsilon - 3u/2,$$

y esto lo cumple $t(u) = 3u - 2\epsilon \geq 4\epsilon$, pues entonces $\mu(t(u)) = 0$ y la expresión de $r(u)$ se reduce a la del enunciado.

Para la última parte del enunciado basta observar que, trivialmente, se cumple $V_{-\epsilon} \cup A \subset V_{-\epsilon}^*$, y que si $(x, y) \in V_{-\epsilon}^*$ cumple $\|x\|^2 \geq 2\epsilon$, entonces $\|y\|^2 \leq r(\|x\|^2)^2 = \|x\|^2 - \epsilon$, de donde

$$f(x, y) = -\|x\|^2 + \|y\|^2 \leq -\epsilon,$$

luego $(x, y) \in V_{-\epsilon}$.

Veamos finalmente que $V_{-\epsilon}^*$ se obtiene de $V_{-\epsilon}$ adjuntando un asa de índice k .

Para ello consideramos $T_k = B^n \setminus (\{0\} \times B^{n-k})$ y

$$T' = \{(x, y) \in V_{-\epsilon} \mid \|x\|^2 < 2\epsilon\},$$

así como el marco $h : T_k \rightarrow T'$ dado por⁵

$$h(x, y) = \sqrt{\epsilon} \left(\frac{\sqrt{2 - \|x\|^2}}{\|x\|} x, y \right),$$

cuyo inverso es

$$h^{-1}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left(\frac{\sqrt{2\epsilon - \|x\|^2}}{\|x\|} x, y \right).$$

La esfera base de este marco es

$$S = h[S^{k-1} \times \{0\}] = \{(x, 0) \in B^n \mid \|x\|^2 = \epsilon\}.$$

La adjunción V^* de un asa a través del marco h es el cociente de

$$V_0 = (V_{-\epsilon} \setminus S) \oplus (B_1(0) \times B^{n-k})$$

⁵Es fácil ver que si $k = 1$ el marco es amplio.

que identifica cada punto del abierto

$$U = \{(x, y) \in V_{-\epsilon} \mid \epsilon < \|x\|^2 < 2\epsilon\}$$

con un punto del abierto

$$U_k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \frac{1}{2} < \|x\|^2 < 1\} \times B^{n-k} \subset A_k$$

mediante el difeomorfismo $\phi = h^{-1} \circ \alpha$. Explícitamente,

$$\phi(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\epsilon}} x, \frac{1}{\sqrt{\|x\|^2 - \epsilon}} y \right).$$

Ahora definimos $g_1 : V_{-\epsilon} \setminus S \rightarrow V_{-\epsilon}^*$ mediante

$$g_1(x, y) = \left(x, \frac{r(\|x\|^2)}{\sqrt{\|x\|^2 - \epsilon}} y \right).$$

Claramente es un difeomorfismo en su imagen, que es el abierto

$$U_1^* = \{(x, y) \in V_{-\epsilon}^* \mid \|x\|^2 > \epsilon\}.$$

Además se restringe a la identidad fuera del cerrado

$$C = \{(x, y) \in V_{-\epsilon} \mid \|x\|^2 \geq 3\epsilon\}.$$

Por otra parte, definimos $g_2 : A_k = B_1(0) \times B^{n-1} \rightarrow V_{-\epsilon}^*$ mediante

$$g_2(x, y) = (\sqrt{2\epsilon} x, r(2\epsilon\|x\|^2) y),$$

que es un difeomorfismo en el abierto

$$U_2^* = \{(x, y) \in V_{-\epsilon}^* \mid \|x\|^2 < 2\epsilon\}.$$

Así g_1 y g_2 definen una aplicación diferenciable $g_0 : V_0 \rightarrow V_{-\epsilon}^*$, claramente suprayectiva. Es fácil ver que $g_1|_U = \phi \circ g_2$, por lo que g_0 induce una aplicación diferenciable $g : V^* \rightarrow V_{-\epsilon}^*$, claramente biyectiva.

Teniendo en cuenta que la proyección $\pi : V_0 \rightarrow V^*$ es un difeomorfismo local, es claro que g se restringe a dos difeomorfismos sobre los abiertos $\pi[V_{-\epsilon} \setminus S]$ y $\pi[A_k]$ de V_0 en sus imágenes (abiertas) en $V_{-\epsilon}^*$, luego g es un difeomorfismo.

Volviendo a la notación original, lo que hemos construido es una aplicación diferenciable suprayectiva

$$g_0 : ((V_{-\epsilon} \cap U) \setminus S) \oplus A_k \rightarrow V_{-\epsilon}^* \cap U$$

que induce un difeomorfismo en el cociente que constituye la adjunción del asa a $V_{-\epsilon}$, pero el hecho de que g_0 sea la identidad fuera del cerrado $\phi[C]$ se traduce en que podemos extenderlo a una aplicación diferenciable

$$g_0 : (V_{-\epsilon} \setminus S) \oplus A_k \rightarrow V_{-\epsilon}^*$$

que es la identidad en el abierto $V_{-\epsilon} \setminus \phi[C]$, y sigue induciendo un difeomorfismo del cociente en $V_{-\epsilon}^*$. ■

Nota En la prueba del teorema anterior sólo se usa la compacidad de V a la hora de aplicar el teorema 10.15 a $F[[-\epsilon, \epsilon]]$, lo cual requiere que esta variedad sea compacta, pero esto se cumple aunque V no sea compacta si suponemos que la función de Morse dada f tiende a $+\infty$ en ∞ , es decir, si para cada $s \in \mathbb{R}$ existe un compacto $K \subset V$ tal que si $x \in V \setminus K$ entonces $f(x) > s$. Esto hace que los conjuntos $V_{r_s} \subset V_s \subset K$ sean compactos y, como la función F construida en la prueba coincide con f fuera de un compacto, lo mismo vale para los conjuntos $V_{r_s}^*$ o V_s^* definidos con F . ■

A partir de los teoremas 10.15 y 10.16 concluimos:

Teorema 10.17 *Si V es una variedad compacta sin frontera de dimensión n , existe una sucesión $V_0, \dots, V_m = V$ de variedades diferenciales compactas tales que $V_0 = B^n$ y cada V_i es difeomorfa a la adjunción de un asa a V_{i-1} .*

En efecto, basta considerar una función de Morse en V con valores singulares $r_0 < \dots < r_m$ y tomar $V_i = V_{r_i + \epsilon}$, donde $\epsilon > 0$ se toma de modo que cumpla $r_i + \epsilon < r_{i+1}$ para todo $i < m$. El teorema 10.14 nos da que $V_{r_0 + \epsilon} \cong B^2$.

Una sucesión de variedades en las condiciones del teorema anterior se llama una *descomposición en asas* de la variedad V . En la sección siguiente tendremos ocasión de estudiar muchos ejemplos concretos.

10.3 El teorema de clasificación

Pasamos ya a demostrar el teorema 10.2. En la introducción de este capítulo hemos probado la unicidad, y sólo falta demostrar que toda superficie compacta es de alguno de los tipos $M_{g,k}$ o $N_{h,k}$.

Aunque hemos definido las superficies diferenciales como variedades conexas, como la prueba del teorema de clasificación requiere tratar con variedades disconexas, convendremos que, en esta sección, cuando hablemos de superficies diferenciales no supondremos que son conexas.

Recordemos algunos resultados que conocemos sobre superficies diferenciales:

1. Por [TA 1.25] sabemos que toda curva diferencial compacta es difeomorfa a S^1 , luego si V es una superficie diferencial compacta sabemos que ∂V es unión de un número finito de componentes conexas difeomorfas a S^1 .
2. El teorema 9.30 nos dice que el proceso de tapar un agujero de una superficie diferencial está unívocamente determinado salvo difeomorfismo, por lo que, si V es una superficie compacta, podemos llamar \hat{V} a la superficie sin frontera que resulta de tapar todos sus agujeros. Otra consecuencia es que si a una variedad V le eliminamos un disco abierto y luego tapamos el agujero producido obtenemos una variedad difeomorfa a V .

3. Como consecuencia del teorema del disco (véase la segunda observación tras el teorema 9.40), si eliminamos un disco abierto de una superficie V , la variedad resultante no depende, salvo difeomorfismo, del disco eliminado, por lo que podemos hablar de “la variedad que resulta de abrir un agujero, o k agujeros, en la variedad V ”, sin que importe la elección de los discos eliminados.
4. La unicidad del tapado de agujeros permite determinar salvo isomorfismo la superficie resultante razonando a la inversa. Por ejemplo, al estudiar la cinta de Möbius vimos que si a un plano proyectivo le quitamos un (cierto) disco obtenemos una cinta de Möbius, lo que se traduce en que al tapar el (único) agujero de una cinta de Möbius obtenemos un plano proyectivo.

En términos de los tipos de variedades que hemos definido para enunciar el teorema de clasificación, esto significa que las cintas de Möbius son las superficies de tipo $N_{1,1}$.

Similarmente se justifica que al tapar los dos agujeros de un cilindro $I \times S^2$ se obtiene una esfera S^2 . Basta observar que si a S^2 le quitamos los casquetes $z > 1/2$ y $z < -1/2$ la superficie resultante es claramente difeomorfa a $I \times S^2$, luego, recíprocamente, al tapar los agujeros del cilindro se obtiene la esfera. Equivalentemente, los cilindros son las superficies de tipo $M_{0,2}$. También es claro que las de tipo $M_{0,1}$ son las superficies difeomorfas a B^2 .

Para relacionar las descomposiciones en asas con las sumas conexas que definen los tipos de superficies diferenciales nos apoyaremos en el teorema siguiente:

Teorema 10.18 *Sea V una superficie, sea C una componente conexa compacta de ∂V y sea V' la superficie que resulta de tapar en V el agujero C . Entonces V es difeomorfa a $V' \# B^2$.*

DEMOSTRACIÓN: En principio, V' sólo está definida salvo difeomorfismo, pero podemos considerar, más concretamente, que V' es la adjunción a V de un asa de índice 2. Para ello, de acuerdo con la nota siguiente al teorema 9.22, tomamos un difeomorfismo $\psi_1 : S^1 \rightarrow C$ y un collar $h : I \times C \rightarrow V$, y consideramos el marco $f : T_2 \rightarrow V$ dado por

$$f(x) = h(1 - \|x\|, \psi_1(x/\|x\|)).$$

De acuerdo con la discusión previa al teorema 9.22 podemos considerar a V como subvariedad de V' , y tenemos una inmersión regular $\iota_2 : A_2 \rightarrow V'$ que, compuesta con la homotecia de razón $1/\sqrt{2}$, nos da una inmersión regular

$$\iota_2 : B \rightarrow V',$$

donde $B = B_{\sqrt{2}}(0)$, tal que $\iota_2[S^1] = C$.

Por simplificar la notación, vamos a calcular la suma topológica $B^2 \# V'$ tomando como B^2 la bola \bar{B} , con lo que podemos considerar las inmersiones regulares

$$f_1 : B^2 \rightarrow B, \quad f_2 : B^2 \rightarrow V'$$

dadas por la inclusión y $\iota_2|_{B^2}$, respectivamente.

Así, la proyección

$$\pi : (\bar{B} \setminus \{0\}) \oplus (V' \setminus \{f_2(0)\}) \longrightarrow \bar{B} \# V'$$

identifica los abiertos $U_1 = B_1(0) \setminus \{0\}$ y $U_2 = f_2[U_1] \subset V' \setminus \{f_2(0)\}$ en un mismo abierto U de $\bar{B} \# V'$. Concretamente, cada $x \in U_1$ se identifica con $f_2(\eta(x)) \in U_2$, donde

$$\eta : B_1(0) \setminus \{0\} \longrightarrow B_1(0) \setminus \{0\}$$

es el difeomorfismo dado por

$$\eta(x) = \frac{\sqrt{1 - \|x\|^2}}{\|x\|} x.$$

Este solapamiento es necesario para definir la estructura diferencial de la suma conexas, pero puede reducirse al mínimo eliminando los abiertos $U_0 = B_{1/\sqrt{2}}(0)$ y $f_2[U_0]$. En efecto, notemos que η fija a los puntos de norma $1/\sqrt{2}$ (es decir, a los puntos de $C_1 = \partial U_0$) y transforma U_0 en $B^2 \setminus \bar{U}_0$, por lo que la restricción de π al cerrado $(\bar{B} \setminus U_0) \cup (V' \setminus f_2[U_0])$ sigue siendo suprayectiva, y ahora sólo identifica cada punto $x \in C_1$ con $f_2(x) \in C_2 = f_2[C_1]$, de modo que ambas circunferencias se corresponden con una misma circunferencia $C_0 = \pi[C_1] = \pi[C_2]$. Consideramos los difeomorfismos

$$[1/\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times S^1 \longrightarrow \bar{B} \setminus U_0, \quad [1/\sqrt{2}, \sqrt{2}[\times S^1 \longrightarrow B \setminus U_0$$

dados por $(t, x) \mapsto tx$. Al componer el primero con π y el segundo con $\iota_2 \circ \pi$ obtenemos inmersiones regulares

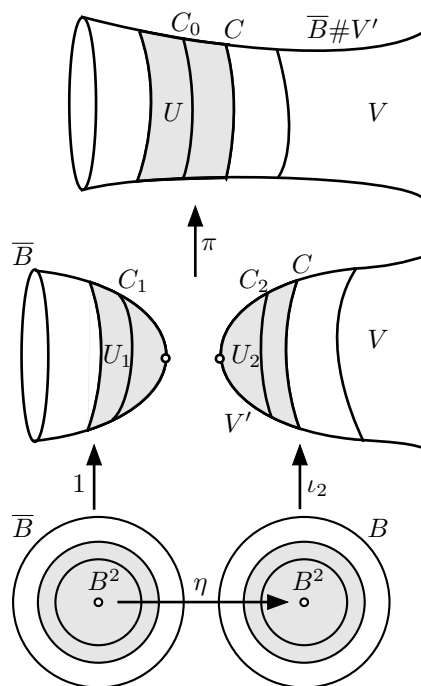
$$\phi_1 : [1/\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times S^1 \longrightarrow \bar{B} \# V', \quad \phi_2 : [1/\sqrt{2}, \sqrt{2}[\times S^1 \longrightarrow \bar{B} \# V'$$

tales que

$$\phi_1(1/\sqrt{2}, u) = \pi(1/\sqrt{2} u) = \pi(f_2(1/\sqrt{2} u)) = \phi_2(1/\sqrt{2}, u),$$

mientras que las imágenes de $]1/\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times S^1$ y $]1/\sqrt{2}, \sqrt{2}[\times S^1$ son disjuntas. (En la figura, la imagen de ϕ_1 está formada por los puntos a la izquierda de C_0 , mientras que la imagen de ϕ_2 está formada por los puntos a la derecha de C_0 , hasta la última circunferencia señalada, que marca la frontera de $\iota_2[B]$.) Modificando ϕ_1 con un difeomorfismo decreciente $[0, 1/\sqrt{2}] \longrightarrow [1/\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times S^1$ podemos suponer que

$$\phi_1 : [0, 1/\sqrt{2}] \times S^1 \longrightarrow \bar{B} \# V',$$



y así ϕ_1 y ϕ_2 coinciden en su dominio común. Por lo tanto definen un homeomorfismo

$$\phi : [0, \sqrt{2}[\times S^1 \longrightarrow \pi[\bar{B}] \cup \iota_2[B],$$

que, por el teorema 9.13, puede modificarse en un entorno arbitrariamente pequeño de $\{1/\sqrt{2}\} \times S^1$ para convertirlo en un difeomorfismo. Notemos además que $\phi[\{1\} \times S^1] = \iota_2[S^1] = C$. Por último, considerando un difeomorfismo $[0, \sqrt{2}[\longrightarrow [1, \sqrt{2}[$ que sea la identidad en un entorno de $\sqrt{2}$, obtenemos un difeomorfismo

$$\pi[\bar{B}] \cup \iota_2[B] \longrightarrow \iota_2[B \setminus B_1(0)]$$

que se extiende a un difeomorfismo $\bar{B}\#V' \longrightarrow V$. ■

El mismo argumento empleado en la prueba del teorema anterior muestra que para calcular una suma conexa $V\#S^2$ podemos reducir el solapamiento al mínimo, de modo que la suma conexa se obtiene quitando un disco abierto a V y otro a S^2 (y en este caso queda un disco cerrado B^2) e identificando las variedades resultantes por cierto difeomorfismo entre las fronteras de los discos eliminados, pero esto equivale a haber abierto un agujero en V luego haberlo vuelto a cerrar. Por lo tanto:

Teorema 10.19 *Si V es una superficie diferencial, se cumple que $V\#S^2 \cong V$.*

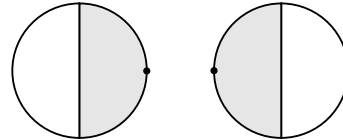
Seguidamente demostramos algunos resultados particulares sobre adjunciones de asas:

Teorema 10.20 *Sea $V_0 = B^2 \oplus B^2$ y V una superficie resultante de adjuntar a V_0 un asa de índice 1 que conecte las fronteras de sus dos componentes conexas. Entonces V es difeomorfa a B^2 .*

DEMOSTRACIÓN: El teorema 9.46 nos da que al adjuntar un asa a dos discos uniendo sus fronteras pueden obtenerse a lo sumo dos variedades distintas. Vamos a ver que en realidad sólo hay una posibilidad.

Para ello tomemos concretamente

$$V_0 = \bar{B}_1(0, 0) \cup \bar{B}_1(2, 0)$$



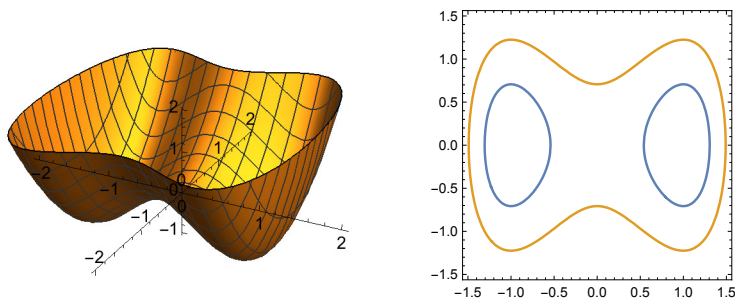
y fijemos los abiertos coordenados sombreados en la figura. Un marco $f : T_1 \longrightarrow V_0$

para un asa de índice 1 es el dado por la identidad en T_1^+ y por la traslación $(x, y) \mapsto (x + 2, y)$ en T_1^- . El teorema 9.46 afirma que cualquier espacio que resulte de adjuntar un asa de índice 1 a V_0 conectando las fronteras de sus dos componentes conexas es difeomorfo al que resulta de adjuntarlas con el marco f o con f^{+-} . Ahora bien, es fácil ver que el difeomorfismo $g : V_0 \longrightarrow V_0$ dado por $g(x, y) = (x, -y)$ para $x \in \bar{B}_1(0, 0)$ y $g(x, y) = (x, y)$ para $x \in \bar{B}_1(2, 0)$ induce un difeomorfismo entre las adjunciones del asa mediante f y f^{+-} , luego todas las adjunciones de asas (que conecten los dos discos) son difeomorfas. Por consiguiente, basta encontrar una adjunción en concreto que sea difeomorfa a B^2 .

Para ello observamos que, en virtud de la nota posterior al teorema 10.16, éste es aplicable a la función de Morse $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ considerada en el ejemplo que sigue a la definición 10.12, es decir, a la función

$$f(x, y) = y^2 + x^4 - 2x^2,$$

a pesar de que \mathbb{R}^2 no es compacto, pues es claro que f tiende a $+\infty$ en ∞ .



Los valores singulares de f son -1 y 0 . La figura de la izquierda muestra la gráfica de la función f , mientras que la figura de la derecha muestra las variedades $\mathbb{R}_{-0.5}^2$ y $\mathbb{R}_{0.5}^2$. El teorema 10.14 (cuya prueba vale para f sustituyendo también la compacidad de V por el hecho de que f tiende a $+\infty$ en ∞) implica que $\mathbb{R}_{-0.5}^2 \cong B^2 \oplus B^2$ y no es difícil comprobar que $\mathbb{R}_{0.5}^2 \cong B^2$. Por el teorema 10.16 concluimos que B^2 se obtiene adjuntando un asa de índice 1 a V_0 , la cual necesariamente une las fronteras de ambas componentes conexas, pues en caso contrario la adjunción seguiría siendo desconexa. ■

Esto nos proporciona una demostración sencilla de un hecho intuitivamente evidente:

Teorema 10.21 *Si V es una superficie cuya frontera ∂V tiene dos componentes conexas C_1 y C_2 , cualquier variedad V^* que se obtenga adjuntando a V un asa de índice 1 que las conecte tiene frontera conexa.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 10.18 tenemos que $V \cong B_1 \# \hat{V} \# B_2$, donde B_1 y B_2 son dos discos cerrados. Por 9.46 podemos elegir en qué zona de V situamos el marco para la adjunción del asa, y, concretamente, podemos situarlo con una componente conexa de su imagen en B_1 y otra en B_2 , ambas disjuntas de los discos usados para calcular las sumas conexas. Entonces, V^* puede obtenerse adjuntando el asa a $B_1 \oplus B_2$ y luego realizando los dos cocientes que determinan la suma conexa con \hat{V} . Pero, por el teorema anterior, al adjuntar el asa a $B_1 \oplus B_2$ obtenemos un disco, cuya frontera (que es conexa) será también la frontera de la suma conexa. ■

Teorema 10.22 *Toda superficie resultante de adjuntar un asa de índice 1 a un disco B^2 es difeomorfa al cilindro $M_{0,2}$ o bien a la cinta de Möbius $N_{1,1}$.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos el toro T del segundo ejemplo tras la definición 10.12 y la función de Morse dada por la coordenada x . Sus valores críticos

son $-3, -1, 1, 3$. Es fácil probar que T_{-2} es difeomorfo a B^2 , mientras que $T_{-1/2}$ es difeomorfo al cilindro $I \times S^2$. El teorema 10.16 nos da entonces que el cilindro se obtiene de B^2 por la adjunción de un asa de índice 1.

Por otra parte, en el ejemplo siguiente al del toro hemos construido una función de Morse en $V = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con valores críticos $a < b < c$ y con tres únicos puntos críticos p_1, p_2, p_3 de índices 0, 1, 2, respectivamente. Podemos particularizar al caso en que, por ejemplo, $a = 0, b = 2, c = 4$.

Es fácil ver que $V_1 \cong B^2$. A su vez, V_3 es una variedad que resulta de adjuntar un asa de índice 1 a B^2 , mientras que $V_5 = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ resulta de adjuntar a V_3 un asa de índice 2, es decir, de tapar un agujero circular. Esto significa que V_3 es de tipo $N_{1,1}$.

Como, por el teorema 9.46, al adjuntar un asa de índice 1 a B^2 podemos obtener a lo sumo dos variedades salvo difeomorfismo y ya hemos obtenido dos, concluimos que no hay más posibilidades. ■

Teorema 10.23 *Toda superficie que resulta de adjuntar un asa de índice 1 a una cinta de Möbius es de tipo $N_{1,2}$ o $N_{2,1}$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea M una cinta de Möbius, de modo que $\hat{M} \cong \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ y, por el teorema 10.18, podemos expresar $M \cong \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# B^2$. Podemos realizar la adjunción del asa con un marco con imagen en B^2 disjunta del disco que se elimina para formar la suma conexa, y entonces la adjunción del asa a M es $M^* \cong \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# B^*$, donde B^* es la adjunción del asa a B^2 . Por el teorema anterior, B^* es de tipo $M_{0,2}$ o $N_{1,1}$. En el primer caso M^* se convierte en $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# S^2 \cong \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ al tapar los dos agujeros de B^* , luego M^* es de tipo $N_{1,2}$. En el segundo caso M^* se convierte en $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ al tapar el único agujero de B^* , luego es de tipo $N_{2,1}$. ■

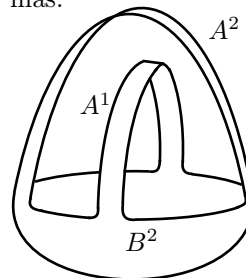
Teorema 10.24 *Al adjuntar un asa de índice 1 a un cilindro $M_{0,2}$ podemos obtener una superficie de tipo $M_{0,3}$ o $N_{1,2}$ si el asa conecta dos puntos de la misma componente conexa de la frontera del cilindro, o de tipo $M_{1,1}$ o $N_{2,1}$ si el asa conecta las dos componentes conexas de la frontera.*

DEMOSTRACIÓN: Sea V una superficie de tipo $M_{0,2}$, que, en virtud del teorema 10.18, podemos expresar como $V = B_1 \# S^2 \# B_2$, donde B_1 y B_2 son dos discos cerrados. Si adjuntamos un asa conectando puntos de una única componente conexa de ∂V , llegaremos al mismo resultado si se la adjuntamos a B_1 con un marco disjunto del disco con el que se realiza la suma conexa. Por el teorema 10.22, al adjuntar el asa a B_1 obtenemos una superficie de tipo $M_{0,2}$ o $N_{1,1}$. Si V^* es el resultado de la adjunción, en el primer caso tiene tres agujeros (los dos de $M_{0,2}$ y el de B_2) y al taparlos obtenemos $S^2 \# S^2 \# S^2 \cong S^2$, luego V^* es de tipo $M_{0,3}$. En el segundo caso, V^* tiene dos agujeros y, al taparlos, obtenemos $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# S^2 \# S^2 \cong \mathbb{R}^2(\mathbb{R})$, luego V^* es de tipo $N_{1,2}$.

Consideremos ahora el caso en que el asa adjuntada conecte las dos componentes conexas de V . Por el teorema 9.46 sólo hay dos resultados posibles.

Uno nos lo muestra el toro del segundo ejemplo tras la definición 10.12. Claramente T_0 es un cilindro, mientras que T_2 es una variedad que se convierte en el toro T_4 cuando se le tapa su único agujero, luego es de tipo $M_{1,1}$ y T_2 se obtiene de T_0 adjuntando un asa de índice 1 (y une dos componentes conexas de la frontera, porque si no, estaríamos en el caso anterior y no llegaríamos a un toro). Por lo tanto, una posibilidad es que al adjuntar un asa a un cilindro obtengamos una variedad de tipo $M_{1,1}$. Vamos a encontrar otra posibilidad y, una vez más por el teorema 9.46, tendremos que no hay más.

Para ello nos apoyamos en que el cilindro V de partida puede verse a su vez como la adjunción de un asa a un disco. La figura muestra un disco B^2 y el asa A^1 que lo convierte en el cilindro V . El teorema 9.46 nos dice que podemos elegir dónde adjuntamos a V el asa A^2 (con la única restricción de que queremos que conecte las dos componentes conexas de ∂V). Simplemente tomamos la precaución de elegir para ella un marco cuya imagen esté contenida en el disco de partida y sea disjunta de la imagen del marco del asa A^1 . Además, lo elegimos para que la adjunción de A^2 al disco B^2 (sin adjuntarle el asa A^1) sea difeomorfo a una banda de Möbius y no a un cilindro.



Ahora observamos que la superficie que se obtiene adjuntando primero A^1 y luego A^2 es difeomorfa a la que se obtiene adjuntándolas en orden inverso, porque ambas son difeomorfas al cociente que resulta de adjuntarlas simultáneamente. Así pues, la adjunción V^* de A^2 a V se puede obtener adjuntando primero A^2 al disco, con lo que obtenemos una cinta de Möbius M , seguida de la adjunción a M de A^1 .

El teorema anterior nos da entonces que V^* es de tipo $N_{1,2}$ o $N_{2,1}$, pero en realidad el caso $N_{1,2}$ no es posible en este caso, pues supondría que ∂V^* tendría dos componentes conexas, y no es así, en virtud del teorema 10.21. ■

El teorema siguiente generaliza a 10.23:

Teorema 10.25 *Sea V una superficie compacta con frontera conexa y sea V^* una superficie obtenida adjuntando un asa de índice 1 a V . Entonces V^* es difeomorfa a $\hat{V} \# M_{0,2}$ o a $\hat{V} \# N_{1,1}$, luego \hat{V}^* es difeomorfa a \hat{V} o a $\hat{V} \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.*

DEMOSTRACIÓN: En virtud del teorema 10.18 podemos expresar $V \cong \hat{V} \# B$, donde B es un disco cerrado, y realizamos la adjunción del asa en B , con lo que el resultado es $V^* \cong \hat{V} \# B^*$, donde B^* es el resultado de la adjunción a B que, por el teorema 10.22, es de tipo $M_{0,2}$ o $N_{1,1}$, luego al tapar los agujeros obtenemos $\hat{V}^* \cong \hat{V} \# S^2 \cong \hat{V}^*$ o bien $\hat{V}^* \cong \hat{V} \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. ■

Teorema 10.26 *Sea V una superficie compacta conexa tal que ∂V conste de dos componentes conexas y sea V^* una superficie obtenida adjuntando un asa de índice 1 que las conecte. Entonces V^* es difeomorfa a $\hat{V} \# M_{1,1}$ o a $\hat{V} \# N_{2,1}$, luego \hat{V}^* es difeomorfa a $\hat{V} \# T$ o a $\hat{V} \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, donde $T = S^1 \times S^1$ es el toro.*

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que $\hat{V} \cong \hat{V} \# S^2$, luego V es difeomorfa a la variedad que resulta de abrir dos agujeros en $\hat{V} \# S^2$ y, como podemos elegir dónde los abrimos, lo hacemos en S^2 , eliminando dos discos cuyas clausuras sean disjuntas del disco donde se realiza la suma conexa. Sea W la variedad (de tipo $M_{0,2}$) que resulta de abrir dichos agujeros en S^2 . Por el teorema 10.24, el resultado W^* puede ser de tipo $M_{1,1}$ o $N_{2,1}$, luego al tapar los agujeros obtenemos un toro o un plano proyectivo. ■

Teorema 10.27 Sean V_1 y V_2 dos superficies compactas con fronteras conexas y sea V^* una superficie obtenida adjuntando un asa de índice 1 a $V_1 \oplus V_2$ que conecte las dos componentes conexas de su frontera. Entonces $\hat{V}^* \cong \hat{V}_1 \# \hat{V}_2$.

DEMOSTRACIÓN: Expresamos $V_i \cong \hat{V}_i \# B_i$, donde B_1 y B_2 son discos cerrados. Podemos adjuntar el asa a estos discos, lo que, según 10.20 da lugar a otro disco B , luego $V^* \cong \hat{V}_1 \# B \# \hat{V}_2$, luego al tapar el agujero queda $\hat{V}^* \cong \hat{V}_1 \# S^2 \# \hat{V}_2 \cong \hat{V}_1 \# \hat{V}_2$. ■

Con esto ya podemos demostrar una versión débil del teorema de clasificación:

Teorema 10.28 Toda superficie compacta, conexa y sin frontera es difeomorfa a la esfera S^2 , al toro $S^1 \times S^1$, al plano proyectivo $P^2(\mathbb{R})$ o a una suma conexa de un número finito de variedades difeomorfas a las dos últimas.

DEMOSTRACIÓN: Sea \mathcal{C} la clase de todas las superficies diferenciales indicadas en el enunciado y $\bar{\mathcal{C}}$ la clase de todas las superficies diferenciales V tales que las componentes conexas de \hat{V} están en \mathcal{C} . Basta probar que toda superficie compacta está en $\bar{\mathcal{C}}$, pues entonces, si es conexa y sin frontera, es $V = \hat{V}$ y por lo tanto es del tipo descrito en el enunciado. Observemos que una superficie está en $\bar{\mathcal{C}}$ si y sólo si lo están todas sus componentes conexas.

Por el teorema 10.17, toda superficie compacta V se obtiene a partir del disco B^2 mediante un número finito de adjunciones de asas. Se cumple que $B^2 \in \bar{\mathcal{C}}$, pues $\hat{B}^2 \cong S^2 \in \mathcal{C}$. Por lo tanto, basta probar que si $V \in \bar{\mathcal{C}}$ y V^* resulta de adjuntar un asa a V , entonces $V^* \in \bar{\mathcal{C}}$. Esto es trivial para las asas de índice 0, pues entonces $V^* = V \oplus B^2$, y los dos sumandos están en $\bar{\mathcal{C}}$, y también es inmediato para asas de índice 2, pues entonces V^* se obtiene cerrando un agujero en V , luego $\hat{V}^* = \hat{V} \in \mathcal{C}$.

Si el asa es de índice 1, podemos separar $V = V_0 \oplus V_1$, donde V_1 es la unión de las componentes conexas de V que contienen a las componentes conexas de ∂V conectadas por el asa (que pueden ser una o dos), y V_0 es la unión de las componentes conexas restantes. Así $V^* = V_0 \oplus V_1^*$ con $V_0 \in \bar{\mathcal{C}}$, y sólo hay que probar que también $V_1^* \in \bar{\mathcal{C}}$. Equivalentemente, podemos suponer que, o bien V es conexa o bien tiene dos componentes conexas conectadas por el asa.

Sea V' la superficie que resulta de tapar todos los agujeros de V distintos de los conectados por el asa. Entonces $\hat{V}' = \hat{V} \in \mathcal{C}$ y $\hat{V}^* = \hat{V}'^*$, pues es indiferente tapar antes o después de realizar la adjunción los agujeros no involucrados en ésta. Equivalentemente, podemos reemplazar V por V' y suponer que ∂V consta únicamente de las componentes conexas conectadas por el asa.

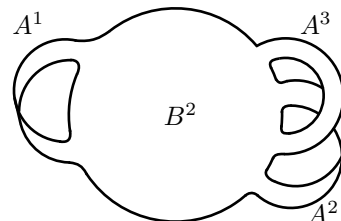
Entonces los tres teoremas precedentes cubren todos los casos posibles y prueban que $\hat{V}^* \in \bar{\mathcal{C}}$, luego $V^* \in \mathcal{C}$. ■

Para llegar al teorema de clasificación sólo nos falta un último resultado:

Teorema 10.29 *Si $T = S^1 \times S^1$, entonces*

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# T \cong \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea V la adjunción a un disco B^2 de tres asas A^1, A^2, A^3 como indica la figura. Las asas A^1 y A^2 (adjuntadas por separado) transforman el disco en una cinta de Möbius, es decir, mantienen la frontera conexa. En cambio, el asa A^3 transforma el disco en un cilindro con frontera disconexa. No obstante, al entrelazar A^2 y A^3 como indica la figura resulta que ∂V es conexa.



Podríamos definir explícitamente los marcos de las adjunciones, pero los cálculos laboriosos sólo confirmarían lo que muestra la figura, es decir, que podemos adjuntar tres asas a un disco de forma que se cumplan los hechos que acabamos de señalar. Vamos a ver que \hat{V} es difeomorfa a las dos variedades del enunciado.

En efecto, la adjunción de las tres asas puede hacerse de forma sucesiva. Si adjuntamos en primer lugar A_1 obtenemos una cinta de Möbius, es decir, una variedad de tipo $N_{1,1}$. Al adjuntar A_2 la frontera sigue siendo conexa, luego, de las dos posibilidades que permite el teorema 10.23, en este caso la variedad resultante tiene que ser de tipo $N_{2,1}$, es decir, es $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con un agujero, y es en este agujero donde adjuntamos A^3 . Podemos suponer que el agujero está en uno de los sumandos de la suma conexa y, de acuerdo con 10.25, al adjuntar el asa puede ocurrir que V sea de tipo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# M_{0,2}$ o bien $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# N_{1,1}$, pero tenemos que V tiene un único agujero, luego tiene que ser $V \cong \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# N_{1,1}$, luego $\hat{V} \cong \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Veamos lo que sucede si, después de adjuntar A^1 , pasamos a adjuntar A^3 . En tal caso la frontera de la adjunción pasa a ser disconexa, luego, de los casos que contempla el teorema 10.23, esta vez obtenemos una variedad de tipo $N_{1,2}$, es decir, un plano proyectivo con dos agujeros. El asa A^3 tiene que conectar las dos componentes conexas de dicha variedad, pues de lo contrario V tendría frontera disconexa. El teorema 10.26 nos da dos posibilidades: o bien $\hat{V} \cong \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# T$ o $\hat{V} \cong \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, pero descartamos el segundo caso, porque haría que \hat{V} tuviera a la vez tipo N_2 y N_3 , cuando sabemos que una variedad de tipo N_2 ni siquiera es homeomorfa a una de tipo N_3 . ■

DEMOSTRACIÓN (de 10.2): Basta probar que si V es una superficie diferencial compacta y conexa, entonces \hat{V} es de tipo M_g o N_h , pues eso implica que V es de tipo $M_{g,k}$ o $N_{h,k}$. Equivalentemente, se trata de probar que toda superficie compacta, conexa y sin frontera es difeomorfa a S^2 o a una suma conexa de un número finito finita de toros o de planos proyectivos. Lo que nos da 10.28

es que, si la superficie dada no es difeomorfa a S^2 , entonces es difeomorfa a una suma de un número finito de toros y planos proyectivos, pero sin excluir que aparezcan sumandos de ambos tipos. Ahora bien, si en la descomposición aparecen toros y planos proyectivos, el teorema anterior nos permite cambiar cada toro por dos planos proyectivos, y llegamos a una descomposición en la que sólo hay planos proyectivos. ■

Apéndice A

Tensores en espacios vectoriales

Recopilamos en este apéndice todos los conceptos y resultados sobre tensores en espacios vectoriales que se aplican a las variedades diferenciales a través de sus espacios tangentes.

En lo sucesivo V será siempre un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un cuerpo K (que más adelante particularizaremos al caso del cuerpo \mathbb{R} de los números reales) y V^* será su espacio dual, es decir, el espacio de todas las formas lineales $\omega : V \rightarrow K$.

Recordemos que el espacio bidual V^{**} puede identificarse con V a través del isomorfismo $V \rightarrow V^{**}$ que identifica cada vector $v \in V$ con la forma lineal $v : V^* \rightarrow K$ dada por $v(\omega) = \omega(v)$.

Si e_1, \dots, e_n es una base de V , representaremos por $e^1, \dots, e^n \in V^*$ a su base dual, es decir, la base determinada por la relación

$$e^i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Así, la forma e^i asigna a cada vector $v \in V$ su i -ésima coordenada en la base e_1, \dots, e_n , de modo que

$$v = \sum_i e^i(v)e_i.$$

Análogamente, el vector e_i (identificado con un elemento de V^{**}) asigna a cada forma $\omega \in V^*$ su i -ésima coordenada en la base e^1, \dots, e^n , de modo que

$$\omega = \sum_i e_i(\omega)e^i.$$

A.1 Tensores

Los tensores sobre un espacio vectorial V son objetos capaces de codificar una gran variedad de objetos algebraicos asociados a V :

Definición A.1 Definimos el espacio de los *tensores homogéneos* de tipo (r, s) sobre V como el espacio vectorial $\mathcal{T}_s^r(V)$ de las formas multilineales [Al 6.1]

$$V^* \times \overset{r \text{ veces}}{\cdots} \times V^* \times V \times \overset{s \text{ veces}}{\cdots} \times V \longrightarrow K$$

(con el convenio de que $\mathcal{T}_0^0(V) = K$.) Claramente $\mathcal{T}_s^r(V)$ es un espacio vectorial con las operaciones definidas puntualmente.

Los tensores homogéneos de tipo $(r, 0)$ se llaman *contravariantes*, mientras que los de tipo $(0, s)$ se llaman *covariantes*. Un tensor homogéneo de tipo (r, s) se dice que es r veces contravariante y s veces covariante.

Observemos que $\mathcal{T}_0^1(V) = V^{**}$, luego sus elementos pueden identificarse con los elementos de V . Por otra parte, $\mathcal{T}_1^0(V) = V^*$.

Ahora vamos a definir un producto de tensores que nos permitirá expresar a cada tensor como sumas de productos de elementos de V y de V^* . Concretamente, definimos

$$\otimes : \mathcal{T}_s^r(V) \times \mathcal{T}_{s'}^{r'}(V) \longrightarrow \mathcal{T}_{s+s'}^{r+r'}(V)$$

mediante

$$(F \otimes G)(\omega^1, \dots, \omega^{r+r'}, v_1, \dots, v_{s+s'}) = F(\omega^1, \dots, \omega^r, v_1, \dots, v_s) G(\omega^{r+1}, \dots, \omega^{r+r'}, v_{s+1}, \dots, v_{s+s'}).$$

Aquí hay que entender que si $r = s = 0$ entonces $a \otimes G = aG$, e igualmente si $r' = s' = 0$.

Claramente, este producto distribuye las sumas y es asociativo, luego, en particular, si $v_1, \dots, v_r \in V$ y $\omega^1, \dots, \omega^s \in V^*$, tenemos definido el tensor

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^s \in \mathcal{T}_s^r(V)$$

dado por

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^s)(\eta^1, \dots, \eta^r, w_1, \dots, w_s) = \eta^1(v_1) \cdots \eta^r(v_r) \omega^1(w_1) \cdots \omega^s(w_s).$$

Los tensores de esta forma se llaman *tensores puros*. Ahora podemos mostrar la estructura del espacio $\mathcal{T}_s^r(V)$:

Teorema A.2 Si e_1, \dots, e_n es una base de V y e^1, \dots, e^n es su base dual, todo tensor $T \in \mathcal{T}_s^r(V)$ se expresa de forma única como

$$T = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s},$$

concretamente con $T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} = T(e^{i_1}, \dots, e^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s})$. En particular, los tensores

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_s}.$$

forman una base del espacio $\mathcal{T}_s^r(V)$, que, por consiguiente, tiene dimensión n^{r+s} .

DEMOSTRACIÓN: Llamemos T' al tensor definido por el miembro derecho de la igualdad del enunciado. Dados $\eta^1, \dots, \eta^r \in V^*$ y $w_1, \dots, w_s \in V$, tenemos que

$$\eta^k = \sum_{i_k} \eta^k(e_{i_k})e^{i_k}, \quad w_k = \sum_{j_k} e^{j_k}(w_k)e_{j_k}$$

y, por la multilinealidad de T , vemos que

$$\begin{aligned} T(\eta^1, \dots, \eta^r, w_1, \dots, w_s) &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_s}} \eta^1(e_{i_1}) \cdots \eta^r(e_{i_r}) e^{j_1}(w_1) \cdots e^{j_s}(w_s) T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \\ &= T'(\eta^1, \dots, \eta^r, w_1, \dots, w_s), \end{aligned}$$

luego $T = T'$. La expresión es única, pues si tenemos otra expresión de T como la del enunciado para ciertos escalares $T_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_r}$, al aplicar ambos miembros a $(e^{i_1}, \dots, e^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s})$ concluimos que los coeficientes de la combinación lineal son necesariamente los que indica el enunciado. ■

Ejemplo Si V tiene dimensión $n = 2$, todo tensor de $\mathcal{T}_1^2(V)$ se expresa de forma única como

$$\begin{aligned} &T_1^{11}e_1 \otimes e_1 \otimes e^1 + T_2^{11}e_1 \otimes e_1 \otimes e^2 + T_1^{12}e_1 \otimes e_2 \otimes e^1 + T_2^{12}e_1 \otimes e_2 \otimes e^2 \\ &+ T_1^{21}e_2 \otimes e_1 \otimes e^1 + T_2^{21}e_2 \otimes e_1 \otimes e^2 + T_1^{22}e_2 \otimes e_2 \otimes e^1 + T_2^{22}e_2 \otimes e_2 \otimes e^2. \end{aligned}$$

El lector que no esté familiarizado con los tensores debería mentalizarse de que un tensor no es más que una expresión de esta forma, aunque si la dimensión del espacio o los grados de varianza y covarianza son mayores las expresiones puedan hacerse mucho más largas. ■

Para no tratar con infinitos productos con factores en espacios distintos conviene definir el *álgebra tensorial* de V como el espacio vectorial

$$\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{r,s} \mathcal{T}_s^r(V).$$

Los elementos de $\mathcal{T}(V)$ se llaman *tensores*, de modo que todo tensor no nulo se expresa de forma única como suma de tensores homogéneos no nulos de tipos distintos dos a dos. En principio $\mathcal{T}(V)$ es un espacio vectorial, pero adquiere estructura de álgebra (no conmutativa) con el el *producto tensorial* $\otimes : \mathcal{T}(V) \times \mathcal{T}(V) \rightarrow \mathcal{T}(V)$ dado por

$$(F_s^r) \otimes (G_s^r) = \left(\sum_{\substack{r_1+r_2=r \\ s_1+s_2=s}} F_{s_1}^{r_1} \otimes G_{s_2}^{r_2} \right).$$

Ejemplo Si V tiene dimensión 3, fijada una base e_1, e_2, e_3 , un tensor “típico” es, por ejemplo,

$$T = 3e^1 \otimes e^2 + e_1 \otimes e^1 \otimes e^2 - 5e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 + 2e^1 \otimes e^3.$$

Éste está formado por tres sumandos directos: $3e^1 \otimes e^2 + 2e^1 \otimes e^3 \in \mathcal{T}_2^0(V)$, $e_1 \otimes e^1 \otimes e^2 \in \mathcal{T}_2^1(V)$ y $-5e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 \in \mathcal{T}_0^3(V)$. Nuevamente, el lector debe asimilar que un tensor (no necesariamente homogéneo) no es más que una expresión de este tipo.

Para calcular en la práctica productos tensoriales a partir de expresiones en términos de una base sólo debemos tener presente que el producto de un tensor covariante por otro contravariante es conmutativo, pues si $F \in \mathcal{T}_0^r(V)$ y $G \in \mathcal{T}_s^0(V)$, entonces

$$\begin{aligned}(F \otimes G)(\omega^1, \dots, \omega^r v_1, \dots, v_s) &= F(\omega^1, \dots, \omega^r)G(v_1, \dots, v_s) \\ &= (G \otimes F)(\omega^1, \dots, \omega^r v_1, \dots, v_s).\end{aligned}$$

Sin embargo, en los demás casos la conmutatividad falla salvo en casos triviales. Por ejemplo,

$$(e^1 \otimes e^2)(e_1, e_2) = e^1(e_1)e^2(e_2) = 1, \quad (e^2 \otimes e^1)(e_1, e_2) = e^2(e_1)e^1(e_2) = 0,$$

luego $e^1 \otimes e^2 \neq e^2 \otimes e^1$ (como se deduce también del teorema A.2, pues son dos vectores básicos distintos).

Teniendo esto en cuenta, para multiplicar tensores expresados en términos de una base sólo hay que cuidar el convenio de que los factores contravariantes van antes de los covariantes. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}(e_1 + 3e^2) \otimes (3e^1 \otimes e^2 + e_1 \otimes e^1 \otimes e^2 - 5e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 + 2e^1 \otimes e^3) \\ = 3e_1 \otimes e^1 \otimes e^2 + e_1 \otimes e_1 \otimes e^1 \otimes e^2 - 5e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 + 2e_1 \otimes e^1 \otimes e^3 + \\ 9e^1 \otimes e^2 \otimes e^2 + 3e_1 \otimes e^2 \otimes e^1 \otimes e^2 - 15e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 \otimes e^2 + 6e^2 \otimes e^1 \otimes e^3,\end{aligned}$$

donde, en virtud de la unicidad del teorema A.2, no es posible realizar ninguna simplificación adicional (salvo a lo sumo agrupar los sumandos homogéneos del mismo tipo para tener la descomposición correspondiente en sumandos directos).

De todos modos, el haber reunido todos los tensores en una misma álgebra tensorial $\mathcal{T}(V)$ es sólo un artificio para convertir el producto tensorial en una ley de composición interna, pero en la práctica sólo trabajaremos con tensores homogéneos. ■

El teorema A.2 prueba que los tensores puros de tipo (r, s) generan el espacio vectorial $\mathcal{T}_s^r(V)$ (pues todo tensor homogéneo es suma de tensores puros), los tensores puros de tipo (r, s) formados por vectores básicos y sus duales son una base de $\mathcal{T}_s^r(V)$ y los tensores $e_1, \dots, e_n, e^1, \dots, e^n$ generan el álgebra $\mathcal{T}(V)$ (en el sentido de que todo tensor es suma de productos de estos generadores).

Cambio de coordenadas La unicidad que proporciona el teorema A.2 no es absoluta, en el sentido de que un mismo tensor puede tener expresiones distintas respecto de bases distintas. Por ello conviene conocer la relación que existe entre las coordenadas de un mismo tensor $T \in \mathcal{T}_s^r(V)$ respecto de dos bases distintas e_1, \dots, e_n y v_1, \dots, v_n . Pongamos que

$$v_j = \sum_l a_j^l e_l, \quad v^i = \sum_k b_k^i e^k,$$

de modo que (a_j^l) es la matriz que, al multiplicarla por la izquierda por las coordenadas de un vector en la base v_1, \dots, v_n , nos da sus coordenadas en la base e_1, \dots, e_n . Puesto que $\delta_j^i = v^i(v_j) = \sum_k b_k^i a_j^k$, se cumple que (b_k^i) es la matriz inversa de (a_j^l) , luego es también la matriz que, al multiplicarla por la izquierda por las coordenadas de un vector respecto de la base e_1, \dots, e_n nos da sus coordenadas en la base v_1, \dots, v_n .

Ahora, las coordenadas de T respecto de la base v_1, \dots, v_n son

$$T(v^{i_1}, \dots, v^{i_r}, v_{j_1}, \dots, v_{j_s}) = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_r \\ l_1, \dots, l_s}} b_{k_1}^{i_1} \cdots b_{k_r}^{i_r} a_{j_1}^{l_1} \cdots a_{j_s}^{l_s} T(e^{k_1}, \dots, e^{k_r}, e_{l_1}, \dots, e_{l_s}).$$

Esta relación entre las coordenadas de un tensor en dos bases distintas es la que explica los nombres de “*índices covariantes*” e “*índices contravariantes*”: Para pasar de las coordenadas de T en la base e_1, \dots, e_n a sus coordenadas en la base v_1, \dots, v_n , tenemos que multiplicarlas por la matriz b_k^i que pasa de las coordenadas de la primera base a la segunda (es decir, la matriz de cambio de base en el mismo sentido) tantas veces como índices covariantes tiene T , y por la matriz que pasa de las coordenadas de la segunda base a la primera (la matriz de cambio de base en sentido contrario) tantas veces como índices contravariantes tiene T . ■

Aunque hemos insistido en que un tensor homogéneo “no es más” que una combinación lineal del tipo mostrado en el enunciado del teorema A.2, por otra parte los tensores incluyen como casos particulares diversas estructuras algebraicas de interés. Según hemos visto, los tensores de tipo $(0, 0)$ son los elementos de K (los escalares), los tensores de tipo $(1, 0)$ son los elementos de V (los vectores), los tensores de tipo $(0, 1)$ son los elementos de V^* (las formas lineales) y los tensores de tipo $(0, s)$ son las formas multilineales en V .

Ejemplo Si e_1, \dots, e_n es la base canónica de \mathbb{R}^n , el producto escalar usual es la forma bilineal

$$e^1 \otimes e^1 + \cdots + e^n \otimes e^n \in \mathcal{T}_2^0(\mathbb{R}^n). \quad \blacksquare$$

El teorema siguiente muestra a su vez que los tensores de tipo $(1, s)$ pueden identificarse con las aplicaciones multilineales $f : V^r \rightarrow V$:

Teorema A.3 *Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, existe un isomorfismo natural entre $\mathcal{T}_s^1(V)$ y el espacio de las aplicaciones multilineales $f : V^s \rightarrow V$. Concretamente, a cada aplicación f le corresponde el tensor $T(\omega, v_1, \dots, v_s) = \omega(f(v_1, \dots, v_s))$ y a cada tensor T le corresponde la aplicación*

$$f(v_1, \dots, v_s) = \sum_i T(e^i, v_1, \dots, v_s) e_i,$$

donde e_1, \dots, e_n es cualquier base de V . En particular, $\mathcal{T}_1^1(V)$ se identifica con el espacio de los endomorfismos de V .

DEMOSTRACIÓN: Es fácil comprobar que las dos correspondencias descritas son lineales y mutuamente inversas. ■

Observemos que si $T \in \mathcal{T}_1^1(V)$ y $f : V \rightarrow V$ se corresponden por el isomorfismo del teorema anterior, entonces $T(e^j, e_i) = e^j(f(e_i))$. El miembro izquierdo es la coordenada T_i^j de T , mientras que el miembro derecho es la entrada (i, j) de la matriz de f en la base dada. Así pues, el isomorfismo del teorema asigna a cada tensor T el endomorfismo que en una base dada tiene por matriz a la matriz de coordenadas de T .

Ejemplo Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (2x + y, 3x - y)$. La expresión de su tensor asociado respecto de la base canónica e_1, e_2 de \mathbb{R}^2 será de la forma

$$T = T_1^1 e_1 \otimes e^1 + T_1^2 e_2 \otimes e^1 + T_2^1 e_1 \otimes e^2 + T_2^2 e_2 \otimes e^2.$$

Concretamente, $T_1^1 = T(e^1, e_1) = e^1(f(e_1)) = e^1(2, 3) = 2$, e igualmente se calculan las demás coordenadas (T_i^j es la coordenada i -ésima de $f(e_j)$):

$$T = 2e_1 \otimes e^1 + 3e_2 \otimes e^1 + e_1 \otimes e^2 - e_2 \otimes e^2. \quad \blacksquare$$

Ejemplo: La delta de Kronecker Observemos que, de acuerdo con el teorema anterior, la identidad $V \rightarrow V$ se corresponde con el tensor $\Delta \in \mathcal{T}_1^1(V)$ que, en cualquier base, tiene la expresión

$$\Delta = e_1 \otimes e^1 + \cdots + e_n \otimes e^n.$$

Equivalentemente, $\Delta = \sum_{ij} \delta_i^j e_i \otimes e^j$, donde $\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$

Por consiguiente, la *delta de Kronecker* δ_i^j así definida puede verse como las coordenadas del tensor Δ respecto de cualquier base de V .

En cambio, no tendría sentido hablar del tensor $T \in \mathcal{T}_2^0(V)$ que en cualquier base tiene coordenadas

$$\delta^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

pues si una forma bilineal T tiene estas coordenadas respecto de una base e_1, \dots, e_n , esto significa que $T = e^1 \otimes e^1 + \cdots + e^n \otimes e^n$, luego se trata del producto escalar respecto del cual la base prefijada es ortonormal. Sin embargo, si pasamos a otra base que no sea ortonormal, las coordenadas de T ya no serán δ^{ij} . Similarmente se concluye que δ_{ij} tampoco determina un tensor de tipo $(2, 0)$ de forma “canónica” (sin fijar arbitrariamente una base). \blacksquare

Protracciones y retracciones Veamos ahora cómo se transportan tensores mediante aplicaciones lineales. Si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación entre dos espacios vectoriales de dimensión finita, definimos la *protracción*

$$f_* : \mathcal{T}_0^r(V) \rightarrow \mathcal{T}_0^r(W)$$

mediante $f_*(T)(\omega^1, \dots, \omega^r) = T(f \circ \omega^1, \dots, f \circ \omega^r)$. En particular, si $v \in V$, para toda $\omega \in V^*$ tenemos que $\omega(f_*(v)) = f_*(v)(\omega) = v(f \circ \omega) = \omega(f(v))$, de donde se sigue que $f_*(v) = f(v)$.

Similarmente definimos la *retracción*

$$f^* : \mathcal{T}_s^0(W) \longrightarrow \mathcal{T}_s^0(V)$$

mediante $f^*(T)(v_1, \dots, v_s) = T(f(v_1), \dots, f(v_s))$. En particular, si $\omega \in V^*$ tenemos que $f^*(\omega)(v) = \omega(f(v))$, luego $f^*(\omega) = f \circ \omega$.

En principio, las retracciones sólo están definidas sobre tensores contravariantes y las proyecciones sobre tensores covariantes, pero si $f : V \longrightarrow W$ es un isomorfismo podemos definir ambas sobre tensores arbitrarios. Concretamente:

$$f_* : \mathcal{T}_s^r(V) \longrightarrow \mathcal{T}_s^r(W)$$

es la aplicación dada por

$$f_*(T)(\omega^1, \dots, \omega^r, v_1, \dots, v_s) = T(f \circ \omega^1, \dots, f \circ \omega^r, f^{-1}(v_1), \dots, f^{-1}(v_s)),$$

e igualmente

$$f^* : \mathcal{T}_s^r(W) \longrightarrow \mathcal{T}_s^r(V)$$

se define mediante

$$f^*(T)(\omega^1, \dots, \omega^r, v_1, \dots, v_s) = T(f^{-1} \circ \omega^1, \dots, f^{-1} \circ \omega^r, f(v_1), \dots, f(v_s)).$$

Estas aplicaciones extienden a las precedentes es muy simple demostrar que, en todos los casos, las proyecciones y las retracciones son aplicaciones lineales que se extienden a homomorfismos de álgebras

$$f^* : \bigoplus_{s \geq 0} \mathcal{T}_s^0(W) \longrightarrow \bigoplus_{s \geq 0} \mathcal{T}_s^0(V)$$

o bien

$$f^* : \bigoplus_{r, s \geq 0} \mathcal{T}_s^0(W) \longrightarrow \bigoplus_{r, s \geq 0} \mathcal{T}_s^0(V), \quad f_* : \bigoplus_{r, s \geq 0} \mathcal{T}_s^r(V) \longrightarrow \bigoplus_{r, s \geq 0} \mathcal{T}_s^r(W),$$

para el caso de un difeomorfismo, que además son homomorfismos de álgebras, es decir, que cumplen

$$f^*(F \otimes G) = f^*(F) \otimes f^*(G), \quad f_*(F \otimes G) = f_*(F) \otimes f_*(G).$$

Además, si $f : V \longrightarrow W$ y $g : W \longrightarrow X$ son aplicaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita, se cumple que

$$(f \circ g)_* = f_* \circ g_*, \quad (f \circ g)^* = g^* \circ f^*,$$

así como que las proyecciones y las retracciones de la identidad son también la identidad entre los espacios de tensores correspondientes, lo que en particular implica que si f es un isomorfismo, entonces f^* y f_* son isomorfismos mutuamente inversos. Más aún, $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1} = f_*$, $(f^{-1})_* = (f_*)^{-1} = f^*$.

Contracciones Terminamos la sección presentando unos operadores entre tensores que nos serán útiles en diversas ocasiones:

Definición A.4 Se llaman *contracciones* tensoriales a las aplicaciones lineales

$$C_l^k : \mathcal{T}_s^r(V) \longrightarrow \mathcal{T}_{s-1}^{r-1}(V), \quad \text{con } 1 \leq k \leq r, \quad 1 \leq l \leq s,$$

determinadas por la propiedad siguiente:

$$C_l^k(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^s) = \omega^l(v_k) v_1 \otimes \cdots \hat{v}_k \cdots \otimes v_r \otimes \omega^1 \otimes \cdots \hat{\omega}^l \cdots \otimes \omega^s,$$

donde el circunflejo indica que falta el término correspondiente.

En principio definimos C_l^k mediante esta relación para los tensores básicos correspondientes a una base e_1, \dots, e_n de V , pero por linealidad resulta inmediatamente que se cumple para tensores puros arbitrarios.

Es claro que si un tensor $T \in \mathcal{T}_s^r(V)$ tiene coordenadas $T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}$ respecto a una base de V , entonces, las coordenadas de $C_l^k(T)$ son

$$\sum_t T_{j_1, \dots, j_{l-1}, t, j_{l+1}, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_{k-1}, t, i_{k+1}, \dots, i_r}.$$

Por ejemplo, si $T \in \mathcal{T}_1^1(V)$, entonces $C_1^1(T)$ es la traza del endomorfismo de V asociado a T por el teorema A.3.

En el caso concreto del ejemplo que sigue a A.3:

$$C_1^1(T) = 2e^1(e_1) + 2e^1(e_2) + e^2(e_1) - e^2(e_2) = 2 + 0 + 0 - 1 = 1.$$

A.2 El álgebra exterior

A partir de aquí supondremos que el cuerpo K tiene característica 0. En esta sección sólo vamos a considerar tensores covariantes, por lo que escribiremos más brevemente $\mathcal{T}_k(V) = \mathcal{T}_k^0(V)$.

Tensores simétricos y antisimétricos El grupo Σ_k de las permutaciones de $\{1, \dots, k\}$ actúa de forma natural sobre $\mathcal{T}_k(V)$ con la acción determinada por

$$(\sigma T)(v_1, \dots, v_k) = T(v_{\sigma^{-1}1}, \dots, v_{\sigma^{-1}k}).$$

Para los tensores puros tenemos:

$$\sigma(\omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^k) = \omega^{\sigma^1} \otimes \cdots \otimes \omega^{\sigma^k}.$$

Diremos que un tensor $T \in \mathcal{T}_k(V)$ es *simétrico* (resp. *antisimétrico*) si cumple $\sigma T = T$ (resp. $\sigma T = \text{sig } \sigma T$) para todo $\sigma \in \Sigma_k$.

En otras palabras, T es simétrico si $T(v_1, \dots, v_k)$ no depende del orden de sus argumentos y es antisimétrico si al intercambiar dos de ellos cambia el signo.

Representaremos por $S^k(V)$ y $A^k(V)$ los subespacios de tensores covariantes simétricos y antisimétricos, respectivamente, de grado k en V . Convenimos que $S^0(V) = A^0(V) = K$ (el cuerpo de escalares). También se da trivialmente la igualdad $S^1(V) = A^1(V) = \mathcal{T}_1(V)$. La simetría y la antisimetría requieren al menos dos dimensiones para ser significativas.

Por otro lado, un tensor antisimétrico se anula cuando dos de sus argumentos son iguales, luego también cuando sus argumentos son linealmente dependientes (ya que, al desarrollar uno como combinación lineal de los demás, la imagen se descompone en una combinación lineal de imágenes de k -tuplas con dos componentes iguales). Esto implica que $A^k(V) = 0$ para $k > n$.

Definimos los espacios vectoriales

$$S(V) = \bigoplus_{k \geq 0} S^k(V), \quad A(V) = \bigoplus_{k \geq 0} A^k(V) = \bigoplus_{k=0}^n A^k(V).$$

Podemos “simetrizar” un tensor arbitrario de V mediante el epimorfismo $S : \mathcal{T}_k(V) \rightarrow S^k(V)$ dado por

$$S(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \sigma T.$$

Es claro que T es simétrico si y sólo si $S(T) = T$. Similarmente definimos el epimorfismo $A : \mathcal{T}_k(V) \rightarrow A^k(V)$ mediante

$$A(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} (\text{sig } \sigma) \sigma T,$$

de modo que T es antisimétrico si y sólo si $A(T) = T$.

Ejemplo Claramente:

$$\begin{aligned} S(e^1 \otimes e^2 \otimes e^2) &= \frac{1}{6}(e^1 \otimes e^2 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^2 \otimes e^1 \\ &\quad + e^1 \otimes e^2 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^2 \otimes e^1) \\ &= \frac{1}{3}(e^1 \otimes e^2 \otimes e^2 + 2e^2 \otimes e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^2 \otimes e^1), \\ A(e^1 \otimes e^2 \otimes e^2) &= \frac{1}{6}(e^1 \otimes e^2 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^2 \otimes e^1 \\ &\quad - e^1 \otimes e^2 \otimes e^2 - e^2 \otimes e^1 \otimes e^2 - e^2 \otimes e^2 \otimes e^1) = 0. \end{aligned}$$

■

Tensores antisimétricos A partir de aquí nos centramos en el espacio $A(V)$, al que vamos a dotar de estructura de álgebra. Es claro que el producto tensorial de dos tensores antisimétricos no es necesariamente antisimétrico, por lo que vamos a definir un nuevo producto que represente el mismo papel que representa el producto tensorial al tratar con tensores arbitrarios, pero que conserve la antisimetría.

La idea básica es definir un “producto exterior” \wedge de modo que para todos los tensores $\omega^1, \dots, \omega^k \in V^*$, el producto $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k$ sea el menor “paquete de tensores puros” que contenga a $\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^k$ y sea antisimétrico. Esto es tanto como decir que

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k = k! A(\omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^k),$$

con lo que cancelamos el término $1/k!$ que hemos incluido en la definición de A para que los tensores antisimétricos cumplan $A(T) = T$, pero que es innecesario a la hora de construir tensores antisimétricos. Por ejemplo, queremos que

$$\begin{aligned} \omega^1 \wedge \omega^2 &= \omega^1 \otimes \omega^2 - \omega^2 \otimes \omega^1, \\ \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 &= \omega^1 \otimes \omega^2 \otimes \omega^3 + \omega^3 \otimes \omega^1 \otimes \omega^2 + \omega^2 \otimes \omega^3 \otimes \omega^1 \\ &\quad - \omega^2 \otimes \omega^1 \otimes \omega^3 - \omega^3 \otimes \omega^2 \otimes \omega^1 - \omega^1 \otimes \omega^3 \otimes \omega^2, \end{aligned}$$

etc. Las expresiones se hacen cada vez más complejas, pero nunca necesitaremos desarrollar los productos exteriores en productos tensoriales, sino que, por el contrario, en la práctica podremos “olvidarnos” de la forma en que han sido contruidos y manipularlos mediante las propiedades algebraicas del producto exterior.

Ahora debemos tener presente que no podemos definir directamente el producto de k tensores de V^* de acuerdo con lo que queremos que valga, sino que lo que procede para definir un producto en $A(V)$ es definir el producto de dos tensores antisimétricos arbitrarios:

Definición A.5 Definimos $\wedge : A^k(V) \times A^r(V) \rightarrow A^{k+r}(V)$ mediante

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+r)!}{k!r!} A(\omega \otimes \eta).$$

Estos productos entre tensores antisimétricos homogéneos inducen a su vez un producto $\wedge : A(V) \times A(V) \rightarrow A(V)$ dado por

$$\left(\sum_{i=0}^n \omega^i \right) \wedge \left(\sum_{j=0}^n \omega'^j \right) = \sum_{i,j=0}^n \omega^i \wedge \omega'^j = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i+j=k} \omega^i \wedge \omega'^j \right),$$

donde $\omega^i, \omega'^j \in A^i(V)$. Notemos que si $\alpha \in K$ entonces $\alpha \wedge \omega = \alpha\omega$.

Este producto recibe el nombre de *producto exterior*, y el conjunto $A(V)$ de los tensores antisimétricos de V junto con la suma y el producto exterior recibe el nombre de *álgebra exterior* de V .

Tenemos que probar que $A(V)$ es realmente un álgebra con estas operaciones. Una prueba directa basada en la definición de $A(T)$ puede volverse muy farragosa. Sin embargo, aquí presentamos una demostración muy conceptual:

En primer lugar demostraremos que $A(V)$ adquiere estructura de álgebra con el producto que sobre tensores homogéneos viene dado por $\omega \wedge_1 \eta = A(\omega \otimes \eta)$, es decir, sin la corrección de los coeficientes que hemos introducido en la definición del producto exterior. Para ello consideramos el anillo cociente $\mathcal{Q}^* = \mathcal{J}^*/\mathcal{J}^*$, donde

$$\mathcal{J}^* = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{J}_k(V)$$

(considerado como anillo con el producto tensorial) e \mathcal{J}^* es el ideal bilátero generado por los cuadrados $\omega \otimes \omega$, con $\omega \in V^*$. Explícitamente,¹

$$\mathcal{J}^* = \left\{ \sum_{i=1}^k \eta_{1i} \wedge \omega_i \wedge \omega_i \wedge \eta_{2i} \mid \omega_i \in V^*, \eta_{1i}, \eta_{2i} \in \mathcal{J}_k(V) \right\}.$$

Representemos por \cup el producto de \mathcal{Q}^* . La proyección $\pi : \mathcal{J}^* \rightarrow \mathcal{Q}^*$ es un epimorfismo de anillos que se restringe a una aplicación lineal $\pi : A(V) \rightarrow \mathcal{Q}^*$. Basta probar que es biyectiva y que cumple

$$\pi(\alpha \wedge_1 \beta) = \pi(\alpha) \cup \pi(\beta),$$

pues esto implicará que $A(V)$, con el producto \wedge_1 , es un álgebra isomorfa a \mathcal{Q}^* .

La clave está en probar que

$$\pi(T) = \pi(A(T)), \quad \text{para todo } T \in \mathcal{J}_k(V). \quad (\text{A.1})$$

Basta comprobarlo sobre tensores puros $T = \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^k$, con $\omega^i \in V^*$. En efecto, como

$$(\omega^i + \omega^j) \otimes (\omega^i + \omega^j) \in \mathcal{J}^*,$$

concluimos que $\omega^i \otimes \omega^j \equiv -\omega^j \otimes \omega^i$ (mód \mathcal{J}^*), luego para todo $\sigma \in \Sigma_k$ tenemos que

$$\pi(\omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^k) = (\text{sig } \sigma) \pi(\omega^{\sigma 1} \otimes \cdots \otimes \omega^{\sigma k}).$$

Al sumar sobre σ obtenemos (A.1). Esta relación implica inmediatamente que π es suprayectiva. Para la inyectividad observamos que el homomorfismo A se anula sobre \mathcal{J}^* . En efecto, un elemento de \mathcal{J}^* es combinación lineal de tensores $T = \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^k$ con algún $\omega^i = \omega^{i+1}$ y $A(T)$ es (salvo un factor constante) una suma de tensores σT en la que cada término correspondiente a una permutación par se cancela con el término correspondiente a la permutación impar $\sigma \circ (i, i+1)$, pues la trasposición $(i, i+1)$ deja invariante a T . Así pues $A(T) = 0$.

¹En [Al] definimos únicamente el concepto de ideal y de anillo cociente para anillos conmutativos y unitarios. El anillo \mathcal{J}^* no es conmutativo, pero se comprueba inmediatamente que el teorema [Al 3.38] vale igualmente para anillos no conmutativos siempre y cuando el ideal I considerado sea bilátero, es decir, que cumpla $ab \in I$, $ba \in I$ siempre que $a \in A$ y $b \in I$, cosa que obviamente cumple \mathcal{J}^* .

Por consiguiente, si $\omega \in A(V)$ cumple $\pi(\omega) = 0$, entonces $\omega \in \mathcal{J}^*$, y al ser antisimétrico, $\omega = A(\omega) = 0$.

Falta probar que π conserva los productos. Basta verlo sobre factores de la forma

$$\alpha = A(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_k), \quad \beta = A(\eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_q).$$

En efecto, usando (A.1) vemos que

$$\begin{aligned} \pi(\alpha \wedge_1 \beta) &= \pi(A(A(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_k) \otimes A(\eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_q))) \\ &= \pi(A(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_k) \otimes A(\eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_q)) \\ &= \pi(A(\omega_1 \otimes \cdots \otimes \omega_k)) \cup \pi(A(\eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_q)) = \pi(\alpha) \cup \pi(\beta). \end{aligned}$$

Con esto tenemos que $A(V)$ es un álgebra con el producto \wedge_1 , y esto implica a su vez que lo es con el producto exterior \wedge . En efecto, es fácil ver que el ajuste de coeficientes en la definición de \wedge se traduce en que

$$\alpha \wedge \beta \wedge \gamma = \frac{(r+s+t)!}{r!s!t!} \alpha \wedge_1 \beta \wedge_1 \gamma,$$

lo que nos da la propiedad asociativa (en principio para productos de tensores homogéneos, pero es claro que por linealidad vale para productos cualesquiera). La distributiva de \wedge es inmediata a partir de la de \wedge_1 y el resto de propiedades son triviales.

El teorema siguiente recoge lo que hemos probado y algunos resultados adicionales:

Teorema A.6 *Si V es un espacio vectorial, entonces $A(V)$ es un álgebra unitaria con el producto exterior, y es anticonmutativa, en el sentido de que si $\omega \in A^k(V)$ y $\eta \in A^r(V)$, entonces*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kr} \eta \wedge \omega.$$

Además, si $\omega^1, \dots, \omega^k \in V^*$, se cumple que

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k = \sum_{\sigma \in \Sigma_k} (\text{sig } \sigma) \omega^{\sigma^1} \otimes \cdots \otimes \omega^{\sigma^k}.$$

DEMOSTRACIÓN: Para probar la anticonmutatividad podemos suponer que

$$\omega = A(\omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^k), \quad \eta = A(\eta^1 \otimes \cdots \otimes \eta^r).$$

Entonces, usando (A.1),

$$\begin{aligned} \pi(\omega) \cup \pi(\eta) &= \pi(\omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^k) \cup \pi(\eta^1 \otimes \cdots \otimes \eta^r) \\ &= \pi(\omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^k \otimes \eta^1 \otimes \cdots \otimes \eta^r). \end{aligned}$$

Hemos visto que cada vez que intercambiamos dos factores consecutivos la proyección cambia de signo. Para pasar a la izquierda todos los factores de la derecha necesitamos kr permutaciones, luego

$$\pi(\omega) \cup \pi(\eta) = (-1)^{kr} \pi(\eta^1 \otimes \cdots \otimes \eta^r \otimes \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^k) = (-1)^{kr} \pi(\eta) \cup \pi(\omega).$$

Por consiguiente \cup es anticonmutativo, luego lo mismo vale para \wedge_1 y también para \wedge . La última parte del teorema equivale a que

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k = k! A(\omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^k).$$

Lo probamos por inducción sobre k . Para $k = 1$ es inmediato y, si vale para k , entonces

$$\begin{aligned} \pi(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{k+1}) &= \pi((k+1)A((\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k) \otimes \omega^{k+1})) \\ &= (k+1)\pi((\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k) \otimes \omega^{k+1}) = (k+1)\pi(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k) \cup \pi(\omega^{k+1}) \\ &= (k+1)\pi(k!A(\omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^k)) \cup \pi(\omega^{k+1}) = (k+1)!\pi(\omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^k) \cup \pi(\omega^{k+1}) \\ &= (k+1)!\pi(\omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^{k+1}) = (k+1)!\pi(A(\omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^{k+1})), \end{aligned}$$

luego

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^{k+1} = (k+1)! A(\omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^{k+1}),$$

donde hemos usado que π es inyectiva sobre $A(V)$. ■

En particular, ya tenemos probado que los productos $\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k$ son los que pretendíamos que fueran. El teorema siguiente es una consecuencia inmediata de este hecho, pero que pone de manifiesto la relación entre el producto exterior y los determinantes:

Teorema A.7 Si $\omega^1, \dots, \omega^k \in A^1(V)$, entonces

$$(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k)(u_1, \dots, u_k) = \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sig } \sigma \omega^1(u_{\sigma(1)}) \cdots \omega^k(u_{\sigma(k)}) = \det(\omega^i(u_j)).$$

En particular, si e_1, \dots, e_n es una base de V , tenemos que

$$(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k})(u_1, \dots, u_k) = \det(e^{i_r}(u_j)).$$

Más en particular, si $i_1 < \cdots < i_k$, $j_1 < \cdots < j_k$, entonces

$$(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k})(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i_1 = j_1, \dots, i_k = j_k \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

pues $e^{i_r}(e_{j_s}) = \delta_{j_s}^{i_r}$ y el determinante será nulo en cuanto algún i_r no figure entre los j_s o viceversa.

Con esto ya es fácil obtener la expresión general de un tensor antisimétrico:

Teorema A.8 Si e_1, \dots, e_n es una base de V , cada $\omega \in A^k(V)$ se expresa de forma única como

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k},$$

concretamente con $\alpha_{i_1 \dots i_k} = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$. En particular, los tensores de la forma $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$ con $i_1 < \cdots < i_k$, forman una base de $A^k(V)$ que, por consiguiente, tiene dimensión $\binom{n}{k}$, y a su vez la dimensión de $A(V)$ es 2^n .

DEMOSTRACIÓN: Haciendo actuar ambos miembros sobre e_{i_1}, \dots, e_{i_k} vemos que necesariamente $\alpha_{i_1 \dots i_k} = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$, lo que nos da la unicidad.

Llamemos ω' al miembro derecho de la igualdad. Para probar que $\omega = \omega'$, por la multilinealidad es suficiente comprobar que ambos tensores coinciden sobre los vectores básicos e_{j_1}, \dots, e_{j_k} y, como son alternados, podemos suponer además que $j_1 < \dots < j_k$. Pero claramente:

$$\omega'(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \alpha_{j_1 \dots j_k} = \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}). \quad \blacksquare$$

Observación A partir de aquí el lector puede “olvidar” los argumentos técnicos que hemos expuesto y quedarse simplemente con el hecho de que el álgebra exterior es un álgebra anticonmutativa, con el enunciado del teorema A.7, que nos dice cómo interpretar cada tensor de la forma $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^k$ como forma multilineal alternada y, sobre todo, con el teorema A.8, que nos dice que los elementos de $A(K)$ no son más que objetos de la forma

$$\omega = e^1 \wedge e^2 - 5e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 + 2e^1 \wedge e^3,$$

donde los coeficientes de cada término están unívocamente determinados siempre que hayamos arreglado los productos exteriores (aplicando la anticonmutatividad) para que los vectores básicos aparezcan siempre con una sucesión estrictamente creciente de superíndices. Para calcular productos exteriores sólo tenemos que usar las propiedades algebraicas, prestando especial atención a la anticonmutatividad, o más precisamente a la relación

$$e^i \wedge e^j = -e^j \wedge e^i,$$

que en particular implica que $e^i \wedge e^i = 0$. Así, para calcular, por ejemplo, $e^2 \wedge \omega$ sólo tenemos que operar:

$$e^2 \wedge \omega = e^2 \wedge e^1 \wedge e^2 - 5e^2 \wedge e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 + 2e^2 \wedge e^1 \wedge e^3 = -2e^1 \wedge e^2 \wedge e^3.$$

Como en el caso de los tensores arbitrarios, el hecho de incluir todos los tensores antisimétricos en una misma álgebra es sólo una cuestión de conveniencia formal, si bien en la práctica sólo trabajaremos con tensores homogéneos. \blacksquare

Ahora procedería estudiar los cambios de base, es decir, comparar las expresiones de un mismo elemento de $A^k(V)$ respecto de dos bases de V , pero vamos a considerar únicamente el caso de los tensores de $A^n(V)$, que es el único que nos va a interesar y es particularmente simple, pues, según el teorema anterior, tenemos que $A^n(V)$ tiene dimensión 1, y sus elementos se expresan de forma única como $\alpha e^1 \wedge \dots \wedge e^n$, con $\alpha \in K$.

Teorema A.9 Si e_1, \dots, e_n y e'_1, \dots, e'_n son dos bases de V y A es la matriz de cambio de base (la matriz cuyas filas son las coordenadas de los vectores e_i en la segunda base), entonces

$$e'^1 \wedge \dots \wedge e'^n = \det A e^1 \wedge \dots \wedge e^n.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $A = (a_i^j)$. Entonces $e_i = a_i^1 e'_1 + \dots + a_i^n e'_n$, de donde $e'^j(e_i) = a_i^j$. Por el teorema A.7 tenemos que

$$(e'^1 \wedge \dots \wedge e'^n)(e_1, \dots, e_n) = \det(e'^j(e_i)) = \det A (e^1 \wedge \dots \wedge e^n)(e_1, \dots, e_n).$$

Esto implica que ambos tensores son iguales. ■

Protracciones y retracciones Es inmediato que si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita, las retracciones f^* se restringen a aplicaciones lineales $f^* : A^k(W) \rightarrow A^k(V)$. Si f es un isomorfismo, lo mismo sucede con las protracciones $f_* : A^k(V) \rightarrow A^k(W)$.

De la linealidad se sigue que $f^*(A(\eta \otimes \omega)) = A(f^*(\eta) \otimes f^*(\omega))$, de donde a su vez $f^*(\eta \wedge \omega) = f^*(\eta) \wedge f^*(\omega)$, con lo que f^* es un homomorfismo de álgebras, e igualmente sucede con las protracciones de isomorfismos.

La evaluación Terminamos esta sección introduciendo una familia de operadores en el espacio $A(V)$:

Definición A.10 Para cada $v \in V$, definimos $i_v : A^k(V) \rightarrow A^{k-1}(V)$ mediante

$$i_v(\omega)(v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega(v, v_1, \dots, v_{k-1}).$$

Es claro que $i_v(\omega)$ es un tensor covariante antisimétrico, luego ciertamente $i_v(\omega) \in A^{k-1}(V)$. Para $k = 0$ definimos $i_v(\omega) = 0$.

Así tenemos definidas n aplicaciones lineales que se combinan en una misma aplicación lineal $i_v : A(V) \rightarrow A(V)$ a la que llamaremos *evaluación* en v .

Teorema A.11 Si $v \in V$, $\omega \in A^k(V)$, $\eta \in A^q(V)$, entonces

$$i_v(\omega \wedge \eta) = i_v(\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge i_v(\eta).$$

DEMOSTRACIÓN: Suponemos que $k, q > 0$. En otro caso el argumento se simplifica. Calculamos:

$$\begin{aligned} i_{v_1}(\omega \wedge \eta)(v_2, \dots, v_{k+q}) &= \\ &= \frac{1}{k!q!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{k+q}} \text{sig } \sigma \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+q)}) \\ &= \frac{1}{k!q!} \sum_{\sigma^{-1}(1) \leq k} \text{sig } \sigma \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_1, \dots, v_{\sigma(k)}) \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+q)}) \\ &\quad + \frac{1}{k!q!} \sum_{\sigma^{-1}(1) > k} \text{sig } \sigma \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_1, \dots, v_{\sigma(k+q)}). \end{aligned}$$

Para cada permutación σ del primer sumatorio, llamemos $\bar{\sigma}$ a la permutación que resulta de componer σ con las transposiciones necesarias para llevar a v_1 a la primera posición. Igualmente, para cada σ en el segundo sumatorio,

llamamos σ^* a la permutación que resulta de componerla con las transposiciones necesarias para llevar v_1 al lugar $k+1$. Así podemos continuar el desarrollo con

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{k!q!} \sum_{\sigma^{-1}(1) \leq k} \text{sig } \bar{\sigma} \omega(v_1, v_{\bar{\sigma}(2)}, \dots, v_{\bar{\sigma}(p)}) \eta(v_{\bar{\sigma}(k+1)}, \dots, v_{\bar{\sigma}(k+q)}) \\ &+ \frac{1}{k!q!} \sum_{\sigma^{-1}(1) > k} \text{sig } \sigma^* \omega(v_{\sigma^*(1)}, \dots, v_{\sigma^*(k)}) \eta(v_1, v_{\sigma^*(k+2)}, \dots, v_{\sigma^*(k+q)}). \end{aligned}$$

Observemos que al realizar cada transposición cambia el signo de ω o el de η , pero también cambia el signo de la signatura, por lo que al final los signos son correctos.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{k!q!} \sum_{\sigma^{-1}(1) \leq k} \text{sig } \bar{\sigma} i_{v_1}(\omega)(v_{\bar{\sigma}(2)}, \dots, v_{\bar{\sigma}(p)}) \eta(v_{\bar{\sigma}(k+1)}, \dots, v_{\bar{\sigma}(k+q)}) \\ &+ \frac{1}{k!q!} \sum_{\sigma^{-1}(1) > k} \text{sig } \sigma^* \omega(v_{\sigma^*(1)}, \dots, v_{\sigma^*(k)}) i_{v_1}(\eta)(v_{\sigma^*(k+2)}, \dots, v_{\sigma^*(k+q)}). \end{aligned}$$

Ahora observamos que hay k permutaciones σ con $\sigma^{-1}(1) \leq k$ que dan lugar a la misma permutación $\bar{\sigma}$ y q permutaciones con $\sigma^{-1}(1) > k$ que dan lugar a la misma σ^* . Por lo tanto podemos continuar con

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(k-1)!q!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{k+q-1}} \text{sig } \bar{\sigma} i_{v_1}(\omega)(v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+q)}) \\ &+ \frac{1}{k!(q-1)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{k+q-1}} \text{sig } \sigma^* \omega(v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k+1)}) i_{v_1}(\eta)(v_{\sigma(k+2)}, \dots, v_{\sigma(k+q)}), \end{aligned}$$

donde ahora consideramos a σ como permutación de los índices $2, \dots, k+q$, $\bar{\sigma}$ pasa a ser la permutación de Σ_{k+q} que resulta de añadir a σ un 1 en la primera posición y σ^* pasa a ser la permutación que resulta de intercalar un 1 en la posición $k+1$. Ahora observamos que $\text{sig } \bar{\sigma} = \text{sig } \sigma$, pues las transposiciones que reordenan σ hasta la identidad también reordenan $\bar{\sigma}$ hasta la identidad. En cambio, $\text{sig } \sigma^* = (-1)^k \text{sig } \sigma$, pues si aplicamos transposiciones para transformar σ en la identidad todavía necesitamos k transposiciones más para llevar el 1 de la posición $k+1$ -ésima a la primera posición y tener así la identidad. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(k-1)!q!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{k+q-1}} \text{sig } \sigma i_{v_1}(\omega)(v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+q)}) \\ &+ \frac{(-1)^k}{k!(q-1)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{k+q-1}} \text{sig } \sigma \omega(v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k+1)}) i_{v_1}(\eta)(v_{\sigma(k+2)}, \dots, v_{\sigma(k+q)}) \\ &= (i_{v_1}(\omega) \wedge \eta)(v_2, \dots, v_{k+q}) + (-1)^k (\omega \wedge i_{v_1}(\eta))(v_2, \dots, v_{k+q}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

A.3 Elementos de volumen

A partir de aquí consideraremos únicamente espacios vectoriales V sobre el cuerpo \mathbb{R} de los números reales. Vamos a determinar exactamente la información que contiene cada elemento no nulo de $A^n(V)$.

Orientación Recordemos [G 5.37] que dos bases ordenadas de V tienen la misma orientación si el determinante de la matriz de cambio de base es positivo. Esto divide a las bases de V en dos clases de equivalencia llamadas “orientaciones”. Orientar el espacio V es seleccionar arbitrariamente una de ellas, de modo que las bases de la orientación elegida se llaman *bases orientadas*. Las propiedades de los determinantes implican que una base ordenada cambia de orientación cuando se trasponen dos de sus vectores o cuando uno de ellos se cambia por su opuesto.

Ahora observamos que una orientación en V puede determinarse mediante un tensor antisimétrico:

Si e_1, \dots, e_n es una base de V , según A.7, el tensor $\omega = e^1 \wedge \dots \wedge e^n$ cumple que $\omega(v_1, \dots, v_n) = |A|$, donde A es la matriz cuya fila i -ésima está formada por las coordenadas de v_i en la base e_1, \dots, e_n . Por lo tanto, una base v_1, \dots, v_n tiene la misma orientación que e_1, \dots, e_n si y sólo si $\omega(v_1, \dots, v_n) > 0$.

Recíprocamente, si $\omega \in A^n(V)$ es cualquier tensor no nulo, las bases que cumplen $\omega(v_1, \dots, v_n) > 0$ son una orientación de V , pues si e_1, \dots, e_n es una de ellas, entonces existe un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\omega = \alpha e^1 \wedge \dots \wedge e^n$ y necesariamente $\alpha = \omega(e_1, \dots, e_n) > 0$, de donde concluimos que las bases sobre las que ω es positiva son las mismas que las bases sobre las que $e^1 \wedge \dots \wedge e^n$ es positiva, y ya hemos visto que éstas son las bases con la misma orientación que e_1, \dots, e_n .

Por consiguiente, una forma de especificar una orientación en V es seleccionar un tensor $\omega \in A^n(V)$ no nulo y tomar como bases orientadas las que cumplen $\omega(v_1, \dots, v_n) > 0$.

Medidas Consideramos en V la topología euclídea, es decir, [An 2.66] la única topología respecto de la cual todo isomorfismo $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo. Para $v_1, \dots, v_n \in V$, consideramos el *paralelepípedo*

$$P(v_1, \dots, v_n) = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]\}.$$

Teorema A.12 Para cada $\omega \in A^n(V)$ no nulo existe una única medida de Borel μ_ω en V tal que, para todos los vectores $v_1, \dots, v_n \in V$, se cumple

$$\mu_\omega(P(v_1, \dots, v_n)) = |\omega(v_1, \dots, v_n)|.$$

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar observamos que existe una base e_1, \dots, e_n de V tal que $\omega = e^1 \wedge \dots \wedge e^n$, pues en principio, fijada una base arbitraria, se cumple que $\omega = a e^1 \wedge \dots \wedge e^n$, para cierto $a \in \mathbb{R}$ no nulo, pero cambiando e_1 por $(1/a)e_1$, tenemos que e^1 pasa a ser $a e^1$, por lo que $\omega = e^1 \wedge \dots \wedge e^n$.

Sea $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ el isomorfismo que transforma e_1, \dots, e_n en la base canónica y sea μ la medida de Borel en V dada por $\mu(A) = m(f[A])$, donde m es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n .

Esta medida tiene exactamente las mismas propiedades que la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n . En particular cumple el teorema de cambio de variable, aunque aquí sólo necesitamos el siguiente caso particular:²

Si $g : V \rightarrow V$ es una aplicación lineal y $A \subset V$ es medible, se cumple que $\mu(g[A]) = |\det f| \mu(A)$.

Es claro que $f[P(e_1, \dots, e_n)] = [0, 1]^n$ y el hecho de que la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n sea la única medida de Borel invariante por traslaciones que cumple $m([0, 1]^n) = 1$ (teorema [An 4.37]) se traduce en que μ es la única medida de Borel en V invariante por traslaciones tal que $\mu(P(e_1, \dots, e_n)) = 1$.

Si $v_1, \dots, v_n \in V$ y llamamos $g : V \rightarrow V$ a la aplicación lineal que cumple $g(e_i) = v_i$, es claro que $g[P(e_1, \dots, e_n)] = P(v_1, \dots, v_n)$, luego

$$\mu(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det g|.$$

Pero, por otra parte, $\det g$ es el determinante de la matriz formada por las coordenadas de los vectores v_i en la base e_1, \dots, e_n , luego, por el teorema A.7 (y las observaciones posteriores),

$$|\det g| = |\det(e^i(v_j))| = |(e^1 \wedge \dots \wedge e^n)(v_1, \dots, v_n)|.$$

Concluimos que μ es la única medida de Borel en V invariante por traslaciones tal que, para todos los vectores $v_1, \dots, v_n \in V$, se cumple que

$$\mu(P(v_1, \dots, v_n)) = |\omega(v_1, \dots, v_n)|.$$

En particular esto prueba que μ sólo depende de ω , y no de su representación en términos de la base e_1, \dots, e_n . ■

Esto nos lleva a introducir el concepto siguiente, que no es más que un cambio de vocabulario:

Definición A.13 Un *elemento de volumen orientado* en V es cualquier elemento no nulo de $A^n(V)$.

De acuerdo con el teorema anterior, si ω_1 y ω_2 son dos elementos de volumen orientados en V , se cumple que $\mu_{\omega_1} = \mu_{\omega_2}$ si y sólo si $\omega_1 = \pm\omega_2$, por lo que dos elementos de volumen orientados son iguales si y sólo si determinan en V la misma medida y la misma orientación.

Ésta es, pues, toda la información que contienen los elementos no nulos de $A^n(V)$: una orientación del espacio y una determinación del volumen de cada subconjunto de Borel del espacio.

Ejemplo Si e_1, \dots, e_n es la base canónica de \mathbb{R}^n , el elemento de volumen orientado $e^1 \wedge \dots \wedge e^n$ determina en \mathbb{R}^n la orientación canónica (la determinada por la base canónica) y la medida de Lebesgue usual.

²Si g es biyectiva, aplicamos [An 6.35] a la función característica $f = \chi_A$. Si g no es biyectiva es claro que $g[A] \subset g[V]$ es nulo y, por otra parte, $\det g = 0$.

A.4 Espacios semieuclídeos

En las secciones siguientes estudiaremos los tensores sobre espacios vectoriales en los que hemos fijado un producto escalar, aunque conviene trabajar con una clase de productos escalares más generales que los que se consideran al estudiar analíticamente la geometría euclídea:

Definición A.14 Un *espacio pseudoeuclídeo* es un par (V, F) , donde V es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} de dimensión finita y $F : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal simétrica ([Al 6.41]) en V . Nos referiremos a ella como el *producto escalar* de V y en la práctica la representaremos con la notación $\langle v, w \rangle = F(v, w)$.

Diremos que un producto escalar es *euclídeo* si es *definido positivo*,³ es decir, si $\langle v, v \rangle > 0$ para todo $v \in V$ no nulo. Un *espacio euclídeo* es un espacio pseudoeuclídeo cuyo producto escalar sea euclídeo.

En general, en un espacio pseudoeuclídeo diremos que un vector no nulo v es *positivo*, *negativo* o *isótropo* según si $\langle v, v \rangle > 0$, $\langle v, v \rangle < 0$ o $\langle v, v \rangle = 0$.

Así, un espacio euclídeo es un espacio pseudoeuclídeo en el que todos los vectores no nulos son positivos. Notemos que, por definición, no contamos al vector nulo como isótropo, de modo que podemos afirmar que en un espacio euclídeo no hay vectores isótropos.

Definimos la *norma* de un vector como $\|v\| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|}$. Obviamente, en un espacio euclídeo el valor absoluto es redundante. En general, los vectores isótropos son los vectores no nulos de norma nula.

Una *isometría* entre dos espacios pseudoeuclídeos V y W es un isomorfismo $f : V \rightarrow W$ que conserva el producto escalar, es decir, tal que, para todo $v_1, v_2 \in V$ se cumple que $\langle f(v_1), f(v_2) \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$.

Dos vectores de un espacio pseudoeuclídeo V son *ortogonales*, y lo representaremos con la notación $v \perp w$ si $\langle v, w \rangle = 0$.

Ejemplo Si $0 \leq \nu \leq n$, llamaremos \mathbb{R}_ν^n al espacio vectorial \mathbb{R}^n con el producto escalar dado por $\langle x, y \rangle = -x_1y_1 - \dots - x_\nu y_\nu + x_{\nu+1}y_{\nu+1} + \dots + x_ny_n$.

Es fácil ver que se trata de un espacio pseudoeuclídeo. Escribiremos \mathbb{R}^n en lugar de \mathbb{R}_0^n , pues en este caso el producto escalar es el producto euclídeo usual. Si $0 < \nu < n$, tenemos que los vectores de la base canónica e_1, \dots, e_ν son negativos y los vectores $e_{\nu+1}, \dots, e_n$ son positivos. Un ejemplo de vector isótropo es $e_1 + e_n$. La norma viene dada por

$$\|x\| = \sqrt{|-x_1^2 - \dots - x_\nu^2 + x_{\nu+1}^2 + \dots + x_n^2|}. \quad \blacksquare$$

Nota Sabemos que en un espacio euclídeo la norma de un vector se corresponde con el concepto geométrico de longitud, mientras que la ortogonalidad

³Es habitual reservar la expresión “producto escalar” para las formas bilineales simétricas definidas positivas, pero aquí la emplearemos en este sentido más general.

se corresponde con la noción de perpendicularidad. Más aún, la norma permite definir la distancia entre dos puntos como la norma de su diferencia y, con dicha distancia, el espacio se convierte en un espacio métrico, lo que en particular lo dota de una topología.

Muy poco de esto se conserva en el caso pseudoeuclídeo: la norma no satisface las propiedades de la definición de norma [An 2.1]. El hecho de que falle la desigualdad triangular⁴ implica a su vez que no se cumple el teorema de Schwarz [An 3.37] (ya que se deduce de éste) y, por supuesto, la norma ya no induce una distancia.

En cuanto a la ortogonalidad, tampoco se corresponde con la noción euclídea de perpendicularidad, pues los vectores isótropos serían “perpendiculares a sí mismos” (además de tener “longitud” cero).

Pese a todo esto, vamos a ver que en una clase de espacios intermedia entre la de los espacios euclídeos y los pseudoeuclídeos se conservan hechos suficientes para dar lugar a una geometría de interés. ■

Una base e_1, \dots, e_n de un espacio pseudoeuclídeo V es *ortogonal* si sus vectores son ortogonales dos a dos, es decir, si $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ siempre que $i \neq j$. Si además los vectores tienen norma 1, es, decir, si $\langle e_i, e_i \rangle = \pm 1$, se dice que la base es *ortonormal*.

Es conocido que todo espacio euclídeo admite bases ortonormales. Veamos hasta qué punto se puede generalizar esto a espacios pseudoeuclídeos.

Recordemos que si e_1, \dots, e_n es una base de un espacio pseudoeuclídeo V , su producto escalar está completamente determinado por la matriz $A = (\langle e_i, e_j \rangle)$. En efecto, basta tener en cuenta que si $v = \sum_i v^i e_i$ y $w = \sum_i w^i e_i$, entonces

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i,j} v^i \langle e_i, e_j \rangle w^j.$$

Dos matrices A y B se corresponden con la misma forma bilineal en bases distintas si y sólo si son congruentes, es decir, si $A = MBM^t$, para cierta matriz regular M (la matriz de cambio de base entre las bases correspondientes a A y B).

Es claro que una base de un espacio pseudoeuclídeo es ortogonal si y sólo si la matriz del producto escalar en dicha base es diagonal, y la base es ortonormal si los coeficientes de la diagonal son todos ± 1 .

Ahora sólo tenemos que recordar algunos resultados bien conocidos del álgebra lineal: Toda matriz simétrica con coeficientes reales es diagonalizable y, más aún, el teorema [Al 6.52] afirma que es congruente con una única matriz diagonal de la forma $[1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0]$. Equivalentemente:

Teorema A.15 *Todo espacio pseudoeuclídeo V admite una base ortogonal formada por vectores de norma 1 o 0. Además, el número de vectores positivos, negativos e isótropos es el mismo en todas las bases en estas condiciones.*

⁴Es fácil dar ejemplos en \mathbb{R}_1^2 . Por ejemplo, $\|(3, 5)\| = 4$, $\|(5, 13)\| = 12$, pero la norma de la suma es $\sqrt{260} > 16$.

Definición A.16 A las bases ortogonales formadas por vectores de norma 1 o 0 las llamaremos bases *pseudoortonormales*. El número de vectores no isótropos en las bases pseudoortonormales de un espacio pseudoeuclídeo V es el *rango* de V (que claramente es el rango de la matriz del producto escalar en cualquier base), mientras que el número de vectores negativos en las bases pseudoortonormales de V se llama *índice* de V .

Por ejemplo, el espacio \mathbb{R}_ν^n tiene rango n e índice ν .

Si convenimos en ordenar las bases pseudoortonormales de V poniendo en primer lugar los vectores negativos, luego los positivos y luego los isótropos, tenemos que los valores $\epsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$ son independientes de la base pseudoortonormal considerada. A $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ lo llamaremos *signatura* de V . Así, si $v = \sum_i v^i e_i$ y $w = \sum_i w^i e_i$, entonces

$$\langle v, w \rangle = \epsilon_1 v^1 w^1 + \dots + \epsilon_n v^n w^n.$$

Si V es un espacio pseudoeuclídeo y $W \subset V$, definimos su *subespacio ortogonal* como

$$W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \text{ para todo } w \in W\} \leq V.$$

Si $v \in V$, definimos $v^* : V \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $v^*(w) = \langle v, w \rangle$. Es claro que $\phi : V \rightarrow V^*$ dada por $\phi(v) = v^*$ es una aplicación lineal cuyo núcleo es V^\perp .

Teorema A.17 Sea V un espacio pseudoeuclídeo de dimensión n . Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. V tiene rango n .
2. La aplicación $\phi : V \rightarrow V^*$ es un isomorfismo.
3. $V^\perp = 0$.

DEMOSTRACIÓN: Si e_1, \dots, e_n es una base pseudoortonormal de V , basta observar que si V tiene rango n ningún e_i es isótropo, luego

$$\bar{e}_i(e_j) = \begin{cases} \pm 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

luego $\phi(e_i) = \pm e^i$, luego ϕ es un isomorfismo. Recíprocamente, si V no tiene rango n , entonces el vector e_n es isótropo, luego $\bar{e}_n = 0$ y e_n está en el núcleo de ϕ . Como dicho núcleo es V^\perp , la equivalencia entre 2) y 3) es inmediata. ■

Definición A.18 Un *espacio semieuclicídeo* es un espacio pseudoeuclídeo de rango máximo.

Equivalentemente, un espacio pseudoeuclídeo es semieuclídeo si y sólo si sus bases pseudoortonormales no contienen vectores isotropos,⁵ es decir, si y sólo si tiene bases ortonormales. En particular, los espacios euclídeos son los espacios semieuclídeos de índice nulo.

Si V es un espacio vectorial semieuclídeo de rango n e índice ν , un isomorfismo que transforme una base ortonormal en la base canónica de \mathbb{R}_ν^n es claramente una isometría, por lo que todo espacio semieuclídeo es isométrico a un (único) espacio \mathbb{R}_ν^n .

Si V es un espacio semieuclídeo, tenemos que $V^\perp = 0$ o, equivalentemente, que $\phi : V \rightarrow V^*$ es un isomorfismo. Más aún, si $W \subset V$, podemos considerar $\phi_W : V \rightarrow W^*$ dada por $\phi_W(v) = \bar{v}|_W$. Teniendo en cuenta que todo elemento de W^* se puede extender a V^* , resulta que ϕ_W es un epimorfismo, y su núcleo es W^\perp , luego

$$\dim V = \dim W + \dim W^\perp = \dim(W + W^\perp) + \dim(W \cap W^\perp).$$

Esto implica que $(W^\perp)^\perp = W$, pues claramente $W \leq (W^\perp)^\perp$ y ambos subespacios tienen la misma dimensión.

De aquí obtenemos una caracterización sencilla de los subespacios que heredan la estructura semieuclídea:

Teorema A.19 *Si V es un espacio semieuclídeo y $W \leq V$, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. W se convierte en un espacio semieuclídeo con la restricción del producto escalar de V .
2. $W \cap W^\perp = 0$.
3. $W + W^\perp = V$.

DEMOSTRACIÓN: En general, la restricción del producto escalar de V dota a W de estructura de espacio pseudoeuclídeo. Será semieuclídeo si y sólo si no existen vectores no nulos en W ortogonales a todos los vectores de W , es decir, si y sólo si $W \cap W^\perp = 0$. Esto prueba la equivalencia entre 1) y 2), y la equivalencia entre 2) y 3) es trivial, dada la relación entre las dimensiones de los espacios implicados. ■

Observemos que estas propiedades se cumplen trivialmente cuando V es euclídeo, y en tal caso W es también un espacio euclídeo.

Definición A.20 Si V es un espacio semieuclídeo y $W \leq V$ satisface las condiciones del teorema anterior, diremos que se trata de un *subespacio semieuclídeo* de V .

En estas condiciones se cumple que $V = W \oplus W^\perp$, de modo que cada vector de V se descompone de forma única como suma de un vector de W y otro de W^\perp . La proyección $p : V \rightarrow W$ asociada a esta descomposición se llama *proyección ortogonal* de V en W .

⁵Lo cual no significa que no existan vectores isotropos. Por ejemplo, \mathbb{R}_1^2 tiene por base ortonormal a la base canónica, pero existen vectores isotropos.

El elemento de volumen de un espacio semieuclicídeo En un espacio vectorial arbitrario no tenemos ningún criterio para preferir un elemento de volumen orientado frente a otro, pero la situación es distinta en un espacio semieuclicídeo orientado.

En efecto, sabemos que dos matrices A y B se corresponden con el mismo producto escalar en dos bases distintas e_1, \dots, e_n y v_1, \dots, v_n si y sólo si cumplen $A = MBM^t$, donde M es la matriz de cambio de base. Si las bases son ortogonales, entonces las matrices A y B son diagonales con la signatura del producto escalar en su diagonal, luego $\det A = \det B = \pm 1$, luego $(\det M)^2 = 1$, luego $\det M = \pm 1$. Así pues, de acuerdo con el teorema A.9,

$$e^1 \wedge \dots \wedge e^n = \pm v^1 \wedge \dots \wedge v^n.$$

Si las dos bases están orientadas, entonces el signo es positivo. Esto justifica la definición siguiente:

Definición A.21 Si V es un espacio vectorial semieuclicídeo orientado, el *elemento de volumen orientado* de V es $\Omega = e^1 \wedge \dots \wedge e^n$, donde e_1, \dots, e_n es cualquier base ortonormal orientada de V . A la medida μ_Ω la llamaremos *medida de Lebesgue* de V .

Acabamos de justificar que Ω no depende de la elección de la base. La medida μ_Ω es la única medida de Borel en V invariante por traslaciones para la que los cubos $P(e_1, \dots, e_n)$ definidos por bases ortonormales tienen medida 1.

Es claro que la medida de Lebesgue de los espacios \mathbb{R}_ν^n es la medida de Lebesgue usual.

El teorema siguiente nos da la expresión del elemento de volumen respecto de una base orientada arbitraria, no necesariamente ortonormal:

Teorema A.22 Sea V un espacio semieuclicídeo orientado y sea v_1, \dots, v_n una base orientada de V . Sea G la matriz del producto escalar en dicha base, es decir, la dada por $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$. Entonces el elemento de volumen orientado de V es

$$\Omega = \sqrt{|\det G|} v^1 \wedge \dots \wedge v^n.$$

(Si V es euclídeo, el valor absoluto es redundante.)

DEMOSTRACIÓN: Sea e_1, \dots, e_n una base ortogonal orientada de V y sea M la matriz de cambio de base, de modo que $G = MAM^t$, donde A es la matriz del producto escalar en la base ortonormal, que es diagonal con la signatura del producto escalar en su diagonal, luego al tomar determinantes queda que $\det G = \pm(\det M)^2$ y, como M tiene determinante positivo, ya que ambas bases están orientadas, $\det M = \sqrt{|\det G|}$. El teorema A.9 nos da que

$$\Omega = e^1 \wedge \dots \wedge e^n = \sqrt{|\det G|} v^1 \wedge \dots \wedge v^n. \quad \blacksquare$$

A.5 Dualidad

En esta sección V será un espacio vectorial semieuclicídeo de dimensión n , índice ν y signatura $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$.

En general, un espacio vectorial V (de dimensión finita) es isomorfo a su dual V^* , pero no existe un isomorfismo canónico, es decir, un isomorfismo que no dependa de una elección arbitraria de una base de V . Esto cambia cuando V es un espacio semieuclicídeo, pues, de acuerdo con A.17, el producto escalar permite definir el isomorfismo $\flat : V \rightarrow V^*$ dado por $(\flat v)(w) = \langle v, w \rangle$. Llamaremos $\sharp : V^* \rightarrow V$ al isomorfismo inverso, de modo que $\sharp \flat v = v$ y $\flat \sharp \omega = \omega$.

El producto escalar es un tensor $\mathcal{T}_2^0(V)$. Cuando queramos verlo como tensor lo representaremos por g , es decir, $g(v, w) = \langle v, w \rangle$. Sus coordenadas respecto de una base e_1, \dots, e_n las representaremos por g_{ij} , de modo que

$$g = \sum_{ij} g_{ij} e^i \otimes e^j.$$

Notemos que (g_{ij}) es simplemente la matriz del producto escalar en la base considerada. Si la base es ortonormal, entonces se trata de una matriz diagonal cuya diagonal es la signatura $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ del producto escalar.

En general, $\flat e_i(e_j) = \langle e_i, e_j \rangle = g_{ij}$, luego

$$\flat e_i = \sum_j g_{ij} e^j.$$

Por consiguiente, si $v = \sum_i a^i e_i$, entonces

$$\flat v = \sum_{ij} a^i g_{ij} e^j.$$

Esto es tanto como decir que la matriz del isomorfismo en las bases e_1, \dots, e_n y su base dual es (g_{ij}) , luego la matriz del isomorfismo inverso es la matriz inversa, que representaremos por (g^{ij}) . Explícitamente, si $\omega = \sum_i a_i e^i$, entonces

$$\sharp \omega = \sum_{ij} a_i g^{ij} e_j.$$

Si e_1, \dots, e_n es una base ortonormal, tenemos que $\flat e_i(e_j) = \epsilon_i \delta^i_j$, luego $\flat e_i = \epsilon_i e^i$, y en particular si V es un espacio euclídeo la base $\flat e_1, \dots, \flat e_n$ es simplemente la base dual de la base dada.

Cambios de tipo en tensores Acabamos de definir isomorfismos inversos

$$\mathcal{T}_0^1(V) \rightarrow \mathcal{T}_1^0(V), \quad \mathcal{T}_1^0(V) \rightarrow \mathcal{T}_0^1(V).$$

Más en general, si $1 \leq a \leq r$, $1 \leq b \leq s + 1$, podemos definir una operación

$$\downarrow_b^a : \mathcal{T}_s^r(V) \rightarrow \mathcal{T}_{s+1}^{r-1}(V)$$

mediante

$$(\downarrow_b^a T)(\omega^1, \dots, \omega^{r-1}, v_1, \dots, v_{s+1}) = T(\omega^1, \dots, \omega^{a-1}, \flat v_b, \omega^a, \dots, \omega^{r-1}, v_1, \dots, v_{b-1}, v_{b+1}, \dots, v_{s+1}).$$

En particular, si $v \in \mathcal{T}_0^1(V)$, entonces

$$(\downarrow_1^1 v)(w) = v(\flat w) = \flat w(v) = \langle v, w \rangle = \flat v(w),$$

luego $\downarrow_1^1 v = \flat v$ es la operación que ya teníamos definida.

Sobre tensores puros tenemos que

$$\begin{aligned} \downarrow_b^a (v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^s) = \\ v_1 \otimes \dots \otimes v_{a-1} \otimes v_{a+1} \otimes \dots \otimes v_r \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^{b-1} \otimes \flat v_a \otimes \omega^b \otimes \dots \otimes \omega^s. \end{aligned}$$

Es fácil calcular las coordenadas en una base e_1, \dots, e_n del tensor obtenido de esta forma. Para evitar que la notación se vuelva farragosa lo ilustramos con un ejemplo: si $T \in \mathcal{T}_2^2(V)$, entonces

$$\begin{aligned} (\downarrow_2^1 T)_{jkl}^i &= (\downarrow_2^1 T)(e^i, e_j, e_k, e_l) = T(\flat e_k, e^i, e_j, e_l) \\ &= T(\sum_m g_{km} e^m, e^i, e_j, e_l) = \sum_m g_{km} T_{jl}^{mi}. \end{aligned}$$

En general, el nuevo índice m se pone en la posición contravariante a de T y en la g la m se acompaña del índice covariante b .

Similarmente, para $1 \leq a \leq r+1$ y $1 \leq b \leq s$, podemos definir

$$\uparrow_b^a : \mathcal{T}_s^r(V) \longrightarrow \mathcal{T}_{s-1}^{r+1}(V)$$

mediante

$$(\uparrow_b^a T)(\omega^1, \dots, \omega^{r+1}, v_1, \dots, v_{s-1}) = T(\omega^1, \dots, \omega^{a-1}, \omega^{a+1}, \dots, \omega^{r+1}, v_1, \dots, v_{b-1}, \sharp \omega^a, v_{b+1}, \dots, v_{s-1}),$$

de modo que $(\uparrow_1^1)(\omega) = \sharp \omega$. Para tensores puros es

$$\begin{aligned} \uparrow_b^a (v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^s) = \\ v_1 \otimes \dots \otimes v_{a-1} \otimes \sharp \omega^b \otimes v_a \otimes \dots \otimes v_r \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^{b-1} \otimes \omega^{b+1} \otimes \dots \otimes \omega^s. \end{aligned}$$

Su expresión en coordenadas, por ejemplo para $T \in \mathcal{T}_3^1(V)$, es

$$\begin{aligned} (\uparrow_2^1 T)_{kl}^{ij} &= (\uparrow_2^1 T)(e^i, e^j, e_k, e_l) = T(e^j, e_k, \sharp e^i, e_l) \\ &= T(e^j, e_k, \sum_m g^{im} e_m, e_l) = \sum_m g^{im} T_{kml}^j. \end{aligned}$$

En general, el nuevo índice m se pone en la posición covariante b de T y en la g la m se acompaña del índice covariante a .

Es claro que estas dos operaciones son mutuamente inversas, es decir, que $\uparrow_b^a \circ \downarrow_b^a$ y $\downarrow_b^a \circ \uparrow_b^a$ son la identidad en los espacios correspondientes, lo que implica que ambas son isomorfismos.

Pensando en las expresiones coordenadas, el isomorfismo \downarrow_b^a suele llamarse la “descenso del índice a -ésimo a la posición b -ésima”, mientras que \uparrow_b^a es la “elevación del índice b -ésimo a la posición a -ésima”.

Producto escalar de tensores En V^* podemos considerar el único producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle^*$ que convierte al isomorfismo canónico $\omega \mapsto \sharp\omega$ en una isometría, es decir, el dado por

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle^* = \langle \sharp\omega_1, \sharp\omega_2 \rangle.$$

Obviamente, así V^* es un espacio semieuclídeo con la misma signatura que V . Si e_1, \dots, e_n es una base ortonormal de V , entonces, tanto e^1, \dots, e^n como $\flat e_1, \dots, \flat e_n$ son bases ortonormales de V^* . Notemos además que

$$\omega(\sharp\eta) = \flat\sharp\omega(\sharp\eta) = \langle \sharp\omega, \sharp\eta \rangle = \langle \omega, \eta \rangle^*.$$

El producto escalar que hemos definido en V^* es —como todo producto escalar— una forma bilineal $g^* : V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$, luego un tensor $g^* \in \mathcal{T}_0^2(V)$. Sus coordenadas en una base dada son

$$g^*(e^i, e^j) = \langle e^{i*}, e^{j*} \rangle = \left\langle \sum_k g^{ik} e_k, \sum_l g^{jl} e_l \right\rangle = \sum_{kl} g^{ik} g_{kl} g^{lj} = g^{ij}.$$

Seguidamente observamos que existe una única forma bilineal

$$g_s^r : \mathcal{T}_s^r(V) \times \mathcal{T}_s^r(V) \rightarrow \mathbb{R} \tag{A.2}$$

tal que

$$g_s^r(v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^s, w_1 \otimes \dots \otimes w_r \otimes \eta^1 \otimes \dots \otimes \eta^s) = g(v_1, w_1) \cdots g(v_r, w_r) g^*(\omega^1, \eta^1) \cdots g^*(\omega^s, \eta^s).$$

En efecto, fijada una base e_1, \dots, e_n de V , existe una única forma bilineal que cumple esta propiedad para tensores de la forma $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}$, pues éstos forman una base de $\mathcal{T}_s^r(V)$, y expresando los vectores v_i, w_i, ω^j y η^j en términos de dicha base, se concluye inmediatamente que la fórmula anterior vale en general, por lo que g_s^r no depende de la elección de la base.

Es claro que g_s^r es una forma bilineal simétrica y, si e_1, \dots, e_n es una base ortonormal de V , es inmediato que los tensores

$$e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}$$

forman una base ortonormal de $\mathcal{T}_s^r(V)$, que se convierte así en un espacio vectorial semieuclídeo al dotarlo del producto escalar g_s^r . Si V es euclídeo, es claro que $\mathcal{T}_s^r(V)$ también lo es.

Definimos $g_0^0(a, b) = ab$, caso que no está cubierto por la definición anterior.

En lo sucesivo usaremos las notaciones $g(T_1, T_2) = \langle T_1, T_2 \rangle$ para referirnos a cualquiera de los productos escalares g_s^r .

Nota Es posible dar una definición alternativa del producto escalar en $\mathcal{T}_s^r(V)$, algo más farragosa, pero ilustrativa: pensemos primero en dos tensores puros:

$$T_1 = v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^s, \quad T_2 = w_1 \otimes \dots \otimes w_r \otimes \eta^1 \otimes \dots \otimes \eta^s.$$

Bajamos (ordenadamente) todos los índices del primero y subimos los del segundo, con lo que pasamos a

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \sharp\omega^1 \otimes \cdots \otimes \sharp\omega^s, \quad \flat w_1 \otimes \cdots \otimes \flat w_r \otimes \eta^1 \otimes \cdots \otimes \eta^s.$$

Ahora multiplicamos los tensores obtenidos:

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \sharp\omega^1 \otimes \cdots \otimes \sharp\omega^s \otimes \flat w_1 \otimes \cdots \otimes \flat w_r \otimes \eta^1 \otimes \cdots \otimes \eta^s,$$

y finalmente contraemos todos los índices ordenadamente:

$$\begin{aligned} & \flat w_1(v_1) \cdots \flat w_r(v_r) \eta^1(\sharp\omega^1) \cdots \eta^s(\sharp\omega^s) = \\ & \langle v_1, w_1 \rangle \cdots \langle v_r, w_r \rangle \langle \omega^1, \eta^1 \rangle^* \cdots \langle \omega^s, \eta^s \rangle^*. \end{aligned}$$

Vemos que el resultado es $\langle T_1, T_2 \rangle$. Ahora bien, el proceso de subir y bajar índices, multiplicar y contraer es bilineal, luego si coincide con el producto escalar sobre los tensores puros, coincide sobre todos los tensores y es, pues, como afirmábamos, una definición alternativa del producto escalar. ■

Producto escalar de tensores antisimétricos Como el espacio de tensores antisimétricos $A^k(V)$ es un subespacio del espacio $\mathcal{T}_k(V)$, podemos calcular el producto escalar

$$\langle \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k, \eta^1 \wedge \cdots \wedge \eta^k \rangle.$$

Para ello usamos el teorema A.6, según el cual

$$\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k = \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sig } \sigma \omega^{\sigma^1} \otimes \cdots \otimes \omega^{\sigma^k}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \langle \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k, \eta^1 \wedge \cdots \wedge \eta^k \rangle &= \sum_{\sigma, \tau \in \Sigma_k} \text{sig } \sigma \text{ sig } \tau \langle \omega^{\sigma^1} \otimes \cdots \otimes \omega^{\sigma^k}, \eta^{\tau^1} \otimes \cdots \otimes \eta^{\tau^k} \rangle \\ &= \sum_{\sigma, \tau \in \Sigma_k} \text{sig } \sigma \text{ sig } \tau \langle \omega^{\sigma^1}, \eta^{\tau^1} \rangle^* \cdots \langle \omega^{\sigma^k}, \eta^{\tau^k} \rangle^* \\ &= \sum_{\sigma, \tau \in \Sigma_k} \text{sig } (\sigma^{-1}\tau) \langle \omega^1, \eta^{\tau(\sigma^{-1}1)} \rangle^* \cdots \langle \omega^k, \eta^{\tau(\sigma^{-1}k)} \rangle^*. \end{aligned}$$

Observemos que $\sigma^{-1}\tau$ recorre $k!$ veces cada permutación de Σ_k , luego

$$\begin{aligned} \langle \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k, \eta^1 \wedge \cdots \wedge \eta^k \rangle &= k! \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sig } \sigma \langle \omega^1, \eta^{\sigma^1} \rangle^* \cdots \langle \omega^k, \eta^{\sigma^k} \rangle^* \\ &= k! \det(\langle \omega^i, \eta^j \rangle^*). \end{aligned}$$

Concluimos que existe una única forma bilineal $A^k(V) \times A^k(V) \rightarrow \mathbb{R}$ determinada por la relación

$$\langle \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k \mid \eta^1 \wedge \cdots \wedge \eta^k \rangle = \det(\langle \omega^i, \eta^j \rangle^*). \quad (\text{A.3})$$

Concretamente, basta definir

$$\langle \omega | \eta \rangle = \frac{1}{k!} \langle \omega, \eta \rangle.$$

Para $k = 0$, con el convenio que hemos adoptado para el producto escalar de tensores, esta definición nos da $\langle a | b \rangle = ab$, que no está recogido en la propiedad precedente.

Obviamente se trata de una forma bilineal simétrica, porque lo es el producto escalar de $\mathfrak{T}_k(V)$, y si e_1, \dots, e_n es una base ortonormal de V , entonces la base de $A^k(V)$ formada por los vectores $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$, con $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, es también ortonormal. Por lo tanto, $A^k(V)$ se convierte en un espacio semieuclídeo con este producto escalar, y es claramente euclídeo si V lo es.

La dualidad de Hodge Según el teorema A.8, la dimensión de $A^k(V)$ es $\binom{n}{k}$, luego $A^k(V)$ y $A^{n-k}(V)$ son espacios vectoriales isomorfos. Ahora vamos a ver que si V es un espacio semieuclídeo, existe un isomorfismo canónico entre ellos.

Teorema A.23 *Sea V un espacio semieuclídeo orientado y sea $\Omega \in \Lambda^n(V)$ su elemento de volumen orientado. Para cada $1 \leq k \leq n$ existe un único isomorfismo $*$: $A^k(V) \rightarrow A^{n-k}(V)$ tal que si $\omega, \eta \in A^k(V)$ entonces*

$$\omega \wedge *\eta = \langle \omega | \eta \rangle \Omega.$$

DEMOSTRACIÓN: Para cada $\zeta \in A^{n-k}(V)$ y cada $\omega \in A^k(V)$ sabemos que $\omega \wedge \zeta \in A^n(V)$ se expresa de forma única como $\omega \wedge \zeta = L_\zeta(\omega)\Omega$. Esto define una aplicación lineal $L_\zeta: A^k(V) \rightarrow \mathbb{R}$, y también es lineal la aplicación $L: A^{n-k}(V) \rightarrow A^k(V)^*$. Observemos que es inyectiva, pues si $\zeta \in A^{n-k}(V)$ no es nulo, se expresa en términos de una base como

$$\zeta = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k},$$

donde alguna de las coordenadas no es nula, digamos $\alpha_{j_1 \dots j_k} \neq 0$. Si j'_1, \dots, j'_{n-k} son los índices que faltan, entonces

$$e^{j'_1} \wedge \dots \wedge e^{j'_{n-k}} \wedge \zeta = \alpha_{j_1 \dots j_k} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k} \wedge e^{j'_1} \wedge \dots \wedge e^{j'_{n-k}} \neq 0,$$

pues todos los demás sumandos son nulos, ya que en el producto aparece necesariamente algún índice repetido.

Como $A^{n-k}(V)$ y $A^k(V)^*$ tienen la misma dimensión, concluimos que L es un isomorfismo, luego para cada $\eta \in A^k(V)$ existe un único $*\eta \in A^{n-k}(V)$ tal que, para todo $\omega \in A^k(V)$, se cumple $L_{*\eta}(\omega) = \langle \omega | \eta \rangle$. Claramente $*$ así definido es lineal y cumple la fórmula del enunciado, de donde se sigue a su vez que $*$ es inyectiva, luego es un isomorfismo. ■

Veamos la expresión en coordenadas del isomorfismo anterior. Sobre bases ortonormales es sencilla:

Teorema A.24 Sea e_1, \dots, e_n una base ortonormal orientada de V y $\sigma \in \Sigma_n$. Entonces

$$*(e^{\sigma^1} \wedge \dots \wedge e^{\sigma^k}) = \epsilon_{\sigma^1} \dots \epsilon_{\sigma^k} \text{sig } \sigma e^{\sigma^{(k+1)}} \wedge \dots \wedge e^{\sigma^n}.$$

Equivalentemente, si $\{1, \dots, n\} = \{i_1, \dots, i_k\} \cup \{i_{k+1}, \dots, i_n\}$, entonces

$$*(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}) = \pm \epsilon_{i_1} \dots \epsilon_{i_k} e^{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge e^{i_n},$$

donde el signo es positivo si y sólo si $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_n} = e^1 \wedge \dots \wedge e^n$.

DEMOSTRACIÓN: Es claro que la fórmula del enunciado particularizada a los tensores básicos $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$, con $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, define un isomorfismo que cumple dicha fórmula incluso si los índices no están ordenados. Vamos a llamar $*$ a este isomorfismo y vamos a probar que cumple la fórmula $\omega \wedge * \eta = \langle \omega \mid \eta \rangle \Omega$. De hecho, basta probar que la cumple cuando

$$\omega = e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}, \quad \eta = e^{m_1} \wedge \dots \wedge e^{m_k}.$$

Por la definición provisional que hemos dado,

$$\omega \wedge * \eta = \pm \epsilon_{m_1} \dots \epsilon_{m_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \wedge e^{m_{k+1}} \wedge \dots \wedge e^{m_n},$$

y este tensor es nulo salvo si $\{i_1, \dots, i_k\} = \{m_1, \dots, m_k\}$, pero esto también es cierto para

$$\langle e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \mid e^{m_1} \wedge \dots \wedge e^{m_k} \rangle \Omega.$$

En el caso en que ambas formas sean no nulas, las dos expresiones precedentes cambian de signo cada vez que se intercambian dos de los índices m_u, m_v (con $1 \leq u < v \leq k$), en el caso de la primera, a causa del \pm inicial. Por lo tanto, podemos suponer que $i_u = m_u$ para $1 \leq u \leq k$, y lo que hay que probar es que

$$\begin{aligned} & \pm \epsilon_{m_1} \dots \epsilon_{m_k} e^{m_1} \wedge \dots \wedge e^{m_k} \wedge e^{m_{k+1}} \wedge \dots \wedge e^{m_n} \\ &= \langle e^{m_1} \wedge \dots \wedge e^{m_k} \mid e^{m_1} \wedge \dots \wedge e^{m_k} \rangle e^1 \wedge \dots \wedge e^n, \end{aligned}$$

pero el producto escalar es $\epsilon_{m_1} \dots \epsilon_{m_k}$, luego la igualdad es clara. ■

Observemos que la fórmula $\omega \wedge * \eta = \langle \omega \mid \eta \rangle \Omega$ es válida por linealidad para tensores alternados cualesquiera, aunque no sean homogéneos.

La expresión del isomorfismo $*$ sobre bases arbitrarias es más sofisticada:

Teorema A.25 Si e_1, \dots, e_n es una base orientada de V en la cual el producto escalar tiene matriz G y $\omega \in A^k(V)$, entonces

$$*\omega = \sqrt{|\det G|} \sum_{i_{k+1} < \dots < i_n} \omega^{i_1 \dots i_k} \epsilon_{i_1, \dots, i_n} e^{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge e^{i_n},$$

donde $i_1 < \dots < i_k$ son los índices complementarios de i_{k+1}, \dots, i_n y $\epsilon_{i_1, \dots, i_n}$ es la signatura de la permutación $\sigma(j) = i_j$.

DEMOSTRACIÓN: Llamemos η al miembro derecho de la fórmula del enunciado. Basta ver que cumple la relación $\alpha \wedge \eta = \langle \alpha | \omega \rangle \Omega$ para toda $\alpha \in A^k(V)$. De hecho, basta probarlo cuando α recorre la base $e^{j_1} \wedge \cdots \wedge e^{j_k}$, con índices ordenados $j_1 < \cdots < j_k$. Por una parte:

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \eta &= \sqrt{|\det G|} \omega^{i_1 \cdots i_k} \epsilon_{i_1, \dots, i_n} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_n} \\ &= \omega^{i_1 \cdots i_k} \sqrt{|\det G|} e^1 \wedge \cdots \wedge e^n = \omega^{i_1 \cdots i_k} \Omega. \end{aligned}$$

Por otra parte, $\langle \alpha | \eta \rangle = \frac{1}{k!} \langle \alpha, \eta \rangle$. Para calcular el producto usamos expresamos los tensores en términos del producto tensorial:

$$\alpha = \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sig } \sigma e^{j_{\sigma 1}} \otimes \cdots \otimes e^{j_{\sigma k}},$$

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \sum_{\tau \in \Sigma_k} \text{sig } \tau \omega_{i_1 \cdots i_k} e^{i_{\tau 1}} \otimes \cdots \otimes e^{i_{\tau k}}.$$

Según la nota de la página 496, tenemos que

$$\langle \alpha | \eta \rangle = \frac{1}{k!} C \left(\sum_{\sigma \in \Sigma_k} \text{sig } \sigma e^{j_{\sigma 1}} \otimes \cdots \otimes e^{j_{\sigma k}} \otimes \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \sum_{\tau \in \Sigma_k} \text{sig } \tau \omega^{i_1 \cdots i_k} e_{i_{\tau 1}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\tau k}} \right),$$

donde C representa la composición de las contracciones de cada índice covariante por el índice contravariante que ocupa la misma posición. En definitiva:

$$\langle \alpha | \eta \rangle = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma, \tau \in \Sigma_k} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \text{sig } \sigma \text{sig } \tau \omega^{i_1 \cdots i_k} e^{j_{\sigma 1}}(e_{i_{\tau 1}}) \cdots e^{j_{\sigma k}}(e_{i_{\tau k}}).$$

Vemos que todos los sumandos son nulos salvo si $i_1 = j_1, \dots, i_k = j_k$ y $\sigma = \tau$. Por consiguiente:

$$\langle \alpha | \eta \rangle = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \omega^{i_1 \cdots i_k} = \omega^{i_1 \cdots i_k}. \quad \blacksquare$$

Tenemos definido un isomorfismo para cada k , pero podemos reunirlos todos en un único isomorfismo (de espacios vectoriales, no de álgebras)

$$* : A(V) \longrightarrow A(V),$$

conocido como *operador estrella de Hodge*.

El teorema siguiente recoge algunas de sus propiedades:

Teorema A.26 *Si V es un espacio vectorial semieuclídeo de índice ν , el operador de Hodge cumple las propiedades siguientes:*

1. $*1 = \Omega$.
2. $*\Omega = (-1)^\nu$.
3. $**\omega = (-1)^{\nu+k(n-k)}\omega$, para $\omega \in A^k(V)$.
4. $\langle \omega | *\eta \rangle = (-1)^{k(n-k)} \langle *\omega | \eta \rangle$, para $\omega \in A^k(V)$, $\eta \in A^{n-k}(V)$.
5. $\langle *\omega | *\eta \rangle = (-1)^\nu \langle \omega | \eta \rangle$.

DEMOSTRACIÓN: 1) se obtiene de $\omega \wedge * \eta = \langle \omega | \eta \rangle \Omega$ con $\omega = \eta = 1$, mientras que 2) sale tomando $\omega = \eta = \Omega$. En cuanto a 3), si fijamos una base ortonormal de V , basta probarlo cuando $\omega = e^{\sigma^1} \wedge \dots \wedge e^{\sigma^k}$, donde $\sigma \in \Sigma_k$. Según el teorema A.24, tenemos que

$$**\omega = \epsilon_{\sigma^1} \dots \epsilon_{\sigma^k} \text{sig } \sigma * e^{\sigma^{(k+1)}} \wedge \dots \wedge e^{\sigma^n}.$$

Ahora, $*e^{\sigma^{(k+1)}} \dots e^{\sigma^n} = ce^{\sigma^1} \wedge \dots \wedge e^{\sigma^k}$, para cierto $c \in \mathbb{R}$ que calculamos como sigue:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\sigma^{(k+1)}} \dots \epsilon_{\sigma^n} \Omega &= \left\langle e^{\sigma^{(k+1)}} \wedge \dots \wedge e^{\sigma^n} \mid e^{\sigma^{(k+1)}} \wedge \dots \wedge e^{\sigma^n} \right\rangle \Omega \\ &= e^{\sigma^{(k+1)}} \wedge \dots \wedge e^{\sigma^n} \wedge *(e^{\sigma^{(k+1)}} \wedge \dots \wedge e^{\sigma^n}) \\ &= ce^{\sigma^{(k+1)}} \wedge \dots \wedge e^{\sigma^n} \wedge e^{\sigma^1} \wedge \dots \wedge e^{\sigma^k} = c(-1)^{k(n-k)} \text{sig } \sigma \Omega. \end{aligned}$$

Por lo tanto $c = (-1)^{k(n-k)} \text{sig } \sigma \epsilon_{\sigma^{(k+1)}} \dots \epsilon_{\sigma^n}$ y podemos continuar el cálculo inicial:

$$**\omega = \epsilon_{\sigma^1} \dots \epsilon_{\sigma^n} (\text{sig } \sigma)^2 (-1)^{k(n-k)} e^{\sigma^1} \wedge \dots \wedge e^{\sigma^k} = (-1)^{\nu+k(n-k)} \omega.$$

4) Calculamos:

$$\begin{aligned} \langle \omega | * \eta \rangle \Omega &= \omega \wedge ** \eta = (-1)^{\nu+k(n-k)} \omega \wedge \eta = ** \omega \wedge \eta = \\ &= (-1)^{k(n-k)} \eta \wedge ** \omega = (-1)^{k(n-k)} \langle \eta | * \omega \rangle \Omega. \end{aligned}$$

5) Aplicamos las dos propiedades precedentes:

$$\langle * \omega | * \eta \rangle = (-1)^{k(n-k)} \langle \omega | ** \eta \rangle = (-1)^\nu \langle \omega | \eta \rangle. \quad \blacksquare$$

Conviene observar también que el isomorfismo de Hodge depende de la orientación del espacio V , como se pone de manifiesto en la fórmula

$$\omega \wedge * \eta = \langle \omega | \eta \rangle \Omega.$$

En efecto, el producto $\langle \omega | \eta \rangle$ no depende de la orientación, por lo que si consideramos en V la orientación opuesta, es decir, la que tiene por elemento de volumen orientado a $-\Omega$, el tensor $*\eta$ que cumple la igualdad con $-\Omega$ es el opuesto del que la cumple con Ω .

El producto escalar puede expresarse en términos del operador de Hodge:

Teorema A.27 Para todo par de vectores $u, v \in V$ se cumple que

$$\langle u, v \rangle = (-1)^\nu * (bu \wedge bv).$$

DEMOSTRACIÓN: Basta calcular

$$(-1)^\nu * (bu \wedge bv) = (-1)^\nu * \langle bu | bv \rangle \Omega = \langle bu | bv \rangle = \langle bu, bv \rangle^* = \langle u, v \rangle. \quad \blacksquare$$

Otra relación de interés involucra la evaluación definida en A.10:

Teorema A.28 Si $v \in V$, entonces $i_v(\Omega) = *(bv)$.

DEMOSTRACIÓN: Por linealidad, basta probarlo para los vectores de una base ortonormal e_1, \dots, e_n de V . A su vez, basta probar que

$$i_{e_i}(e^1 \wedge \dots \wedge e^n)(e^{i_1}, \dots, e^{i_{n-1}}) = (*\flat e_i)(e^{i_1}, \dots, e^{i_{n-1}}).$$

El segundo miembro es

$$\begin{aligned} (*\flat e_i)(e^{i_1}, \dots, e^{i_{n-1}}) &= \epsilon_i(*e^i)(e^{i_1}, \dots, e^{i_{n-1}}) \\ &= (-1)^{i-1} \epsilon_i^2(e^1 \wedge \dots \wedge \widehat{e^i} \wedge \dots \wedge e^n)(e^{i_1}, \dots, e^{i_{n-1}}). \end{aligned}$$

Si i es uno de los índices i_1, \dots, i_{n-1} , entonces ambos miembros son claramente nulos, mientras que si i es el índice que falta en i_1, \dots, i_{n-1} , ambos toman el valor $(-1)^{i-1}$. ■

El producto vectorial El operador de Hodge también guarda relación con el producto vectorial en \mathbb{R}^3 . Algunos aspectos de esta relación son válidos en espacios semieuclídeos de cualquier dimensión:

Definición A.29 Si V es un espacio vectorial semieuclídeo de dimensión n y $v_1, \dots, v_{n-1} \in V$, definimos

$$v_1 \times \dots \times v_{n-1} = \sharp * (bv_1 \wedge \dots \wedge bv_{n-1}) \in V.$$

Es importante advertir que, pese a lo que sugiere la notación, no hemos definido un producto en V en el sentido usual, pues la definición precedente sólo vale para bloques de $n-1$ vectores (ni más ni menos). Lo que hemos definido es una aplicación multilinear $V^{n-1} \rightarrow V$, claramente alternada (en el sentido de que al intercambiar dos argumentos la imagen cambia de signo). Las propiedades básicas son las siguientes:

Teorema A.30 Si $v_1, \dots, v_{n-1}, v \in V$, se cumple que

$$\begin{aligned} \langle v_1 \times \dots \times v_{n-1}, v \rangle &= \Omega(v_1, \dots, v_{n-1}, v), \\ \langle v_1 \times \dots \times v_{n-1}, v_1 \times \dots \times v_{n-1} \rangle &= (-1)^\nu \det(\langle v_i, v_j \rangle). \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN: Por la definición de \sharp y \flat tenemos que

$$\begin{aligned} \langle v_1 \times \dots \times v_{n-1}, v \rangle \Omega &= \langle \sharp * (bv_1 \wedge \dots \wedge bv_{n-1}), \sharp bv \rangle \Omega = \\ &= \langle *(bv_1 \wedge \dots \wedge bv_{n-1}) \mid bv \rangle \Omega = bv \wedge ** (bv_1 \wedge \dots \wedge bv_{n-1}) \\ &= (-1)^{\nu+n-1} bv \wedge bv_1 \wedge \dots \wedge bv_{n-1} = (-1)^\nu bv_1 \wedge \dots \wedge bv_{n-1} \wedge bv, \end{aligned}$$

luego, aplicando el operador $*$,

$$\langle v_1 \times \dots \times v_{n-1}, v \rangle = *(bv_1 \wedge \dots \wedge bv_{n-1} \wedge bv) = \Omega(v_1, \dots, v_{n-1}, v).$$

La última igualdad se debe a que si definimos

$$\eta(v_1, \dots, v_n) = *(bv_1 \wedge \dots \wedge bv_n),$$

se cumple que $\eta = \Omega$, pues $\eta \in A^n(V)$ y si e_1, \dots, e_n es una base ortonormal de V se cumple que

$$\eta(e_1, \dots, e_n) = *(\epsilon_1 e^1 \wedge \dots \wedge \epsilon_n e^n) = 1.$$

Para la segunda igualdad calculamos:

$$\begin{aligned} \langle v_1 \times \dots \times v_{n-1}, v_1 \times \dots \times v_{n-1} \rangle &= \\ \langle *(bv_1 \wedge \dots \wedge bv_{n-1}) \mid *(bv_1 \wedge \dots \wedge bv_{n-1}) \rangle &= \\ (-1)^\nu \langle bv_1 \wedge \dots \wedge bv_{n-1} \mid bv_1 \wedge \dots \wedge bv_{n-1} \rangle &= \\ (-1)^\nu \det(\langle bv_i, bv_j \rangle) &= (-1)^\nu \det(\langle v_i, v_j \rangle). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

De aquí se sigue inmediatamente que $v_1 \times \dots \times v_{n-1} = 0$ si y sólo si los vectores v_1, \dots, v_{n-1} son linealmente dependientes, así como que $v_1 \times \dots \times v_{n-1}$ es ortogonal a v_1, \dots, v_{n-1} .

En particular, si v_1, \dots, v_{n-1} son linealmente independientes, los vectores

$$v_1, \dots, v_{n-1}, v_1 \times \dots \times v_{n-1}$$

forman una base de V , que será ortogonal (resp. ortonormal) si los vectores dados son ortogonales (resp. ortonormales) dos a dos.

Si el espacio V es euclídeo, vemos que, al completar una sucesión de $n - 1$ vectores linealmente independientes con su producto vectorial, obtenemos una base orientada (pues Ω toma un valor positivo sobre ella). En particular, al multiplicar $n - 1$ vectores de una base ortonormal obtenemos el vector restante salvo el signo, que será positivo o negativo según si al desplazarlo a la posición final se conserva o se invierte la orientación.

Si e_1, \dots, e_n es una base ortonormal de V y los vectores v_i tienen coordenadas $v_i = \sum_j a^{ij} e_j$, entonces las coordenadas de $v_1 \times \dots \times v_{n-1}$ son

$$\epsilon_i \langle v_1 \times \dots \times v_{n-1}, e_k \rangle = (-1)^\nu \epsilon_k \Omega(v_1, \dots, v_{n-1}, e_k).$$

Ahora observamos que $\Omega(v_1, \dots, v_{n-1}, e_k)$ es el determinante de la matriz que tiene como primeras filas las n -tuplas (a^{i1}, \dots, a^{in}) y como última fila el vector k -ésimo de la base canónica de \mathbb{R}^n . Por lo tanto, una regla mnemotécnica para la expresión en coordenadas de $v_1 \times \dots \times v_{n-1}$ es

$$v_1 \times \dots \times v_{n-1} = (-1)^\nu \begin{vmatrix} a^{11} & \dots & a^{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a^{n-1,1} & \dots & a^{n-1,n} \\ \epsilon_1 e_1 & \dots & \epsilon_n e_n \end{vmatrix},$$

que debe entenderse como que si se desarrolla formalmente el “falso determinante” por su última fila, se obtiene la expresión de $v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$ como combinación lineal de los vectores de la base (mientras que si se desarrolla por cualquier otra fila o columna se obtiene un sinsentido).

Especialmente relevante es el caso $n = 3$, en el que el producto vectorial es realmente un producto en V . Las fórmulas del teorema A.30 se reducen a

$$u \times v = \sharp(i_u \circ i_v)\Omega, \quad \langle u \times v, u \times v \rangle = (-1)^\nu (\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2),$$

y la expresión en coordenadas es

$$u \times v = \begin{vmatrix} \epsilon_1 e_1 & \epsilon_2 e_2 & \epsilon_3 e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Es evidente que en el caso de \mathbb{R}^3 se trata del producto vectorial usual. Notemos que el teorema A.30 afirma en este caso que

$$\|u \times v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2,$$

que equivale a que $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \sin \alpha$, donde α es el ángulo que forman los dos factores.

Apéndice B

Electromagnetismo

Presentamos ahora los conceptos básicos de la teoría clásica del electromagnetismo incidiendo en el aparato matemático subyacente. Para empezar daremos una panorámica de los hechos básicos sin incidir en las cuestiones técnicas.

En el siglo VI a.C., Tales de Mileto observó que, tras frotar con un paño de lana un trozo de ámbar, éste atraía a objetos ligeros, como una pluma. El lector puede repetir ahora mismo el experimento de Tales sustituyendo el ámbar y la pluma por objetos más cotidianos, como un bolígrafo de plástico y trocitos pequeños de papel. Ámbar en griego se dice *ἤλεκτρον*, y de ahí proviene la palabra “electricidad”.

Si la gravitación es la fuerza que nos mantiene pegados al suelo, la electricidad es la fuerza que nos impide atravesarlo. Casi todas las fuerzas que podemos apreciar cotidianamente son de naturaleza eléctrica o gravitatoria. Las únicas excepciones son las fuerzas magnéticas que experimentamos cuando un imán atrae a un objeto metálico o cuando la aguja de una brújula se mueve para orientarse hacia el polo Norte. Sin embargo, enseguida veremos que el magnetismo está estrechamente relacionado con la electricidad, hasta el punto de que en realidad electricidad y magnetismo son manifestaciones de una misma fuerza electromagnética, si bien esto sólo puede entenderse correctamente en términos de la teoría de la relatividad.

El experimento de Tales de Mileto es un ejemplo de cómo dos objetos materiales pueden verse atraídos por una fuerza de naturaleza no gravitatoria. Dicha fuerza recibe el nombre de *fuerza eléctrica*, la cual presenta ciertas semejanzas y ciertas diferencias notables con respecto a la fuerza gravitatoria:

- Mientras la fuerza gravitatoria es siempre atractiva, la fuerza eléctrica puede ser atractiva o repulsiva.
- Así como la fuerza gravitatoria que actúa entre dos partículas es proporcional a sus masas, la fuerza eléctrica depende de una *carga eléctrica* que puede ser positiva o negativa, de modo que partículas con cargas del mismo signo se repelen, mientras que partículas con cargas de signos opuestos se atraen.

- La fuerza eléctrica que una partícula con carga q_1 ejerce sobre otra con carga q_2 viene dada por la *ley de Coulomb*, que es formalmente análoga a la ley de Newton, a saber:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \quad (\text{B.1})$$

de modo que la fuerza eléctrica entre dos partículas, al igual que la gravitatoria, es radial, directamente proporcional a sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de sus distancias.¹ Sin embargo, es fundamental tener presente que esta ley sólo es válida mientras las cargas se encuentren en reposo, es decir, en el contexto de la *electrostática*.

En efecto, el movimiento de una carga eléctrica provoca la aparición de fuerzas magnéticas que actúan también sobre las partículas con carga eléctrica (aunque sólo si están en movimiento), además de modificar las fuerzas eléctricas.²

En general, a cada punto del espacio se le puede asignar un *campo eléctrico* $\vec{E}(\vec{r}, t)$ de modo que toda partícula con una carga eléctrica Q situada en una posición \vec{r} en un instante t está sometida a una *fuerza eléctrica* de la forma

$$\vec{F} = Q \vec{E}(\vec{r}, t). \quad (\text{B.2})$$

Lo que afirma la ley de Coulomb es que el campo eléctrico generado por una partícula en reposo en una posición \vec{r}_0 con carga q viene dado por

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\|\vec{r} - \vec{r}_0\|^3} (\vec{r} - \vec{r}_0), \quad (\text{B.3})$$

pero esta expresión es falsa si la partícula está en movimiento.³ En cualquier caso, la existencia del campo \vec{E} y la ecuación (B.2) son válidas en general, y no sólo en el contexto de la electrostática.

¹La constante ϵ_0 recibe el nombre de *permitividad del vacío*, y su valor depende, naturalmente, de la unidad elegida para la carga eléctrica. La unidad de carga en el sistema internacional es el *culombio* (C), pero su definición actual es un tanto técnica. Una aproximación consiste en definir un culombio como la carga eléctrica que hace que dos cargas unitarias separadas por una distancia de 1 m experimenten una fuerza eléctrica de $9 \cdot 10^9$ N. Con esta definición es inmediato que $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} = 8.84194 \dots \cdot 10^{-12}$. Sin embargo, la definición actual del culombio supone cambiar el 9 por aproximadamente 8.988.

²El hecho de que las fuerzas magnéticas estén producidas por (y afecten a) las cargas eléctricas en movimiento pone en evidencia que la relación entre la electricidad y el magnetismo tiene que ser muy especial: una carga eléctrica puede estar en reposo respecto de un observador inercial y en movimiento respecto de otro, luego el primero no observará ninguna fuerza magnética generada por la partícula y el segundo sí. En general, observadores inerciales distintos no percibirán las mismas fuerzas eléctricas y magnéticas al observar una misma realidad física. La teoría de la relatividad muestra que existe un campo electromagnético absoluto (es decir, percibido igualmente por todos los observadores inerciales salvo las transformaciones obvias) de modo que las fuerzas eléctricas y magnéticas concretas que percibe cada observador dependen tanto del campo electromagnético como del observador.

³Por ejemplo, si tenemos una única partícula en reposo y en un momento dado modificamos su posición para volverla a dejar en reposo, la ley de Coulomb requeriría que el campo eléctrico se modificara instantáneamente en todo el universo, pero esto no es así. La modificación tarda un tiempo en hacerse notar, por lo que hay un intervalo de tiempo en el que en puntos alejados

Distribuciones continuas de carga Es poco frecuente que una situación física involucre sólo unas pocas partículas cargadas. Para tratar con la materia ordinaria, formada por cantidades astronómicas de partículas subatómicas cargadas, es más adecuado utilizar distribuciones continuas. Esto supone considerar una función de *densidad de carga* $\rho(\vec{r}, t)$, de modo que la carga total contenida en un elemento de volumen V venga dado por

$$Q = \int_V \rho dv. \quad (\text{B.4})$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que, en la naturaleza, las cargas positivas se encuentran entremezcladas con las negativas, una función ρ que trate de reflejar cualquier distribución de carga realista tiene que ser muy complicada, con cambios muy bruscos de valores positivos a valores negativos. Para que podamos trabajar con funciones de densidad sencillas conviene considerar dos funciones de densidad independientes $\rho_+(\vec{r}, t)$ y $\rho_-(\vec{r}, t)$, de modo que la cantidad de carga positiva y la cantidad de carga negativa contenidas en un elemento de volumen V arbitrario vengan dadas respectivamente por

$$Q_+ = \int_V \rho_+ dv \quad \text{y} \quad Q_- = - \int_V \rho_- dv.$$

(Notemos que adoptamos el convenio de que tanto ρ_+ como ρ_- son ≥ 0 .)

Definimos entonces la densidad de carga total como $\rho = \rho_+ - \rho_-$, de modo que (B.4) sigue siendo válida.

Con este planteamiento estamos admitiendo que un mismo punto del espacio pueda tener a la vez carga positiva y carga negativa. Por ejemplo, en una región del espacio en la que las cargas positivas y las negativas se compensen y estén distribuidas homogéneamente, podemos considerar funciones de densidad constantes $\rho_+ = \rho_- = k$, de modo que la densidad de carga total sea $\rho = 0$. De este modo tenemos correctamente reflejada la presencia (uniforme) tanto de cargas positivas como de cargas negativas en la región sin necesidad de explicitar la (complicada) forma en que están mezcladas concretamente. De todos modos, nada impide en teoría considerar funciones ρ_+ y ρ_- tales que una valga 0 en todos los puntos donde la otra es positiva, y viceversa, con lo que nuestro planteamiento no nos impide tener en cuenta —si queremos— la distribución concreta de las cargas de uno y otro signo.

Por otra parte, consideramos también separadamente un campo de velocidades \vec{v}_+ correspondiente a las cargas positivas y otro \vec{v}_- correspondiente a las cargas negativas. La situación típica será que el primero sea nulo y el segundo no, pues son las cargas negativas las que suelen moverse, pero, en cualquier caso, podemos definir el campo de *densidad de corriente eléctrica* como

$$\vec{j} = \rho_+ \vec{v}_+ - \rho_- \vec{v}_-.$$

de la partícula el campo eléctrico sigue siendo el correspondiente a la posición original a pesar de que la partícula ya no se encuentra en dicha posición. Pasado el tiempo necesario, el campo se reajusta y la ley de Coulomb vuelve a ser válida (en un entorno de la partícula cada vez más amplio).

Notemos entonces que si en un punto del espacio hay carga neta positiva, su movimiento se realiza en la dirección que indica \vec{j} , pero si la carga neta es negativa el movimiento es en la dirección opuesta a la indicada por \vec{j} .

Es evidente que los campos de densidades y velocidades ρ_+ , \vec{v}_+ y ρ_- y \vec{v}_- son totalmente análogos a los campos de densidad y velocidad de un fluido, con la única diferencia que la densidad que estamos considerando es densidad de carga en lugar de densidad de masa. Por ello, la conservación de la carga eléctrica se expresa por el análogo de la ecuación de continuidad, que en su forma (5.3), es en nuestro caso

$$\frac{\partial \rho_+}{\partial t} + \text{div } \rho_+ \vec{v}_+ = 0, \quad \frac{\partial \rho_-}{\partial t} + \text{div } \rho_- \vec{v}_- = 0,$$

donde la supresión del término ψ expresa la conservación de la carga eléctrica positiva y negativa. Restando ambas ecuaciones tenemos la *ecuación de conservación de la carga eléctrica*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0. \quad (\text{B.5})$$

El flujo del campo \vec{j} a través de una superficie S (orientada con la elección de un vector normal unitario \vec{n}) recibe el nombre de *intensidad de corriente* a través de S :

$$I = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} \, d\sigma.$$

Su interpretación es clara: I es la carga eléctrica que atraviesa la superficie S cada segundo. Se mide en *amperios* (A), donde, en principio, $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$, si bien en el *Sistema Internacional de Unidades* el amperio es una unidad fundamental (definida a partir de un proceso físico, según veremos más adelante) y a partir de ella se define el culombio de la forma obvia:

Un *culombio* es la cantidad de carga eléctrica transportada en un segundo por una corriente eléctrica de 1 A de intensidad.

Es claro que las unidades de la densidad de corriente \vec{j} son A/m^2 , mientras que las de ρ son C/m^3 .

Magnetismo Tal y como hemos indicado, la fuerza eléctrica no es la única que actúa sobre una carga eléctrica, sino que, si ésta se encuentra en movimiento, experimentará también una *fuerza magnética* que es siempre perpendicular a su velocidad. La relación básica que determina la fuerza magnética que actúa sobre una partícula de carga q que en un instante t se encuentra en una posición \vec{r} moviéndose con velocidad \vec{v} es la *ley de Laplace*, según la cual dicha fuerza es

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}), \quad (\text{B.6})$$

donde $\vec{B}(\vec{r}, t)$ es el *campo magnético*, que se mide en *teslas* $\text{T} = \text{N} \cdot \text{s/C} \cdot \text{m}$. Así pues, la fuerza total que actúa sobre una partícula con carga eléctrica en un instante y posición dados es

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Si consideramos una distribución continua de cargas, entonces un volumen dv contiene una carga positiva $dq_+ = \rho_+ dv$ y una carga negativa $dq_- = -\rho_- dv$, luego la fuerza magnética que actúa sobre él según (B.6) es

$$d\vec{F} = (\rho_+ \vec{v}_+ dv - \rho_- \vec{v}_- dv) \times \vec{B} = \vec{j} \times \vec{B} dv$$

y la fuerza magnética que actúa sobre un elemento de volumen V es

$$\vec{F} = \int_V \vec{j} \times \vec{B} dv, \quad (\text{B.7})$$

que es la versión continua de la ley de Laplace.

El equivalente en magnetismo de la ley de Coulomb es la *ley de Biot y Savart*, que solamente es válida en el contexto de la *magnetostática*, es decir, bajo el supuesto de que tanto la densidad de carga ρ como la densidad de corriente \vec{j} permanezcan constantes en el tiempo. En estas condiciones, la ley de Biot y Savart afirma que el campo magnético en un punto del espacio viene dado por la expresión

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{j}(\vec{x}) \times (\vec{r} - \vec{x})}{\|\vec{r} - \vec{x}\|^3} dv, \quad (\text{B.8})$$

donde μ_0 es una constante llamada *permeabilidad magnética del vacío*.

Veremos más adelante que la definición de amperio hace que μ_0 tome el valor exacto

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2.$$

Teniendo en cuenta que $\vec{j}dv = \vec{v}_+ dq_+ + \vec{v}_- dq_-$, el integrando de (B.8) se interpreta como que la contribución al campo magnético en el punto \vec{r} de cada partícula de carga dq (positiva o negativa) situada en la posición \vec{x} y moviéndose a velocidad \vec{v} es

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{v} \times (\vec{r} - \vec{x})}{\|\vec{r} - \vec{x}\|^3} dq,$$

es decir, que su contribución es perpendicular a la velocidad y a la posición relativa de \vec{r} respecto de \vec{x} y su intensidad es directamente proporcional al seno del ángulo entre estos dos vectores e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. No obstante, la ley de Biot y Savart para una partícula individual, aunque se mueva a velocidad constante, es falsa, pues en tales circunstancias tanto la densidad de carga como la densidad de corriente varían con el tiempo en cada punto.

B.1 Electrostática

Estudiamos ahora las consecuencias de la ley de Coulomb (B.1). Según hemos advertido, sólo es válida cuando las cargas eléctricas involucradas están en reposo. Ahora bien, si consideramos una distribución continua de carga, determinada por una densidad de carga ρ y una densidad de corriente \vec{j} , la

versión continua de la ley de Coulomb puede enunciarse estableciendo que el campo eléctrico en cada punto del espacio viene dado por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho}{\|\vec{r} - \vec{x}\|^3} (\vec{r} - \vec{x}) dv, \quad (\text{B.9})$$

y, en esta formulación, la ley de Coulomb es válida en un contexto ligeramente más general:

La *electrostática* es el estudio de la fuerza eléctrica bajo la hipótesis de que las funciones ρ y \vec{j} permanezcan constantes en el tiempo (y, por consiguiente, el campo $\vec{E}(\vec{r})$ dado por (B.9) también permanece constante).

Obviamente, si sólo estamos considerando una carga, la única forma en que esto puede suceder es que se encuentre en reposo, pero en general las leyes de la electrostática son válidas aunque existan corrientes eléctricas estacionarias (= \vec{j} constante) que no modifiquen la densidad de carga. El ejemplo típico de esta situación es una corriente continua de electrones que fluyen a velocidad constante por un hilo conductor, de modo que la densidad de carga en cada punto es siempre nula.⁴

Como en el caso del campo gravitatorio, admitiendo que toda la carga eléctrica se concentra en una región acotada del espacio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, el teorema [An 8.14] prueba que la integral (B.9) está bien definida y que

$$\vec{E} = -\nabla V,$$

donde el potencial (electrostático) V viene dado por⁵

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{x}\|} dq. \quad (\text{B.10})$$

El hecho de que el campo electrostático es conservativo puede expresarse en términos de la ecuación diferencial

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0}, \quad (\text{B.11})$$

que es una de las ecuaciones fundamentales de la electrostática. La segunda se deduce de la expresión (B.10) para el potencial eléctrico, pues [An 8.14] implica que V verifica la ecuación

$$\Delta V = \rho/\epsilon_0$$

o, equivalentemente,

$$\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0.$$

⁴Aquí es esencial nuestro convenio de definir $\rho = \rho_+ - \rho_-$, sin el cual ρ no podría nunca ser constante en presencia de una corriente eléctrica.

⁵La unidad de potencial eléctrico en el sistema internacional es el *voltio* $V = J/C$.

Esto sugiere definir la *densidad de flujo eléctrico* como el campo $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$, de modo que

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (\text{B.12})$$

Aunque esta ecuación la hemos deducido de la ley de Coulomb, que sólo es válida en el contexto de la electroestática, la experiencia muestra que, al contrario de lo que sucede con (B.11), es válida en general, y constituye una de las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo.

Antes de interpretar (B.12) observemos que las ecuaciones (B.11) y (B.12) implican (B.9), es decir, determinan completamente el campo electrostático en un instante dado a partir de la densidad de carga ρ . Ello se debe a que, según el teorema 5.55, un campo vectorial está completamente determinado por su divergencia y su rotacional. Como sabemos que el campo dado por (B.9) cumple (B.11) y (B.12), la unicidad implica que es la única solución posible de dichas ecuaciones, y ésta es la razón por la que se las considera las *ecuaciones fundamentales de la electroestática*.

Pasemos ya a la interpretación de (B.12). Para ello definimos el *flujo eléctrico* a través de una superficie S (respecto a la orientación determinada por un campo normal unitario \vec{n}) como

$$\Phi = \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} \, d\sigma.$$

Así, el teorema de la divergencia aplicado a un elemento de volumen arbitrario V nos da que

$$Q = \int_V \rho \, dv = \int_{\partial V} \vec{D} \cdot \vec{n} \, d\sigma.$$

Esto se conoce como la *ley de Gauss*, que no es sino la expresión integral equivalente de (B.12):

El flujo eléctrico a través de la superficie de un elemento de volumen arbitrario es igual a la carga neta que éste contiene.

Ejemplo Vamos a usar la ley de Gauss para determinar el campo eléctrico que genera una esfera de radio R que contiene una carga eléctrica Q con simetría radial, es decir, de modo que la densidad de carga depende sólo de la distancia r al centro de la esfera. Por simetría, el campo eléctrico \vec{E} que genera ha de ser radial, y su intensidad E sólo puede depender de r . Si suponemos, por ejemplo, que $Q > 0$, entonces estará dirigido hacia el exterior de la esfera, luego la ley de Gauss aplicada a una esfera V de radio $r > R$ nos da que

$$Q = \epsilon_0 \int_{\partial V} \vec{E} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \epsilon_0 E \int_{\partial V} d\sigma = 4\pi r^2 \epsilon_0 E,$$

luego

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}.$$

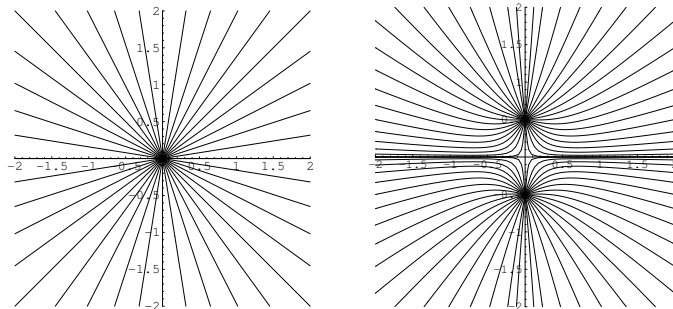
Si $Q < 0$ llegamos al mismo resultado, sólo que el campo apuntaría hacia el centro de la esfera. Así pues, el campo eléctrico en el exterior de una esfera con una carga Q distribuida radialmente es el mismo que generaría una partícula puntual con la misma carga situada en su centro. Claramente, el potencial es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}.$$

Esto se interpreta como que la ley de Coulomb (B.3) se deduce de la versión continua (B.9) interpretando una partícula puntual como una esfera con carga uniforme y de radio despreciable. ■

Líneas de fuerza A veces es útil pensar en el campo \vec{D} como si fuera el campo de velocidades de un hipotético “fluido de fuerza⁶ eléctrica” (que no hay que confundir con el flujo de cargas eléctricas). Si convenimos en asignar a este fluido de “fuerza eléctrica” una densidad constante unitaria, la ecuación de continuidad se reduce a $\text{div } \vec{D} = 0$, lo cual, según (B.12) se cumple en las regiones libres de carga eléctrica. Así pues, donde no hay cargas, el fluido de “fuerza eléctrica” no se crea ni se destruye. Sin embargo, la ley de Gauss afirma que las regiones cargadas positivamente son fuentes de “fuerza eléctrica” (pues cualquier elemento de volumen que contenga una carga positiva deja salir por unidad de tiempo tanta “fuerza eléctrica” por su superficie como carga contiene), mientras que las regiones cargadas negativamente son —recíprocamente— sumideros. Consecuentemente, en esta analogía la carga eléctrica es “masa de fuerza eléctrica” por segundo. Las trayectorias del flujo de “fuerza eléctrica” (es decir, las llamadas “líneas de fuerza” o “líneas de flujo”, que no son sino las curvas que en cada punto tienen por vector tangente al vector \vec{D}) surgen de las cargas positivas y terminan en las cargas negativas (o se van al infinito).

Así, por ejemplo, la figura de la izquierda representa igualmente las trayectorias de un fluido en presencia de una fuente o de un sumidero puntual o las líneas de fuerza del campo eléctrico generado por una carga puntual. Si se trata de una fuente (resp. de una carga positiva), la velocidad (resp. el campo eléctrico) apunta siempre en sentido contrario a la fuente (a la partícula) y viceversa.

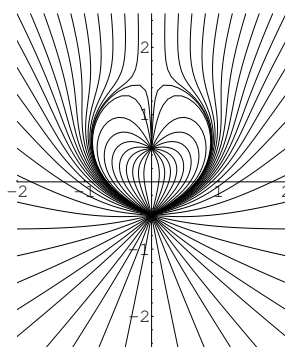


⁶Este uso de la palabra “fuerza” es tradicional, aunque no tiene ninguna conexión directa con el concepto técnico de fuerza. Por ello lo escribiremos siempre entre comillas.

Del mismo modo, la figura de la derecha puede interpretarse como una representación de las trayectorias de un fluido en presencia de dos fuentes o dos sumideros puntuales, o bien como las líneas de fuerza del campo eléctrico determinado por dos cargas del mismo signo.

Notemos que, en puntos alejados de las dos cargas, el campo eléctrico es muy similar al que produciría una única carga (concretamente, una carga igual a la suma de las dos cargas). Puede probarse que esto es cierto en general: el campo eléctrico generado por una distribución de cargas, lejos de éstas, es aproximadamente igual al campo que genera una única carga puntual igual a la carga neta total.

En otras palabras, lo que estamos afirmando es que el campo eléctrico de toda distribución de carga cuya carga neta sea no nula se ve desde lejos como un monopolo eléctrico. Por ejemplo, la figura muestra las líneas de fuerza del campo formado por dos cargas puntuales de signo opuesto, pero donde la inferior es cuatro veces mayor que la superior. Todas las líneas de fuerza que pasan por el borde de la figura acaban en la carga inferior, de modo que la anomalía que provoca la presencia de la carga superior es meramente local, y desde lejos el sistema formado por ambas se ve como un monopolo, casi idéntico al de la figura izquierda de la página anterior.



Cuando la carga total es nula, lo que estamos diciendo es que, trivialmente, muy lejos de las cargas el campo eléctrico es prácticamente nulo, pero si queremos una aproximación del campo donde éste es sensible, necesitamos una aproximación más fina, y ésta la proporciona el campo que estudiamos a continuación.

Dipolos Consideremos el campo eléctrico generado por dos cargas puntuales de signo opuesto $\pm q$, cuyas líneas de fuerza resultan ser las representadas en la figura.

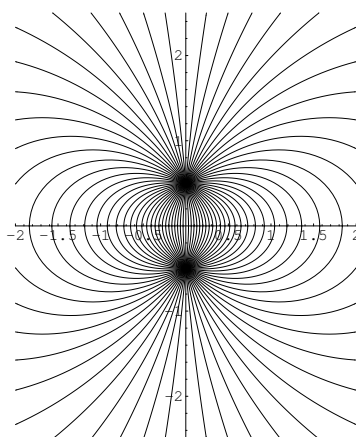
Tomemos un sistema de referencia situado en el punto medio de las cargas, de modo que sus posiciones sean $(0, 0, -d/2)$ y $(0, 0, d/2)$. Los campos que generan separadamente son

$$\vec{E}_+ = -\nabla V_+, \quad \vec{E}_- = -\nabla V_-,$$

donde

$$V_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+}, \quad V_- = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-},$$

donde a su vez $r_+^2 = x^2 + y^2 + (z + d/2)^2$, $r_-^2 = x^2 + y^2 + (z - d/2)^2$. Por lo



tanto, el campo total \vec{E} es el gradiente del potencial

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_+ - r_-}{r_+ r_-} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{r^2}{r_+ r_-} (r_+ - r_-).$$

Ahora observamos que

$$r_+^2 - r_-^2 = (r_+ - r_-)(r_+ + r_-) = 2dz = 2dr \cos \theta,$$

donde θ es la coordenada esférica. Desarrollando análogamente $r_+^2 - r_-^2$ obtenemos que

$$\frac{r_{\pm}^2}{r^2} = 1 + \frac{d}{r} \cos \theta - \frac{d^2}{4r^2},$$

de donde se sigue que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r_{\pm}}{r} = 1,$$

y análogamente sucede con r_- . Volviendo a la expresión de V , vemos que

$$V = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{r^2}{r_+ r_-} \frac{2dr \cos \theta}{r_+ + r_-} = -\frac{qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{r^2}{r_+ r_-} \frac{2}{\frac{r_+}{r} + \frac{r_-}{r}}.$$

Así pues, para puntos situados lejos de la fuente y el sumidero, es decir, cuando r es suficientemente grande, se cumple que

$$V \approx V_0 = -\frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (\text{B.13})$$

donde hemos llamado $p = qd$. Consideremos ahora el campo \vec{E}_0 definido por este potencial aproximado V_0 . De la expresión general para el gradiente en coordenadas esféricas:

$$\nabla V_0 = \frac{\partial V_0}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V_0}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_0}{\partial \phi} \vec{u}_\phi$$

se sigue en nuestro caso que

$$\vec{E}_0 = -\nabla V_0 = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2 \cos \theta}{r^3} \vec{u}_r + \frac{\sin \theta}{r^3} \vec{u}_\theta \right) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} \vec{u}_z - \frac{3z}{r^4} \vec{u}_r \right),$$

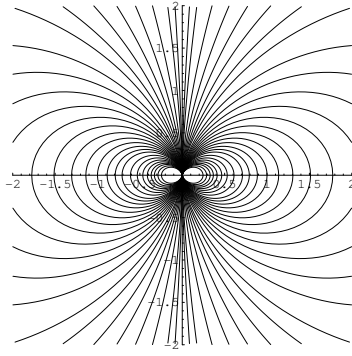
donde $\vec{u}_z = (0, 0, 1) = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta$. Todas estas expresiones son relativas al sistema de referencia que hemos tomado, con la fuente y el sumidero en el eje Z . Vamos a dar expresiones para el potencial y el campo que no dependan del sistema de referencia. Para ello llamamos \vec{p} al vector que apunta de la carga negativa hacia la positiva y cuyo módulo es p . En nuestro sistema de coordenadas es $\vec{p} = (0, 0, -p)$ y $\vec{p} \cdot \vec{u}_r = -p \cos \theta$. Así pues, el potencial es

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}, \quad (\text{B.14})$$

y esta expresión es independiente del sistema de referencia. De aquí se sigue a su vez que

$$\vec{E}_0 = -\nabla V_0 = \frac{1}{r^3} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^2} - \vec{p} \right). \quad (\text{B.15})$$

Este campo recibe el nombre de *dipolo eléctrico*. La figura muestra algunas de sus líneas de fuerza en el plano XZ . Salen todas del origen con el campo apuntando hacia el semiespacio Z negativo y terminan todas en el origen llegando desde el semiespacio Z positivo (excepto dos de ellas: una que recorre el semieje Z positivo acercándose al origen y otra que recorre el semieje Z negativo alejándose del origen). Es fácil comprobar que el flujo de \vec{D}_0 es nulo incluso sobre esferas que contengan al origen. Esto se interpreta como que el dipolo eléctrico es el campo generado por dos cargas opuestas de la misma magnitud situadas ambas en un mismo punto.



Puede probarse que el campo eléctrico generado por una distribución de cargas globalmente neutra (es decir, en el que la carga total positiva es igual a la carga total negativa), se aproxima a distancia suficiente por un dipolo eléctrico, concretamente con el correspondiente a

$$\vec{p} = \int_{\Omega} \rho(\vec{r}) \vec{r} dv,$$

donde Ω es una región que contiene a todas las cargas. Este vector \vec{p} recibe el nombre de *momento dipolar eléctrico* de la distribución de cargas.⁷

Cuando una distribución de cargas con carga neta nula tiene momento dipolar no nulo, se dice que está *polarizada*. En estos términos, tenemos que el campo eléctrico generado por cualquier distribución de cargas polarizada se aproxima en puntos distantes por el campo de un dipolo cuyo momento es el momento dipolar de la distribución. Con más propiedad, podríamos decir que el punto en el que concurren todas las líneas de fuerza del campo es un *dipolo*, y con esto queremos decir que, mientras un monopolo es o bien positivo o bien negativo, según si las líneas de fuerza salen de él o llegan a él, un dipolo tiene

⁷Observemos que si la distribución de carga tiene carga neta nula, el momento dipolar es independiente del punto elegido como origen del sistema de coordenadas, pues un cambio en dicho origen sumaría a todas las coordenadas un vector fijo \vec{v} , y el valor de \vec{p} se ve incrementado en $q\vec{v}$, donde q es la carga total de la distribución. La versión discreta de esta definición, para sistemas de cargas puntuales, es

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i.$$

Notemos que, para el caso de un sistema de dos cargas opuestas, esta definición se reduce a la definición de momento que hemos dado en el ejemplo. Para un sistema que sea unión de pares de cargas opuestas, el momento dipolar es la suma de los momentos de cada par.

un *polo positivo*, es decir, una zona de la que salen líneas de fuerza (la señalada por el momento dipolar) y un *polo negativo* (la diametralmente opuesta al polo positivo) al que llegan líneas de fuerza. Las líneas de fuerza que salen del polo positivo con poca inclinación entran enseguida en el polo negativo, por lo que no son apreciables desde lejos. Desde lejos se aprecian dos haces de líneas de fuerza que salen en una dirección y entran por la dirección opuesta.

Polarización del medio Supongamos que una distribución de cargas determinada por una función de densidad ρ está sumergida en un medio dieléctrico (es decir, aislante, cuyos átomos retienen a sus electrones y les impiden alejarse) sin carga eléctrica neta. Llamemos \vec{E}_0 al campo eléctrico generado por ρ . En presencia del campo \vec{E}_0 , los átomos del medio se polarizan, es decir, redistribuyen de forma asimétrica su carga negativa, de modo que adquieren un momento dipolar no nulo.⁸

En general, la intensidad de la polarización del medio dieléctrico depende de la intensidad del campo eléctrico en cada punto, así que a cada elemento de volumen suficientemente pequeño le podemos asociar un momento dipolar distinto. En un modelo continuo podemos expresar esto mediante un campo de densidad de momento dipolar o, simplemente, un campo de *polarización* del medio \vec{P} de modo que el momento dipolar en un elemento de volumen V venga dado por

$$\vec{p} = \int_V \vec{P} dv.$$

Vamos a considerar un elemento de volumen Ω suficientemente grande como para que contenga a la distribución de cargas y al medio dieléctrico. Así, en el seno de Ω tenemos las “cargas libres” correspondientes a la distribución de carga ρ y las “cargas ligadas” presentes en los átomos del medio y que no pueden desplazarse, pero sí distribuirse de forma que determinen una polarización \vec{P} en cada punto. Aceptando (B.14) como el potencial que genera un elemento de volumen con centro en el origen de coordenadas en el que el momento de polarización es constante igual a \vec{p} , el potencial determinado por un elemento de volumen en el que \vec{p} varía será

$$V_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\vec{P}(\vec{x}) \cdot (\vec{r} - \vec{x})}{\|\vec{r} - \vec{x}\|^3} dv.$$

Ahora observamos que

$$\frac{\vec{r} - \vec{x}}{\|\vec{r} - \vec{x}\|^3} = \nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{x}\|} \right),$$

donde el gradiente hace referencia a las variables de \vec{x} , y la relación

$$\operatorname{div}(f\vec{F}) = \nabla f \cdot \vec{F} + f \operatorname{div} \vec{F},$$

⁸También puede producirse una polarización a nivel molecular: algunas moléculas —como la molécula de agua— están ya polarizadas por la forma geométrica en que se distribuyen sus átomos, pero normalmente los momentos dipolares de las distintas moléculas cancelan mutuamente en promedio. Sin embargo, la presencia de un campo eléctrico puede orientar estos momentos y hacer que tengan una suma apreciable.

nos da entonces que

$$V_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\frac{\vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{x}\|} \right) dv - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\operatorname{div} \vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{x}\|} dv.$$

Por último aplicamos el teorema de la divergencia:

$$V_p(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial\Omega} \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}}{\|\vec{r} - \vec{x}\|} d\sigma - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\operatorname{div} \vec{P}}{\|\vec{r} - \vec{x}\|} dv. \quad (\text{B.16})$$

El primer término depende de la distancia del punto \vec{r} donde calculamos el potencial a la frontera de Ω . Su significado físico es que en el interior de Ω cada dipolo tiene cerca otro que lo compensa parcialmente, mientras que esto no es así en los dipolos situados en la frontera de Ω . (Aun en el supuesto de que el medio se extendiera más allá de Ω , el hecho es que V_p se ha calculado considerando únicamente los dipolos contenidos en Ω .) Si consideramos que el medio se extiende mucho más allá del punto \vec{r} , podemos despreciar este sumando.

El segundo término de (B.16) es formalmente el potencial de un campo eléctrico \vec{E}_p generado por una hipotética distribución de carga en Ω cuya función de densidad es $\rho_p = -\operatorname{div} \vec{P}$. No existe tal distribución de cargas, pero como \vec{E}_p es el mismo campo que generaría tal distribución, podemos afirmar que su divergencia será la misma que tendría dicho campo, es decir, $\operatorname{div} \epsilon_0 \vec{E}_p = -\operatorname{div} \vec{P}$, y el campo total \vec{E} presente en el medio cumple

$$\operatorname{div} \epsilon_0 \vec{E} = \rho - \operatorname{div} \vec{P}.$$

Esto significa que, en principio, no se cumple la ecuación fundamental (B.12), pues para ello el miembro derecho debería ser simplemente ρ . Naturalmente ello se debe a que el campo \vec{E} no está generado únicamente por la distribución de carga ρ , sino también por las cargas ligadas. Para recuperar la ecuación (B.12) tendríamos que sumarle a ρ una función de densidad (muy compleja) que diera cuenta detallada de la distribución de las cargas ligadas. Sin embargo, los cálculos que acabamos de hacer nos dicen cómo evitar esto. Basta definir la *densidad de flujo eléctrico en el medio* como

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

En estos términos, la densidad definida en (B.12) es el caso particular de la densidad de flujo eléctrico en el vacío, donde $\vec{P} = \vec{0}$. Con esta definición generalizada tenemos que $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$, y de nuevo se cumple (B.12), de modo que la ley de Gauss nos permite recuperar la carga neta (libre) contenida en un elemento de volumen como el flujo de \vec{D} por su frontera.

En una amplia gama de materiales (conocidos como *dieléctricos de clase A*), la presencia de un campo eléctrico provoca una polarización que alcanza su estado de equilibrio cuando ésta es proporcional al campo total, es decir, cuando

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E},$$

para una cierta constante (positiva) χ que recibe el nombre de *susceptibilidad eléctrica*. Esto no es así, por ejemplo, cuando el dieléctrico ya tiene una polaridad propia, aun en ausencia de un campo eléctrico, tal y como explicábamos al final del apartado anterior. No obstante, si nos restringimos al caso más frecuente, la expresión para la densidad de flujo eléctrico se reduce a

$$\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi)\vec{E} = \epsilon\vec{E},$$

donde $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi)$ recibe el nombre de *permitividad del medio* y $\epsilon_r = 1 + \chi$ es la permitividad relativa. En resumen, las leyes de la electrostática son aplicables cuando las cargas están sumergidas en un medio dieléctrico sin más que sustituir la permitividad del vacío ϵ_0 por otra permitividad ϵ dependiente del medio. Como $\epsilon > \epsilon_0$, vemos que el efecto de la polarización es atenuar el campo eléctrico.

Por ejemplo, la permitividad relativa del aire es de $\epsilon_r = 1.0006$, por lo que a menudo puede ser despreciada, mientras que la del agua es de $\epsilon_r = 80.1$. ■

B.2 Magnetostática

A continuación estudiamos el magnetismo a partir de la ley de Biot y Savart (B.8), que es válida bajo las mismas condiciones en que es válida la electrostática:

La *magnetostática* es el estudio de la fuerza magnética bajo la hipótesis de que las funciones ρ y \vec{j} permanezcan constantes en el tiempo (y, por consiguiente, el campo $\vec{B}(\vec{r})$ dado por (B.8) también permanece constante).

En este contexto, la ecuación de conservación de la carga eléctrica (B.5) nos da además que

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

Vamos a probar que la integral de (B.8) es finita, siempre bajo el supuesto de que todas las cargas están contenidas en una región acotada $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Un simple cálculo nos da que

$$\frac{\vec{j}(\vec{x}) \times (\vec{r} - \vec{x})}{\|\vec{r} - \vec{x}\|^3} = \nabla_{\vec{r}} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{x}\|} \times \vec{j}(\vec{x}) = \operatorname{rot}_{\vec{r}} \frac{\vec{j}(\vec{x})}{\|\vec{r} - \vec{x}\|}.$$

Definimos el *potencial vectorial* del campo magnético como

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\vec{j}(\vec{x})}{\|\vec{r} - \vec{x}\|} dv, \quad (\text{B.17})$$

de modo que cada una de sus componentes es un potencial newtoniano. Por lo que el teorema [An 8.14] nos garantiza que \vec{A} está bien definido. El teorema [An 5.27] justifica que las derivadas parciales respecto de las coordenadas de \vec{r}

atraviesan las integrales que definen las componentes de \vec{A} , lo cual, junto a la linealidad de la integral, justifica que

$$\text{rot } \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \text{rot}_{\vec{r}} \frac{\vec{j}(\vec{x})}{\|\vec{r} - \vec{x}\|} dv$$

es la integral que aparece en la ley de Biot y Savart (B.8). Esto prueba que la integral está bien definida y además que $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$. Esto implica a su vez que

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (\text{B.18})$$

Por otra parte, el teorema [An 8.14] nos da además que $\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$. Por la definición del laplaciano vectorial tenemos que

$$\text{rot } \vec{B} = \text{rot rot } \vec{A} = \nabla \text{div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \nabla \text{div } \vec{A} + \mu_0 \vec{j}.$$

Además, usando una vez más que las derivadas atraviesan las integrales:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \text{div}_{\vec{r}} \frac{\vec{j}(\vec{x})}{\|\vec{r} - \vec{x}\|} dv = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \vec{j}(\vec{x}) \nabla_{\vec{r}} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{x}\|} dv \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \vec{j}(\vec{x}) \nabla_{\vec{x}} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{x}\|} dv \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\text{div } \vec{j}(\vec{x})}{\|\vec{r} - \vec{x}\|} dv - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega} \text{div}_{\vec{x}} \frac{\vec{j}(\vec{x})}{\|\vec{r} - \vec{x}\|} dv, \end{aligned}$$

donde hemos usado la fórmula para la divergencia de un producto escalar.

La primera integral es nula porque $\text{div } \vec{j} = 0$ y el teorema de la divergencia implica que la segunda también lo es. Concluimos que $\text{div } \vec{A} = 0$ y, por consiguiente,

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

Ahora conviene definir la *intensidad del campo magnético* como el campo

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}, \quad (\text{B.19})$$

de modo que

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}. \quad (\text{B.20})$$

Las ecuaciones (B.18) y (B.20) son las *ecuaciones fundamentales de la magnetostática*, y determinan completamente el campo magnético (es decir, implican la ley de Biot y Savart) por el mismo argumento por el que hemos razonado que las ecuaciones fundamentales de la electrostática determinan el campo eléctrico e implican la versión continua de la ley de Coulomb.

Definimos el *flujo magnético* que atraviesa una superficie S (orientada por un campo de vectores normales unitarios \vec{n}) como

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Así, en virtud del teorema de la divergencia, (B.18) es equivalente a que el flujo magnético a través de la frontera de cualquier elemento de volumen es nulo, que es la *ley de Gauss de la magnetostática*.

La definición de flujo magnético hace que el campo magnético \vec{B} reciba también el nombre de *densidad de flujo magnético*. La unidad de flujo magnético es el *Weber* (W) = T · m².

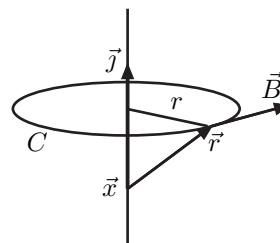
Si pensamos en el campo \vec{B} como el campo de velocidades de un hipotético “flujo de fuerza magnética”, las trayectorias son las “líneas de fuerza magnética”. La ley de Gauss afirma que no hay “*monopolos magnéticos*”, es decir, ni fuentes ni sumideros de “fuerza magnética”, de modo que figuras como las de la página 512 no pueden ser representaciones de las “líneas de fuerza” de un campo magnético. En particular, las líneas de fuerza magnéticas no pueden surgir o desaparecer en un punto, sino que son cerradas o bien se prolongan hasta el infinito.

En cuanto a (B.20), el teorema de Stokes nos proporciona su interpretación física: si S es una superficie limitada por una curva cerrada C , se cumple que la intensidad de corriente que atraviesa S es

$$I = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_C \vec{H} \cdot d\vec{r}. \quad (\text{B.21})$$

Ésta es la *ley de Ampère*.

Ejemplo Vamos a usar la ley de Ampère para calcular el campo magnético que genera una corriente eléctrica que circula por un cable recto de longitud infinita. El integrando de (B.8) muestra que la contribución de un punto \vec{x} situado sobre el cable al campo \vec{B} en un punto \vec{r} situado a una distancia r del cable tiene la dirección de $\vec{j} \times (\vec{r} - \vec{x})$, es decir, la dirección del vector \vec{B} indicado en la figura, tangente a la circunferencia C de radio r centrada en el cable. Por consiguiente, el vector \vec{B} (la integral), tendrá es misma dirección (y el sentido indicado en la figura). Para calcular su módulo usamos la ley de Ampère teniendo en cuenta que B es constante a lo largo de C :



$$I = \frac{1}{\mu_0} \int_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{\mu_0} \int_C B \, dl = \frac{2\pi r B}{\mu_0}.$$

Por consiguiente:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

En conclusión, las líneas de fuerza magnética alrededor de un cable conductor son circulares, y la intensidad del campo es directamente proporcional a la intensidad de la corriente e inversamente proporcional a la distancia al cable.

Consideremos ahora un cable paralelo situado a una distancia d por el que circula otra corriente eléctrica con vector de corriente \vec{j}' . Despreciando el grosor

del cable, podemos suponer que \vec{B} es constante sobre él. De acuerdo con (B.7), la fuerza que el primer cable ejerce sobre una sección V del segundo de longitud l es

$$\vec{F} = \int_V \vec{j}' \times \vec{B} dv.$$

Es claro que será atractiva si \vec{j} y \vec{j}' tienen el mismo sentido, y repulsiva en caso contrario. Para calcular su módulo consideramos una sección arbitraria S del cable orientada con un vector normal \vec{n} en el sentido de \vec{j}' . Entonces

$$F = \int_V j' B dv = Bl \int_S j' d\sigma = \frac{\mu_0 I l}{2\pi d} \int_S \vec{j}' \cdot \vec{n} d\sigma = \frac{\mu_0 I I' l}{2\pi d}.$$

■

El amperio Ahora estamos en condiciones de discutir la definición del amperio en el *Sistema Internacional de Unidades*:

Un *amperio* es la intensidad de corriente que hace que dos conductores paralelos de longitud infinita y sección despreciable separados por una distancia de un metro en el vacío y por los que circulen corrientes de dicha intensidad experimentan una fuerza magnética de $2 \cdot 10^{-7}$ N en cada metro de cable.

Según la fórmula que acabamos de obtener, esta definición de amperio equivale a establecer que la permeabilidad magnética del vacío es exactamente

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2.$$

Esto fija la magnitud del culombio y hace que la permitividad del vacío ϵ_0 deba ser medida (por ejemplo, a partir de la ley de Coulomb), y resulta valer⁹

$$\epsilon_0 = 8.8541878176 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2.$$

■

Demostremos ahora un resultado que necesitaremos en varias ocasiones:

Si V es abierto con $H^2(V) = 0$ tal que \vec{j} es nulo en su complementario, entonces

$$\int_V \vec{j}(\vec{r}) dv = \vec{0}. \quad (\text{B.22})$$

Para ello usamos que, como $\text{div} \vec{j} = 0$, el teorema 5.51 nos da que $\vec{j} = \text{rot} \vec{N}$, para cierto campo vectorial \vec{N} , que podemos suponer nulo fuera de V , en particular en ∂V . Aplicamos el teorema 5.24:

$$\int_V \vec{j} dv = \int_V \text{rot} \vec{N} dv = \int_{\partial V} \vec{n} \times \vec{N} d\sigma = \vec{0}.$$

⁹Más adelante veremos que ϵ_0 también puede ser determinada de forma exacta, sin necesidad de ser medida.

El momento dipolar magnético Del mismo modo que el campo eléctrico generado por una distribución de cargas globalmente neutra puede aproximarse en la distancia por un dipolo eléctrico, sucede que un campo magnético generado por una distribución de corrientes puede aproximarse en la distancia por el potencial

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \vec{m} \times \vec{r}, \quad (\text{B.23})$$

donde

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times \vec{j} dv \quad (\text{B.24})$$

recibe el nombre de *momento dipolar magnético*¹⁰ de una distribución de corrientes contenidas en un elemento de volumen V .

Si fijamos un sistema de referencia en el que $\vec{m} = m \vec{u}_z$ y tomamos coordenadas esféricas,

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} m \sin \theta \vec{u}_\alpha,$$

lo que nos permite aplicar la fórmula del rotacional en coordenadas esféricas para calcular $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, cuyas coordenadas esféricas resultan ser

$$B_r = \frac{2\mu_0 m}{4\pi r^3} \cos \theta, \quad B_\phi = 0, \quad B_\theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \sin \theta.$$

En suma:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta).$$

Sustituyendo las expresiones cartesianas de la base esférica obtenemos

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} \left(\frac{3\vec{r} \cos \theta}{r} - \vec{u}_z \right)$$

y, eliminando de nuevo las coordenadas, llegamos a la expresión

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left(\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^2} - \vec{m} \right), \quad (\text{B.25})$$

que es idéntica a la aproximación (B.15) para el campo eléctrico de un dipolo.

En general, todo cuerpo que genera un campo magnético se dice que está *magnetizado* o *imantado*, y se dice también que es un *imán*, aunque es frecuente sobrentender que el término “imán” hace referencia a un cuerpo *polarizado* (magnéticamente), es decir un cuerpo con momento dipolar magnético no nulo. Acabamos de comprobar que, en tal caso, el campo magnético que genera, visto desde lejos, es aproximadamente dipolar, como muestra la figura de la página 515, de modo que podemos distinguir en él un “polo positivo” y un “polo negativo”, exactamente en el mismo sentido que explicábamos al tratar la polarización eléctrica. El polo positivo (es decir, el polo del que surgen las

¹⁰Notemos que \vec{m} no depende del punto tomado como origen del sistema de referencia debido a (B.22). Es claro que las unidades de \vec{m} son $\text{A} \cdot \text{m}^2$.

líneas de fuerza) se llama también “polo norte” del imán, y el polo negativo (al que llegan las líneas de fuerza), se llama “polo sur” del imán.

No obstante, puede suceder que el momento dipolar de un campo magnético sea nulo, y entonces la aproximación por un dipolo se vuelve trivial (sólo afirma que el campo es aproximadamente nulo a distancia suficiente de las corrientes que lo generan).

Magnetización Análogamente a cómo la estructura atómica y molecular genera pequeños dipolos eléctricos que en determinadas circunstancias pueden acumularse y polarizar la materia, el movimiento microscópico de los electrones genera también un pequeño campo magnético que puede aproximarse por (B.25). Durante un tiempo se creyó que este campo magnético generado por la materia se debía únicamente al movimiento orbital de los electrones alrededor de los átomos, o a su desplazamiento libre por los conductores, pero se ha demostrado que, además de esto, cada electrón genera por sí mismo un campo magnético. Desde un punto de vista clásico esto sólo puede interpretarse como que cada electrón gira sobre sí mismo, si bien un análisis más detenido obliga a introducir el concepto cuántico de *spin*.

En cualquier caso, los modelos continuos que estamos considerando están pensados precisamente para no tener que preocuparnos de la naturaleza microscópica de los fenómenos que estudiamos. En efecto, nos basta con aceptar que la materia genera en cada punto un momento dipolar magnético que podemos determinar en términos de una *densidad de momento magnético* o, simplemente, una *magnetización* \vec{M} , que es un campo tal que el momento dipolar magnético de un elemento de volumen V viene dado por¹¹

$$\vec{m} = \int_V \vec{M} dv.$$

Así, de acuerdo con (B.23), el potencial magnético determinado por la magnetización del medio en un elemento de volumen es

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{M} \times (\vec{r} - \vec{x})}{\|\vec{r} - \vec{x}\|^3} dv.$$

Como en el caso de la polarización eléctrica, usamos que

$$\frac{\vec{r} - \vec{x}}{\|\vec{r} - \vec{x}\|^3} = \nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{x}\|} \right),$$

pero ahora tenemos un producto vectorial en lugar de escalar. La fórmula que necesitamos para tratarlo es:

$$\text{rot}(\phi \vec{F}) = \phi \text{rot} \vec{F} + \nabla \phi \times \vec{F}.$$

¹¹De aquí se sigue que las unidades de \vec{M} son A/m.

Con ella obtenemos que

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot } \vec{M}}{\|\vec{r} - \vec{x}\|} dv - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \text{rot} \frac{\vec{M}}{\|\vec{r} - \vec{x}\|} dv.$$

Finalmente aplicamos el teorema 5.24:

$$\vec{A}_m(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot } \vec{M}}{\|\vec{r} - \vec{x}\|} dv + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\partial V} \frac{\vec{M} \times \vec{n}}{\|\vec{r} - \vec{x}\|} d\sigma. \quad (\text{B.26})$$

Como el en caso eléctrico, podemos despreciar la segunda integral si suponemos que V se extiende hasta el infinito. El resto es el potencial magnético que generaría una hipotética corriente $\vec{j}_m = \text{rot } \vec{M}$. Así pues, el rotacional del campo magnético \vec{B}_m asociado a \vec{A}_m ha de ser el mismo que tendría este campo, es decir, $\text{rot } \vec{B}_m = \mu_0 \text{rot } \vec{M}$.

Si V contiene una auténtica distribución de corriente \vec{j} que genera un campo magnético \vec{B}_0 , el rotacional del campo magnético total \vec{B} será

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \text{rot } \vec{M}).$$

Esto nos lleva a definir la *intensidad del campo magnético* como

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}.$$

Así (B.19) es la intensidad del campo magnético en el vacío, donde $\vec{M} = \vec{0}$, y con esta definición generalizada tenemos que $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$; luego se cumple la ley de Ampère.

En una amplia variedad de medios se cumple que la magnetización global \vec{M} es nula porque los momentos magnéticos de los distintos electrones se cancelan mutuamente, pero la presencia de un campo magnético hace que todos, o gran parte de ellos, se orienten hasta generar un campo de magnetización de la forma

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H},$$

para una constante χ_m llamada *susceptibilidad magnética* del medio, con lo que

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu \vec{H},$$

donde μ es la *permeabilidad magnética del medio* y $\mu_r = 1 + \chi_m$ es la *permeabilidad relativa*.

Cabe destacar que, mientras la susceptibilidad eléctrica siempre es ≥ 0 , la susceptibilidad magnética puede ser positiva o negativa, de modo que las sustancias se clasifican en *ferromagnéticas*, *paramagnéticas* o *diamagnéticas* según que su susceptibilidad magnética sea positiva, cercana a 0 o negativa, respectivamente (o, equivalentemente, su permeabilidad magnética sea mayor que 1, cercana a 1 o menor que 1). Una explicación cabal de estos comportamientos de la materia requiere entrar en consideraciones correspondientes a la mecánica

cuántica. De hecho, ésta explica la existencia de materiales *superconductores* entre cuyas características está que $\chi_m = -1$.

En definitiva, las sustancias ferromagnéticas intensifican los campos magnéticos, como es el caso del hierro, cuya permeabilidad relativa es del orden de $\mu_r = 150$ y los materiales diamagnéticos atenúan los campos magnéticos, como es el caso del grafito, que puede alcanzar una susceptibilidad $\chi_m = -0.0004$. El agua, por ejemplo, se considera paramagnética, con $\chi_m = -9.5 \cdot 10^{-6}$.

Normalmente, la magnetización que induce un campo magnético en una sustancia desaparece cuando éste cesa, pero en determinadas circunstancias puede volverse permanente. El caso más conocido es el de un mineral compuesto por un óxido de hierro (Fe_3O_4) que recibe el nombre de *magnetita*, y que se da en la naturaleza con una magnetización apreciable.

Campos magnéticos generados por circuitos eléctricos Vamos a ver cómo se adaptan las fórmulas de la magnetostática para el caso en el que la carga y la corriente se distribuyen en una curva y no en el espacio en general. Concretamente, consideramos una corriente estacionaria de intensidad I que circula por un circuito cerrado C , representado por una curva parametrizada por una función $\gamma(u)$.

Para poder aplicar, por ejemplo, ley de Biot y Savart, necesitamos considerar al cable como un tubo tridimensional. Podemos parametrizar dicho tubo con la función

$$\vec{X}(u, s, t) = \gamma(u) + s\vec{N}(u) + t\vec{B}(u),$$

donde \vec{T} , \vec{N} , \vec{B} es el triedro de Frenet¹² de γ . La coordenada u recorre un intervalo $[u_0, u_1]$ y s, t recorren un entorno de cero $S \subset \mathbb{R}^2$ muy pequeño, que representa la sección (despreciable) del cable. La matriz jacobiana de \vec{X} es

$$\nabla \vec{X} = \begin{pmatrix} (\|\gamma'\| - s\kappa)\vec{T} - s\tau\vec{B} + t\tau\vec{N} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{pmatrix},$$

donde κ y τ son, respectivamente, la curvatura y la torsión de γ . Calculamos el determinante jacobiano como

$$J = \sqrt{\det(\nabla \vec{X} \cdot \nabla \vec{X}^t)} = \begin{vmatrix} (\|\gamma'\| - s\kappa)^2 + (s^2 + t^2)\tau^2 & t\tau & -s\tau \\ t\tau & 1 & 0 \\ -s\tau & 0 & 1 \end{vmatrix}^{1/2} = \|\gamma'\| - s\kappa.$$

Así pues, según (B.8), el campo magnético generado por el tubo es

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{j}(\vec{x}) \times (\vec{r} - \vec{x})}{\|\vec{r} - \vec{x}\|^3} dv$$

¹²Para considerar el triedro de Frenet hemos de suponer que C tiene curvatura no nula. Puesto que queremos calcular una integral, no importa si la curvatura se anula en puntos aislados. Si es idénticamente nula, C es una recta y podemos tomar vectores constantes arbitrarios \vec{N} y \vec{B} que formen una base ortonormal con \vec{T} .

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{u_0}^{u_1} \int_S \left(\frac{\vec{j}(\vec{x}) \times (\vec{r} - \vec{x})}{\|\vec{r} - \vec{x}\|^3} d\sigma \right) (\|\gamma'\| - s\kappa) du,$$

donde hemos usado que, dado que \vec{N} y \vec{B} son ortonormales, el elemento de superficie de S es $d\sigma = dsdt$. En la última integral hay que entender que $\vec{x} = \vec{X}(u, s, t)$ y, despreciando el grosor del cable, podemos aproximar $\vec{x} \approx \gamma(u)$. Esto nos permite escribir:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{u_0}^{u_1} \left(\left(\int_S \vec{j}(\vec{x}) d\sigma \right) \times \frac{(\vec{r} - \gamma(u))}{\|\vec{r} - \gamma(u)\|^3} (\|\gamma'\| - s\kappa) \right) du.$$

Podemos suponer que la parametrización γ hace que el vector tangente unitario \vec{T} tenga la dirección de \vec{j} . Notemos además que $\vec{n} = \vec{T}$ es un campo de vectores unitarios normales a S . Por lo tanto, $\vec{j} = (\vec{j} \cdot \vec{n}) \vec{T}$ y la integral interior es

$$\int_S \vec{j}(\vec{x}) d\sigma = \int_S (\vec{j} \cdot \vec{n}) d\sigma \vec{T} = I \vec{T}.$$

Si además suprimimos el término $s\kappa$, lo cual sólo significa que el grosor del cable es despreciable en relación con su curvatura, la expresión se reduce a

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{u_0}^{u_1} \left(\frac{\vec{T} \times (\vec{r} - \gamma(u))}{\|\vec{r} - \gamma(u)\|^3} \|\gamma'\| \right) du.$$

Por último observamos que $\vec{T} \|\gamma'\| du = \gamma' du = d\vec{x}$, y así llegamos finalmente la expresión de la ley de Biot y Savart para un circuito:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{x} \times (\vec{r} - \vec{x})}{\|\vec{r} - \vec{x}\|^3},$$

donde hay que entender que $d\vec{x}$ tiene la dirección del vector de corriente \vec{j} . Notemos que, formalmente, el paso de (B.8) a la fórmula anterior ha consistido en cambiar $\vec{j} dv$ por $I d\vec{x}$. El mismo razonamiento nos lleva a un resultado análogo para la expresión del potencial magnético:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{x}}{\|\vec{r} - \vec{x}\|}, \quad (\text{B.27})$$

para la fuerza que actúa sobre un elemento de circuito, no necesariamente cerrado, (cf. (B.7)):

$$\vec{F} = -I \int_C \vec{B} \times d\vec{x} \quad (\text{B.28})$$

y para la expresión del momento magnético (B.24):

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \int_C \vec{x} \times d\vec{x}.$$

Si C es la frontera de una superficie S , se cumple que

$$\int_C \vec{x} \times d\vec{x} = 2 \int_S \vec{n} d\sigma.$$

Para probarlo tomamos un vector constante \vec{v} y aplicamos el teorema de Stokes a $\vec{F} = \vec{x} \times v$:

$$\int_C (\vec{x} \times \vec{v}) \cdot d\vec{x} = \int_S \text{rot}(\vec{x} \times \vec{v}) \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Se cumple que $(\vec{x} \times \vec{v}) \cdot d\vec{x} = -\vec{v} \cdot (\vec{x} \times d\vec{x})$, y un sencillo cálculo muestra que $\text{rot}(\vec{x} \times \vec{v}) = -2\vec{v}$. Por lo tanto, tenemos que

$$\vec{v} \cdot \left(\int_C \vec{x} \times d\vec{x} \right) = \vec{v} \cdot \left(2 \int_S \vec{n} d\sigma \right)$$

y, como \vec{v} es arbitrario, podemos cancelarlo. La conclusión es que

$$\vec{m} = I \int_S \vec{n} d\sigma,$$

Si el circuito es plano, podemos tomar la superficie S plana, en cuyo caso \vec{n} es constante y queda

$$\vec{m} = IA\vec{n} \quad (\text{B.29})$$

donde A es el área encerrada por el circuito y \vec{n} es el vector normal que hace que el sentido de circulación de la corriente sea positivo.

El campo magnético terrestre La Tierra, el Sol y otros cuerpos celestes generan campos magnéticos de cierta intensidad. En el caso de la Tierra, el campo magnético parece estar generado por corrientes eléctricas que se producen en su núcleo externo de hierro fundido. Las teorías que tratan de presentar un modelo realista de cómo se genera el campo magnético terrestre son complicadas, pero aquí vamos a presentar un modelo muy simplificado:

Consideremos una esfera con una carga eléctrica q uniformemente distribuida por su superficie y que gira con velocidad angular constante ω . Vamos a calcular el campo magnético que genera.

Llamemos $\vec{\omega}$ a la velocidad angular vectorial, es decir, al vector cuyo módulo es ω y que apunta en la dirección del eje de giro, en el sentido adecuado para que la velocidad en cada punto \vec{r}' sea $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$. La densidad de corriente será $\vec{j} = \rho\vec{v} = \rho\vec{\omega} \times \vec{r}'$. Que la carga se concentre en la superficie de la esfera significa que ρ es constante en una corona circular de espesor ϵ despreciable. El valor de esta constante ha de ser

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi(R^3 - (R - \epsilon)^3)} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi(3R^2 - 3R\epsilon + \epsilon^2)\epsilon}.$$

Así pues, tomando coordenadas esféricas,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{\omega}}{\frac{4}{3}\pi(3R^2 - 3R\epsilon + \epsilon^2)\epsilon} \times \int_{R-\epsilon}^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{r'^2 \vec{r}' \cdot \text{sen } \theta}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\theta d\phi dr'.$$

Que ϵ sea despreciable significa que podemos aproximar $r' \approx R$, con lo que el integrando deja de depender de r' y la expresión se reduce a

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qR^2\vec{\omega}}{\frac{4}{3}\pi(3R^2 - 3R\epsilon + \epsilon^2)} \times \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\vec{r}' \text{ sen } \theta}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\theta d\phi.$$

Ahora podemos hacer $\epsilon \rightarrow 0$, y el resultado es¹³

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{\omega}}{4\pi} \times \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\vec{r}' \text{ sen } \theta}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\theta d\phi.$$

Esto vale respecto de cualquier sistema de referencia. En particular podemos elegirlo de modo que $\vec{r} = r\vec{u}_z$ y entonces el denominador no depende de ϕ . Explícitamente,

$$\|\vec{r} - \vec{r}'\| = (r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{1/2}.$$

En cuanto al numerador, es

$$R(\cos \phi \text{ sen}^2 \theta, \text{ sen } \phi \text{ sen}^2 \theta, \text{ sen } \theta \cos \theta).$$

La integral respecto de ϕ de las dos primeras componentes es nula, luego sólo queda calcular la tercera. Equivalentemente:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 q R \vec{\omega}}{8\pi} \times \vec{u}_z \int_0^\pi \frac{\text{sen } \theta \cos \theta}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{1/2}} d\theta.$$

Ahora es buen momento para observar que \vec{u}_z en el sistema de referencia particular que hemos elegido es \vec{u}_r en un sistema de referencia arbitrario, luego, respecto a un sistema de referencia arbitrario, independiente de \vec{r} , tenemos que

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 q R}{8\pi} F(r) \vec{\omega} \times \vec{u}_r,$$

donde

$$F(r) = \int_0^\pi \frac{\text{sen } \theta \cos \theta}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta)^{1/2}} d\theta.$$

Hacemos el cambio de variable $\cos \theta = w$ y la integral resultante se integra por partes:

$$\begin{aligned} F(r) &= \int_{-1}^1 \frac{w}{(r^2 + R^2 - 2rRw)^{1/2}} dw = \int_{-1}^1 w(A - Bw)^{-1/2} dw \\ &= \left[-\frac{2}{3B^2} (2A + Bw)(A - Bw)^{1/2} \right]_{-1}^1 \end{aligned}$$

¹³Deshaciendo el cambio a coordenadas esféricas, hemos obtenido que

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} d\sigma,$$

donde $\vec{j} = \rho\vec{v}$ para una función de densidad superficial ρ . Es la adaptación obvia de (B.17) para una distribución superficial de cargas y corrientes análoga a la fórmula (B.27) para distribuciones lineales.

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3B^2} \left((2A - B)(A + B)^{1/2} - (2A + B)(A - B)^{1/2} \right) \\
&= \frac{1}{3r^2 R^2} \left((r^2 + R^2 - rR)(r + R) - (r^2 + R^2 + rR)|r - R| \right).
\end{aligned}$$

Así pues,

$$F = \begin{cases} \frac{2r}{3R^2} & \text{si } r < R, \\ \frac{2R}{3r^2} & \text{si } r > R. \end{cases}$$

En total:

$$\vec{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 q}{12\pi R} \vec{\omega} \times \vec{r} & \text{si } r < R, \\ \frac{\mu_0 q R^2}{12\pi} \vec{\omega} \times \frac{\vec{r}}{r^3} & \text{si } r > R. \end{cases}$$

Esto se expresa de forma más simétrica si llamamos

$$\vec{m} = \frac{qR^2}{3} \vec{\omega}. \quad (\text{B.30})$$

Entonces

$$\vec{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{R^3} \vec{m} \times \vec{r} & \text{si } r < R, \\ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \vec{m} \times \vec{r} & \text{si } r > R. \end{cases}$$

El potencial correspondiente al exterior de la esfera no es sino (B.23), luego sabemos que el campo magnético que genera es de la forma (B.25), es decir, es dipolar con momento dipolar \vec{m} . Notemos que hemos obtenido que este campo es exactamente el campo generado fuera de la esfera, y no una aproximación.

En cuanto al potencial dentro de la esfera, tomamos un sistema de referencia en el que $\vec{m} = m\vec{u}_z$, y así

$$\vec{m} \times \vec{r} = mr \vec{u}_z \times \vec{u}_r = mr \sin \theta \vec{u}_\phi,$$

luego en coordenadas esféricas

$$A_r = A_\theta = 0, \quad A_\phi = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} r \sin \theta.$$

La fórmula del rotacional en coordenadas esféricas nos da entonces que en el interior de la esfera el campo magnético es constante igual a

$$\vec{B} = \frac{2\mu_0 m}{4\pi R^3} \vec{u}_z = \frac{2\mu_0}{4\pi R^3} \vec{m}.$$

No está de más comprobar que (B.30) es realmente el momento dipolar magnético de la esfera de acuerdo con su definición general (B.24). Como la

distribución de cargas es superficial hemos de considerar una integral de superficie:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_S \vec{r} \times (\rho \vec{\omega} \times \vec{r}) d\sigma = \frac{q}{8\pi R^2} \int_S (\vec{\omega}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})) d\sigma,$$

donde hemos usado la fórmula de Lagrange [G 4.12]. La integral del primer término es simplemente

$$\frac{qR^2}{2} \vec{\omega}.$$

Para calcular la segunda tomamos un sistema de referencia en el que $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$ y consideramos coordenadas esféricas. Entonces

$$\begin{aligned} -\frac{q}{8\pi R^2} \int_S \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega}) d\sigma &= -\frac{q\omega}{8\pi} \int_S \cos \theta \vec{u}_r d\sigma = -\frac{q\omega R^2}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta \vec{u}_r d\theta d\phi \\ &= -\frac{q\omega R^2}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta) d\theta d\phi \\ &= -\frac{qR^2}{4} \vec{\omega} \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = -\frac{qR^2}{6} \vec{\omega}. \end{aligned}$$

Al sumar las dos partes obtenemos (B.30).

Aunque, como ya hemos indicado, el problema de la generación del campo magnético terrestre es muy complejo, lo cierto es que las mediciones muestran que se puede considerar aproximadamente como un dipolo como el que acabamos de describir. Su momento dipolar \vec{m} apunta actualmente hacia un punto cercano al polo sur geográfico (el determinado por el eje de rotación de la Tierra). Así pues, el polo sur del campo magnético terrestre (en el sentido general del polo adonde llegan las líneas de fuerza) se encuentra cerca del polo norte geográfico y, para mayor confusión, recibe el nombre de “polo norte magnético terrestre”.

La explicación de este galimatías es que el polo norte de una aguja imantada se define como el extremo de la aguja que apunta hacia el polo norte geográfico cuando se la deja girar libremente, pero esta definición de “polo norte” obliga a que el polo norte terrestre sea un polo sur magnético, ya que, como veremos más adelante, polos opuestos se atraen y polos iguales se repelen.

En definitiva: hay que recordar que, por definición, el polo norte de cualquier imán es el polo del que surgen las líneas de fuerza magnéticas, con excepción de la Tierra, pues se llama polo norte magnético terrestre al polo al que llegan las líneas de fuerza y que, por consiguiente, es realmente un polo sur que atrae a todos los polos norte de todos los imanes.

Hay que añadir que el campo magnético terrestre muestra un comportamiento bastante caótico. La posición de los polos magnéticos sobre la superficie terrestre ha variado mucho a lo largo de la historia del planeta, y en varias ocasiones ha invertido súbitamente su sentido (la última vez fue hace 700 000 años). En cuanto a su intensidad, en el año 2003 era de $m = 8 \cdot 10^{22} \text{ A}\cdot\text{m}^2$, que es el doble de su valor medio en el último millón de años. La magnitud de \vec{B}

en la superficie terrestre oscila entre menos de $30\mu\text{T}$ en las zonas ecuatoriales hasta $60\mu\text{T}$ cerca de los polos. El campo se deja sentir a varias decenas de miles de kilómetros de altura.

Brújulas Vamos a demostrar que las brújulas señalan la dirección del polo “norte” —sur en realidad— magnético terrestre. Una brújula no es más que una aguja imantada (con un momento dipolar no nulo que apunta hacia uno de sus extremos, el que recibe el nombre de polo norte) sostenida de forma que puede girar libremente sobre un punto fijo.

La brújula está sometida al campo magnético terrestre que, dada la corta longitud de la aguja, puede suponerse constante. Las líneas de fuerza del campo magnético terrestre son más o menos paralelas a la superficie terrestre y van del polo sur (geográfico) al polo norte (geográfico), de modo que el campo magnético \vec{B} en un punto de la superficie terrestre puede suponerse constante y dirigido hacia el polo norte geográfico. Lo que hemos de probar es que la aguja se moverá hasta alinear su momento magnético \vec{m} con la dirección de \vec{B} .

En general, la fuerza magnética que actúa sobre un elemento de volumen V que contenga corrientes eléctricas viene dada por la ley de Laplace (B.7). Supongamos que V contiene completamente a las corrientes, de modo que \vec{j} es nulo en su frontera y en su exterior. Lo primero que observamos es que la fuerza total que ejerce sobre V un campo magnético constante \vec{B} es nula, pues ésta es

$$\vec{F} = \left(\int_V \vec{j} dv \right) \times \vec{B} = \vec{0}$$

por (B.22).

En el caso de la brújula, esto significa que si colgamos de un hilo una aguja imantada, el hilo permanecerá vertical, porque la fuerza con la que el polo norte de la aguja es atraído hacia el norte es igual a la fuerza con la que su polo sur es atraído hacia el sur. Lo que hace orientarse a la aguja no es la fuerza que actúa sobre ella, sino el momento que ésta le produce respecto a su punto de apoyo.

En general, fijado un punto arbitrario O como origen de nuestro sistema de referencia, el momento respecto a O que un campo magnético constante induce en el elemento de volumen V viene dado por

$$\vec{T} = \int_V \vec{r} \times d\vec{F} = \int_V \vec{r} \times (\vec{j} \times \vec{B}) dv.$$

Aplicamos la fórmula de Lagrange [G 4.12]:

$$\vec{T} = \int_V (\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{j} dv - \left(\int_V (\vec{r} \cdot \vec{j}) dv \right) \vec{B} \quad (\text{B.31})$$

y vamos a ver que el paréntesis es nulo. Para ello consideramos el siguiente caso particular de (5.5):

$$\nabla \cdot (r^2 \vec{j}) = 2\vec{r} \cdot \vec{j} + r^2 \nabla \cdot \vec{j} = 2\vec{r} \cdot \vec{j},$$

donde hemos eliminado $\nabla \cdot \vec{j} = 0$. Por lo tanto

$$\int_V (\vec{r} \cdot \vec{j}) dv = \frac{1}{2} \int_V \nabla \cdot (r^2 \vec{j}) dv = \frac{1}{2} \int_{\partial V} r^2 \vec{j} \cdot \vec{n} d\sigma = 0,$$

porque \vec{j} se anula en ∂V .

Volvemos a aplicar la fórmula de Lagrange [G 4.12] :

$$\int_V \vec{B} \times (\vec{r} \times \vec{j}) dv = \int_V (\vec{B} \cdot \vec{j}) \vec{r} dv - \int_V (\vec{B} \cdot \vec{r}) \vec{j} dv, \quad (\text{B.32})$$

y vamos a probar que las dos integrales del segundo miembro tienen son iguales salvo el signo. Esto se debe a que

$$\text{div}(r_i r_k \vec{j}) = r_k j_i + r_i j_k + r_i r_k \text{div} \vec{j} = r_k j_i + r_i j_k$$

y, como \vec{j} es nulo en ∂V , el teorema de la divergencia nos da que

$$\int_V r_k j_i dv = - \int_V r_i j_k dv.$$

Por lo tanto

$$\int_V \sum_k B_k r_k j_i dv = - \int_V \sum_k B_k r_i j_k dv$$

o, lo que es lo mismo,

$$\int_V (\vec{B} \cdot \vec{r}) j_i dv = - \int_V (\vec{B} \cdot \vec{j}) r_i dv.$$

Vectorialmente:

$$\int_V (\vec{B} \cdot \vec{r}) \vec{j} dv = - \int_V (\vec{B} \cdot \vec{j}) \vec{r} dv,$$

luego (B.32) se convierte en

$$\int_V \vec{B} \times (\vec{r} \times \vec{j}) dv = -2 \int_V (\vec{B} \cdot \vec{r}) \vec{j} dv, \quad (\text{B.33})$$

y de (B.31) (cuyo último término ya hemos probado que es nulo), llegamos a que

$$\vec{T} = -\vec{B} \times \int_V \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{j} dv,$$

pero, de acuerdo con (B.24), la integral es el momento magnético de V , y así concluimos que el momento de fuerza que un campo magnético constante ejerce sobre la distribución de corrientes es

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}.$$

Para interpretar esta fórmula sólo tenemos que unir dos hechos elementales:

- \vec{T} es perpendicular al plano que contiene a \vec{m} y \vec{B} , y su sentido es el que hace que un giro de \vec{m} hacia \vec{B} sea positivo.
- Un momento de fuerza \vec{T} en un sólido rígido provoca en éste una aceleración angular que tiene por eje de giro el determinado por \vec{T} y cuyo sentido de giro es el positivo respecto a \vec{T} .

La conclusión es que el campo magnético imprime una aceleración angular en la aguja de la brújula que tiende a girarla de modo que \vec{m} (o sea, la aguja) se acerque a \vec{B} . Tras una serie de oscilaciones debidas a la inercia de la aguja, ésta se estabilizará cuando \vec{m} y \vec{T} estén alineados, es decir, cuando la brújula señale hacia el polo norte magnético terrestre.¹⁴

B.3 Las ecuaciones de Maxwell

En las secciones anteriores hemos visto que una distribución de cargas ρ y una distribución de corrientes \vec{j} estacionarias (es decir, que no varían con el tiempo) generan un campo eléctrico \vec{E} y un campo magnético \vec{B} determinados por las ecuaciones

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}, \quad (\text{B.34})$$

y que, a su vez, estos campos actúan sobre una partícula con carga eléctrica q ejerciendo una fuerza dada por la ley de Laplace:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

La elección de \vec{E} o \vec{D} y de \vec{B} o \vec{H} no se debe a razones estéticas (para eliminar constantes), sino que de este modo las ecuaciones valen para medios arbitrarios (no necesariamente el vacío). En medios homogéneos estas ecuaciones se complementan con las relaciones

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}.$$

Las dos primeras ecuaciones de (B.34) constituyen las ecuaciones fundamentales de la electrostática y las dos últimas son las ecuaciones fundamentales de la magnetostática. Observemos que si ρ y \vec{j} no dependen del tiempo, lo mismo le sucede a los campos \vec{E} y \vec{B} . En esta sección veremos que cuando las distribuciones de carga y corriente (y, por consiguiente, los campos eléctrico y magnético) dependen del tiempo, las ecuaciones (B.34) dejan de ser válidas y hay que modificarlas de modo que \vec{E} y \vec{B} aparecen combinados en ellas, por lo que ya no es posible hablar de unas ecuaciones para la electricidad y otras para el magnetismo, sino de un único sistema de ecuaciones fundamentales del electromagnetismo, las llamadas ecuaciones de Maxwell.

¹⁴En las proximidades de los polos, el campo magnético apunta hacia el suelo o hacia el cielo, con una mínima componente tangencial, demasiado débil para que las brújulas puedan detectarla, por lo que dejan de funcionar.

Conviene destacar que, no obstante, dos de las ecuaciones de (B.34) son válidas en general, a saber, las dos correspondientes a las divergencias de los campos. Recordemos que la correspondiente a \vec{E} equivale a la ley de Gauss, es decir, a que el flujo del campo \vec{D} a través de una superficie cerrada es igual a la carga neta que contiene, la cual nos permite interpretar las cargas eléctricas como fuentes y sumideros de las líneas de “fuerza eléctrica”, mientras que la correspondiente a \vec{B} indica precisamente que no existen cargas o “monopolos” magnéticos, es decir, que las líneas de fuerza del campo magnético siempre se cierran sobre sí mismas o se prolongan hasta el infinito. En teoría, nada impediría que una experiencia revelara la existencia de “cargas magnéticas”, en cuyo caso la teoría electromagnética que conocemos sería el caso particular válido en ausencia de tales cargas. No obstante, nadie ha encontrado nunca tales hipotéticas cargas y, hasta donde se sabe, las ecuaciones sobre las divergencias de \vec{E} y \vec{B} son universalmente válidas (al igual que la ley de Laplace).

Dedicamos las dos subsecciones siguientes a explicar las modificaciones que requieren las ecuaciones que describen los rotacionales de los campos eléctrico y magnético.

B.3.1 La ley de inducción de Faraday

Consideremos un hilo conductor C , es decir, una porción de materia que podemos modelizar como una curva de grosor despreciable y que permite el movimiento de las cargas eléctricas a través de él. Si el hilo se mueve en el seno de un campo eléctrico \vec{E} y un campo magnético \vec{B} de modo que la velocidad de las cargas en cada punto sea \vec{v} , la fuerza electromagnética que actúa sobre cada punto del circuito es $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$, aunque sólo la parte tangencial de dicha fuerza provocará un movimiento de cargas, es decir, una corriente eléctrica en el circuito.

Una medida de la magnitud de dicha corriente eléctrica es la llamada *fuerza electromotriz*

$$\mathcal{E} = \int_C (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r},$$

que, como conviene advertir, no es una fuerza, ya que sus unidades no son newtons, sino voltios. Observemos que la velocidad de la carga eléctrica en un punto puede descomponerse como $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_c$, donde \vec{v}_r es la velocidad de la carga relativa al conductor, que será tangente a éste, y \vec{v}_c es la velocidad del conductor en dicho punto (que puede tener cualquier dirección). Entonces podemos descomponer $\vec{v} \times \vec{B} = \vec{v}_r \times \vec{B} + \vec{v}_c \times \vec{B}$ y el primer sumando es normal al conductor, luego $(\vec{v}_r \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = 0$. Esto significa que la integral no se altera si tomamos como \vec{v} la velocidad del conductor en cada punto.

Es claro que una fuerza electromotriz no nula se traduce en la presencia de una corriente eléctrica en el conductor. La intensidad I de dicha corriente viene determinada por la *ley de Ohm*, según la cual $I = \mathcal{E}/R$, donde R es una constante asociada al material del que está hecho el conductor y que recibe el nombre de *resistencia eléctrica*. Se mide en *ohmios* ($\Omega = \text{V/A}$).

Por ejemplo, si suponemos que los campos eléctrico y magnético son estacionarios (no dependen del tiempo) y que el circuito está en reposo, entonces $\vec{v} = 0$ y, según las leyes de la electrostática, $\vec{E} = -\nabla V$, luego la fuerza electromotriz

$$\mathcal{E} = - \int_C \nabla V \cdot d\vec{r} = - \int_C dV = -(V_{\text{final}} - V_{\text{inicial}})$$

es la diferencia de potencial entre los extremos del conductor.

Supongamos ahora que el conductor es un circuito cerrado en movimiento (manteniendo la hipótesis de que los campos son estacionarios). Entonces la circulación de \vec{E} es nula y la fuerza electromotriz se reduce a

$$\mathcal{E} = \int_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}.$$

Aplicamos la fórmula (5.10) que determina la derivada del flujo de un campo vectorial a través de una superficie limitada por una curva cerrada que varía con el tiempo. Teniendo en cuenta que $\text{div } \vec{B} = 0$, uno de sus términos desaparece y se reduce a

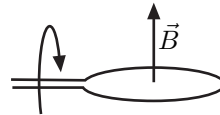
$$\frac{d}{dt} \int_{S_t} \vec{B} \cdot \vec{n} d\sigma = - \int_{C_t} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} + \int_{S_t} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} d\sigma, \quad (\text{B.35})$$

donde S_t es una superficie cuya frontera en cada instante t es el circuito C_t . Puesto que estamos suponiendo que \vec{B} es estacionario, el último término desaparece también, y obtenemos la relación

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (\text{B.36})$$

donde Φ es el flujo magnético a través de cualquier superficie S limitada por el circuito C .

Ejemplo: Alternadores La fórmula precedente es aplicable al caso de una espira que se hace girar respecto de un eje perpendicular a un campo magnético constante (que puede ser generado mediante imanes). Si A el área abarcada por la espira y hacemos girar ésta con velocidad angular ω , es claro que el fluido magnético que la atraviesa en cada instante es



$$\Phi(t) = BA \cos \omega t,$$

luego $\mathcal{E} = BA\omega \text{sen } \omega t$. Si la resistencia del circuito es R , la rotación genera una corriente eléctrica de intensidad

$$I = \frac{BA\omega}{R} \text{sen } \omega t.$$

Se trata de una *corriente alterna*, pues cambia de sentido periódicamente. Éste es el principio en que se basan los *alternadores* para producir energía eléctrica a partir de energía mecánica. ■

En la práctica un alternador no consta de una única espira tal y como hemos considerado en el ejemplo anterior, sino que el cable se enrolla N veces, con lo que la intensidad resultante también se multiplica por N . Más aún, en lugar de hacer girar las espiras en un campo magnético generado por imanes, es más práctico mantener el conductor en reposo y hacer girar los imanes. El efecto es el mismo debido a que la fórmula (B.36) resulta ser válida en general, es decir, en todo circuito cerrado se genera una fuerza electromotriz que es, salvo el signo, la derivada del flujo del campo magnético que lo atraviesa, tanto si la variación del flujo se produce como consecuencia del movimiento del circuito o como consecuencia de la variación del campo magnético (por ejemplo, porque movemos un imán cerca del circuito), o incluso a causa de una deformación del circuito que altere el área que abarca. Este principio general fue descubierto empíricamente por el físico Michael Faraday, y por eso se conoce como *ley de inducción de Faraday*.

Observemos que esta ley no es compatible con la magnetostática: mover un imán cerca de un circuito en reposo provocará sin duda un campo magnético variable, pero, según la ley de Laplace, un campo magnético, fijo o variable, no afecta a una carga eléctrica en reposo. Admitir la universalidad de la ley del flujo exige admitir que las variaciones del campo magnético inducen un campo eléctrico. Para precisar esta idea volvemos a la relación (B.35) sin descartar ahora el último término. Afirmar que el miembro derecho es $-\mathcal{E}$ equivale a admitir la existencia de un campo eléctrico \vec{E} que verifica la relación

$$\int_{S_t} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} d\sigma = - \int_{C_t} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{S_t} \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Para que esto se cumpla sea cual sea la superficie S , es necesario que se dé la igualdad

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\text{B.37})$$

que es la ecuación de Maxwell que generaliza a la segunda ecuación de (B.34) y que, ciertamente, se particulariza a ésta cuando el campo magnético es estacionario. El razonamiento precedente muestra que (B.37) es equivalente a la ley de Faraday.

B.3.2 La corriente de desplazamiento de Maxwell

Para obtener las leyes generales del electromagnetismo sólo nos falta revisar la ecuación $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$, que expresa la ley de Ampère. Es fácil darse cuenta de que no puede ser cierta en general, ya que, tomando en ella la divergencia, obtenemos que $\text{div } \vec{j} = 0$, cuando sabemos que la conservación de la carga eléctrica equivale a la ecuación (B.5):

$$\text{div } \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Aunque Maxwell no conocía las leyes del electromagnetismo en el formato moderno en que las estamos expresando, se dio cuenta de este problema y observó además que la conservación de la carga podía recuperarse añadiendo un

término a ley de Ampère:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

En efecto, si ahora tomamos la divergencia en ambos miembros obtenemos

$$0 = \text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

que es la ecuación de continuidad. De este modo, Maxwell se atrevió a proponer esta modificación a pesar de que no tenía ninguna evidencia experimental de que la ley de Ampère necesitara retoque alguno. En definitiva, las *ecuaciones de Maxwell* son las siguientes:

$$\text{div } \vec{D} = \rho, \quad \text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

donde en medios homogéneos $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$.

La teoría del electromagnetismo de Maxwell postula la validez general de estas cuatro ecuaciones y deduce de ellas todas las propiedades del electromagnetismo.

Los potenciales De $\text{div } \vec{B} = 0$ se sigue la existencia del potencial vectorial magnético \vec{A} , de modo que $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$. La tercera ecuación de Maxwell muestra que en general el campo eléctrico no es conservativo, pero sustituyendo el potencial magnético queda

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

con lo que existe un potencial escalar V tal que

$$\vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (\text{B.38})$$

En el caso en que \vec{A} no dependa de t tenemos el potencial electrostático que ya conocemos. Las ecuaciones de Maxwell permiten expresar los potenciales V y \vec{A} en términos de la distribución de carga ρ y la densidad de corriente \vec{j} . El primer paso es encontrar ecuaciones diferenciales que contengan una sola de las incógnitas V y \vec{A} . Para ello sustituimos la ecuación anterior en la primera ecuación de Maxwell:

$$-\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} = \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (\text{B.39})$$

Por otro lado, sustituyendo (B.38) y $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ en la cuarta ecuación de Maxwell resulta

$$\text{rot rot } \vec{A} = \mu \vec{j} + \mu \epsilon \left(-\nabla \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right).$$

Ahora usamos la definición de laplaciano vectorial:

$$\nabla \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu \vec{j} - \mu \epsilon \nabla \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad (\text{B.40})$$

Las ecuaciones (B.39) y (B.40) se pueden simplificar notablemente si tenemos en cuenta que \vec{A} está determinado únicamente por su rotacional, y el teorema 5.55 nos permite elegir su divergencia. Una buena elección es

$$\operatorname{div} \vec{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (\text{B.41})$$

Esta ecuación se conoce como *condición de Lorentz* y tiene una interpretación en la teoría de la relatividad. Sustituyéndola en las ecuaciones que hemos obtenido resultan dos fórmulas simétricas:

$$\Delta V - \mu \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta \vec{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{j}$$

Estas ecuaciones determinan los potenciales V y \vec{A} a partir de ρ y \vec{j} , y a su vez los potenciales determinan los campos \vec{E} y \vec{B} a través de las ecuaciones

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad \vec{E} = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Los campos \vec{E} y \vec{B} satisfacen ecuaciones similares. Para obtener la de \vec{E} tomamos gradientes en la primera ecuación de Maxwell y aplicamos la definición del laplaciano vectorial:

$$\Delta \vec{E} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho.$$

Aplicamos la tercera ecuación y después la cuarta:

$$\Delta \vec{E} - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho,$$

$$\Delta \vec{E} - \mu \left(\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \right) = \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho.$$

De aquí llegamos a

$$\Delta \vec{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho + \mu \frac{\partial \vec{i}}{\partial t}.$$

Y un razonamiento similar nos da

$$\Delta \vec{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot} \vec{j}.$$

La ecuación de ondas Las últimas ecuaciones que hemos obtenido comparten una estructura general que podemos expresar en términos del *operador d'Alembertiano*, que en el caso n -dimensional se define como

$$\square_v u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right),$$

donde u es una función de $n + 1$ variables con valores reales.¹⁵ La *ecuación de ondas* o *ecuación de D'Alembert* es la ecuación

$$\square_v u = w,$$

para cualquier función $w(x_1, \dots, x_n, t)$.

Hemos probado que los potenciales y los campos eléctricos y magnéticos cumplen las ecuaciones de ondas

$$\square_c V = \frac{c^2 \rho}{\epsilon}, \quad (\text{B.42})$$

$$\square_c \vec{A} = c^2 \mu \vec{j}, \quad (\text{B.43})$$

$$\square_c \vec{E} = -\frac{c^2}{\epsilon} \nabla \rho - c^2 \mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}, \quad (\text{B.44})$$

$$\square_c \vec{H} = c^2 \text{rot } \vec{j}, \quad (\text{B.45})$$

donde $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$.

Observemos que en las regiones donde no hay cargas ni corrientes eléctricas los miembros derechos son nulos.

Es fácil ver que las unidades de ϵ son C^2/Nm^2 y las de μ son Ns^2/C^2 , por lo que las de c son m/s , y por consiguiente, en algún sentido, c es una velocidad. En el vacío su valor es, aproximadamente,

$$c \approx \sqrt{\frac{36\pi \cdot 10^9}{4\pi \cdot 10^{-7}}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 300\,000 \text{ km/s}.$$

Ésta es aproximadamente la velocidad de la luz. Maxwell fue el primero en explicar la naturaleza de la luz en términos del electromagnetismo. El estudio de la ecuación de ondas excede el propósito de este apéndice, pero sucede que en realidad c es exactamente la velocidad de la luz, por lo que su valor real es $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ (y el valor es exacto porque es el que se usa actualmente para definir el metro). Por consiguiente, la relación $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ nos permite calcular el valor exacto de ϵ_0 :

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 299\,792\,458^2} = 8.8541878176 \dots \cdot 10^{-12}. \quad \blacksquare$$

¹⁵En el caso en que $u : D \subset \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ podemos definir $\square_v u$ análogamente usando el laplaciano vectorial en lugar del escalar, y entonces es claro que $\square_v u = (\square_v u_1, \square_v u_2, \square_v u_3)$.

Energía electromagnética Apliquemos la relación (5.7) a los campos \vec{E} y \vec{H} , es decir:

$$\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = (\operatorname{rot} \vec{E})\vec{H} - \vec{E}(\operatorname{rot} \vec{H}).$$

Si lo aplicamos a los campos \vec{E} y \vec{H} , las ecuaciones de Maxwell implican

$$\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E}\vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t} \frac{\mu \vec{H}^2}{2} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\epsilon \vec{E}^2}{2} - \vec{E}\vec{j}.$$

Fijado un volumen Ω , podemos aplicar el teorema de la divergencia:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \left(\frac{\mu \vec{H}^2}{2} + \frac{\epsilon \vec{E}^2}{2} \right) dm + \int_{\Omega} \vec{E}\vec{j} dm = - \int_{\partial\Omega} d\Phi(\vec{E} \times \vec{H}) \quad (\text{B.46})$$

Observemos que si sobre un objeto de masa m que se mueve con velocidad \vec{v} actúa una fuerza \vec{F} , su energía cinética es $(1/2)mv^2$, luego la variación de esta energía es $mva = vF$. En nuestro caso, si llamamos \vec{v} a la velocidad de las cargas en cada punto (y recordando que dm es el elemento de volumen), se cumple $\vec{E}\vec{j} dm = \vec{E}\rho\vec{v} dm = \vec{E}\vec{v} dq = (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})\vec{v} dq = \vec{v} d\vec{F}$, luego el segundo término del primer miembro de la igualdad anterior es el aumento de energía cinética del fluido eléctrico producido por el campo electromagnético.

Esto nos lleva a definir la *energía potencial electromagnética* acumulada en un volumen Ω como

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega} \left(\frac{\mu_0 \vec{H}^2}{2} + \frac{\epsilon_0 \vec{E}^2}{2} \right) dm$$

De este modo, la relación anterior es una ley de conservación: si tomamos Ω suficientemente grande como para que los campos sean nulos en su frontera, tenemos que la energía total (cinética más potencial) permanece constante. Más en general, el vector $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$ recibe el nombre de *vector de Poynting*, y su flujo a través de una superficie nos da la energía electromagnética que sale de ella por unidad de tiempo. La variación de la energía (o el trabajo realizado por unidad de tiempo) se mide en *vatios*. ($W = J/s$). Las unidades del vector de Poynting son, pues, W/m^2 . ■

Bibliografía

- [1] Abate, M., Tovena, F., *Curves and surfaces*, Springer (2012).
- [2] Ahlfors, L., Sario, L., *Riemann surfaces*, Princeton (1960).
- [3] Aubin, T. *A Course in Differential Geometry*, AMS, Providence, Rhoden Island (2001).
- [4] Boothby, W.M. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press (2002).
- [5] Bredon, G.E., *Topology and geometry*, Springer, New York (1993).
(1981).
- [6] Matsushima Y., *Differentiable Manifolds*, Marcel Dekker, New York (1972).
- [7] Munkres, J.R. *Topology*, Prentice Hall, (2000)
- [8] Munkres, J.R. *Differential Topology*, Princeton University Press, Princeton (1966)
- [9] Novikov, S.P., y Taimanov, I.A., *Modern Geometric Structures and Fields*, American Mathematical Society (2006).
- [10] O'Neill, B. *Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity*, Academic Press, New York, (1983).
- [11] Romano, G, Barretta, R. *Continuum Mechanics on Manifolds*, Notas. (2009).
- [12] Shastri, A. R., *Elements of Differential Topology*, CRC Press, Boca Raton, (2011).
- [13] Spivak, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or perish Inc. (1999).

Índice de Materias

- abierto con frontera, 4
- álgebra
 - de Grassmann, 101
 - exterior, 480
- ambientalmente isotópicas, 418
- Ampère (ley de), 520
- amperio, 508, 521
- antiderivación, 121
- arco, 66
 - de Jordan, 377
 - diferenciable a trozos, 66
- asa (adjunción de un), 416
- atlas, 11
 - orientado, 136
- campo
 - tensorial, 91, 99
 - vectorial, 79
 - completo, 88
- carga eléctrica, 505
- carta, 8
 - cúbica, 16
 - esférica, 16
 - normal, 302
 - orientada, 136
- Christoffel (símbolos de), 292
- codiferencial, 50
- collar, 405
- completitud geodésica, 321
- conexión afín, 244
 - compatible, 289
 - restricción, 252
 - simétrica, 266
- conforme
 - aplicación, 167
 - transformación, 168
- conjugado, 350
- conservativo (campo vectorial), 180
- continuidad (ecuación de), 193
- contracción, 93, 478
- contractible (variedad), 221
- convexo (abierto), 264, 316
- coordenadas, 8
- corchete de Lie, 105
- corte, 377
- cucho, 185
- culombio, 508
- curva, 65
 - de Jordan, 377
 - integral, 81
 - parametrizada por el arco, 161
 - regular, 66
- curvatura
 - de Gauss, 331
 - de Riemann, 276
 - geodésica, 365
 - normal, 298
 - seccional, 329
- cúspide, 366, 378
- d'alembertiano, 539
- densidad
 - de carga, 507
 - de corriente, 507
 - de flujo eléctrico, 511
 - en un medio, 517
- derivación, 102
- derivada
 - covariante, 247
 - de Lie, 104, 107, 109
 - de una curva, 65
 - total, 113, 213
- descomposición en asas, 460
- difeomorfismo, 3

- orientado, 137
- difeotopía, 418
- diferenciable
 - aplicación, 21
 - función, 2
- diferencial, 47
 - covariante, 244
- dipolo eléctrico, 515
- dominio de Jordan, 377
- ecuación
 - de continuidad, 193
 - de ondas, 539
 - del calor, 201
- electromotriz (fuerza), 534
- electrostática, 510
- elemento de volumen orientado, 137, 488
- energía
 - cinética, 181
 - mecánica, 181
 - potencial, 181
- entorno normal, 262
- espacio
 - cotangente, 50
 - tangente, 40
- estrellado
 - abierto, 33
 - conjunto, 262
- estructura diferencial, 12
- evaluación, 121, 485
- exponencial, 261
- fibrado de tangentes, 54
- flujo, 86, 183
 - eléctrico, 511
- forma
 - de conexión, 361
 - de curvatura, 361
 - diferencial, 100
- frontera, 13
- fuerza electromotriz, 534
- Gauss
 - lema de, 304, 349
 - ley de, 511, 520
- geodésica
 - a trozos, 263
 - bola, 314
 - maximal, 259
 - positiva, negativa, isótropa, 301
- germen diferenciable, 40
- gradiente, 164
- Green (fórmulas de), 200
- grupo uniparamétrico, 81
 - local, 83
- hessiano (tensor), 270
- Hodge (operador de), 166, 500
- homogéneo (fluido), 113
- homotopía, 220
- imán, 522
- incompresible (fluido), 113
- índice, 449
- inmersión, 55
- intensidad del campo magnético, 519, 524
- inversión, 171
- isometría, 134, 489
 - local, 134
- isotopía, 418
- isótropo (vector), 489
- Jacobi
 - campo de, 339
 - identidad de, 106
- Laplace (ley de), 508
- laplaciano, 199
 - vectorial, 230
- Levi-Civita (conexión de), 244, 252, 291
- localización (lema de), 94
- longitud de un arco, 159
- métrica de Riemann, 128
- magnetización, 523
- marco (para un asa), 416
 - amplio, 435
- matriz jacobiana, 49
- Maxwell (ecuaciones de), 537
- minimizante, 311
- Möbius

- cinta de, 411
- transformación de, 172
- momento dipolar
 - eléctrico, 515
 - magnético, 522
- Morse
 - función de, 445
 - lema de, 447
- norma, 489
- nulo (conjunto), 69
- orientación, 136
- ortogonal (base), 490
- ortonormal (base), 490
- parametrización, 8
- partición de la unidad, 28
- permeabilidad magnética, 509
- plana (variedad), 276
- polígono curvilíneo, 365
- polarización, 516
- pregeodésica, 301
- producto
 - exterior, 480
 - tensorial, 473
- protracción, 96, 476
- pseudoeuclídeo (espacio), 489
- pseudoortonormal (base), 491
- punto
 - crítico, 68
 - no degenerado, 444
 - de silla, 449
 - frontera regular, 207
- rango, 21
- rastro, 420
- región regular, 370
 - simple, 377
- regular
 - conjunto, 2
 - inmersión, 55
- reparametrización, 66
- retracción, 96, 477
- rotacional, 195
- semieuclicídeo (espacio), 491
- subvariedad, 56
 - semirriemanniana, 130
- susceptibilidad magnética, 524
- tensor, 93, 472
 - antisimétrico, 478
 - métrico, 128
 - puro, 472
 - simétrico, 478
- Teorema
 - de cambio de variable, 145, 148, 150
 - de extensión de isotopías, 425, 426
 - de Gauss-Bonnet, 369, 374, 376
 - de Hopf-Rinow, 321
 - de la divergencia, 191
 - de la función inversa, 25
 - de Sard, 70
 - de Stokes, 187, 188, 195, 211
 - de Whitney, 77
 - del entorno tubular, 63
 - del giro de la tangente, 366
 - del rango, 23, 25
- tesla, 508
- torsión, 266
- trabajo, 180
- transporte paralelo, 254
- triangulación, 370
- tubular (entorno), 65
- valor crítico, regular, 68
- variación (de una geodésica), 347
- variedad
 - de Riemann, 128
 - diferencial, 13
 - afín, 244
 - orientable, 136
 - semirriemanniana, 128
- voltio, 510