

Carlos Ivorra Castillo

---

**INTRODUCCIÓN A LA  
GEOMETRÍA EUCLÍDEA**

---



*El estudio temprano de Euclides me hizo odiar  
la geometría.*

JAMES JOSEPH SYLVESTER



# Índice General

<b>Preámbulo</b>	<b>vii</b>
<b>Introducción</b>	<b>ix</b>
<b>Capítulo I: El plano euclídeo</b>	<b>1</b>
1.1 Puntos y rectas . . . . .	2
1.2 Segmentos . . . . .	5
1.3 Ángulos . . . . .	14
1.4 Rectas paralelas . . . . .	25
1.5 Algunos resultados fundamentales . . . . .	28
<b>Capítulo II: Medida de longitudes, amplitudes y áreas</b>	<b>45</b>
2.1 Rectas y circunferencias graduadas . . . . .	48
2.2 Los números reales . . . . .	54
2.3 Medida de segmentos y ángulos . . . . .	63
2.4 El teorema de Tales . . . . .	69
2.5 Áreas . . . . .	73
<b>Capítulo III: Resultados básicos de la geometría euclídea</b>	<b>79</b>
3.1 Cálculo de áreas . . . . .	79
3.2 El teorema de Ptolomeo . . . . .	85
3.3 La sección áurea . . . . .	88
3.4 Polígonos regulares . . . . .	92
3.5 Trigonometría . . . . .	101
3.6 Homotecias . . . . .	126
3.7 Ángulos dirigidos . . . . .	131
<b>Capítulo IV: Triángulos</b>	<b>141</b>
4.1 Puntos notables de un triángulo . . . . .	141
4.2 La circunferencia de los nueve puntos . . . . .	151
4.3 Simedianas . . . . .	158
4.4 El teorema de Miquel . . . . .	163
4.5 El problema de Fermat . . . . .	172
4.6 Los teoremas de Menelao y Ceva . . . . .	179
4.7 El teorema de Desargues . . . . .	194

<b>Capítulo V: Circunferencias</b>	<b>203</b>
5.1 El teorema de la potencia . . . . .	204
5.2 Circunferencias ortogonales . . . . .	211
5.3 Inversión . . . . .	214
5.4 El problema de Apolonio . . . . .	226
5.5 El arbelo . . . . .	234
5.6 El teorema de Kosnita . . . . .	241
5.7 Sistemas coaxiales . . . . .	245
5.8 Circunferencias de Apolonio . . . . .	252
5.9 Triángulos pedales . . . . .	260
<b>Capítulo VI: Números complejos</b>	<b>271</b>
6.1 Isometrías y semejanzas . . . . .	271
6.2 Transformaciones circulares . . . . .	273
6.3 Los centros clásicos . . . . .	280
6.4 Números constructibles con regla y compás . . . . .	288
6.5 Construcciones con regla marcada y compás . . . . .	299
6.6 La trisectriz de Hippias . . . . .	304
<b>Capítulo VII: Cónicas</b>	<b>307</b>
7.1 Definición y propiedades generales . . . . .	307
7.2 La elipse . . . . .	319
7.3 La parábola . . . . .	331
7.4 La hipérbola . . . . .	342
7.5 Las secciones cónicas . . . . .	368
<b>Apéndice A: La geometría analítica</b>	<b>381</b>
A.1 Puntos y vectores . . . . .	381
A.2 Rectas . . . . .	387
A.3 Isometrías . . . . .	391
A.4 Bases, orientación . . . . .	397
<b>Índice de Materias</b>	<b>405</b>

# Preámbulo

Este libro pretende proporcionar al lector un acceso lo más directo posible a los resultados principales de la geometría euclídea plana, donde “directo” hay que entenderlo, por una parte, como libre de una estructura axiomática que obliga —si se quiere ser realmente riguroso— a dedicar relativamente mucho espacio a demostrar hechos intuitivamente evidentes y, por otra parte, en el que el álgebra lineal se ha reducido a la mínima expresión (apenas algunas nociones básicas sobre aplicaciones lineales y matrices y determinantes  $2 \times 2$  a las que haremos referencia en contadas ocasiones).

No introduciremos conceptos ni técnicas correspondientes a la geometría proyectiva, si bien mostraremos que muchos resultados de la geometría euclídea se enuncian de forma más simple y natural si postulamos la existencia de puntos infinitos en los que se cortan las rectas paralelas, con lo que prepararemos el camino que conduce a la geometría proyectiva. En el capítulo 6 también mostraremos el interés de postular la existencia de un único punto infinito, lo que abre a su vez el camino hacia la llamada “geometría circular”.

La exposición será esencialmente sintética, pero en el apéndice A mostraremos la conexión con la geometría analítica y haremos uso de ella en algunas ocasiones en las que sea preferible a un planteamiento sintético (principalmente a la hora de probar algunos resultados sobre secciones cónicas) o cuando éste sea esencial, como al estudiar la constructibilidad con regla y compás.

La idea fundamental de este enfoque es la misma que subyace en mis libros de *Introducción a la teoría algebraica de números* [ITAl] e *Introducción a la teoría analítica de números* [ITAn], es decir, llevar al lector hacia resultados no triviales con pruebas completas y rigurosas,<sup>1</sup> pero que requieran la mínima base teórica posible. Naturalmente, no hay que ver en ello ninguna clase de desprecio hacia la teoría matemática, sino que el propósito de estos libros es proporcionar al lector una “materia bruta” de resultados matemáticos no triviales que sirva de motivación y de orientación a la hora de adentrarse en las teorías matemáticas más refinadas que permiten comprenderlos mejor y superar con creces los límites hasta los que se puede llegar sin ellas.

Los únicos conocimientos previos que requiere este libro son algunos resultados básicos sobre los números reales junto con algunas nociones matemáticas

---

<sup>1</sup>El único resultado que enunciamos sin demostración es el teorema de Wantzel sobre los números complejos constructibles con regla y compás, pero probamos que éstos tienen que ser algebraicos, lo que basta para resolver negativamente el problema de la cuadratura del círculo.

básicas (como “relación de orden” y poco más), en general, bastante menos de lo que el lector puede encontrar en el primer capítulo de [ITAl] y en la sección 1.1 de [ITAn].

Sólo en ocasiones puntuales haremos referencia a otros resultados probados en estos dos libros. Más concretamente, las referencias adicionales a [ITAl] se reducen esencialmente —sin ánimo de enumerarlas todas— a algunos conceptos muy elementales del álgebra lineal (Capítulo XI) y a las propiedades de los números algebraicos y trascendentes (Capítulo VIII) en relación con la caracterización algebraica de los puntos constructibles con regla y compás. En cuanto a [ITAn], siempre sin ánimo de exhaustividad:

- Remitiremos a su apéndice A para una definición analítica precisa del concepto de área (a través de la medida de Jordan en  $\mathbb{R}^2$ ).
- Relacionaremos las funciones trigonométricas que definiremos aquí geoméricamente con las definidas analíticamente allí en el capítulo V mediante series de potencias.
- Usaremos el teorema fundamental del álgebra (Capítulo III) para probar un teorema de Euler según el cual un triángulo está determinado por su circuncentro, su incentro y su ortocentro.
- Usaremos la trascendencia de  $\pi$  (Capítulo X) para resolver negativamente el problema de la cuadratura del círculo con regla y compás.
- Compararemos algunos resultados sobre cuadraturas de secciones cónicas con otros que veremos aquí.

En el caso de la hipérbola daremos una prueba esencialmente geométrica de la cuadratura de un sector hiperbólico (probada analíticamente en el capítulo IV de [ITAn]) que sólo requerirá algunos resultados elementales sobre límites y continuidad (Capítulos I-IV) para terminar expresando el área en términos del logaritmo neperiano.

El carácter puntual de estas referencias hace que en la práctica sea posible leer este libro sin necesidad de estudiar al mismo tiempo (o de haber estudiado) [ITAl] e [ITAn]. El capítulo más técnico es el capítulo II, en el que abordamos el problema de tratar con números irracionales en geometría a la hora de medir longitudes de segmentos y amplitudes de ángulos, pero el lector dispuesto a no hacerse muchas preguntas filosóficas sobre estas cuestiones podría saltarse dicho capítulo sin problemas.

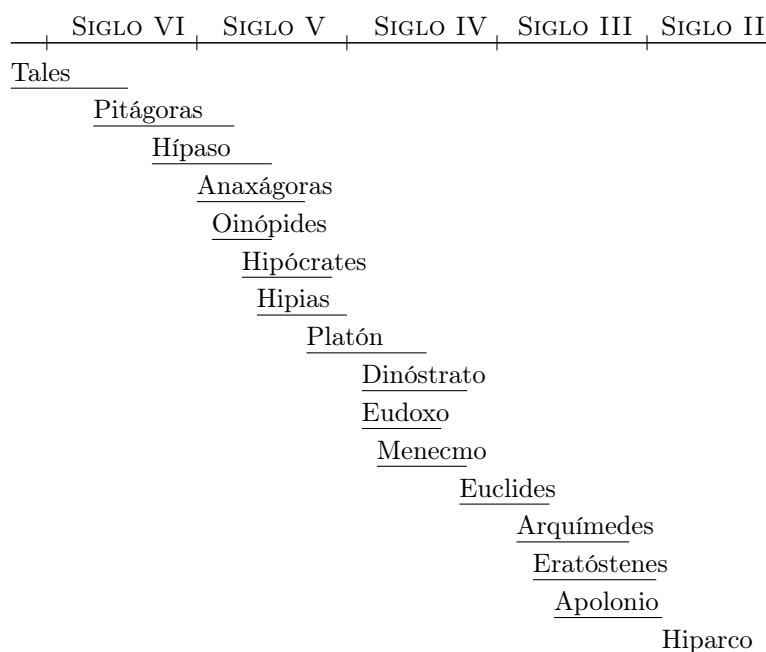


# Introducción

Aristóteles consideraba a Tales de Mileto como el primer “físico” o filósofo de la naturaleza. Es el primer pensador griego del que tenemos constancia que rechazó las explicaciones mitológicas de los fenómenos naturales y trató de sustituirlas por explicaciones racionales. Se cuentan diversos hechos y anécdotas protagonizados por él, entre los que figura la historia de que, en un viaje a Egipto, preguntó por la altura de la pirámide<sup>2</sup> de Keops y, como nadie le supo responder (en su época la pirámide tenía ya 2 000 años de antigüedad), él mismo ideó la forma de calcularla ante el asombro de los sacerdotes egipcios, comparando la sombra que producía con la suya propia.

---

Cronología de algunos matemáticos griegos del primer milenio a.C.



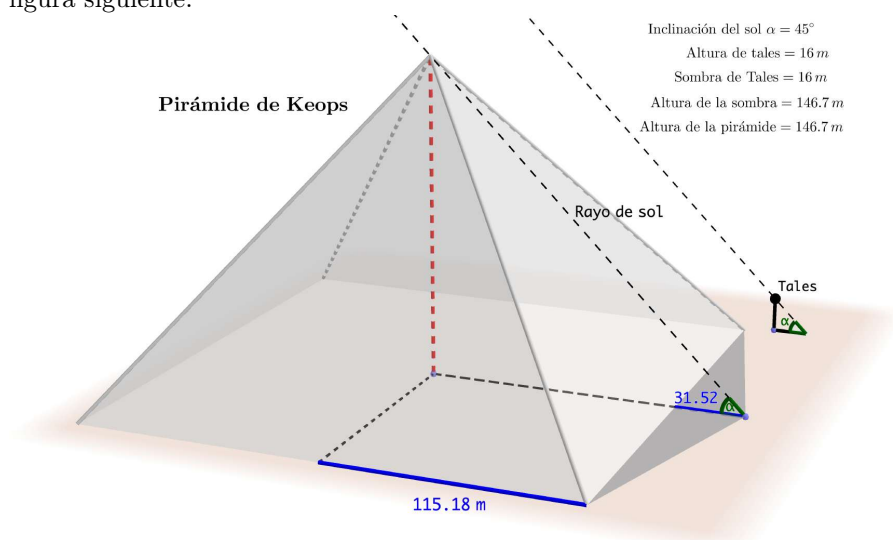
---

<sup>2</sup>Los griegos llamaron “pirámides” a los imponentes monumentos funerarios egipcios, que era el nombre ellos daban a unos pasteles de harina de trigo que tenían una forma similar.

Las fuentes de esta historia son bastante tardías. La más antigua aparece en las *Vidas, opiniones y sentencias de los filósofos más ilustres*, de Diógenes Laercio, que data del siglo III d.C., es decir, de unos 800 años después de la muerte de Tales. El esquema de la página anterior muestra la cronología aproximada de los matemáticos del primer milenio a.C. a los que vamos a hacer referencia aquí.

Diógenes relata que Tales esperó al momento del día en que su propia sombra medía lo mismo que él y entonces midió la sombra de la pirámide, concluyendo que también coincidiría con la altura del monumento. No obstante, esto no aclara cómo hizo Tales para medir la altura de la sombra, ya que necesitaría haber medido la distancia entre el centro de la base de la pirámide y la punta de su sombra, y el centro es inaccesible.

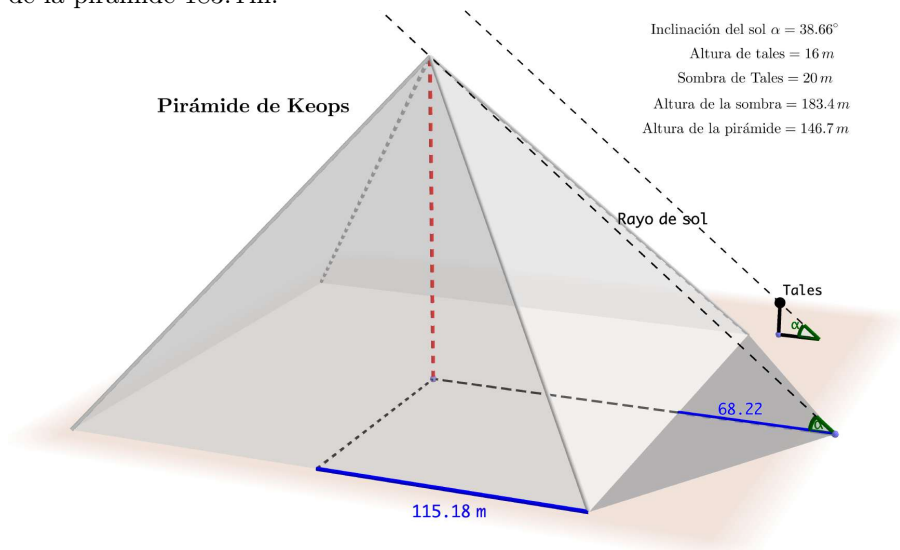
La solución más sencilla es que Tales no hubiera esperado meramente a la hora del día en el que su sombra midiera lo mismo que él, sino al día del año en el que esto sucede exactamente a mediodía,<sup>3</sup> pues a mediodía el sol se encuentra exactamente en el sur, y las pirámides están orientadas con una cara hacia cada punto cardinal, por lo que en esas circunstancias la situación es la que refleja la figura siguiente:



Hemos tenido que representar a Tales con 16 metros de altura para que resulte apreciable en comparación con la pirámide, pero esta altura resulta irrelevante. Tales pudo constatar que, cuando un objeto produce una sombra igual a su altura, lo mismo valía para cualquier otro objeto a su alcance, y pudo extrapolar que lo mismo era aplicable a la pirámide. Midiendo las distancias indicadas en la figura (todas ellas accesibles) pudo calcular la altura de la pirámide (por simplicidad hemos expresado las medidas en metros, aunque esta unidad no fue definida hasta el siglo XVIII).

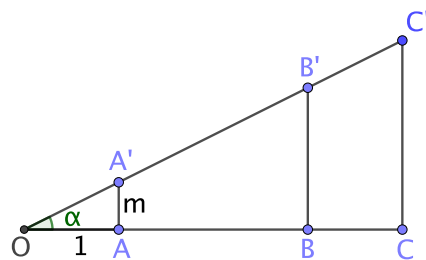
<sup>3</sup>Teniendo en cuenta que Giza se encuentra a  $30^\circ$  de latitud norte, la altura del sol al mediodía oscila entre los  $83.5^\circ$  grados en el solsticio de verano y los  $36.5^\circ$  en el solsticio de invierno, por lo que resulta ser de  $45^\circ$  dos veces al año.

Sin embargo, en otras versiones de la historia, Tales se jacta ante los sacerdotes de que puede medir la altura a cualquier hora sin más que comparar su sombra con la de su bastón. Consideremos en primer lugar la versión “fácil” de esta afirmación, en la que Tales no mide la altura “a cualquier hora”, sino en un día cualquiera, pero a mediodía, para que el sol se encontrara justo al sur y así la recta que une el centro de la pirámide con la punta de la sombra fuera perpendicular al lado norte de su base. La figura siguiente muestra una posibilidad. Si Tales hubiera medido 1.60 m, su sombra habría medido 2 m y la de la pirámide 183.4 m:



¿Es posible calcular con estos datos la altura de la pirámide? Probablemente el lector sabrá de sobra que la respuesta es afirmativa, pero es interesante analizar qué debía saber Tales para llegar a la solución, pues en ella entran en juego varios principios geométricos básicos.

Consideremos un triángulo rectángulo como el que muestra la figura:



Si ascendemos por el segmento  $\overline{OB'}$  desde el punto  $O$ , cuando llegamos al punto  $A'$  hemos avanzado horizontalmente 1 unidad y hemos ascendido  $m$  unidades. El primer principio geométrico que necesitamos es que este ritmo se va a mantener uniformemente durante todo el ascenso: cada vez que avancemos

horizontalmente 1 unidad, el ascenso vertical será de  $m$  unidades, sea cual sea el punto de partida, de modo que si avanzamos 5 unidades habremos ascendido  $5m$  unidades o, en general, cuando lleguemos hasta el punto  $B'$  habremos ascendido  $\overline{BB'} = m\overline{OB}$  y cuando lleguemos a  $C'$  habremos ascendido  $\overline{CC'} = m\overline{OC}$ . En otros términos, en todo triángulo rectángulo se da la relación:

$$m = \frac{\overline{BB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{CC'}}{\overline{OC}}. \quad (*)$$

Este valor constante  $m$  que indica el ascenso por unidad de avance es lo que se conoce comúnmente como la *pendiente* de la recta  $OC'$ . Aquí podemos plantearnos dos cuestiones:

1. ¿Es (\*) evidente? Es posible que el lector sepa que se cumple la relación (\*) porque así se lo enseñaron en la escuela de pequeño y lo tiene interiorizado como un hecho elemental o, por el contrario, tal vez el lector haya visto una demostración formal de dicha relación. La pregunta es si tal demostración —la haya visto el lector o no— es necesaria o si es superflua, en el sentido de que cualquiera que se plantee si tiene que cumplirse o no concluirá que es necesariamente cierta sin necesidad de argumento alguno.
2. El concepto geométrico de “pendiente” figura hoy en día incluso en las señales de tráfico que avisan de la pendiente de una carretera cuando ésta es muy pronunciada, de modo que es un concepto que puede considerarse “de dominio público”, pero, ¿lo conocía Tales?

Respecto a 1., diremos de momento que el principio de la constancia de la pendiente en una cuesta es, si no intuitivamente evidente, cuanto menos, empíricamente plausible, en el sentido de que, a poco que uno reflexione sobre él, se convencerá de que se cumple en la práctica aunque no sea capaz de justificar muy bien por qué, igual que uno se convence de que en verano hace más calor que en invierno, aunque no sepa identificar la causa. Y así es posible que Tales estuviera convencido de su validez aunque no tuviera ningún argumento para justificarlo. En cualquier caso, quienes conocían sobradamente en la práctica este principio eran los antiguos constructores de pirámides:

La pirámide de Keops fue construida con un *seked* de 5 palmos y 2 dedos. Esto significa que los obreros debían asegurarse de que, cada vez que la construcción de una cara de la pirámide avanzaba horizontalmente el *seked*, la altura debía aumentar exactamente un codo real.<sup>4</sup> (Un codo real se dividía en 7 palmos, y cada palmo en 4 dedos, por lo que el *seked* de la pirámide de Keops era de 5.5 palmos.)

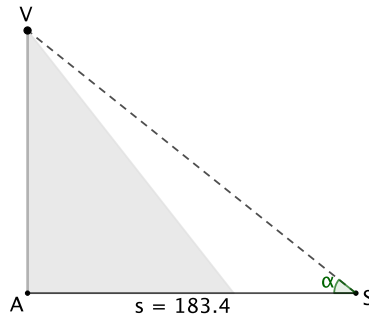
Es claro que el *seked* era una forma de medir la pendiente de las caras de una pirámide. No es exactamente la pendiente debido a que los egipcios usaban unidades de medida distintas para el avance horizontal y el ascenso vertical,

<sup>4</sup>El codo real egipcio es la unidad de longitud más antigua cuyo valor se conoce con exactitud, pues se han encontrado varias varas de medir egipcias cuyas longitudes oscilan entre los 52.35 cm y los 52.92 cm, por lo que podemos considerar que 1 codo real = 52.5 cm.

pero la traducción es simple: un *seked* de 5 palmos y 2 dedos representa un ascenso de 7 palmos por cada 5.5 palmos de avance, luego corresponde a una pendiente de  $m = 7/5.5 = 14/11 = 1.2727\dots$ . Los egipcios comprendían que mantener siempre el mismo *seked* era una forma de asegurar que las caras de la pirámide fueran planas.

Si los sacerdotes egipcios hubieran conocido el *seked* con que fue construida la pirámide, habrían podido calcular su altura fácilmente, pues el lado mide 440 codos reales, luego para llegar hasta la cima trepando por una cara de la pirámide hay que avanzar horizontalmente 220 codos reales, que son 1 540 palmos y, como cada 5.5 palmos de avance corresponden con un codo real de ascenso, al llegar a la cima habríamos ascendido  $1\,540/5.5 = 280$  codos reales (unos 147 metros).

Lo que Tales necesitaba era medir la pendiente  $m$  de la recta que une la punta de la pirámide con la punta de su sombra, pues podía medir la distancia  $\overline{AV}$  entre el centro de la base de la pirámide y la punta de la sombra:

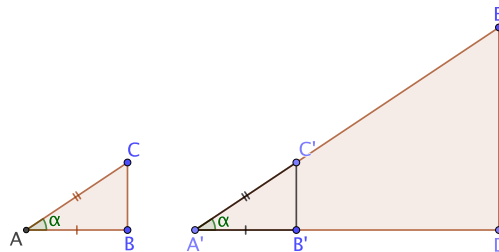


Conociendo  $m$ , la altura de la pirámide es  $m\overline{AS}$ . Y aquí interviene un segundo principio geométrico, y es que la pendiente  $m$  de una recta está determinada por su inclinación, es decir —en este caso— por el ángulo  $\alpha$ .

Uno de los últimos grandes filósofos clásicos fue Proclo, que vivió en el siglo V de nuestra era, y en una de sus obras atribuye a Tales varios enunciados geométricos, entre ellos éste:

*Si dos triángulos tienen iguales dos de sus lados y también el ángulo que forman, entonces son iguales.*

Supongamos que tenemos dos triángulos rectángulos que tengan un mismo ángulo  $\alpha$ , como indica la figura:



Si en los lados del triángulo mayor marcamos puntos  $B'$  y  $C'$  que hacen que  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$  y  $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ , al unir los puntos  $B'$  y  $C'$  se forma un triángulo  $\widehat{A'B'C'}$  que tiene dos lados iguales a los lados correspondientes de  $\widehat{ABC}$  y también el ángulo  $\alpha$  que forman, luego  $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ , luego en particular  $\widehat{A'B'C'}$  también será rectángulo y podemos concluir que las rectas  $AC$  y  $A'C'$  tienen exactamente la misma pendiente.

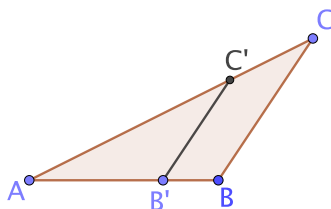
Ahora sólo tenemos que suponer que  $\overline{BC}$  es Tales o su bastón, y que  $\overline{AB}$  es la sombra correspondiente, de modo que  $\alpha$  es la inclinación de los rayos solares. Admitiendo que todos los rayos solares (en un mismo instante y lugar) tienen la misma inclinación — un hecho empíricamente verificable — la conclusión es que todos los triángulos formados por un objeto y su sombra tienen la misma pendiente en un mismo instante y lugar.

Por consiguiente, si Tales midiera, digamos, 1.60 m, su sombra en las condiciones que estamos suponiendo mediría 2 m, luego la pendiente de los rayos solares es de  $m = 1.60/2 = 0.8$ , luego la altura de la pirámide resulta ser de  $h = 0.8 \cdot 183.4 = 146.72$  m.

**El teorema de Tales** A raíz de la historia de Tales y la pirámide, a finales del siglo XIX empezó a llamarse “teorema de Tales” al resultado siguiente:

*Si en un triángulo arbitrario  $\widehat{ABC}$  se traza una paralela  $\overline{B'C'}$  a uno de sus lados como muestra la figura, entonces el triángulo  $\widehat{A'B'C'}$  tiene sus lados proporcionales a los del triángulo dado, es decir:*

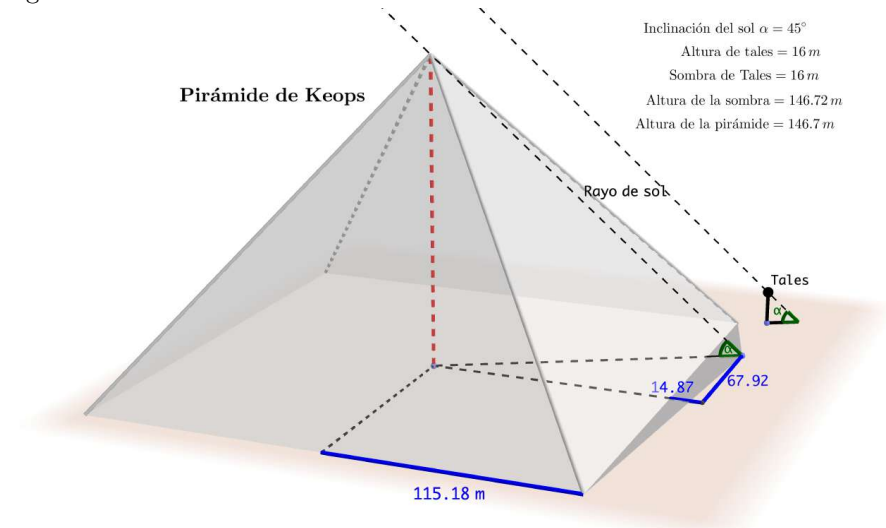
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$



La primera prueba conocida de este teorema aparece en el Libro VI de los *Elementos* de Euclides, y ninguna fuente antigua lo atribuye a Tales. Por el contrario, los enunciados geométricos que Proclo atribuye a Tales son de carácter mucho más elemental, como que un triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales, o que los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

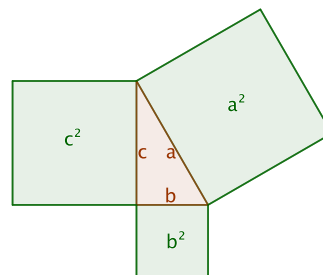
Este enunciado resta importancia a la cuestión de si la uniformidad de la pendiente en un triángulo rectángulo puede considerarse intuitivamente evidente, puesto que, indudablemente, el enunciado general del teorema de Tales requiere una demostración. Cabe añadir que se conocen textos egipcios y babilónicos anteriores a Tales en varios siglos que muestran alguna clase de conocimiento del teorema de Tales, aunque fuera en casos particulares y de una forma vaga, dando por hecho que determinados segmentos debían ser proporcionales.

**El teorema de Pitágoras** Pero analicemos ahora lo que habría requerido Tales para medir la altura de la pirámide un día cualquiera del año. Si hubiera esperado a que las sombras fueran iguales a las alturas de los objetos que las generan, podría haberse encontrado con la situación que muestra la figura siguiente:



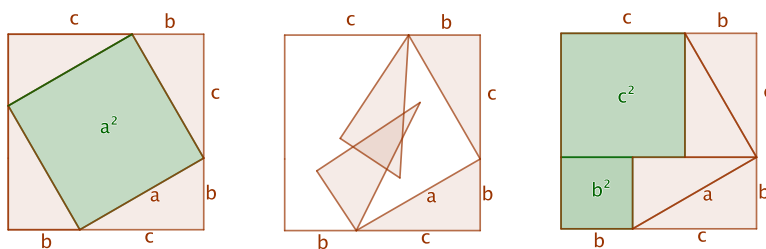
Ahora no es posible saber (fácilmente) cuál es el segmento que une el pico de la sombra con el centro de la base de la pirámide. No obstante, es posible medir con relativa facilidad las longitudes indicadas en la figura, que son suficientes para determinar la altura de la sombra y, por consiguiente la altura de la pirámide. Ahora bien, para ello es necesario emplear el *teorema de Pitágoras*, y de nuevo es dudoso que Tales lo conociera con la generalidad necesaria para haberlo aplicado al problema que nos ocupa. Como sin duda el lector conocerá el enunciado, intentaremos no aburrirle citando a Raymond Smullyan:

*Tenía que explicar el teorema de Pitágoras a una clase. Dibujé un triángulo rectángulo en la pizarra con cuadrados en la hipotenusa y en los catetos, y dije: “Obviamente, el cuadrado de la hipotenusa tiene área mayor que la de cualquiera de los otros dos cuadrados. Ahora imaginad que estos tres cuadrados están hechos de oro y os ofrecen el cuadrado mayor o los dos menores. ¿Qué elegiríais? Es interesante que aproximadamente la mitad de la clase se decantó por el cuadrado mayor, y la otra mitad por los dos pequeños. Se inició una viva discusión y ambos grupos quedaron sorprendidos por igual cuando les dije que era indistinto.*



Sin duda no es intuitivamente evidente si una de las dos opciones era preferible a la otra, pero nos encontramos ante un ejemplo interesante de cómo

una afirmación que no es intuitivamente evidente admite una prueba intuitiva simplicísima: La figura de la izquierda muestra un cuadrado que contiene cuatro veces un triángulo rectángulo arbitrario así como el cuadrado de la hipotenusa. Moviendo dos de los triángulos conseguimos que el mismo cuadrado total contenga los cuatro triángulos más los cuadrados de los dos catetos, luego tiene que ser  $a^2 = b^2 + c^2$ .



Volviendo al problema de calcular la altura de la pirámide de Keops, en el último caso teníamos un triángulo rectángulo del que podíamos medir los catetos:  $115.18 + 14.87 = 130.05$  y  $67.92$ . Por lo tanto, la hipotenusa, es decir, la altura de la sombra, que coincide con la altura de la pirámide, es

$$h = \sqrt{130.05^2 + 67.92^2} = 146.72.$$

Nuevamente, la primera demostración conocida del teorema de Pitágoras se remonta a Euclides (que da —de hecho— dos diferentes), pero es probable que Pitágoras conociera una, y no puede descartarse que el resultado fuera conocido con anterioridad. Ciertamente, los egipcios y los babilónicos conocían casos particulares del teorema.

**Los números irracionales** En el capítulo I introduciremos los conceptos y resultados geométricos básicos necesarios para demostrar el teorema de Tales y, sin embargo, la prueba tendrá que esperar hasta el final del capítulo II debido a un problema técnico que requiere una atención especial.

Tanto el teorema de Tales como el de Pitágoras involucran la noción de medida de un segmento. Los antiguos griegos tenían una idea muy precisa y particular sobre qué debe entenderse por “medir” una magnitud (una longitud, una superficie, un peso, etc.). En particular, tenían claro que toda medición es relativa a una unidad de medida prefijada. Así por ejemplo, si decían que Pitágoras medía 6 pies y un palmo, entendían que su altura equivalía a la de 6 varas de un pie de longitud puestas una a continuación de la otra más una última vara de un palmo, es decir, de un cuarto de pie. Nosotros diríamos que la altura es de 6.25 pies, pero los griegos no conocían los desarrollos decimales, así que usaban todo un repertorio de palabras para nombrar fracciones de unidades (dedos, palmos, codos, etc.) y los matemáticos usaban fracciones. En este caso un matemático griego diría que la altura de Pitágoras era de  $25/4$  de pie.

Implícitamente, los primeros matemáticos griegos daban por supuesto que el resultado de toda medición tenía que poder expresarse como una *razón* (lat.



“cálculo”) entre dos números naturales. Ellos entendían el ejemplo que hemos puesto en estos términos: “la razón de la altura de Pitágoras con un pie es la misma que se da entre 25 y 4”.

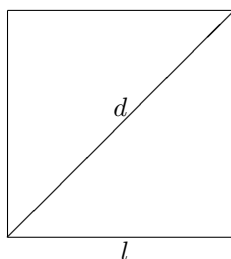
Más técnicamente, dada una longitud  $\alpha$  y dos números naturales no nulos  $m$  y  $n$ , podemos definir la longitud  $(m/n)\alpha$  como la longitud del segmento que resulta de tomar cualquier segmento  $s$  de longitud  $\alpha$ , dividirlo en  $n$  partes iguales y sumar una de ellas  $m$  veces. Es claro que el resultado no depende del segmento considerado, sino únicamente de su longitud, por lo que la longitud  $(m/n)\alpha$  está bien definida.

Más aún, es fácil convencerse de que no depende exactamente de  $m$  y  $n$ , sino únicamente del número racional  $r = m/n$ , en el sentido de que si  $m/n = p/q$ , entonces  $(m/n)\alpha = (p/q)\alpha$ . Para convencerse de ello, el lector no debería tener problemas en justificar cada una de las igualdades siguientes:

$$\frac{m}{n}\alpha = \frac{mq}{nq}\alpha = \frac{np}{nq}\alpha = \frac{p}{q}\alpha.$$

Así, para cada longitud  $\alpha$  y cada número racional  $r > 0$ , tenemos definida la longitud  $r\alpha$ , de modo que si  $\alpha$  es 1 pie, entonces Pitágoras tiene, según nuestro ejemplo, una altura  $(25/4)\alpha$  (la longitud que resulta de dividir un pie en cuatro partes iguales y sumar una de ellas consigo misma 25 veces).

Sin embargo, para los pitagóricos fue traumático descubrir que, al menos en geometría, esta forma de medir no siempre funciona: no toda longitud (ni toda área, etc.) puede expresarse respecto a una unidad prefijada en términos de una razón entre dos números naturales. El caso más simple es el que resulta de considerar el lado  $l$  y la diagonal  $d$  de un cuadrado:



Supongamos que existe un número racional  $r$  tal que  $d = rl$ , es decir, tal que si tomamos el lado  $l$  como unidad de medida, la longitud de la diagonal es  $r$ . El teorema de Pitágoras nos da entonces que  $r^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ , pero no existe ningún número racional  $r$  con esta propiedad. En efecto, si  $r > 0$  es un número racional, podemos expresarlo como  $r = a/b$ , donde  $a$  y  $b$  son números naturales que podemos tomar primos entre sí. Si  $r^2 = 2$ , entonces  $a^2 = 2b^2$ , luego  $a^2$  es par, y esto implica que  $a$  es par, digamos  $a = 2k$ . Entonces  $4k^2 = 2b^2$ , luego  $2k^2 = b^2$ , luego  $b^2$  tiene que ser par, y  $b$  también, es decir, llegamos a que  $a$  y  $b$  son ambos pares, cuando los habíamos tomado primos entre sí.

Así pues, concluimos que no existe ningún número racional  $r > 0$  que satisfaga la relación  $d = rl$ , es decir, que no es posible describir lo larga que es

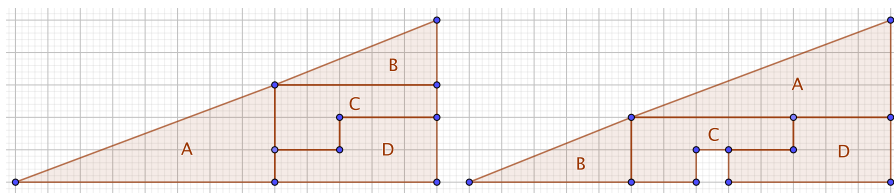
exactamente la diagonal de un cuadrado estableciendo un número  $n$  de partes en las que se puede dividir su lado para que al tomar  $m$  de ellas obtengamos la diagonal. El descubrimiento se atribuye a un pitagórico, probablemente a Hípaso de Metaponto, que vivió entre los siglos VI y V a.C. La leyenda dice que fue asesinado como “hereje” por sus camaradas pitagóricos, que lo arrojaron al mar durante un viaje en barco.

Nosotros expresamos la “herejía” diciendo que la diagonal mide  $\sqrt{2}$  y que éste es un número irracional, pero para los pitagóricos, “irracional” significaba “que no se podía calcular”, “que no se podía medir”, “que no se podía concebir”, y en suma, consideraban que la diagonal del cuadrado era “irracional” en el sentido usual que la palabra tiene hoy para nosotros: era algo absurdo y paradójico.

Hubo que esperar hasta el siglo IV a.C. para que Eudoxo de Cnido elaborara una teoría de la proporción puramente geométrica que permitía operar con magnitudes continuas (longitudes, amplitudes de ángulos, áreas, etc.) sin presuponer que unas fueran conmensurables con otras, es decir, sin presuponer que las relaciones entre ambas pudieran expresarse en términos de razones entre números naturales. Euclides dedicó el Libro V de sus *Elementos* a exponer la teoría de Eudoxo, y nosotros dedicaremos el capítulo II a exponer una versión más próxima a la forma de trabajo moderna que nos permita incorporar los números irracionales a la medida de longitudes y de ángulos. Sólo entonces estaremos en condiciones de dar una prueba rigurosa del teorema de Tales.

**Áreas** En la prueba que hemos dado más arriba del teorema de Pitágoras ha sido fundamental el concepto de área. Hemos usado que el área de un cuadrado de lado  $a$  es  $a^2$ , así como que si una figura se descompone en varias, el área total será la suma de las áreas de las partes. Los antiguos griegos aceptaban estos hechos como evidentes, pero eso es susceptible de crítica. El ejemplo siguiente puede resultar ilustrativo:

La figura de la izquierda muestra un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 13 y 5 unidades, respectivamente:



Si entendemos que el área de una figura es el número de cuadrados de lado unitario que contiene, entonces podemos razonar que el rectángulo de lados 13 y 5 tiene área 65, y puede dividirse en dos triángulos iguales al dado en la figura, por lo que el área del triángulo será de  $65/2 = 32.5$  unidades (cuadradas).

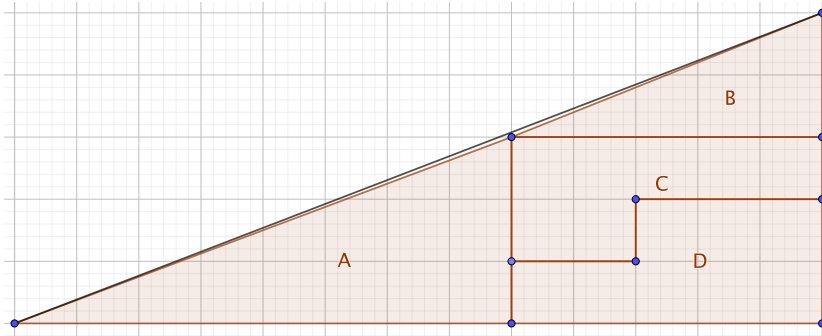
A su vez, el triángulo dado está dividido en cuatro piezas  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , y si las reordenamos para disponerlas como se indica en la figura de la derecha, vemos que cubren un triángulo igual al inicial salvo por que un cuadrado unitario

queda sin cubrir, luego ahora el área cubierta es de 31.5 unidades. Así pues, tenemos dos argumentos distintos que nos dan dos valores distintos para la suma de las áreas de las cuatro figuras  $A, B, C, D$ . Más aún, podemos calcular separadamente el área de cada pieza:  $A$  y  $B$  son triángulos, y por el mismo argumento empleado antes podemos razonar que sus áreas tienen que ser de 12 y 5 unidades, respectivamente, mientras que  $C$  y  $D$  se descomponen en 7 y 8 cuadrados unitarios, respectivamente, luego éstas tienen que ser sus áreas. En resumen:

$$A = 12, \quad B = 5, \quad C = 7, \quad D = 8,$$

luego su suma es 32, que no es ni 32.5 ni 31.5.

En realidad lo que sucede es que los “triángulos” rectángulos grandes de las dos figuras ni son triángulos ni son iguales. La figura siguiente muestra el segmento que une realmente los dos vértices del triángulo de la izquierda, y vemos que el triángulo auténtico incluye otro triángulo muy estrecho que no hemos tenido en cuenta y cuya área resulta ser 0.5.



Similarmente, si hiciéramos lo mismo con el “triángulo” de la derecha, al trazar su auténtica hipotenusa veríamos que deja fuera un estrecho triángulo cuya área resulta ser también de 0.5. Una forma de verlo sin tener que aguzar la vista es observar que la pendiente de la hipotenusa del triángulo  $A$  es de  $3/8 = 0.375$ , mientras que la del triángulo  $B$  es 0.4, luego hay una diferencia de 25 milésimas que justifica que las “hipotenusas” no son realmente rectas, pues no tienen pendiente constante.

Así pues, este ejemplo es falaz y no prueba nada, pero ilustra una posibilidad que no podemos descartar *a priori*: ¿cómo podemos asegurar que no podría haber otro par de argumentos (sin falacias) que permitieran calcular el área de una misma figura arrojando resultados diferentes?

Una respuesta natural es la que usó Smullyan para concretar el “problema pitagórico”:

*Imaginemos que los triángulos son planchas sólidas de un grosor fijo uniforme. Si el cuadrado de lado unitario pesa  $p$  gramos, entonces el área de una figura puede definirse como su peso dividido entre  $p$ .*

Esta definición de área permite justificar todos los principios que se aceptan en el cálculo de áreas, como que si descomponemos una figura en varias, el área total será la suma de las áreas de las partes, pues sin duda el peso total de la figura será la suma de los pesos, o que el área de una figura no se va a alterar si la movemos, etc.

Más aún, esta definición permite desenmascarar cualquier razonamiento falaz sobre áreas, sin más que aplicarlo a un caso concreto que lleve a una conclusión contradictoria e ir pesando todas las figuras involucradas comprobando si lo que pretende justificar el argumento se cumple o no. Si la conclusión final no se cumple, habrá un punto del argumento en el que se pasará de afirmaciones comprobadas con la balanza a otra que la balanza desmienta, y ese paso será lógicamente inaceptable, pues lleva de premisas ciertas a una conclusión falsa, y así la falacia del argumento quedará en evidencia.

Por ejemplo, en el caso del problema de los falsos triángulos, aunque no hubiéramos detectado la falacia, una balanza probaría que las áreas calculadas de las cuatro piezas  $A, B, C, D$  son correctas, mientras que las de los “triángulos” grandes no lo serían, lo que llevaría necesariamente a la conclusión de que los “triángulos” no pueden ser triángulos.

Cualquier matemático griego antiguo se daría por satisfecho con este argumento, pues los griegos no establecían ninguna distinción entre la física y la geometría más allá de que cualquier “experimento” geométrico resultará meramente aproximado en la práctica por imprecisiones debidas a que, por ejemplo, no es posible fabricar planchas sólidas con un grosor y una densidad exactamente uniformes, de forma que la geometría es una idealización de la realidad.

Sin embargo, desde un punto de vista moderno resulta inaceptable que un argumento matemático se apoye explícitamente en principios físicos sobre el peso de la materia. Dichos principios exceden lo que podríamos considerar como principios intuitivamente evidentes. Es evidente que si una recta  $r$  es paralela a otra recta  $s$  y  $s$  es paralela a  $t$ , entonces  $r$  tiene que ser paralela a  $t$ : No es posible concebir otra cosa, es imposible dibujar tres rectas que no cumplan eso. En cambio, no podemos afirmar que es “intuitivamente evidente” lo que dirá una balanza al pesar una figura. Esto deja dos alternativas: o bien tomamos como axiomas las propiedades básicas sobre áreas que usamos para calcularlas, o bien damos una definición puramente formal de área que valga para cualquier figura (o, al menos, para cualquier figura “razonable”) y demostramos a partir de ella los principios que haría falta tomar como axiomas.

Sucede que lo segundo es posible, por lo que la noción de área resulta ser en última instancia un concepto puramente geométrico como cualquier otro de los que vamos a estudiar en este libro. Sin embargo, este hecho no es evidente en absoluto, y para probarlo son necesarios razonamientos analíticos que a su vez requieren reformular previamente la geometría en términos algebraicos. (Véase el apartado posterior sobre la geometría analítica.)

**La cuadratura del círculo** En términos modernos, medir el área de una figura se interpreta como determinar el número (tal vez irracional) que expresa su proporción con respecto al área de un cuadrado de lado unitario, pero los

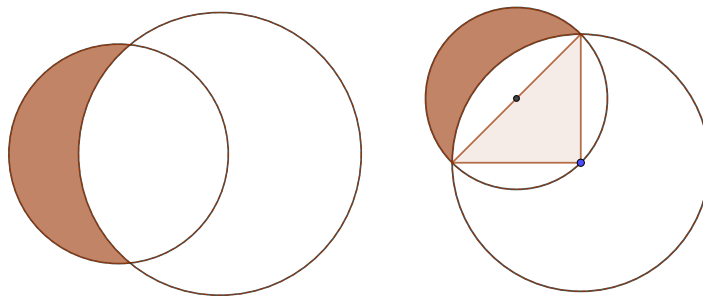
antiguos griegos concebían el problema de forma ligeramente distinta, pues consideraban que habían medido un área cuando encontraban un cuadrado con la misma área. A esto lo llamaban *cuadrar* una figura.

En el siglo V a.C. Anaxágoras afirmó que el Sol debía de ser más grande que toda Europa. Ésta y otras afirmaciones del mismo calibre fueron consideradas sacrílegas y acabó en prisión. Durante su encarcelamiento se planteó el problema de encontrar un cuadrado con la misma área que un círculo dado. Es la referencia más antigua que tenemos del problema de la *cuadratura del círculo*.

Coetáneo de Anaxágoras fue el astrónomo Oinópides de Quíos que fue uno de los primeros matemáticos griegos que teorizaron sobre la geometría como ciencia. Distinguió, por ejemplo, entre “teoremas” y “problemas”, estableciendo la diferencia en que los teoremas son resultados de interés teórico, que pueden ser aplicados en distintas situaciones, mientras que los problemas son resultados más o menos interesantes, pero sin aplicaciones subsiguientes. Oinópides también consideró que una construcción geométrica “pura” no debía usar más elementos que la regla y el compás. En particular, se planteó resolver el problema de la cuadratura del círculo con regla y compás.

Los griegos no tardaron en aceptar que el área de un círculo es proporcional al cuadrado de su radio, es decir, que es de la forma  $S = \pi r^2$ , donde  $\pi$  es cierta constante de proporcionalidad.<sup>5</sup> Una prueba rigurosa basada en la aproximación del área de un círculo por la de polígonos regulares aparece en el libro XII de los *Elementos* de Euclides, pero —de un modo u otro— era algo conocido mucho antes. Así, un discípulo de Oinópides, Hipócrates de Quíos, realizó lo que se consideró un gran avance en el problema de la cuadratura del círculo al cuadrar la que hoy se conoce como *lúnula de Hipócrates*.

En general, una *lúnula* es una figura formada por los puntos que están en un círculo, pero no en otro:

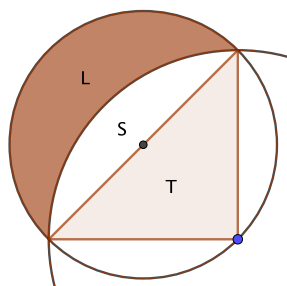


Pero la *lúnula de Hipócrates* es concretamente la que muestra la figura de la derecha, en la que el círculo mayor tiene su centro en el vértice recto de un triángulo rectángulo isósceles y radio igual a sus catetos, mientras que el círculo menor tiene el centro en la mitad de la hipotenusa y diámetro igual a ésta.

<sup>5</sup>Pero, contrariamente a lo que algunos creen, el uso de la letra griega  $\pi$  para nombrarla es muy posterior, pues fue introducido por Euler.

Hipócrates demostró que el área de la lúnula es la misma que la del triángulo.

En efecto, si llamamos  $r$  y  $R$  a los radios del círculo menor y mayor, respectivamente, el teorema de Pitágoras nos da que  $(2r)^2 = 2R^2$ , luego  $R^2 = 2r^2$ . Ahora usamos que el área de un círculo es proporcional al cuadrado de su radio, por lo que el área del círculo mayor es el doble de la del menor.



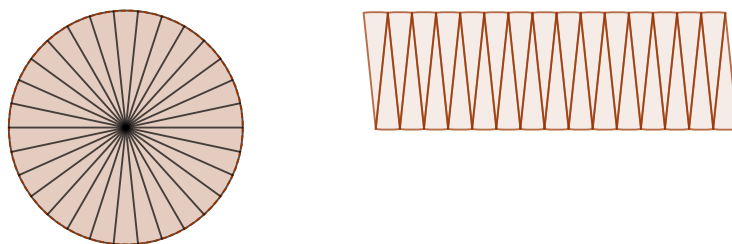
Pero entonces el semicírculo formado por la lúnula  $L$  y la figura  $S$  tiene la misma área que el cuadrante formado por el triángulo  $T$  y la figura  $S$ , luego si a ambas figuras les quitamos la figura  $S$ , las áreas seguirán siendo las mismas. ■

Este resultado alentó a muchos matemáticos griegos a abordar el problema de la cuadratura del círculo, aunque sin éxito. Es interesante señalar que, a pesar del interés que los griegos pusieron en el problema, no se sabe de ninguno que propusiera una solución errónea, mientras que a partir de la Edad Media éstas empezaron a proliferar. Por ejemplo, en 1050, el matemático Franco de Lieja escribió el tratado *De quadratura circuli* en el que, después de razonar que tres intentos precedentes de cuadrar el círculo eran incorrectos, proporcionaba su propio método, que de ser correcto implicaría que  $\pi = 22/7$ . Con el tiempo, aun sin poder justificarlo, los matemáticos serios terminaron convenciéndose de que el problema era imposible, y así, en 1775, la Academia de Ciencias de París aprobó una resolución por la que los trabajos que se le enviaran con presuntas soluciones no serían tenidos en consideración (dado el aluvión de falsas soluciones que enviaban matemáticos aficionados). Ya en el siglo XIX, De Morgan se burlaba de los “cuadradores del círculo” y acuñó la expresión *morbus cyclo-metricus* para denominar la enfermedad que les incapacitaba para entender la falsedad de sus argumentos.

El problema fue zanjado definitivamente en 1880, cuando Lindemann demostró que  $\pi$  es un número trascendente [ITAn 10.9], es decir, que no es la raíz de ningún polinomio con coeficientes racionales. En efecto, un poco antes, en 1837, el matemático francés Pierre Laurent Wantzel había demostrado (lo probaremos en 6.16) que las longitudes de todos los segmentos constructibles con regla y compás son números algebraicos (es decir, que son raíces de polinomios con coeficientes racionales). Por lo tanto, si fuera posible cuadrar un círculo dado, sería posible construir un cuadrado de área igual a la del círculo de radio unitario, pero dicho cuadrado tendría lado  $\sqrt{\pi}$ , luego por el teorema de Wantzel  $\sqrt{\pi}$  tendría que ser un número algebraico, y esto a su vez implica [ITAI 8.9]

que  $\pi$  también lo sería. Por lo tanto, es imposible cuadrar un círculo dado con regla y compás. Pese a lo cual, los intentos de cuadrar el círculo por parte de aficionados han perdurado hasta prácticamente la actualidad.

Un problema relacionado con la cuadratura del círculo es el de la rectificación de la circunferencia, es decir, construir un segmento cuya longitud sea igual a la de una circunferencia dada. Los griegos sabían que si la superficie de un círculo de radio  $r$  es  $\pi r^2$ , la longitud de su circunferencia tiene que ser  $2\pi r$ , con la misma constante en ambos casos. Aunque esto puede ser justificado de forma exacta (véase el final de la sección 5.2 de [ITAn]), un argumento que lleva a conjeturar esta relación resulta de considerar la figura siguiente:



Si partimos un círculo en  $n$  sectores circulares iguales y los disponemos como en la parte derecha de la figura, obtenemos una figura de la misma área que es aproximadamente un paralelogramo de base  $L/2$  y altura  $r$ , luego su área será aproximadamente  $\pi r^2 = rL/2$ , de donde  $L = 2\pi r$ . De hecho, puede probarse que cuando el número  $n$  de divisiones tiende a infinito, el área de la figura tiende ciertamente a  $2\pi r$ , por lo que la conclusión es correcta [ITAn 5.7].

Por consiguiente, la trascendencia de  $\pi$  implica también que es imposible rectificar una circunferencia con regla y compás, pues rectificar la circunferencia de radio 1 equivale a construir un segmento de longitud  $2\pi$  y, si tal cosa fuera posible, también podríamos dividirlo por la mitad y construir otro de longitud  $\pi$ .

**La duplicación del cubo** Otro famoso problema que se plantearon los griegos y que no pudieron resolver es el de la duplicación del cubo. En la ciudad de Delfos se encontraba uno de los oráculos más prestigiosos de la antigüedad, al que acudían toda clase de gentes que consultaban a los dioses los problemas más diversos. Los griegos contaban que en cierta ocasión los habitantes de la isla de Delos enviaron una embajada a Delfos para preguntar cómo poner fin a una grave plaga que azotaba la ciudad. La respuesta del oráculo fue que duplicaran el altar del templo de Apolo en Delos, que tenía forma cúbica. Los habitantes de Delos construyeron un nuevo altar más lujoso con el doble de arista. Era típico de los oráculos que formularan sus pronósticos de forma lo suficientemente ambigua como para que los sacerdotes pudieran cubrirse las espaldas en caso de fallo,<sup>6</sup> y en este caso, cuando una segunda delegación llegó

<sup>6</sup>Los romanos ponían como ejemplo de “respuesta sibilina” —es decir, de las profetisas que llamaban “sibilas”— la frase *Ibis redibis non morieris in bello*, que, según cómo se puntúe, se puede interpretar como “irás, volverás, no morirás en la guerra” o bien como “irás, no volverás, morirás en la guerra”.

a Delfos para protestar por que la plaga no arreciaba, la respuesta que obtuvo fue que no habían duplicado el altar, sino que el nuevo era ocho veces mayor que el antiguo.

Confundidos, los arquitectos de Delos fueron a Atenas a consultar a Platón, que les explicó que para lograr un altar cúbico el doble de grande debían multiplicar la arista del antiguo por la raíz cúbica de 2. Con ello, los sacerdotes de Delfos habían planteado un problema geométrico que daría mucho que pensar a los matemáticos griegos.

Desde la mentalidad moderna, podríamos decir que el problema es trivial y ya está resuelto: si tomamos como unidad de medida la arista del antiguo templo, sólo se trata de construir uno nuevo cuya arista mida  $\sqrt[3]{2}$ , pero los griegos habrían visto tal “solución” como una tomadura de pelo: en efecto, la raíz cúbica de 2 es el número cuyo cubo es dos y, ciertamente, ése es el problema, encontrar la longitud adecuada para que el cubo de dicha arista sea 2. Decir que la solución es  $\sqrt[3]{2}$  no es más que reformular el problema, no resolverlo. Es verdad que un matemático moderno puede explicarse más y añadir que

$$\sqrt[3]{2} = 1.2599210498948731648\dots$$

de modo que, si el altar medía, por ejemplo, 70 metros de arista, y construían otro de  $70 \cdot 1.26 = 88.2$  metros de arista, el volumen del nuevo altar sería el doble con un error menor al 0.04%, y que si querían mayor precisión sólo tenían que tomar más decimales. Pero los griegos desconocían los desarrollos decimales y, en cualquier caso, quedaba planteado el problema de cómo construir de forma exacta un segmento de longitud  $\sqrt[3]{2}$ . Platón planteó el problema a sus discípulos y tres de ellos, Arquitas, Eudoxo de Cnido y Menecmo, encontraron formas de construir  $\sqrt[3]{2}$ , pero Platón las criticó porque usaban métodos mecánicos que, según él, destruían la principal bondad de la geometría: su elegancia. Platón pidió una construcción que sólo usara regla y compás.

El número  $\sqrt[3]{2}$  es algebraico, pues es una de las raíces del polinomio  $x^3 - 2$ , pero Wantzel no sólo había probado que las longitudes constructibles con regla y compás tenían que ser algebraicas, sino que, más precisamente, tenían que ser raíces de polinomios de grado potencia de 2, cosa que no cumple  $\sqrt[3]{2}$ , por lo que Wantzel había demostrado que el “problema délico” o la “duplicación del cubo” es irresoluble con regla y compás.

**Euclides** A lo largo de los siglos V y IV a.C., la matemática griega —y especialmente la geometría— fue alcanzando gradualmente un nivel de desarrollo y sistematización que no tienen parangón con el alcanzado por otras culturas anteriores o posteriores.

Hipócrates de Quíos escribió el primer libro de texto de geometría del que tenemos noticia. Se titulaba *Elementos*, y en él exponía de forma organizada la geometría básica. Se sabe que, posteriormente, al menos otros cuatro matemáticos escribieron sus propios *Elementos*, y probablemente fueron perfeccionando sucesivamente el lenguaje geométrico y la estructura lógica de las exposiciones. Por desgracia todos esos textos se han perdido. Los únicos *Elementos* que han sobrevivido al paso del tiempo han sido los de Euclides, que sin duda deben

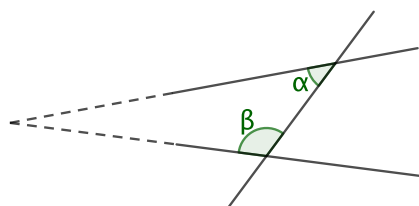


mucho a la labor de sus predecesores. Entre sus fuentes se encuentran textos de la escuela pitagórica, de la Academia de Platón el propio texto de Hipócrates y, como uno de sus pilares fundamentales, la teoría de la proporción de Eudoxo de la que ya hemos hablado y sobre la que daremos más detalles en el capítulo II. El resultado fue un texto imponente que ha sido considerado durante siglos como un modelo de rigor matemático, y fue la referencia obligada en la enseñanza de la geometría hasta principios del siglo XX.

Ahora bien, sin ánimo de reducir un ápice el indiscutible mérito de Euclides, es necesario señalar que el pretendido rigor lógicos de los *Elementos* de Euclides no lo es tal si lo juzgamos con el nivel de exigencia moderno. En teoría, todos los resultados demostrados en los *Elementos* se deducen de cinco “nociones comunes” y cinco “postulados”. Las nociones comunes son obviedades, como: *Cosas iguales a una misma cosa son iguales entre sí* o como *El todo es mayor que la parte*. En cuanto a los postulados, son los siguientes:

1. Se puede trazar un segmento de recta que una dos puntos cualesquiera.
2. Cualquier segmento de recta se puede prolongar indefinidamente en una línea recta.
3. Dado un segmento, se puede trazar un círculo con dicho radio y con centro uno de sus extremos.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si dos rectas cortan a una tercera de modo que la suma de los ángulos internos de un lado es menor que dos ángulos rectos, entonces las dos rectas tienen que cortarse en ese lado si se prolongan lo suficiente.

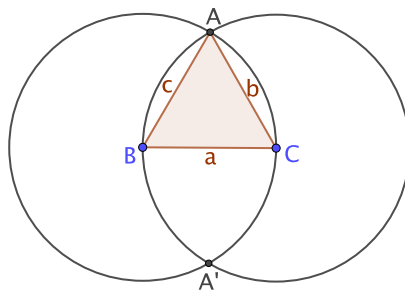
Vemos que los cuatro primeros son también hechos intuitivamente inmediatos, pero el quinto tiene “otro aire”. La figura siguiente muestra un ejemplo de la situación que describe:



Como se cumple que  $\alpha + \beta$  es menor que dos ángulos rectos, los dos segmentos tienen que cortarse si se prolongan lo suficiente. Antes de analizarlo con más detalle, insistimos en que es falso que todos los resultados demostrados en los *Elementos* sean consecuencias lógicas de las “nociones comunes” y los “postulados”.

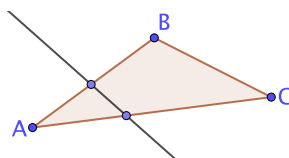
Por ejemplo, la primera proposición del libro I indica cómo construir un triángulo equilátero que tenga a un segmento dado como uno de sus lados. El

procedimiento es muy simple: dado el segmento  $\overline{BC}$ , se trazan circunferencias de centros  $B$  y  $C$  con radio  $\overline{BC}$  (lo cual es posible por el tercer postulado) y basta tomar un punto  $A$  donde se corten los dos círculos para obtener el triángulo equilátero  $\widehat{ABC}$  requerido:



Sin embargo, ninguno de los postulados de Euclides justifica que las dos circunferencias tengan que cortarse. Es intuitivamente evidente que tienen que cortarse, pero no es consecuencia lógica de los postulados de Euclides. Lo mismo sucede en muchas otras ocasiones. Existen varias axiomáticas modernas que reducen efectivamente todos los teoremas geométricos a unos pocos axiomas intuitivamente evidentes, pero dichos axiomas son bastante más amplios que los postulados de Euclides. Por ejemplo, en 1882 el matemático Moritz Pasch enunció un resultado que no puede demostrarse a partir de los cinco postulados, y que a menudo se toma como axioma en muchas presentaciones axiomáticas rigurosas de la geometría:

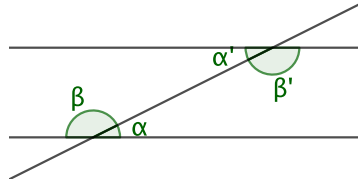
**Axioma de Pasch** *Si una recta no pasa por los vértices de un triángulo  $\widehat{ABC}$  y corta al lado  $\overline{AB}$ , entonces corta al lado  $\overline{BC}$  o bien al lado  $\overline{AC}$ .*



Sin embargo, la convicción de que los cinco postulados eran suficientes para demostrar todos los resultados probados en los *Elementos* aumentó la insatisfacción con el contraste obvio entre la evidencia de los cuatro primeros y la sofisticación técnica del quinto. En sus comentarios a los *Elementos*, Proclo ya relata varios intentos de demostrar el quinto postulado a partir de los otros cuatro, incluyendo una prueba incorrecta debida al famoso astrónomo Claudio Ptolomeo, y los intentos se han repetido infructuosamente durante dos mil años. El único fruto de tales intentos fue la formulación de versiones equivalentes del quinto postulado que resultaran algo menos técnicas. Por ejemplo, la formulación siguiente es una ligera variante del enunciado recíproco:

*Si una recta corta a dos rectas paralelas, entonces los ángulos alternos internos que determina en ellos son iguales.*

En la figura siguiente son ángulos alternos internos  $\alpha$  y  $\alpha'$ , así como  $\beta$  y  $\beta'$ :



Observemos que esto implica el quinto postulado, pues si  $\alpha + \beta'$  suman menos de dos rectos, entonces, como  $\alpha + \beta$  suman dos rectos, los ángulos alternos internos  $\beta$  y  $\beta'$  no pueden ser iguales, luego las rectas no son paralelas y, como los ángulos del lado en el que se cortan deben formar parte de un triángulo, su suma tiene que ser menor de dos rectos.<sup>7</sup>

Sin embargo, este enunciado sigue pareciendo que necesita una demostración a partir de principios más simples. Un avance notable se produjo en 1846, cuando John Playfair publicó sus *Elementos de geometría*, en los que sustituyó el quinto postulado por el enunciado siguiente:

**Axioma de las paralelas** *Por un punto exterior a una recta pasa una única paralela.*

Este enunciado se conoce también como *axioma de Playfair*. Sucede que es equivalente al quinto postulado y a la vez puede considerarse indiscutiblemente evidente como para ser tomado como axioma.<sup>8</sup> Probablemente, si Euclides hubiera enunciado en esta forma su quinto postulado, nadie habría considerado necesario tratar de demostrarlo a partir de los demás, pero los intentos se dieron y el resultado final fue el descubrimiento de las que se conocen como *geometrías no euclídeas*, es decir, geometrías distintas de la geometría intuitiva estudiada por los griegos, y que definitivamente ha quedado vinculada al nombre de Euclides.

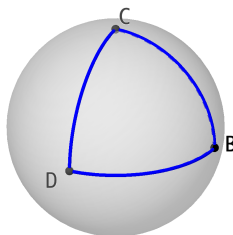
Este libro trata únicamente de la geometría euclídea, pero para que el lector pueda hacerse una idea de la diferencia, si no la conoce ya, consideremos, por ejemplo, esta afirmación:

*Los ángulos de un triángulo suman dos ángulos rectos.*

Esto es cierto cuando entendemos por “triángulo” un triángulo trazado sobre un “plano euclídeo”, es decir, una versión ideal, ilimitada de una hoja de papel extendida sobre una mesa. Sin embargo, es falso si el “plano” en el que se encuentra el triángulo es, por ejemplo, la superficie de una esfera.

<sup>7</sup>Puede probarse sin recurrir al quinto postulado que dos ángulos de un triángulo tienen que sumar menos de dos ángulos rectos.

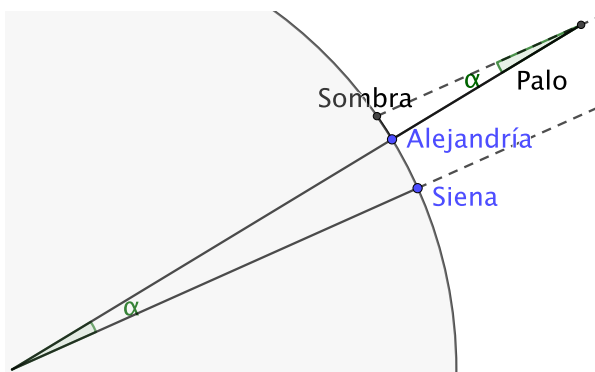
<sup>8</sup>En realidad sólo es necesario tomar como axioma que por un punto exterior a una recta pasa a lo sumo una paralela, pues la existencia de al menos una puede ser demostrada.



La figura anterior muestra un triángulo esférico que tiene tres ángulos rectos. La geometría de la superficie de una esfera es un ejemplo de geometría no euclídea. En este punto es importante aclarar que tenemos una geometría no euclídea si tomamos la superficie de una esfera como sustituto del plano euclídeo y los círculos que pasan por polos opuestos como sustitutos de las rectas, pero — naturalmente — también es posible estudiar la geometría de la esfera en el marco de la geometría euclídea considerando en todo momento a las circunferencias como circunferencias y no como rectas. De hecho, la geometría esférica alcanzó un alto grado de desarrollo en tiempo de los griegos, principalmente por sus aplicaciones a la astronomía y a la geodesia.

**Eratóstenes** Uno de los hitos más destacables de la geometría griega en el campo de la geodesia lo llevó a cabo Eratóstenes de Cirene. El rey Ptolomeo III de Egipto lo había puesto al frente de la Biblioteca de Alejandría. Un día Eratóstenes tuvo noticia de que, en la ciudad de Siena (la moderna Asuán), el día del solsticio de verano a mediodía los objetos verticales no proyectaban sombra alguna, y que había un pozo profundo en el cual se veía reflejado el sol. Por otra parte, Eratóstenes constató que eso no era así en Alejandría, lo que interpretó correctamente como la confirmación de una teoría sobre la que los filósofos griegos llevaban tiempo especulando: que la tierra no es plana. En efecto, el hecho de que los palos no dieran sombra en Siena significaba que los rayos del sol caían verticalmente, y el hecho de que en Alejandría no fuera así era justo lo que cabía esperar si la superficie de la tierra es curva.

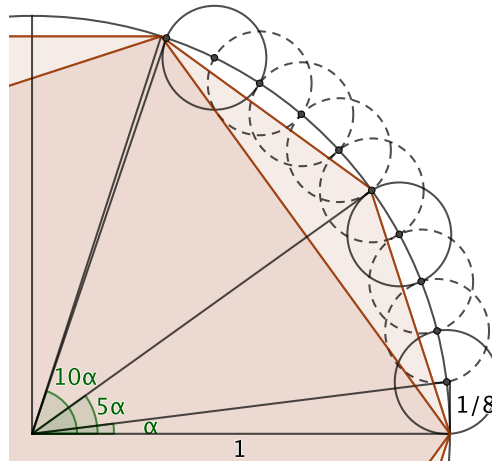
Admitiendo que la tierra es esférica (que era la conjetura más extendida entre los sabios), la situación es la que ilustra la figura siguiente:



Supongamos que el día del solsticio de verano a mediodía plantamos un palo en Alejandría (que en la figura está representado a una escala exageradamente grande para que sea apreciable). Los rayos del sol que llegan a Siena lo hacen verticalmente, pues no proyectan sombra, y es razonable admitir que los rayos de Sol que llegan entonces a Alejandría son paralelos a los que llegan a Siena. En tal caso, el segmento que une la punta del palo con la punta de su sombra es paralelo al radio de la tierra que llega hasta Siena, y una de las versiones equivalentes al quinto postulado de Euclides que hemos discutido antes nos asegura que el ángulo  $\alpha$  que forma con el palo la recta que une su punta con la de su sombra tiene que ser igual al ángulo que forman los radios terrestres que terminan en Alejandría y en Siena, pues son ángulos alternos internos. Eratóstenes comprendió que midiendo ese ángulo podría determinar nada menos que el tamaño de la Tierra.

Así, un buen día de solsticio estival, Eratóstenes clavó un palo en Alejandría y midió la longitud de su sombra a mediodía. Notemos que para ello ni siquiera necesitaba un reloj. Sólo tenía que ir midiendo la longitud de la sombra desde un poco antes del mediodía a pequeños intervalos de tiempo. La longitud más corta sería la longitud a mediodía.

Eratóstenes necesitaba conocer también la medida del palo. Puesto que podía elegir la que quisiera, es razonable suponer que eligió un número “redondo”, por ejemplo, 5 pies (1.60 m, lo que podía ser la altura de una persona). La geografía y la astronomía nos permiten asegurar que en tal caso la sombra del bastón sería exactamente de 0.62366 pies. Pero Eratóstenes no usaba nuestro sistema decimal de medidas. Para los griegos, un pie eran 16 dedos, y si en la regla de Eratóstenes los pies estaban subdivididos en dedos, el resultado de la medida habría tenido que ser de  $0.62366 \cdot 16 = 9.978704$  dedos, por lo que, en ausencia de centésimas de dedo en su regla, habría concluido que la sombra medía aproximadamente 10 dedos. Puesto que el bastón medía  $5 \cdot 16 = 80$  dedos, la conclusión final es que la sombra era aproximadamente la octava parte del bastón. El paso siguiente era determinar qué ángulo  $\alpha$  forma un triángulo rectángulo con el cateto opuesto ocho veces menor que el cateto contiguo:



Los matemáticos griegos sabían construir pentágonos regulares y, calculando las mediatrices de sus lados (o las bisectrices de sus ángulos) también decágonos regulares. Si dibujamos un triángulo rectángulo con catetos de longitud 1 y  $1/8$ , trazamos la circunferencia que muestra la figura, consideramos el arco que la hipotenusa determina en ella y vamos copiando el arco sucesivamente, para construir los ángulos  $2\alpha$ ,  $3\alpha$ , etc., vemos que  $5\alpha$  es casi indistinguible del vértice del decágono, mientras que  $10\alpha$  queda muy cerca del vértice del pentágono. En la figura la diferencia es apreciable, pero hay que tener en cuenta que ha sido hecha con un ordenador, y cualquiera que haya hecho construcciones “reales” con regla y compás sabrá lo fácilmente que se propagan los errores.

Así pues, es natural que Eratóstenes concluyera que  $\alpha$  es aproximadamente la quinta parte del ángulo abarcado por el lado de un decágono regular, es decir,  $1/50$  de circunferencia.

Ahora Eratóstenes sabía que el arco de circunferencia que une Alejandría con Siena es  $1/50$  de la circunferencia terrestre.<sup>9</sup> El paso siguiente era determinar la distancia entre ambas ciudades. Eratóstenes la estimó en 5 000 estadios. Existen distintas versiones sobre cómo llegó a esta cifra. Una es que preguntó a mercaderes, otra que contrató a unos soldados para que recorrieran el camino a paso regular. También podía haber sido un dato conocido en la época. Fuera como fuere, Eratóstenes concluyó que la circunferencia terrestre mide  $50 \cdot 5\,000 = 250\,000$  estadios.

Pero, ¿cuánto es un estadio? Para los griegos un estadio eran siempre 600 pasos, pero la longitud del paso podía depender de cada ciudad. Por otro lado, estaba el estadio egipcio, que medía 300 codos reales, es decir,  $300 \cdot 0.525 = 157.5$  m. Con este valor, la circunferencia terrestre calculada por Eratóstenes es de  $250\,000 \cdot 0.1575 = 39\,375$  km. Comparado con el valor real, que es de unos 40 000 km, el error es menor del 1.6%, pero si consideramos el estadio ático de 185 m, que es un candidato más probable, el resultado es de 46 250 km, con un error del 15.6%.

Ahora bien, para estimar la precisión del cálculo de Eratóstenes resulta natural aplicarlo a la verdadera distancia entre Alejandría y Siena, que resulta ser de 843 km. Con este dato, Eratóstenes habría concluido que la longitud de la circunferencia terrestre es de  $50 \cdot 843 = 42\,150$ , con un error del 5.4%. Esto significa que cualquier resultado más aproximado “sería casualidad”, es decir, una afortunada compensación de errores, a la vez que muestra la enorme precisión del procedimiento, pues nadie podría esperar una precisión mayor a la hora de medir el tamaño de la Tierra sin más ayuda que un palo.

Eratóstenes estimó también el diámetro de la Tierra, usando para ello la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, que su amigo Ar-

---

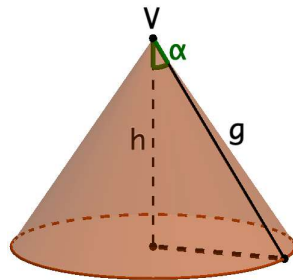
<sup>9</sup>En realidad hay una inexactitud, y es que Alejandría y Siena no están sobre el mismo meridiano, sino que hay una diferencia de  $3^\circ$  de longitud entre ambas, lo que se traduce en que en Siena es mediodía 12 minutos antes que en Alejandría, por lo que, para ser exacto, Eratóstenes tenía que haber medido la longitud de la sombra de su bastón 12 minutos antes del mediodía. Esto es mucho más difícil, y además él no era consciente de la diferencia de longitud. Ambas ciudades están a orillas del Nilo y éste fluye aproximadamente de sur a norte, por lo que era razonable suponer que ambas ciudades estaban aproximadamente sobre el mismo meridiano.

químides había estimado recientemente en  $22/7 = 3.142857\dots$ . Si la aplicamos a la distancia real entre Alejandría y Siena obtenemos un valor de 13411 km, frente al valor real, que es aproximadamente de 13000 km, lo que supone un error de un 3%.

En la sección 3.5 veremos cómo otro astrónomo griego, Hiparco de Nicea, calculó la distancia de la Tierra a la Luna en el siglo II a.C.

**Secciones cónicas** Una *elipsis* es una omisión de información en una frase o texto, una *parábola* es una narración diseñada para que se ajuste a una enseñanza que se desea transmitir, y una *hipérbola* es una exageración. Estas tres palabras derivan de otras tantas palabras griegas que significan, respectivamente, “que le falta”, “ajustado” y “que se pasa”, las mismas que en las que se basó Apolonio de Perga para clasificar las secciones cónicas en tres familias de curvas: elipses, parábolas e hipérbolas. La primera referencia que se tiene sobre el estudio de las secciones cónicas es más de un siglo anterior al trabajo de Apolonio, pues se atribuye a Menecmo, el discípulo de Platón que, como hemos mencionado antes, trató de resolver a instancias de su maestro el problema de la duplicación del cubo, para lo cual recurrió a las secciones cónicas, es decir, a las curvas que se obtienen al cortar un cono con un plano.

La figura siguiente muestra lo que tradicionalmente se entiende por un *cono* (lat. piña):



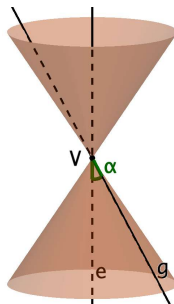
Dado un círculo, consideramos la recta perpendicular a su plano que pasa por su centro, tomamos un punto  $V$  en ella y consideramos la superficie formada por todos los segmentos que unen  $V$  con un punto de la circunferencia. El cono<sup>10</sup> es el sólido limitado por dicha superficie (la *superficie lateral* del cono) y por el círculo (la *base*). El punto  $V$  se llama *vértice*, el segmento  $h$  que une  $V$  con el centro de la base es la *altura* y cualquiera de los segmentos  $g$  que unen  $V$  con un punto de la circunferencia es una *generatriz* del cono.

Observemos que un cono está completamente determinado por su altura y el radio de su base, o también por su altura y su *semiamplitud*, que es el ángulo  $\alpha$  que forma con la altura cualquiera de las generatrices. La *amplitud* es el ángulo  $2\alpha$  que forman dos generatrices contenidas en un mismo plano.

Los antiguos griegos no trabajaban con objetos ilimitados (no hablaban de rectas, sino de segmentos arbitrariamente prolongables, etc.), por lo que consideraban conos en el sentido que acabamos de definir, pero, desde el punto

<sup>10</sup>Más precisamente, estamos definiendo un *cono recto*. Un *cono oblicuo* se define análogamente, pero sin exigir que la altura sea perpendicular a la base.

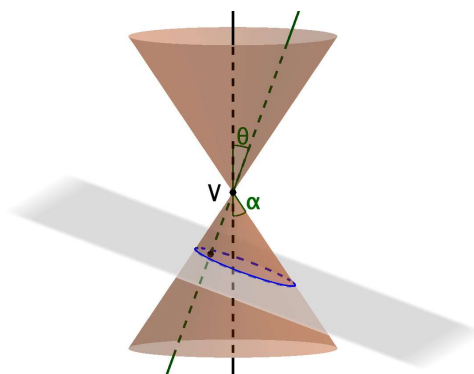
de vista moderno, para el estudio de las secciones cónicas es preferible llamar “cono” a lo que más técnicamente se entiende por “superficie cónica”:



Fijada una circunferencia y un punto  $V$  en la recta  $e$  perpendicular a su plano que pasa por su centro, un *cono* en este sentido es la superficie formada por todas las rectas  $g$  que unen  $V$  con los puntos de la circunferencia. El punto  $V$  se llama *vértice* del cono y las rectas  $g$  se llaman *generatrices*. La *semiamplitud* del cono es el ángulo  $\alpha$  que el *eje*  $e$  forma con cualquiera de las generatrices.

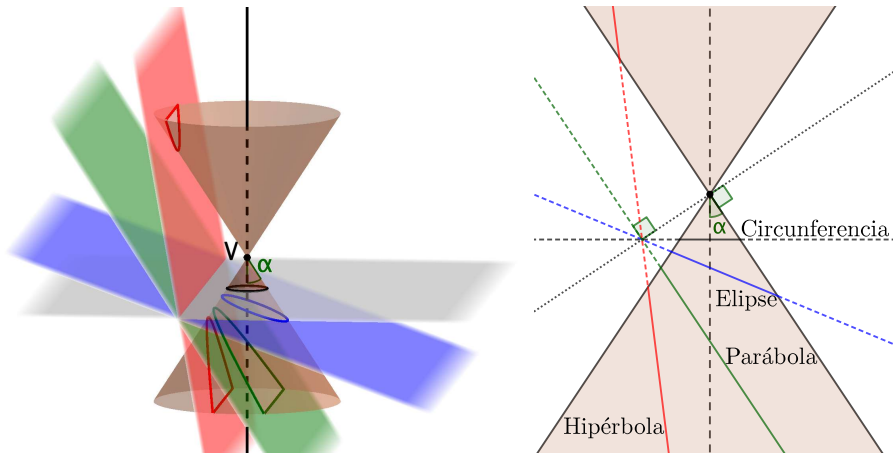
La diferencia con el “cono clásico” es que un cono en el sentido de “superficie cónica” no tiene base y está formado por dos “conos infinitos” opuestos por el vértice.

Las *secciones cónicas* son las curvas que se obtienen como intersección de un cono con un plano  $\Pi$  que no pase por su vértice. (Si el plano pasa por el vértice, es fácil ver que la intersección se reduce al vértice, a una recta o a dos rectas que se cortan en el vértice.) Las características de la curva resultante dependen de lo que podemos llamar *ángulo de incidencia*  $\theta$ , que es el ángulo que forma con el eje del cono la perpendicular a  $\Pi$  que pasa por el vértice  $V$ :



Si  $\theta = 0$ , esto significa que  $\Pi$  es perpendicular al eje del cono, y en tal caso ya hemos visto que la intersección es una circunferencia. En caso contrario la recta perpendicular al plano que pasa por  $V$  es distinta del eje del cono, por lo que podemos considerar el plano  $\Sigma$  que las contiene a ambas, el cual contiene dos generatrices opuestas del cono (para  $\theta = 0$  podemos tomar como  $\Sigma$  cualquier plano que contenga al eje). La figura siguiente muestra a la izquierda distintos planos de corte  $\Pi$  y a la derecha sus intersecciones con el plano  $\Sigma$ :





Menecmo consideró únicamente el caso en que  $\theta = \alpha$ , lo que en la figura de la derecha se traduce en que la sección de  $\Pi$  es perpendicular a una de las dos generatrices contenidas en  $\Sigma$ , y distinguió tres clases de secciones cónicas según si la amplitud  $2\alpha$  del cono es un ángulo agudo, recto u obtuso, pero Apolonio de Perga demostró que cualquier plano que corte a una superficie cónica sin pasar por su vértice determina las mismas curvas que las estudiadas por Menecmo, así que no es necesario imponer la condición de perpendicularidad. Lo único relevante es la relación entre  $\theta$  y  $\alpha$ . Esto lo llevó a acuñar los nombres de *elipse*, *parábola* e *hipérbola* para referirse, respectivamente, a las curvas obtenidas cuando el ángulo de incidencia queda por debajo, se ajusta o sobrepasa el valor crítico dado por el complementario de  $\alpha$ .

Para entender la diferencia nos basaremos en el hecho siguiente: si tenemos un plano  $\Pi$  y una recta que pasa por un punto exterior  $V$  es paralela a  $\Pi$ , entonces la recta está contenida en el plano paralelo a  $\Pi$  que pasa por  $V$ , pues si no estuviera contenida en él, lo cortaría en  $V$ , y si una recta corta a un plano, corta a todos sus planos paralelos.

Entonces, en el caso de una *elipse*, es decir, cuando  $0 \leq \theta < \pi/2 - \alpha$ , el plano paralelo a  $\Pi$  que pasa por  $V$  no corta al cono más que en el propio  $V$ , por lo que  $\Pi$  corta a cada generatriz del cono en un único punto, y todos los puntos de corte están en el mismo de los dos “conos opuestos” que forman la superficie cónica completa.

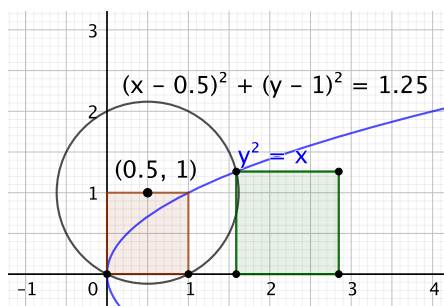
En el caso de una *parábola* ( $\theta = \pi/2 - \alpha$ ), el plano paralelo a  $\Pi$  que pasa por  $V$  es tangente al cono, es decir, contiene una única generatriz  $g$ , por lo que  $\Pi$  corta en un único punto a todas las generatrices excepto a  $g$ , y todos los puntos de corte están también en el mismo de los dos “conos opuestos”.

En cambio, en el caso de una *hipérbola* ( $\pi/2 - \alpha < \theta < \pi/2$ ) el plano  $\Pi$  corta a los dos conos opuestos que forman la superficie cónica, por lo que cada hipérbola tiene dos *ramas*. El plano paralelo a  $\Pi$  que pasa por  $V$  contiene dos generatrices del cono, por lo que  $\Pi$  corta a todas las generatrices excepto a dos.

Para entender la relación de las secciones cónicas con la duplicación del cubo conviene dar un salto en la historia para considerar un enfoque de la geometría que era prácticamente desconocido para los griegos:

**La geometría analítica** En 1637 Descartes publicó su famoso *Discurso del método*. Es un ensayo sobre la teoría del conocimiento, pero incluyó en él tres apéndices, el tercero de los cuales se titulaba *La geometría*. En él introdujo un nuevo método de trabajo en geometría que permitía reducir los problemas geométricos a problemas puramente algebraicos. En este trabajo está implícita la idea de identificar cada punto del plano por dos coordenadas de números reales, si bien esto sólo fue presentado de forma explícita por el matemático neerlandés Frans van Schooten, quien en 1649 publicó una versión en latín con comentarios de *La geometría* de Descartes, que fue la que realmente difundió entre los matemáticos de la época lo que Descartes había bautizado como *geometría analítica*.

La figura muestra unos ejes cartesianos, de modo que cada punto queda completamente determinado por un par de coordenadas  $(x, y)$ , que indican, respectivamente, el movimiento horizontal y vertical necesario para llegar hasta el punto desde el origen de coordenadas (el punto donde se cortan los ejes). Por ejemplo, uno de los puntos representados es el que tiene coordenadas  $(0.5, 1)$ , es decir, el punto al que llegamos si, partiendo del origen de coordenadas (la intersección de los ejes) nos movemos 0.5 unidades hacia la derecha y 1 unidad hacia arriba:



En términos de coordenadas (estos hechos los discutiremos en el apéndice A), cada recta resulta estar formada por los puntos cuyas coordenadas cumplen una ecuación de la forma

$$ax + by = c,$$

mientras que los puntos de una circunferencia satisfacen una ecuación de la forma

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c,$$

y así es posible trabajar algebraicamente con curvas más complejas, muchas de las cuales serían intratables de otro modo. Por ejemplo, las secciones cónicas estudiadas por Menecmo y Apolonio se caracterizan analíticamente como las curvas definibles por ecuaciones polinómicas de segundo grado (excluyendo algunos casos triviales que determinan puntos, rectas o pares de rectas, y que se corresponden de todos modos con las secciones que resultan de cortar un cono con un plano que pase por su vértice). Por ejemplo, la figura muestra la curva de ecuación  $y^2 = x$ , que resulta ser una parábola en el sentido considerado por Menecmo (teorema 7.19).

No es posible dibujar secciones cónicas con regla y compás, pero imaginemos que de algún modo logramos dibujar la curva  $y^2 = x$  en un papel (más adelante veremos cómo hacerlo). Entonces, si trazamos con un compás la circunferencia de centro  $(1/2, 1)$  que pasa por  $(0, 0)$ , nos encontramos con que ésta corta a la parábola en dicho punto  $(0, 0)$  y otro más. Las coordenadas  $(x, y)$  de estos dos puntos cumplirán tanto la ecuación de la parábola como la de la circunferencia, que resulta ser

$$(x - 1/2)^2 + (y - 1)^2 = 5/4.$$

Operando, esta ecuación se reduce a  $x^2 + y^2 - x - 2y = 0$  y, si sustituimos en ella  $x = y^2$ , llegamos a la ecuación  $y^4 - 2y = 0$ . La solución  $y = 0$  nos lleva al punto  $(0, 0)$  que ya conocíamos, pero si suponemos que  $y \neq 0$ , podemos dividir y resulta que  $y^3 - 2 = 0$ , luego el segundo punto de intersección cumple  $y = \sqrt[3]{2}$ , luego es  $(x, y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ .

Por consiguiente, si el cuadrado de la izquierda en la figura anterior es la base del antiguo templo de Apolo, el cuadrado de la derecha es la base de un templo con el doble de volumen que el anterior y así queda resuelto de forma exacta el problema de la duplicación del cubo.

Pero la solución supone que somos capaces de trazar parábolas en un papel. Podríamos decir que Menecmo resolvió el problema de forma teórica, en el sentido de que precisó “cómo es de grande exactamente” la raíz cúbica de 2 en términos de curvas definidas a partir de conos. Por esta razón, los griegos llamaron “construcciones sólidas” a las construcciones geométricas que involucraban secciones cónicas u otras curvas definidas a partir de “sólidos” (figuras tridimensionales). No obstante, el estudio ulterior de las secciones cónicas<sup>11</sup> mostró que poseen muchas propiedades insospechadas, algunas de las cuales dan lugar a diversos procedimientos mecánicos sencillos para construirlas en la práctica, no únicamente con regla y compás, ciertamente, pero sí con poco más que eso, por ejemplo, veremos que es posible trazar de forma exacta una parábola con una regla fijada a una ranura y una cuerda.

Los griegos sabían que muchos problemas geométricos que se resistían a ser resueltos con regla y compás pueden resolverse en términos de curvas que admiten una definición teórica precisa, aunque su trazado práctico sea problemático. De hecho, las secciones cónicas no fueron las primeras curvas empleadas con este fin, sino que, hacia 420 a.C., mucho antes que Menecmo las introdujera, Hippias de Elis estudió la curva que hoy se conoce como *trisectriz de Hippias*, (la estudiaremos en la sección 6.6) y que es la primera curva de cuyo estudio se tiene constancia, dejando aparte la circunferencia. Con ella logró resolver el tercer problema clásico que se resistió a la regla y el compás (junto con la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo), a saber, la *trisección del ángulo*.

Es fácil dividir un ángulo dado en dos ángulos iguales con regla y compás, mientras que dividirlo en tres partes iguales parecía imposible. De hecho, al mismo tiempo que probó la imposibilidad de la duplicación del cubo con regla

<sup>11</sup>Euclides escribió cuatro libros sobre secciones cónicas, pero fueron mejorados por Apolonio de Perga, que los completó con otros cuatro más, y sus ocho libros se convirtieron en la referencia habitual, por lo que la obra de Euclides no tardó en perderse.

y compás, Wantzel demostró con su mismo criterio la imposibilidad de —por ejemplo— trisecar con regla y compás un ángulo de  $60^\circ$ . Sin embargo, Hippias probó que cualquier ángulo podría ser trisecado si podemos dibujar la trisectriz que hoy lleva su nombre. Más aún, la misma curva se conoce también como *cuadratriz de Dinóstrato* porque Dinóstrato (hermano de Menecmo) probó que con ella era posible cuadrar el círculo.

Naturalmente, aunque estos problemas se abordan más claramente en términos de la geometría analítica, los griegos lograron enfrentarse a ellos sin su ayuda. El estudio de la geometría sin recurrir a la geometría analítica, es decir, sin asignar coordenadas a los puntos ni operar con las ecuaciones que satisfacen las coordenadas de cada figura, se conoce como *geometría sintética*. La geometría analítica y la geometría sintética son, pues, dos formas alternativas de abordar unos mismos objetos de estudio. A menudo se complementan, en el sentido de que en algunas ocasiones una demostración analítica de un resultado resulta mucho más clara e ilustrativa que los argumentos sintéticos alternativos, mientras que en otros casos sucede justo lo contrario, es decir, que los argumentos analíticos se convierten en una manipulación farragosa de ecuaciones que, por una serie de “coincidencias aparentemente milagrosas” nos llevan a la conclusión, mientras que los argumentos sintéticos muestran realmente por qué las “coincidencias” no eran “casuales”.

Hay algunos contextos en los que el enfoque analítico es imprescindible. Por ejemplo, la caracterización de Wantzel de la constructibilidad con regla y compás depende esencialmente de considerar los puntos del plano, no ya como pares de números reales  $(x, y)$ , sino como números complejos  $x + yi$ . En este libro haremos hincapié principalmente en el enfoque sintético, pero usaremos técnicas analíticas cuando claramente sean preferibles.

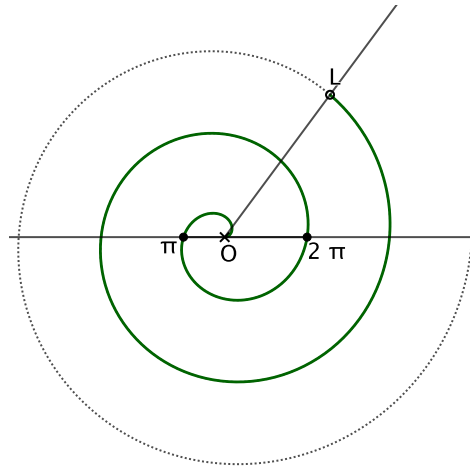
Muchos textos de geometría analítica parten de definiciones algebraicas de los conceptos de “punto”, “recta”, “segmento”, etc., de modo que no es evidente que se correspondan con los conceptos intuitivos que estudiaremos en este libro. Por ello dedicamos el apéndice A a probar que los conceptos sintéticos satisfacen las propiedades algebraicas que pueden tomarse como definición alternativa. Además, esto nos permitirá a su vez remitir al lector al apéndice A de [ITAn], donde se presenta una definición analítica puramente formal de área de una figura plana que justifica todos los argumentos sintéticos elementales que se emplean en el cálculo de áreas sin necesidad de recurrir a conceptos físicos como el de “peso”.

**Arquímedes** En una panorámica de las contribuciones de los griegos a la geometría no puede faltar el nombre de Arquímedes de Siracusa. Ciñéndonos a sus trabajos relacionados con el contenido de este libro, ya hemos mencionado que estimó la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro (véase el final de la sección 5.2 de [ITAn]) con las desigualdades

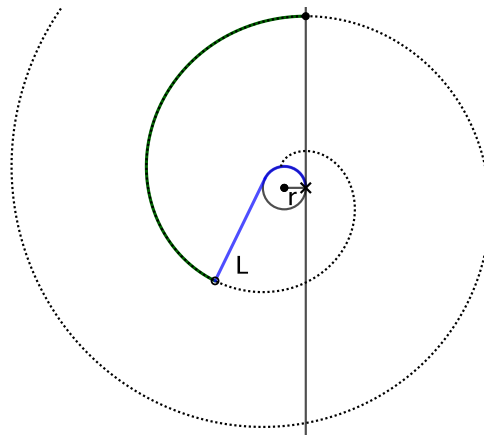
$$\frac{227}{71} < \pi < \frac{22}{7}.$$

También probó que el área de una elipse de semiejes  $a$  y  $b$  viene dada por  $\pi ab$ . Esto prueba que las elipses, al igual que el círculo, no son cuadrables con regla y compás, pero, sorprendentemente, Arquímedes probó que sí es posible cuadrar con regla y compás la región limitada por una parábola y una de sus cuerdas. Esto lo probaremos en 7.27.

En su estudio de la cuadratura del círculo, Arquímedes definió lo que hoy se conoce como la *espiral de Arquímedes*, que es la trayectoria que describe un punto que se mueve sobre una barra giratoria desplazándose por ella a la misma velocidad que gira la barra.



Es claro entonces que cada vez que la barra da una vuelta completa el punto ha avanzado una distancia  $2\pi$ , luego si podemos trazar en un papel una espiral de Arquímedes, a partir de ella podemos cuadrar el círculo. Sin embargo, no hay forma de ajustar el movimiento circular y el rectilíneo para trazar una espiral de Arquímedes sin contar de antemano con una forma de calcular  $\pi$ . No obstante, hay una variante de la espiral de Arquímedes que es fácil de trazar y resuelve igualmente el problema de la cuadratura del círculo:



Basta fijar una cuerda a un disco sólido y hacerla girar para que se enrolle alrededor del disco. Al cabo de una vuelta completa, el extremo habrá cortado a una tangente al disco en dos puntos separados por una distancia  $2\pi r$ .

En realidad, desde un punto de vista puramente teórico, construir  $\pi$  de este modo es esencialmente lo mismo que enrollar un hilo alrededor de un círculo y luego extenderlo sobre una recta, pero el trazado de la espiral evita muchos inconvenientes obvios que dan lugar a grandes imprecisiones si se intenta llevar esta idea a la práctica.

**Más allá de los griegos** Aunque buena parte de los resultados probados en este libro eran ya conocidos por los antiguos griegos, lo cierto es que la geometría euclídea ha avanzado mucho desde entonces, y aquí probaremos también resultados más modernos. El más reciente de todos es el teorema de Kosnita (teorema 5.28), que apareció publicado por primera vez en 1997. En las páginas siguientes el lector encontrará también algunas contribuciones a la geometría de Fermat, Pascal, Euler, Feuerbach, Desargues y muchos más, e incluso un resultado atribuido a Napoleón Bonaparte.

# Capítulo I

## El plano euclídeo

La palabra *geometría* significa “medida de la tierra”, un reflejo de que los primeros problemas geométricos que abordó el ser humano eran del estilo de determinar la magnitud de un terreno, o especificar inequívocamente qué territorio pertenecía a cada individuo, etc. Sin embargo, del mismo modo que la *aritmética* propiamente dicha (es decir, “la ciencia de los números”) surgió en el momento en que los hombres entendieron que el hecho de que tres cabras más dos cabras hacen cinco cabras podía expresarse en general, como que  $3 + 2 = 5$ , donde es irrelevante que los números sumados representen cabras, árboles o piedras, la geometría propiamente dicha surgió cuando entendieron que cualquier descripción de un terreno, o cualquier figura trazada en el suelo, o en una tablilla de arcilla, o en un papiro, puede entenderse como un hecho abstracto sobre “*el plano*”, un plano ideal que no está hecho ni de tierra, ni de arcilla, ni de papiro, igual que los números no están hechos de carne, ni de madera ni de granito.

En latín, *calculus* significa “piedrecita”, y así “calcular” es operar con piedrecitas, porque las piedrecillas pueden usarse en la práctica para llevar a cabo un cálculo aritmético a modo de representación concreta de los números abstractos (lo cual es particularmente útil en ausencia de un sistema de numeración posicional). Similarmente, la arena de la playa, una pizarra o una hoja de papel pueden usarse en la práctica para llevar a cabo construcciones geométricas a modo de representaciones concretas del plano geométrico abstracto.

Ahora bien, del mismo modo que las piedrecillas de un montón de piedrecillas terminan acabándose, mientras que los números no se acaban nunca, una hoja de papel, e incluso la arena de una playa, tienen sus límites, mientras que el plano geométrico ideal es ilimitado. Igual que si nos vemos obligados a interrumpir un cálculo “por falta de piedras” no debemos deducir de ahí que el cálculo es irrealizable, sino que “necesitamos más piedras”, si nos vemos obligados a interrumpir una construcción geométrica porque se nos sale de los límites del papel, no debemos deducir que la construcción es irrealizable, sino que “necesitamos un papel mayor”.

Hablamos de “el plano” porque aquí vamos a estudiar únicamente geometría plana. Los antiguos egipcios construyeron grandes monumentos funerarios con

forma de pirámide, y las figuras geométricas necesarias para su diseño no caben en “el plano”. Si quisiéramos estudiar la geometría tridimensional, es decir, la geometría del espacio, tendríamos que hablar de “el espacio” geométrico ideal en lugar del plano.

## 1.1 Puntos y rectas

Si usamos la hoja en la que está impreso este texto como aproximación razonable concreta de un plano geométrico ideal, en la figura podemos ver algunos ejemplos de los objetos básicos que los que vamos a hablar en este libro: una recta  $r$  y dos puntos  $A$  y  $B$ . El concepto de “recta” es un concepto intuitivo. No es posible explicar con palabras en qué se diferencia una línea recta de otras líneas curvas, igual que no es posible explicar con palabras la diferencia entre el color rojo y el color verde, pero seguro que el lector sabe distinguir una recta de una curva igual que sabe distinguir un color de otro.<sup>1</sup>



Como sucede con los planos, ninguna representación “física” de una recta se corresponde exactamente con el concepto geométrico ideal de *línea recta*. Por una parte, hay que entender que las rectas son ilimitadas, es decir que, aunque, necesariamente, sólo podemos representar un fragmento de cada recta, si prolongamos un fragmento de recta tendremos una porción mayor de la misma recta  $r$  y no “otra recta mayor”. Por otro lado, aunque cualquier trazo “real” que pretenda representar una recta tendrá necesariamente un cierto grosor, hay que entender que las rectas ideales no tienen grosor alguno.

Similarmente, aunque hayamos representado los puntos  $A$  y  $B$  como dos pequeños círculos, en realidad hay que entender que un *punto* carece de extensión, de modo que si ampliáramos (idealmente) más y más la figura anterior, podríamos ver los puntos  $A$  y  $B$  cada vez más alejados entre sí, pero nunca los veríamos “más grandes”, porque los puntos no tienen tamaño. Sólo tienen —o, más precisamente, sólo son— una posición en el plano perfectamente definida.

De entre las propiedades evidentes de los puntos y las rectas, es especialmente notable la que Euclides tomó como el primero de sus postulados:

*Por dos puntos distintos pasa una única recta.*

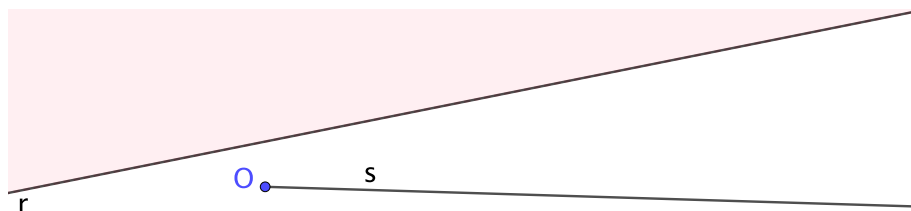
<sup>1</sup>Esto no quita para que, en la práctica si miramos la línea del horizonte donde el cielo se junta con el mar, no podamos distinguir si estamos viendo una línea recta o un arco de una circunferencia enorme, como es realmente el caso, pero entendemos perfectamente el significado de la frase “aunque la línea del horizonte parezca recta, en realidad es un arco de circunferencia” y todas las consecuencias que ello conlleva.



Así, si en la figura anterior sólo estuvieran representados los puntos  $A$  y  $B$ , pero no la recta  $r$ , siempre podríamos recuperarla sin más que usar una regla, y el resultado sería necesariamente la recta que vemos dibujada. No hay otra posibilidad. Esto justifica que usemos la notación  $AB$  para referirnos a la única recta que pasa por los puntos (distintos)  $A$  y  $B$ .

Una recta divide al plano en dos *semiplanos*. En la figura, uno de los semiplanos determinados por la recta  $r$  es el que contiene los nombres “ $r$ ” “ $A$ ” y “ $B$ ” y el otro —el que no los contiene— es el *semiplano opuesto*. La recta  $r$  es la *frontera* de ambos semiplanos. Así, cada recta contenida en un plano es la frontera común de dos semiplanos opuestos.

Similarmente, cada punto situado sobre una recta la divide en dos *semirrectas*. En la figura anterior, el punto  $A$  determina dos semirrectas en la recta  $r$ , una contiene al punto  $B$  y otra, la *semirrecta opuesta*, no lo contiene. El punto  $A$  es el *origen* de ambas semirrectas. Cada punto contenido en una recta es el origen común de dos semirrectas opuestas.

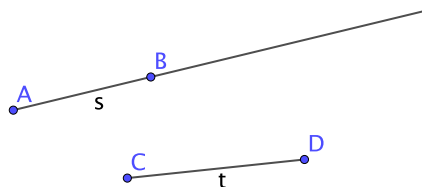


La figura muestra en colores distintos los dos semiplanos determinados por una recta  $r$ , así como una semirrecta  $s$  con origen en el punto  $O$ .

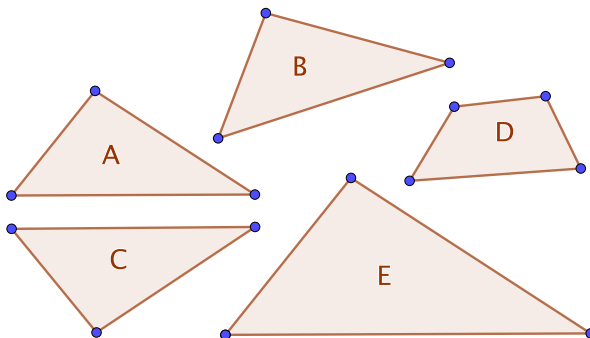
Representaremos por  $\overrightarrow{AB}$  a la única semirrecta de origen  $A$  que contiene al punto  $B$ . Notemos que, en efecto, los puntos (distintos)  $A$  y  $B$  determinan una única recta, y  $A$  determinará en ella dos semirrectas, de las cuales sólo una contendrá al punto  $B$ .

Por último, representaremos por  $\overline{AB}$  al *segmento* (lat. “corte”) de *extremos*  $A$  y  $B$ , es decir, a la porción de recta que contiene a todos los puntos situados entre  $A$  y  $B$ . También es claro que dos puntos distintos determinan un único segmento, y ello justifica que usemos la notación  $\overline{AB}$  para referirnos a él.

La figura siguiente muestra una semirrecta  $s = \overrightarrow{AB}$  y un segmento  $t = \overline{CD}$ . Obviamente, si tenemos identificados dos puntos  $A$  y  $B$  en el plano, podemos usar una regla para trazar la semirrecta  $\overrightarrow{AB}$  o el segmento  $\overline{AB}$  sin más que dibujar únicamente la porción correspondiente de la recta  $AB$ .



**Igualdad y coincidencia** La imagen siguiente muestra cinco figuras geométricas:



Seguro que el lector entiende lo que queremos decir si afirmamos que la figura  $A$  es igual a la figura  $B$ , así como que ambas son distintas de la figura  $D$ . Este uso de la palabra “igual” difiere del habitual en matemáticas, pero es tradicional en geometría. En el lenguaje matemático moderno usual, se dice que dos objetos son iguales cuando son idénticos, cuando son una misma cosa, cuando tienen exactamente las mismas propiedades. En este sentido, las figuras  $A$  y  $B$  no son iguales, pues ocupan posiciones distintas en el plano, y podemos hablar de puntos que están en  $A$  pero no en  $B$ , y viceversa.

Sin embargo, en el lenguaje geométrico tradicional se dice que dos figuras son iguales cuando son indistinguibles salvo por su posición en el plano. Si en el plano sólo estuviera representada una de las figuras  $A$  o  $B$ , no podríamos saber si estamos viendo  $A$  o  $B$ , y en ese sentido ambas son (geoméricamente) iguales. No vale decir que  $A$  y  $B$  se distinguen porque  $A$  tiene un lado horizontal y  $B$  no, porque eso depende de nuestro punto de vista. Si giramos ligeramente este libro, podemos ver la figura  $B$  con un lado horizontal, igual que vemos la figura  $A$  si miramos el libro en la posición “natural” de lectura. Pero “la posición del libro”, que permite distinguir una vista de otra, queda fuera de la noción de plano ideal, ilimitado, no vinculado a libro alguno.<sup>2</sup>

Cuando en geometría se quiere expresar que dos figuras son iguales en el sentido del lenguaje matemático moderno, es decir, que se trata de exactamente la misma figura, se dice que ambas son *coincidentes*. Por el contrario, cuando se quiere expresar la noción tradicional de igualdad en geometría en el contexto de la matemática moderna, se dice que dos figuras son *congruentes*. En resumen, tenemos las equivalencias siguientes:

Lenguaje geométrico tradicional	Lenguaje matemático moderno
igualdad	congruencia
coincidencia	igualdad

<sup>2</sup>En general, palabras como “izquierda”, “derecha”, “arriba”, “abajo”, “horizontal”, “vertical”, etc. no tienen un significado objetivo atribuible a los objetos a los que las aplicamos, sino que su significado depende también de nuestro punto de vista.

Por regla general, aquí adoptaremos el lenguaje geométrico tradicional, según el cual:

*Dos figuras son iguales si superpuestas coinciden.*

Esto hay que entenderlo como que si hacemos una “copia” de una de ellas en un “plano de plástico transparente”, desplazando éste podemos superponerla a la otra de modo que coincidan exactamente.

Según esto, las figuras  $A$  y  $E$  no son iguales, porque no pueden superponerse. Equivalentemente, podemos distinguirlas por una cualidad distinta de su posición en el plano: la figura  $A$  es “la pequeña”, mientras que la figura  $E$  es “la grande”. Es cierto que si sólo viéramos una de las dos no podríamos saber cuál es, pero si viéramos una al lado de la otra, sabríamos que la pequeña es  $A$  y la grande es  $E$ .

Ahora bien, ¿son iguales las figuras  $A$  y  $C$ ? Si en el plano sólo estuviera representada una de ellas, ¿podríamos saber si es  $A$  o  $C$ ? Si ambas estuvieran en dos “capas planas superpuestas” y tratáramos de deslizar una para superponer  $A$  y  $C$ , no podríamos, pero si se nos permite “dar la vuelta” a una de las capas, lo que hacemos al pasar página en un libro, entonces sí que podríamos superponerlas. Equivalentemente, si suponemos que el plano es “transparente” y que podemos mirarlo por cualquiera de sus dos caras, no podemos distinguir  $A$  y  $C$  (incluso si estuvieran ambas representadas en él) si no sabemos por qué cara estamos mirándolo. La imagen que ofrece  $A$  vista desde una cara del plano es idéntica a la que ofrece  $C$  vista desde la cara opuesta, y viceversa.

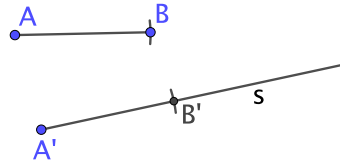
En el sentido geométrico tradicional, se considera que las figuras  $A$  y  $C$  sí que son iguales, es decir, que a la hora de superponer dos figuras, se admite la posibilidad de “darle la vuelta” al plano. A veces, cuando se quiere expresar que dos figuras se pueden superponer sin necesidad de “recurrir al truco de darle la vuelta al plano” o a “mirarlo desde la cara opuesta”, se dice que las figuras son *idénticas*.

Así, en el sentido geométrico, podemos decir que todos los puntos son iguales (e incluso idénticos), pues cualquier punto se puede hacer coincidir con cualquier otro con una traslación adecuada. Incluso todas las rectas y todas las semirrectas son iguales entre sí, pero ya no ocurre lo mismo con los segmentos. Estudiaremos este caso en la sección siguiente.

## 1.2 Segmentos

Si queremos “copiar” un segmento en una posición diferente del plano, no necesitamos calcarlo en otra lámina y deslizarla hasta la posición deseada, sino que nos basta con una regla y un compás. Más precisamente:

**Problema 1.1** *Dados un segmento  $\overline{AB}$  y una semirrecta  $s$  de origen  $A'$ , encontrar un punto  $B'$  en  $s$  tal que  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ .*



1. Situamos las puntas del compás en los puntos  $A$  y  $B$ .
2. Con esa abertura, situamos una punta del compás en  $A'$  y marcamos el punto  $B'$  que alcanza la otra punta sobre la semirrecta  $s$ . ■

Es evidente que el segmento  $\overline{A'B'}$  obtenido de este modo es único, es decir:

**Teorema 1.1** *Para cada segmento  $s$ , existe un único segmento  $s'$  igual a  $s$  que tiene un extremo en el origen de una semirrecta dada y el otro extremo en otro punto de la semirrecta.*

Esto nos da un procedimiento para comparar segmentos: si tenemos dos segmentos  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$ , puede no ser obvio si son o no iguales. Una forma de decidirlo es transportarlos a una misma semirrecta con un extremo en su origen. Por la unicidad que acabamos de señalar, se cumplirá  $\overline{AB} = \overline{CD}$  si y sólo si los segmentos transportados coinciden.

Llamaremos *longitudes* a los segmentos cuando hacemos abstracción de su posición en el plano, es decir, diremos que dos segmentos representan la misma longitud (en la práctica diremos que “tienen” la misma longitud) si son iguales (en el sentido geométrico).

En estos términos podemos afirmar que dos segmentos situados sobre una misma semirrecta con un extremo en su origen tienen la misma longitud si y sólo si son coincidentes.

Más aún, es evidente que dos segmentos situados sobre una misma semirrecta con un extremo en su origen tienen que estar uno contenido en el otro. Esto nos permite definir que una longitud  $\alpha$  es menor que otra  $\beta$  (y lo representaremos por  $\alpha \leq \beta$ ) si al considerar segmentos de longitudes  $\alpha$  y  $\beta$  sobre una misma semirrecta con un extremo en su origen, el de longitud  $\alpha$  está contenido en el de longitud  $\beta$  (sin excluir que coincidan).

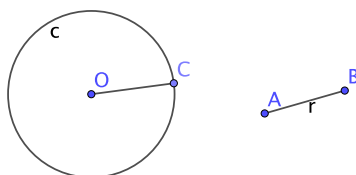
En la práctica aplicaremos la relación  $\leq$  tanto a longitudes abstractas como a segmentos concretos, de modo que si unos segmentos  $s$  y  $t$  tienen longitudes  $\alpha$  y  $\beta$ , escribiremos indistintamente  $s \leq t$  o  $\alpha \leq \beta$ . La notación  $s < t$  (o  $\alpha < \beta$ ) indicará que  $\alpha \leq \beta$  y además  $\alpha \neq \beta$ .

Por ejemplo, en la figura siguiente vemos que  $\overline{AB} < \overline{AC}$ , porque ambos segmentos están situados sobre la misma semirrecta  $\overline{AB}$  con un extremo en su origen y el segmento  $\overline{AB}$  está estrictamente contenido en  $\overline{AC}$ .



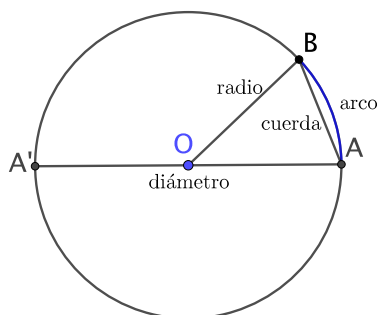
Es evidente que esta relación no depende de los representantes elegidos de las longitudes, así como que satisface las propiedades generales de una relación de orden incluidas en el resumen 1.1 de [ITA].

**Circunferencias** Dados un punto  $O$  y un segmento  $r = \overline{AB}$ , podemos abrir las puntas de un compás hasta situarlas sobre  $A$  y  $B$ , luego llevar una punta hasta el punto  $O$  y hacer girar la otra manteniendo fija la punta situada sobre  $O$ . Entonces la otra punta recorre los extremos de todos los segmentos posibles iguales a  $r$  con un extremo en  $O$ . Dichos puntos forman la curva que se conoce como *circunferencia* (lat. *circumferre* “llevar alrededor”) de *centro*  $O$  y *radio*  $r$ .



Una circunferencia divide al plano en dos regiones. La que contiene al centro  $O$  se conoce como *círculo* de centro  $O$  y radio  $r$  y sus puntos se dicen *interiores* a la circunferencia, mientras que los puntos de la parte opuesta se llaman *exteriores*. Cualquier segmento que una el centro  $O$  con un punto  $C$  de la circunferencia se llama *radio* de la circunferencia. En este sentido, una circunferencia tiene infinitos radios distintos, pero, dado que todos tienen la misma longitud, también podemos hablar de “el radio” de una circunferencia, cuando pensamos en éste, no como un segmento en concreto, sino como en una longitud abstracta.

Dos puntos distintos  $A$  y  $B$  situados en una circunferencia dividen a ésta en dos partes llamadas *arcos*. El segmento  $\overline{AB}$  es la *cuerda* común a los dos arcos opuestos con dichos extremos. Las cuerdas que pasan por el centro de la circunferencia se llaman *diámetros* (gr. “medida transversal”). Los extremos de un diámetro se dicen puntos *diametralmente opuestos* en la circunferencia, como es el caso de los puntos  $A$  y  $A'$  en la figura siguiente:



**Suma de longitudes** Dadas dos longitudes  $\alpha$  y  $\beta$ , podemos tomar segmentos que las representen con un extremo en común y situados en semirrectas opuestas respecto a él. La longitud del segmento determinado por los extremos no comunes se llama *suma* de las longitudes  $\alpha$  y  $\beta$  y la representaremos por  $\alpha + \beta$ .

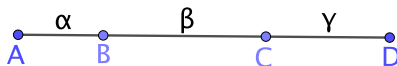
Por ejemplo, en la figura siguiente, la longitud del segmento  $\overline{AC}$  es la suma de las longitudes de los segmentos  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$ , porque tienen un extremo común  $B$  y están situados en semirrectas opuestas respecto de  $B$ .



Es evidente que la suma de dos longitudes no depende de los representantes elegidos para calcularla, por lo que tenemos definida una operación sobre las longitudes, y es fácil convencerse de que cumple las propiedades conmutativa y asociativa:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma).$$

Por ejemplo, la propiedad asociativa expresa que, en la figura siguiente, es irrelevante si primero hemos sumado  $\alpha + \beta$  y luego hemos sumado  $\gamma$  o si primero hemos sumado  $\beta + \gamma$  y luego  $\alpha$ :



También es claro que los sumandos son simplificables, es decir, que si tenemos  $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ , entonces  $\beta = \gamma$ , así como que si  $\alpha \leq \beta$ , entonces  $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ .

En este punto es práctico introducir un convenio adicional: vamos a considerar también una *longitud nula* 0 cuyos representantes son los puntos, y tendremos a su vez que, para cualquier longitud  $\alpha$ , se cumple que  $0 \leq \alpha$  y que  $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$ .

Todas las propiedades de la suma que hemos mencionado siguen siendo válidas, y ahora es más cómodo dar una definición de resta de longitudes. Simplemente, dadas dos longitudes no nulas  $\alpha$  y  $\beta$ , definimos su *resta* como la longitud del segmento que resulta de considerar dos segmentos de longitudes  $\alpha$  y  $\beta$  con un extremo en común situados sobre una misma semirrecta respecto de este y formar el segmento determinado por sus extremos no comunes. La longitud de este segmento es la resta de los segmentos dados. Si  $\beta \leq \alpha$  la representaremos por  $\alpha - \beta$ .

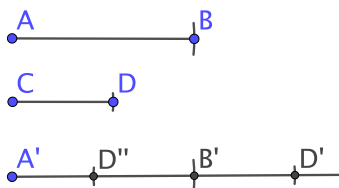
Notemos que si  $\alpha = \beta$ , entonces los extremos no comunes de los segmentos considerados son iguales, por lo que hay que entender que el segmento que determinan es un punto y que  $\alpha - \beta = 0$ . Convenimos también que  $\alpha - 0 = \alpha$ . Es claro entonces que  $\alpha + (\beta - \alpha) = \beta$ .

Por ejemplo, si, en la figura siguiente, los segmentos  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$  tienen longitudes  $\alpha$  y  $\beta$ , respectivamente, entonces  $\alpha - \beta$  es la longitud de  $\overline{CB}$ , pues los dos segmentos tienen el extremo  $A$  en común y están sobre una misma semirrecta de origen  $A$ :



El problema siguiente resume el contenido de este apartado:

**Problema 1.2** *Determinar la suma y la resta de dos segmentos  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$ .*

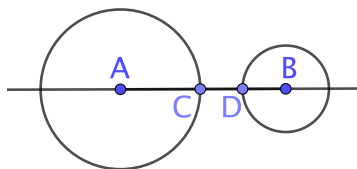


Podemos suponer que  $\overline{CD} < \overline{AB}$ .

1. Trazamos cualquier semirrecta. Llamamos  $A'$  a su origen.
2. Situamos las puntas del compás sobre los puntos  $A$  y  $B$ .
3. Con esa abertura, situamos una punta en  $A'$  y marcamos el punto  $B'$  alcanzado por la otra punta sobre la semirrecta trazada anteriormente.
4. Situamos las puntas del compás sobre los puntos  $C$  y  $D$ .
5. Con esa abertura, situamos una punta en  $B'$  y marcamos los dos puntos  $D'$  y  $D''$  alcanzados por la otra punta sobre la semirrecta. Digamos que  $D''$  es el situado en la semirrecta  $\overrightarrow{B'A'}$  y  $D'$  el situado en la semirrecta opuesta.

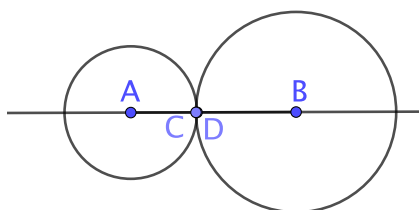
Entonces  $\overline{AD'}$  es la suma de los segmentos dados, y  $\overline{A'D''}$  es la resta. ■

**Intersecciones entre circunferencias** Consideremos dos puntos distintos  $A$  y  $B$ , elijamos un punto  $C$  en el segmento  $\overline{AB}$  y otro  $D$  en el segmento  $\overline{CD}$ . Si trazamos las circunferencias  $c$  y  $d$  de centros  $A$  y  $B$  y radios  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$ , veremos que —necesariamente— las circunferencias no tienen puntos en común, ni tampoco los círculos que determinan:

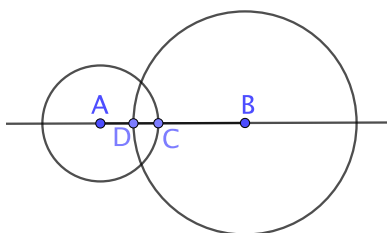


Esto será así para cualquier elección de  $C$  y  $D$  tal que  $\overline{AC} + \overline{DB} < \overline{AB}$  o, dicho de otro modo, siempre que los radios  $r_1$  y  $r_2$  de los círculos cumplan  $r_1 + r_2 < \overline{AB}$ .

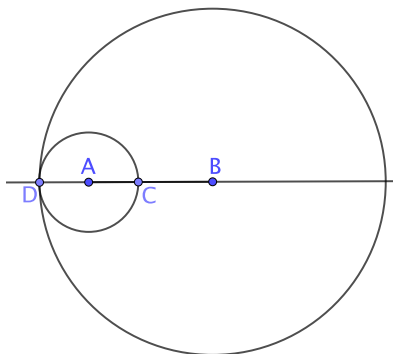
Ahora bien, si vamos moviendo el punto  $D$  hasta que coincida con  $C$ , en ese momento, es decir, cuando  $r_1 + r_2 = \overline{AB}$ , las dos circunferencias tienen exactamente un punto en común  $C = D$  y se dice que son *tangentes exteriores* (lat. “que se tocan”).



Si seguimos aumentando el radio  $r_2$ , de modo que  $r_1 + r_2 > \overline{AB}$ , observamos que las circunferencias pasan a tener dos puntos en común, uno en cada semiplano determinado por la recta  $AB$ , y entonces se dice que son *secantes* (lat. “que se cortan”):



y esto sigue siendo así hasta que  $D$  coincide con el punto diametralmente opuesto a  $C$  en la circunferencia de centro  $A$ , en cuyo caso  $D$  vuelve a ser el único punto en común entre ambas circunferencias, que pasan a ser *tangentes interiores*, y el círculo menor queda completamente contenido en el mayor:





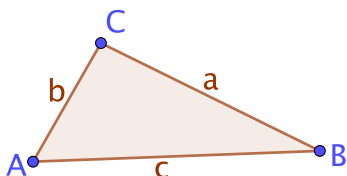
Esto sucede cuando  $\overline{AB} = r_2 - r_1$ . Si aumentamos más  $r_2$ , de modo que  $r_2 - r_1 > \overline{AB}$ , las circunferencias dejan de tener puntos en común.

En resumen, hemos obtenido lo siguiente:

**Teorema 1.2** *Dos circunferencias de centros  $A$  y  $B$  y radios  $r_1 \leq r_2$ , respectivamente son:*

1. *Disjuntas (no tienen puntos en común) cuando se cumple  $r_1 + r_2 < \overline{AB}$  o bien  $r_2 - r_1 > \overline{AB}$ ,*
2. *Tangentes (tienen un punto en común) cuando  $\overline{AB} = r_2 \pm r_1$ ,*
3. *Secantes (tienen dos puntos en común) cuando  $r_2 - r_1 < \overline{AB} < r_1 + r_2$ .*

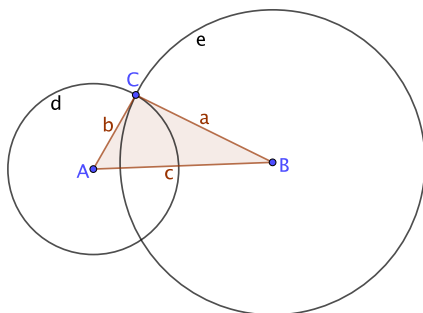
**Triángulos** Se dice que tres o más puntos están *alineados* cuando están contenidos en una misma recta. (Notemos que dos puntos siempre están alineados.) Si tres puntos  $A, B, C$  no están alineados, los segmentos que los unen forman la figura conocida como *triángulo*.



Escribiremos  $\widehat{ABC}$  para representar el triángulo de *vértices* (lat. “cumbre”)  $A, B, C$ . Los segmentos  $a = \overline{BC}$ ,  $b = \overline{AC}$ ,  $c = \overline{AB}$  se llaman *lados* del triángulo.

Es costumbre llamar a cada lado de un triángulo con la misma letra que su vértice opuesto, pero minúscula. Como en el caso de una circunferencia, un triángulo también permite dividir los puntos del plano en puntos *interiores* y *exteriores*.

Ahora observamos que, dado cualquier triángulo  $\widehat{ABC}$ , la circunferencia de centro  $A$  y radio  $b$  corta a la circunferencia de centro  $B$  y radio  $a$  en el punto  $C$ :



Además, las circunferencias no pueden ser tangentes, pues en tal caso el punto de tangencia  $C$  estaría en la recta  $AB$ , pero los puntos  $A, B, C$  no están alineados. Por lo tanto, el teorema 1.2 nos da las desigualdades  $a - b < c < a + b$ . Con esto hemos probado el teorema siguiente:

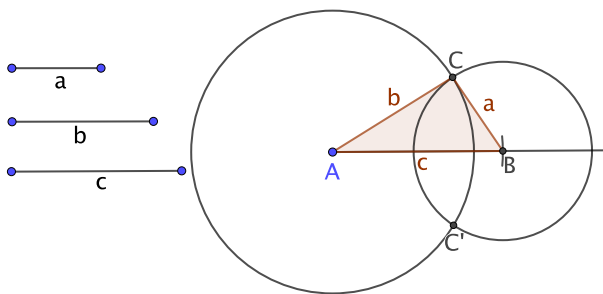
**Teorema 1.3** *Un lado de un triángulo es siempre menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.*

Recíprocamente, tres longitudes que cumplan estas condiciones son siempre los lados de un triángulo. Para entender la situación con precisión conviene analizar primero la construcción siguiente:

**Problema 1.3** *Dadas tres longitudes  $a, b, c$  tales que  $a - b < c < a + b$ , construir un triángulo  $\widehat{ABC}$  cuyos lados tengan longitudes  $a, b, c$ .*

Dados tres segmentos de longitudes  $a, b, c$ :

1. Tomamos cualquier semirrecta y llamamos  $A$  a su origen.
2. Transportamos el segmento de longitud  $c$  hasta un segmento  $\overline{AB}$  contenido en la semirrecta.
3. Trazamos la circunferencia de centro  $B$  y radio  $a$ .
4. Trazamos la circunferencia de centro  $A$  y radio  $b$ , que cortará a la anterior en dos puntos situados en semiplanos opuestos respecto de la (prolongación de la) semirrecta.
5. Elegimos cualquiera de ellos como  $C$  y formamos el triángulo  $\widehat{ABC}$ , cuyos lados tienen longitudes  $a, b, c$ .



Notemos que el teorema 1.2 juntamente con la hipótesis  $a - b < c < a + b$  garantiza que las dos circunferencias se van a cortar ciertamente en dos puntos  $C$  y  $C'$ , por lo que la construcción siempre es posible. ■

Observemos ahora que la construcción anterior puede realizarse a partir de cualquier segmento  $\overline{AB}$  de longitud  $c$  dado de antemano, y sólo deja abierta la elección entre los dos puntos de corte entre las circunferencias, por lo que se cumple el teorema siguiente:

**Teorema 1.4** Dado un triángulo  $\widehat{ABC}$  y un segmento  $\overline{A'B'}$  igual a  $\overline{AB}$ , existe un único triángulo  $\widehat{A'B'C'}$  cuyos lados  $a', b', c'$  son iguales a los lados correspondientes de  $\widehat{ABC}$  de modo que el vértice  $C'$  esté contenido en uno de los semiplanos respecto de la recta  $A'B'$  elegido de antemano.

De aquí se deduce a su vez:

**Teorema 1.5 (Criterio LLL)** Si dos triángulos tienen sus lados iguales, entonces son iguales.

**Nota** El teorema anterior suele enunciarse así, pero hay que entenderlo correctamente. La hipótesis no es que los lados de los triángulos sean iguales *entre sí*, sino que podemos hacer corresponder cada lado de un triángulo con un lado del otro, de modo que los lados correspondientes sean iguales. ■

DEMOSTRACIÓN: Si los triángulos son  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{A'B'C'}$ , es claro que podemos transportar el segundo hasta que el segmento  $\overline{A'B'}$  coincida con  $\overline{AB}$  (entendiendo que  $A$  coincide con  $A'$  y  $B$  con  $B'$ ) y, “dando la vuelta al plano” si es preciso, podemos hacer que  $C$  y  $C'$  estén en el mismo semiplano respecto de la recta  $AB = A'B'$ . Por el teorema anterior, los triángulos tienen que coincidir, luego los triángulos dados son iguales. ■

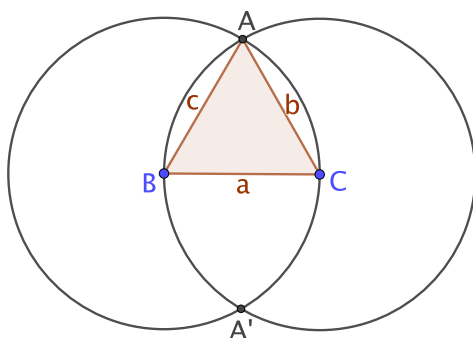
Combinando el problema 1.3 con el teorema anterior tenemos:

**Teorema 1.6 (Existencia de triángulos)** Existe un triángulo cuyos lados tienen tres longitudes dadas (no nulas)  $a, b, c$  si y sólo si  $a - b < c < a + b$ , y en tal caso es único.

**Definición 1.7** Un triángulo se dice *equilátero* (lat. “de lados iguales”) si sus tres lados son iguales, se dice *isósceles* (gr. “de piernas iguales”) si tiene dos lados iguales y es *escaleno* (gr. “oblicuo”) si sus lados son distintos dos a dos.

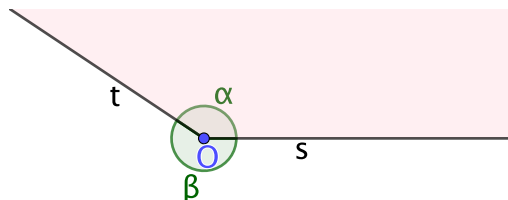
El teorema anterior afirma que existen triángulos equiláteros con lados de cualquier longitud no nula dada, mientras que la condición necesaria y suficiente para la existencia de un triángulo isósceles con lados iguales de longitud  $b$  y el tercer lado de longitud  $a$  es que  $a < b + b$ ,

**Ejercicio:** Describir un proceso para construir con regla y compás un triángulo equilátero cuyos lados tengan una longitud dada:



### 1.3 Ángulos

Consideremos dos semirrectas  $s$  y  $t$  con un origen común  $O$ , y de momento supongamos que no están contenidas en la misma recta:



Es evidente que dividen al plano en dos regiones, las cuales reciben el nombre de *ángulos* (lat. “rincón”) de *vértice*  $O$  y *lados*  $s$  y  $t$ . Los dos ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  que muestra la figura son cualitativamente diferentes. El ángulo  $\alpha$  está formado por los puntos que están a la vez en el semiplano respecto a (la prolongación de)  $s$  que contiene a  $t$  y en el semiplano respecto a (la prolongación de)  $t$  que contiene a  $s$ , es decir, es la *intersección* de dos semiplanos. Por el contrario, el ángulo  $\beta$  está formado por los puntos que no están en al menos uno de los dos semiplanos descritos, es decir, por los puntos que están en alguno de los dos semiplanos opuestos. Por lo tanto,  $\beta$  es la *unión* de dos semiplanos.

Esto nos lleva a dar unas definiciones más precisas:

**Definición 1.8** Un *ángulo convexo* es la figura formada por los puntos que están a la vez en dos semiplanos determinados por dos rectas que se cortan en un punto (una intersección de dos semiplanos).

Un *ángulo cóncavo* es la figura formada por los puntos que están en al menos uno de dos semiplanos determinados por dos rectas que se cortan en un punto (una unión de dos semiplanos).

En ambos casos, el punto de corte de las rectas es el *vértice* del ángulo, mientras que los *lados* de un ángulo convexo son las semirrectas determinadas por el vértice en dichas rectas y que están contenidas en él, y los lados de un ángulo cóncavo son los del ángulo (convexo) opuesto.

En estos términos podemos afirmar que dos semirrectas con un origen común  $O$  y no contenidas en la misma recta son los lados de un único par de ángulos opuestos de vértice  $O$ , uno convexo y el otro cóncavo.

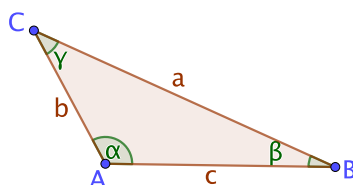
Si las dos semirrectas están contenidas en la misma recta, tenemos dos posibilidades: si se trata de la misma semirrecta, convendremos en que el ángulo convexo que determinan es el *ángulo nulo*, formado únicamente por los puntos de la semirrecta, y el ángulo cóncavo que determinan es el *ángulo completo*, formado por todos los puntos del plano.

En cambio, si se trata de un par de semirrectas opuestas, entonces convendremos en que determinan dos ángulos convexos, que no son sino los dos semiplanos determinados por la recta que forman. A estos ángulos los llamaremos *ángulos llanos*.



Cuando hablemos del ángulo determinado por dos semirrectas se entenderá que nos referimos al ángulo convexo, salvo que especifiquemos lo contrario, y éste está unívocamente determinado salvo que las semirrectas sean opuestas. En particular, si  $A, B, C$  son tres puntos no alineados, representaremos por  $\widehat{ABC}$  el ángulo (convexo) determinado por las semirrectas  $\overrightarrow{BA}$  y  $\overrightarrow{BC}$ .

Así, cada triángulo  $\widehat{ABC}$  tiene asociados tres ángulos, que normalmente abreviaremos como  $\alpha = \widehat{A} = \widehat{BAC}$ ,  $\beta = \widehat{B} = \widehat{ABC}$  y  $\gamma = \widehat{C} = \widehat{ACB}$ :



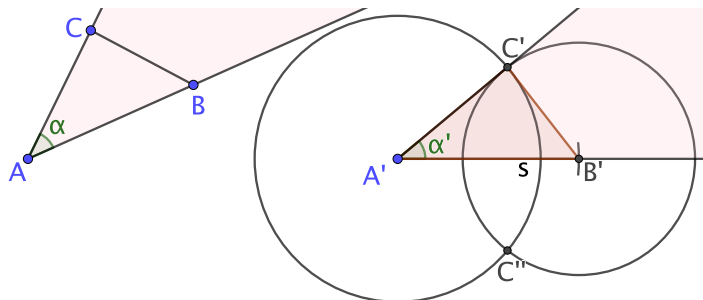
El teorema 1.5 tiene esta consecuencia inmediata:

**Teorema 1.9** *Si dos triángulos tienen sus lados iguales, entonces tienen sus ángulos iguales.*

Esto hay que entenderlo en el sentido fuerte de que si cada lado de un triángulo  $\widehat{ABC}$  se corresponde con un lado igual de otro triángulo  $\widehat{A'B'C'}$ , de modo que  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ , etc., entonces los ángulos *correspondientes* son iguales, es decir, que el ángulo  $\widehat{ABC}$  es igual concretamente al ángulo  $\widehat{A'B'C'}$ , etc.

Este teorema nos da un procedimiento para transportar ángulos:

**Problema 1.4** *Dado un ángulo convexo  $\alpha$  y una semirrecta  $s$ , construir un ángulo igual a  $\alpha$  que tenga a  $s$  por uno de sus lados.*



Podemos suponer que el ángulo no es nulo ni llano, pues en estos casos la conclusión es trivial.

1. Llamamos  $A$  al vértice de  $\alpha$  y elegimos puntos  $B$  y  $C$  en sus lados. Llamamos  $A'$  al origen de la semirrecta  $s$ . Marcamos sobre ella el único punto  $B'$  tal que  $\overline{A'B'} = \overline{AB}$ .
2. Trazamos la circunferencia de centro  $B'$  y radio  $\overline{B'C}$ .
3. Trazamos la circunferencia de centro  $A'$  y radio  $\overline{AC}$ , que cortará a la anterior en dos puntos situados en semiplanos opuestos respecto a  $s$ . Elegimos uno de ellos  $C'$ .
4. Trazamos la semirrecta  $\overrightarrow{A'C'}$ , y así el ángulo  $\alpha' = \widehat{B'A'C'}$  es el requerido, pues,  $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ , ya que los lados de ambos triángulos son iguales, luego en particular  $\alpha = \alpha'$ . ■

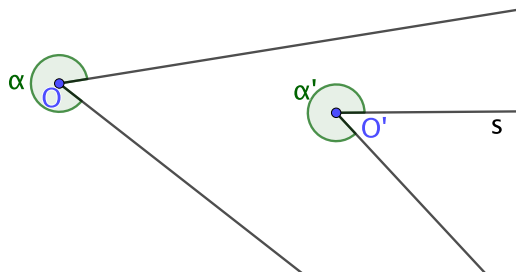
Observemos que la construcción precedente deja algunos grados de libertad. Por una parte, podemos elegir si transportamos sobre la semirrecta dada  $s$  el punto  $B$  o el punto  $C$ , pero los triángulos  $\widehat{A'B'C'}$  que obtenemos en ambos casos tienen sus lados iguales, luego son iguales y llegamos al mismo ángulo  $\alpha'$ , luego dicha elección es irrelevante.

En cambio, al elegir el punto  $C'$  de intersección entre las dos circunferencias que trazamos obtendremos un ángulo situado en uno u otro de los semiplanos determinados por  $s$ , pero, una vez fijada la elección de  $C'$ , el ángulo obtenido es único. Esto hace que los ángulos obtenidos con las dos elecciones sean iguales, pues “dando la vuelta” al plano de modo que la semirrecta  $s$  quede inalterada, uno de los triángulos se convierte en otro que cumple las mismas condiciones que el construido con la elección opuesta, luego por la unicidad tiene que coincidir con él. La conclusión de este análisis es el teorema siguiente:

**Teorema 1.10** *Para cada ángulo convexo  $\alpha$ , existe un único ángulo  $\alpha'$  igual a  $\alpha$  que tiene por lado una semirrecta dada y está contenido en uno de los semiplanos determinados por (la prolongación de) ésta fijado de antemano.*

Para ángulos cóncavos tenemos un resultado similar:

**Teorema 1.11** *Dado un ángulo cóncavo  $\alpha$ , existe un único ángulo  $\alpha'$  igual a  $\alpha$  que tiene por lado una semirrecta dada y contiene uno de los semiplanos determinados por (la prolongación de) ésta fijado de antemano.*



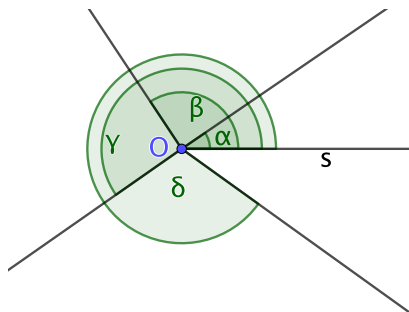
En efecto, para construirlo basta construir un ángulo igual al opuesto de  $\alpha$  contenido en el semiplano respecto de  $s$  opuesto al deseado. El ángulo  $\alpha'$  opuesto al ángulo obtenido cumple lo requerido y es claramente el único posible.

**Amplitudes** Igual que hemos definido una longitud como un segmento en el que hacemos abstracción de su posición en el plano, podemos definir una *amplitud* como un ángulo en el que hacemos abstracción de su posición en el plano, de modo que dos ángulos representan la misma amplitud si y sólo si son iguales (en el sentido geométrico). Representaremos por 0 la amplitud de los ángulos nulos y por  $\pi$  la amplitud de los ángulos llanos.

Es evidente que si dos ángulos tienen la misma amplitud, lo mismo les sucede a sus ángulos opuestos, por lo que podemos hablar de la *amplitud opuesta* a una amplitud dada.

Los teoremas anteriores (y las construcciones subyacentes en ellos) nos dan un método para determinar si dos ángulos dados tienen o no la misma amplitud. Fijada una semirrecta  $s$  y un semiplano  $\Pi$  determinado por ésta, podemos transportar dos ángulos dados para que tengan a  $s$  por uno de sus lados y cada uno de ellos esté contenido en  $\Pi$  si es convexo o contenga a  $\Pi$  si es cóncavo. Por la unicidad de los teoremas anteriores, los ángulos dados serán iguales si y sólo si los transportados en estas condiciones son coincidentes.

La figura muestra varios ángulos con un lado en común  $s$  de modo que todos los convexos están contenidos en el semiplano superior y los cóncavos lo contienen:

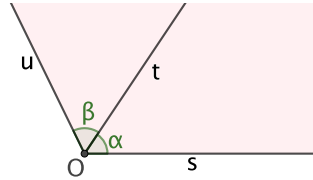


Pero podemos decir más, y es que es evidente que dos ángulos en estas condiciones están necesariamente uno contenido en el otro, por lo que, tiene sentido la definición siguiente:

**Definición 1.12** Dadas dos amplitudes  $\alpha$  y  $\beta$ , diremos que  $\alpha \leq \beta$  si, fijados una semirrecta  $s$  y uno de los semiplanos  $\Pi$  determinados por la recta que la prolonga, al tomar representantes de  $\alpha$  y  $\beta$  que tengan a  $s$  como uno de sus lados y de modo que cada uno de ellos esté contenido en  $\Pi$  si es convexo o contenga a  $\Pi$  si es cóncavo, se cumple que el representante de  $\alpha$  está contenido en el de  $\beta$  (sin excluir que puedan coincidir). Cuando no coinciden escribiremos  $\alpha < \beta$ .

Es claro que esto determina una relación de orden entre las amplitudes (es decir, que satisface las propiedades generales de una relación de orden incluidas en el resumen 1.1 de [ITA1]). La amplitud nula  $0$  es menor que cualquier otra y la amplitud de los ángulos completos es mayor que cualquier otra, los ángulos convexos son los que tienen amplitud  $\alpha \leq \pi$ , mientras que los ángulos cóncavos son los que tienen amplitud mayor que  $\pi$ . Más aún, es fácil convencerse de que dos amplitudes cumplen  $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \pi$  si y sólo si sus amplitudes opuestas cumplen  $\pi \leq \beta^o \leq \alpha^o$ .

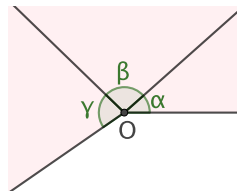
**Suma de ángulos** Podemos sumar ángulos (o amplitudes) de forma análoga a como sumamos longitudes, aunque en este caso tenemos una limitación: Dadas dos amplitudes no nulas  $\alpha$  y  $\beta$ , para que podamos sumarlas es necesario que una sea menor o igual que la opuesta de la otra, y en tal caso la suma se calcula construyendo un ángulo de amplitud  $\beta$  que comparta un lado con otro de amplitud  $\alpha$ , pero que esté contenido en el ángulo opuesto. La *suma*  $\alpha + \beta$  es la amplitud del ángulo resultante:



Si no se cumpliera que  $\beta \leq \alpha^o$ , es decir, si  $\beta$  no cupiera en el ángulo opuesto al ángulo que tomamos de amplitud  $\alpha$ , entonces los dos ángulos se solaparían y no formarían un ángulo suma. En particular esto exige que a lo sumo uno de los sumando puede tener amplitud mayor que  $\pi$ .

Es claro que la amplitud de la suma así definida no depende de la elección de ángulos que representan las amplitudes que sumamos, por que que la suma de amplitudes es una amplitud bien definida. Completamos la definición de suma con el convenio de que  $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$ .

Es claro que  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ , así como que  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ , pues ambas sumas se calculan con la figura siguiente:



También es obvio que si  $\alpha \leq \beta$ , entonces  $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ .

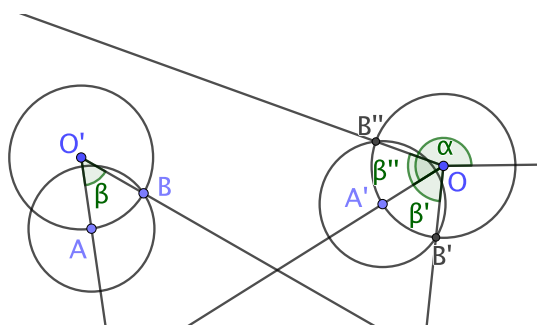
Observemos que  $\pi + \pi$  es el ángulo completo, por lo que podemos referirnos a la amplitud del ángulo completo como  $2\pi$ .



Dadas dos amplitudes  $\beta < \alpha$ , una modificación obvia de la construcción de la suma de amplitudes permite definir la *resta*  $\alpha - \beta$ , sin más que elegir como representante de  $\beta$  un ángulo con un lado común al representante de  $\alpha$ , pero contenido en éste en lugar de en el ángulo opuesto. Esto hace que  $\beta + (\beta - \alpha) = \beta$ .

Terminamos este apartado mostrando explícitamente la construcción de la suma y la resta de dos ángulos dados:

**Problema 1.5** *Construir la suma y la resta de dos ángulos dados  $\alpha$  y  $\beta$ .*



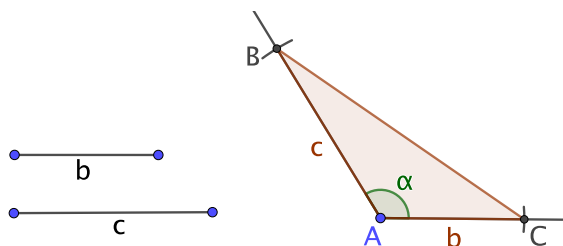
Suponemos que  $\beta < \pi$ . En caso contrario la construcción requiere modificaciones obvias, pues, o no se puede calcular la suma, o no se puede calcular la resta.

1. Trazamos una circunferencia de centro el vértice de  $\beta$  y un radio arbitrario que corte a los lados de  $\beta$  en dos puntos  $A$  y  $B$ .
2. Trazamos una circunferencia del mismo radio con centro en el vértice  $O$  de  $\alpha$ , y marcamos el punto  $A'$  donde corta al lado sobre el cual queremos transportar  $\beta$ .
3. Ponemos las puntas del compás sobre  $A$  y  $B$  y, con esa abertura, trazamos una circunferencia de centro  $A'$  y marcamos los puntos  $B'$  y  $B''$  donde corta a la circunferencia de centro  $O$ .
4. Trazamos las semirrectas  $\overrightarrow{OB'}$  y  $\overrightarrow{OB''}$ , una de las cuales es el segundo lado de la suma  $\alpha + \beta$  y otra el de la resta  $\alpha - \beta$ . ■

Veamos ahora que un triángulo está determinado por las longitudes de dos de sus lados y la amplitud del ángulo formado por éstos:

**Problema 1.6** *Construir un triángulo  $\widehat{ABC}$  conocidas las longitudes  $b = \overline{AC}$  y  $c = \overline{AB}$ , así como el ángulo  $\alpha = \widehat{BAC}$ .*

La construcción es trivial:



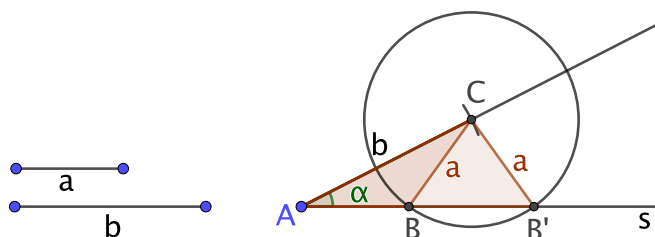
1. Si  $A$  es el vértice del ángulo dado, en uno de sus lados marcamos el único punto  $C$  tal que  $\overline{AC} = b$ .
2. En el otro lado, marcamos el único punto  $B$  tal que  $\overline{AB} = c$ .
3. Los tres puntos  $A, B, C$  determinan el triángulo buscado. ■

Notemos que la construcción que hemos descrito nos deja la libertad de elegir en qué lado del ángulo dado construimos el segmento  $\overline{AC}$  y en cuál el segmento  $\overline{AB}$ . Una vez realizada esta elección, sólo hay un triángulo en las condiciones requeridas. Pero los triángulos obtenidos con una u otra opción son iguales, ya que basta “girar el plano” intercambiando los lados del ángulo dado para obtener otro triángulo que cumple las condiciones requeridas correspondientes a la elección opuesta, luego, por la unicidad una vez hecha la elección, tiene que ser el que se obtiene con dicha elección. Así pues:

**Teorema 1.13 (Criterio LAL)** *Si dos triángulos tienen dos lados iguales, así como el ángulo formado por estos, entonces son iguales.*

**Nota** En el teorema anterior es esencial que el ángulo igual sea el formado precisamente por los lados iguales. El problema siguiente muestra lo que sucede si el ángulo es otro. ■

**Problema 1.7** *Construir un triángulo  $\widehat{ABC}$  conocidas las longitudes  $a = \overline{BC}$  y  $b = \overline{AC}$  así como el ángulo  $\alpha = \widehat{BAC}$ .*



1. Sobre uno de los lados del ángulo  $\alpha$  construimos un segmento  $\overline{AC}$  de longitud  $b$ .

2. Trazamos la circunferencia de centro  $C$  y radio  $a$ .

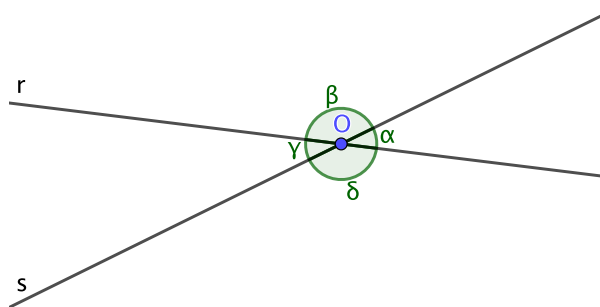
Si dicha circunferencia no corta al otro lado  $s$  del ángulo dado, entonces no existe el triángulo buscado. Pero la circunferencia puede cortar a la semirrecta  $s$  a lo sumo en dos puntos  $B$  y  $B'$ , y cualquiera de los triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{AB'C}$  cumple lo requerido. ■

Así pues, hay a lo sumo dos triángulos diferentes con un mismo ángulo  $\alpha$  y dos lados iguales  $a$  y  $b$ .

**Ángulos adyacentes y opuestos por el vértice** Dos rectas  $r$  y  $s$  con un punto en común  $O$  dividen al plano en cuatro ángulos convexos, a los que en la figura hemos llamado  $\alpha, \beta, \gamma$  y  $\delta$ .

Dos ángulos convexos se dicen *adyacentes* si tienen un lado en común y los otros lados son un par de semirrectas opuestas. Así, en la figura  $\alpha$  y  $\beta$  son adyacentes, al igual que  $\beta$  y  $\gamma$ , o  $\gamma$  y  $\delta$  o  $\delta$  y  $\alpha$ .

Dos ángulos convexos son *opuestos por el vértice* si tienen el mismo vértice y los lados de uno son las semirrectas opuestas a los lados del otro. En la figura  $\alpha$  y  $\gamma$  son opuestos por el vértice, al igual que  $\beta$  y  $\delta$ .



En general, todo ángulo convexo tiene exactamente dos ángulos adyacentes y un ángulo opuesto por el vértice. Es claro que dos ángulos adyacentes suman un ángulo llano, por lo que los dos ángulos adyacentes a un mismo ángulo son iguales (si el ángulo tiene amplitud  $\alpha$ , sus dos adyacentes tienen amplitud  $\pi - \alpha$ ), pero esto es lo mismo que decir:

**Teorema 1.14** *Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.*

Notemos que los conceptos de “ángulos adyacentes” y “ángulos opuestos por el vértice” dependen de la posición concreta en el plano. Dos ángulos pueden ser iguales sin ser opuestos por el vértice, aunque pueden transportarse hasta dos ángulos opuestos por el vértice.

Similarmente, cuando dos ángulos (o dos amplitudes) suman un ángulo llano se dice que son *suplementarios*, y en estos términos podemos decir que dos ángulos adyacentes son suplementarios.

**Ángulos rectos y rectas perpendiculares** Un ángulo convexo es *recto* si es igual a su suplementario.

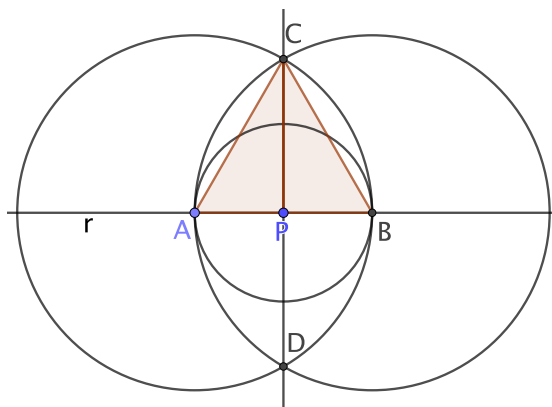
Claramente, todos los ángulos rectos son iguales, pues si  $\alpha$  es la amplitud de un ángulo recto, cualquier amplitud  $\beta > \alpha$  cumple que  $\pi - \beta < \pi - \alpha = \alpha < \beta$ , luego no corresponde a un ángulo recto, mientras que si  $\beta < \alpha$  tenemos que  $\pi - \beta > \pi - \alpha = \alpha > \beta$ , luego ninguna amplitud distinta de  $\alpha$  puede corresponder a un ángulo recto. Como  $\alpha + \alpha = \pi$ , podemos representar la amplitud de los ángulos rectos como  $\pi/2$ .

Los ángulos menores que un ángulo recto se llaman ángulos *agudos* (lat. “con punta”), mientras que los que son mayores que un ángulo recto se llaman *obtusos* (lat. “sin punta”).

Si dos rectas se cortan en un punto y uno de los cuatro ángulos que forman es recto, los otros tres lo son también, ya que uno es opuesto por el vértice y los otros dos son suplementarios.

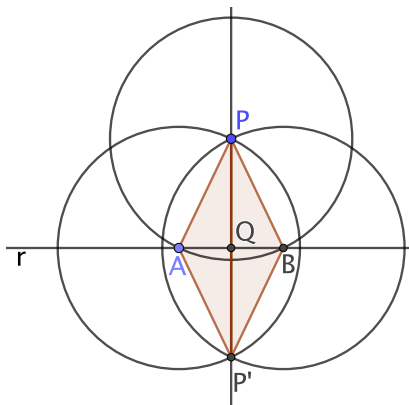
Cuando dos rectas se cortan en un punto formando ángulos rectos, se dice que son *perpendiculares* (lat. *perpendicularum*, “plomada”).

**Problema 1.8** Construir la perpendicular a una recta  $r$  que pasa por uno de sus puntos  $P$ .



1. Trazamos cualquier circunferencia de centro  $P$ , que cortará a la recta  $r$  en dos puntos  $A$  y  $B$ , tales que  $\overline{AP} = \overline{PB}$ .
2. Trazamos la circunferencia de centro  $A$  y radio  $\overline{AB}$ .
3. Trazamos la circunferencia de centro  $B$  y radio  $\overline{AB}$ . El teorema 1.2 garantiza que se cortarán en dos puntos  $C$  y  $D$ , de modo que  $\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BC}$ .
4. La perpendicular buscada es la recta  $CP$ , porque los triángulos  $\widehat{PAC}$  y  $\widehat{PBC}$  tienen sus tres lados iguales, luego los ángulos suplementarios  $\widehat{APC}$  y  $\widehat{BPC}$  son iguales, luego son rectos. ■

**Problema 1.9** Construir la recta perpendicular a una recta dada  $r$  que pasa por un punto exterior  $P$ .



1. Trazamos una circunferencia de centro  $P$  con radio suficientemente grande como para que corte a  $r$  en dos puntos  $A$  y  $B$ .
2. Trazamos la circunferencia de centro  $A$  y radio  $\overline{AP}$ .
3. Trazamos la circunferencia de centro  $B$  y radio  $\overline{BP}$ , que cortará a la anterior en  $P$  y en otro punto  $P'$  (porque para ser tangentes, el punto de tangencia tendría que estar en la recta  $r$ ).
4. La perpendicular buscada es la recta  $PP'$ .

En efecto, tenemos la igualdad de triángulos  $\widehat{APP'} = \widehat{BPP'}$ , pues sus lados son iguales. Si “damos la vuelta al plano” intercambiando los semiplanos determinados por la recta  $PP'$ , el triángulo  $\widehat{APP'}$  se transforma en otro igual, pero por la unicidad del teorema 1.4, el transformado del punto  $A$  tiene que ser precisamente  $B$  y, como  $Q$  no se modifica, tiene que ser  $\overline{AQ} = \overline{QB}$ . Por lo tanto,  $\widehat{AQP} = \widehat{BQP}$ , luego en particular  $\widehat{AQP} = \widehat{BQP}$ , pero son ángulos adyacentes, luego son rectos. ■

Es evidente que las perpendiculares trazadas en los dos problemas precedentes son únicas, es decir:

**Teorema 1.15** Cada recta tiene una única perpendicular que pasa por un punto dado.

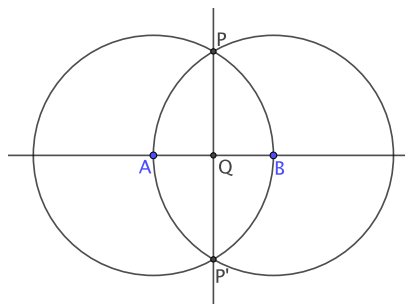
El punto donde la perpendicular corta a la recta se llama *pie* de la perpendicular.

**Nota** Las dos construcciones precedentes muestran que siempre es posible construir la perpendicular a una recta que pasa por un punto dado (que esté en la recta o no) sin más ayuda que la de una regla y un compás. Sin embargo, en la práctica es más cómodo trazar perpendiculares usando una escuadra o un cartabón, por lo que, en lo sucesivo, el trazado de perpendiculares lo consideraremos como una operación inmediata en las construcciones geométricas (es decir, como un único paso). ■

**Definición 1.16** La *mediatriz* de un segmento  $\overline{AB}$  es la recta perpendicular a la recta  $AB$  que pasa por el punto medio del segmento.

La construcción del problema precedente puede alterarse para tomar los puntos  $A$  y  $B$  como puntos de partida y obtener así su mediatriz:

**Problema 1.10** Construir la mediatriz de un segmento dado  $\overline{AB}$ .



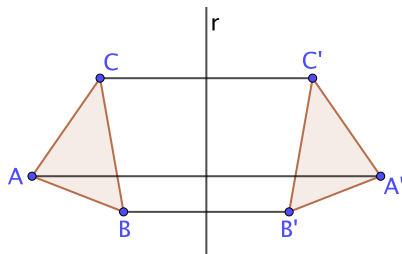
1. Trazamos la circunferencia de centro  $A$  y radio  $\overline{AB}$ .
2. Trazamos la circunferencia de centro  $B$  y radio  $\overline{AB}$ , que por 1.2 cortará a la anterior en dos puntos  $P$  y  $P'$ .
3. La recta  $PP'$  es la recta buscada, pues si aplicamos la construcción del problema precedente a la recta  $AB$  y el punto  $P$  trazando en el paso 1 la circunferencia de centro  $P$  y radio  $\overline{PA}$  obtenemos precisamente los puntos  $A$  y  $B$  de los que hemos partido aquí, luego la recta  $PP'$  es perpendicular a  $AB$  y hemos visto que  $\overline{AQ} = \overline{QB}$ , luego el punto  $Q$  es el punto medio del segmento  $\overline{AB}$ . ■

**Nota** El cálculo de mediatrices y puntos medios requiere el uso de la regla y el compás, pero como es una construcción muy simple y la usaremos a menudo, la consideraremos también como inmediata en las construcciones sucesivas. En la práctica no es necesario trazar las dos circunferencias que pueden oscurecer la construcción principal, sino que basta con trazar dos pequeños arcos en cada semiplano, para determinar los puntos  $P$  y  $P'$ . ■

**Simetrías axiales** En varias ocasiones hemos hablado de la posibilidad de “darle la vuelta al plano” para transformar una figura en otra igual “pero al revés”. Ahora podemos precisar esta idea:

**Definición 1.17** Dada una recta  $r$  y un punto  $P$ , se llama *punto simétrico* a  $P$  respecto de  $r$  al propio punto  $P$  si está en  $r$  o bien al punto  $P'$  situado en la recta perpendicular a  $r$  que pasa por  $P$  tal que, si  $M$  es el pie de la perpendicular, se cumple que  $\overline{PM} = \overline{MP'}$ .

La figura siguiente muestra un triángulo  $\widehat{ABC}$  y los puntos simétricos de sus tres vértices respecto de una recta  $r$ , que forman otro triángulo  $\widehat{A'B'C'}$ :



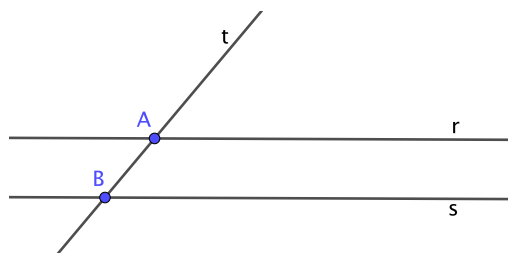
La aplicación que a cada punto del plano le hace corresponder su simétrico respecto de una recta fija  $r$  se llama *simetría axial* de *eje  $r$* . Es claro que el efecto de aplicarle una simetría a los puntos de una figura es el mismo que el de “darle la vuelta al plano” manteniendo la posición de los puntos del eje de simetría, por lo que la imagen de cualquier figura por una simetría es otra figura igual (pero en general no idéntica, sino “simétrica”).

Así, a partir de aquí ya no necesitaremos hablar de “dar la vuelta al plano”, sino, más precisamente, de “aplicar una simetría a una figura”.

## 1.4 Rectas paralelas

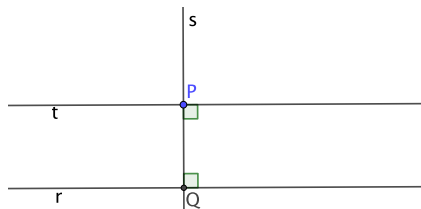
El concepto de perpendicularidad que acabamos de estudiar está muy relacionado con el de paralelismo, que vamos a abordar ahora, y que forma parte del vocabulario geométrico básico.

El hecho de que por dos puntos distintos pase una única recta se traduce en que dos rectas distintas pueden tener a lo sumo un punto en común (en cuanto tengan dos, serán la misma). Si dos rectas no tienen puntos en común, se dice que son *paralelas* (gr. “una al lado de la otra”) y si tienen un punto en común se dice que son *secantes*. La figura muestra dos rectas paralelas  $r$  y  $s$  y una tercera recta  $t$  secante a ambas.



Es evidente que si una recta  $r$  es paralela a otra  $s$  y  $s$  es paralela a  $t$ , entonces  $r$  es paralela a  $t$  o, equivalentemente, que si una recta corta a otra, también corta a todas sus paralelas. Otro hecho obvio es que, si dos rectas tienen una perpendicular común, son paralelas, y en este hecho se basa la construcción siguiente:

**Problema 1.11** Dada una recta  $r$  y un punto  $P$  exterior a ella, trazar la paralela a  $r$  que pasa por  $P$ .



1. Construimos la recta  $s$  perpendicular a  $r$  que pasa por  $P$ , que cortará a  $r$  en un punto  $Q$ .
2. Construimos la recta  $t$  perpendicular a  $s$  que pasa por  $P$ , que será la paralela a  $r$  que buscamos. ■

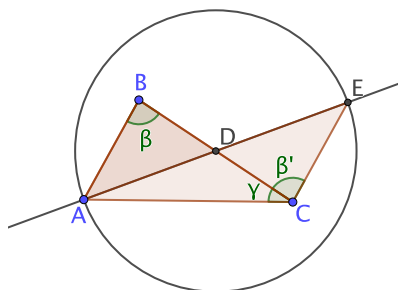
**Nota** Como ocurre con el trazado de perpendiculares, si bien la construcción anterior muestra que es posible construir la recta paralela a una recta dada por un punto dado sin más ayuda que una regla y un compás, en la práctica es más cómodo y rápido trazar paralelas usando una escuadra y un cartabón. En las construcciones geométricas consideraremos como un paso inmediato el trazado de paralelas. ■

El hecho de que dos rectas perpendiculares a una misma recta son paralelas equivale a que un triángulo no puede tener dos ángulos rectos, pues entonces dos de los lados tendrían una perpendicular común y serían paralelos, cuando tienen que cortarse en un vértice. En realidad podemos probar algo más fuerte:

**Teorema 1.18** Un ángulo de un triángulo es menor que el suplementario de cualquiera de los otros dos.

DEMOSTRACIÓN: Dado un triángulo  $\widehat{ABC}$ , vamos a probar que  $\beta = \widehat{ABC}$  es menor que el suplementario de  $\gamma = \widehat{ACB}$ .

Sea  $D$  el punto medio de lado  $\overline{BC}$ , consideramos la recta  $AD$  y trazamos la circunferencia de centro  $D$  y radio  $\overline{AD}$ , que corta a la recta en un punto  $E$ :

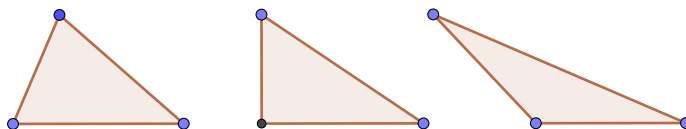




Entonces  $\widehat{ADB} = \widehat{EDC}$ , porque tienen dos lados iguales y también el ángulo que forman (pues los ángulos correspondientes son opuestos por el vértice). En particular el ángulo  $\beta = \widehat{ABD}$  es igual al ángulo  $\widehat{ECD}$ , y éste está estrictamente contenido en el ángulo adyacente a  $\gamma$ . ■

Como consecuencia, todo triángulo tiene al menos dos ángulos agudos, pues si uno de sus ángulos es recto u obtuso, los otros dos tienen que ser menores que su suplementario, luego tienen que ser agudos. Esto nos lleva a la clasificación siguiente de los triángulos:

**Definición 1.19** Un triángulo es *acutángulo* si todos sus ángulos son agudos, es *rectángulo* si tiene un (único) ángulo recto y es *obtusángulo* si tiene un (único) ángulo obtuso. El lado opuesto al ángulo recto en un triángulo rectángulo se llama *hipotenusa* (gr. “tendido por debajo”) y los otros dos se llaman *catetos* (gr. “perpendiculares”).



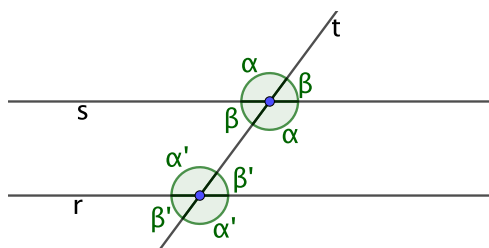
La figura muestra un ejemplo de cada tipo de triángulo.

Introducimos en este punto el quinto postulado de Euclides, en la versión de Playfair:

*Por un punto exterior a una recta pasa una única recta paralela.*

Tal y como indicábamos en la introducción, de ahí se deduce la igualdad de los ángulos alternos internos, y algunas más:

**Teorema 1.20** *Sea  $t$  una recta que corta a dos rectas  $r$  y  $s$ . Entonces  $r$  y  $s$  son paralelas si y sólo si  $\alpha = \alpha'$  o, equivalentemente,  $\beta = \beta'$ .*



DEMOSTRACIÓN: Si  $\alpha = \alpha'$ , entonces también  $\beta = \beta'$ , pues son los ángulos suplementarios de los anteriores. Si las rectas  $r$  y  $s$  se cortaran en un punto  $P$ , entonces el triángulo  $\widehat{ABP}$  tendría un ángulo igual al suplementario de otro, y esto es imposible por el teorema 1.18.

Supongamos ahora que  $r$  y  $s$  son paralelas. Podemos construir un ángulo  $\alpha''$  igual a  $\alpha$ , con vértice  $A$ , un lado igual a  $\overrightarrow{AB}$  y contenido en el mismo semiplano que  $\alpha'$ . Sea  $r'$  la prolongación del otro lado de  $\alpha''$ . Entonces la recta  $t$  determina en  $r'$  y  $s$  ángulos iguales, luego por la parte ya probada  $r'$  es paralela a  $s$ , pero la única paralela a  $s$  que pasa por  $A$  es  $r$ , luego tiene que ser  $r = r'$  y así  $\alpha' = \alpha'' = \alpha$ . ■

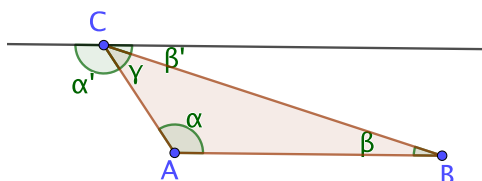
Ya hemos señalado que si dos rectas paralelas tienen una perpendicular común entonces son paralelas, y el teorema anterior implica que una perpendicular a una recta es perpendicular a todas sus paralelas, luego:

**Teorema 1.21** *Dos rectas son paralelas si y sólo si tienen una perpendicular común, y en tal caso tienen las mismas perpendiculares.*

## 1.5 Algunos resultados fundamentales

En las secciones precedentes hemos ido presentando algunos resultados de la geometría euclídea en un orden condicionado por el hecho de que todavía no teníamos disponibles todos los conceptos relevantes. Ahora que ya contamos con todos ellos podemos completar la teoría básica sobre ellos. En primer lugar, ahora podemos mejorar sustancialmente el teorema 1.18:

**Teorema 1.22** *Los ángulos de un triángulo suman un ángulo llano.*



DEMOSTRACIÓN: Dado un triángulo  $\widehat{ABC}$ , trazamos la recta paralela a  $AB$  que pasa por  $C$ , y basta observar que los ángulos  $\alpha'$  y  $\beta'$  que se forman son iguales a  $\alpha$  y  $\beta$  por el teorema 1.20, así como que  $\alpha' + \gamma + \beta'$  es un ángulo llano. ■

Reunimos ahora todos los criterios básicos de igualdad de triángulos:

**Teorema 1.23 (Criterios de igualdad de triángulos)**

**LLL** *Si dos triángulos tienen sus lados iguales, entonces son iguales.*

**LAL** *Si dos triángulos tienen dos lados iguales y también el ángulo que forman, entonces son iguales.*

**ALA** *Si dos triángulos tienen un lado y dos ángulos iguales, entonces son iguales.*

DEMOSTRACIÓN: El primer criterio es el teorema 1.5 y el segundo es 1.13. Sólo falta probar el tercero. Notemos que, por el teorema anterior, si dos triángulos tienen dos lados iguales, de hecho tienen los tres. Pongamos que los triángulos son  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{A'B'C'}$  y que  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ . Por el teorema 1.4 el triángulo  $\widehat{A'B'C'}$  es igual a un único triángulo  $\widehat{ABC''}$  contenido en el mismo semiplano que  $\widehat{ABC}$  respecto de la recta  $AB$ . Por el teorema 1.10 el ángulo  $\widehat{BAC''}$  tiene que coincidir con  $\widehat{BAC}$ , luego en particular  $AC = AC''$ , e igualmente  $BC = BC''$ , pero entonces  $C = C''$ , pues ambos son el punto de intersección del mismo par de rectas. Concluimos que  $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$ . ■

Como consecuencia:

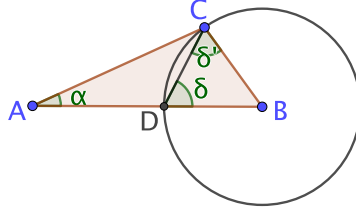
**Teorema 1.24 (Criterio del triángulo isósceles)** *Si en un triángulo  $\widehat{ABC}$  se cumple  $\overline{CA} = \overline{CB}$  entonces  $\hat{A} = \hat{B}$ .*

DEMOSTRACIÓN: Basta aplicar el criterio LAL a los triángulos (coincidentes)  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{BCA}$ , es decir, tomando  $A' = B$ ,  $B' = A$  y  $C' = C$ . ■

Otro hecho básico sobre los lados y ángulos de un triángulo es el siguiente:

**Teorema 1.25** *Los ángulos de un triángulo satisfacen las mismas desigualdades que sus respectivos lados opuestos.*

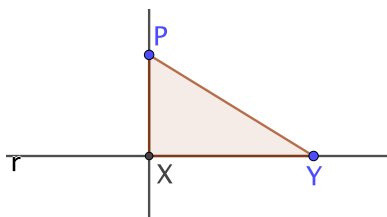
DEMOSTRACIÓN: Sea  $\widehat{ABC}$  un triángulo y supongamos, por ejemplo, que  $\overline{BC} < \overline{AB}$ . Entonces existe un punto  $D$  en  $\overline{AB}$  tal que  $\overline{BD} \equiv \overline{BC}$ .



Entonces  $\hat{A} = \alpha = \widehat{CAD} < \widehat{CDB} = \delta$ , por el teorema 1.18, pues el segundo es el suplementario de un ángulo de  $\widehat{ADC}$ ; a su vez  $\delta = \delta' = \widehat{DCB}$ , porque el triángulo  $\widehat{DCB}$  es isósceles, y por último  $\delta' < \gamma = \hat{C}$ . El recíproco es obvio: Si  $\hat{A} < \hat{C}$  no puede ser  $\overline{AB} < \overline{BC}$  por la parte ya probada, y tampoco puede darse la igualdad por el criterio del triángulo isósceles. ■

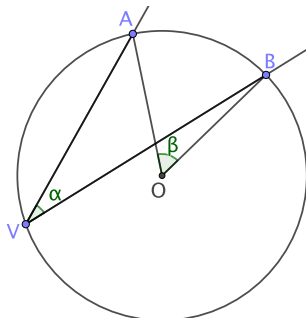
En particular tenemos que un triángulo es equilátero si y sólo si tiene sus tres ángulos iguales, es isósceles si y sólo si tiene dos ángulos iguales y es escaleno si y sólo si tiene sus tres ángulos desiguales.

Otra consecuencia es que, en un triángulo rectángulo, la hipotenusa es siempre mayor que los catetos. A su vez, esto implica que si  $P$  es un punto exterior a una recta  $r$  y  $X$  es el pie de la perpendicular a  $r$  que pasa por  $P$ , entonces la longitud  $\overline{PX}$  es la distancia de  $P$  a  $r$ , en el sentido de que si  $Y$  es cualquier punto de  $r$ , se cumple que  $\overline{PX} < \overline{PY}$ .



Veamos algunas aplicaciones:

**Ángulos inscritos** Se dice que un ángulo (convexo) está *inscrito* en una circunferencia  $c$  si su vértice  $V$  está en  $C$  y sus dos lados cortan a  $C$  en puntos  $A$  y  $B$  distintos de  $V$ .

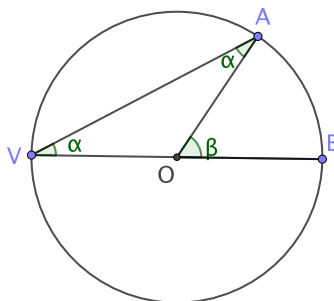


Ahora podemos probar una relación no trivial entre un ángulo inscrito y el ángulo central  $\widehat{AOB}$  correspondiente. El arco  $\widehat{AB}$  formado por los puntos de la circunferencia contenidos en el ángulo  $\widehat{AVB}$  se llama *arco abarcado* por el ángulo. La amplitud de un arco de circunferencia  $\widehat{AB}$  se define como la amplitud del ángulo central  $\widehat{AOB}$ . En estos términos:

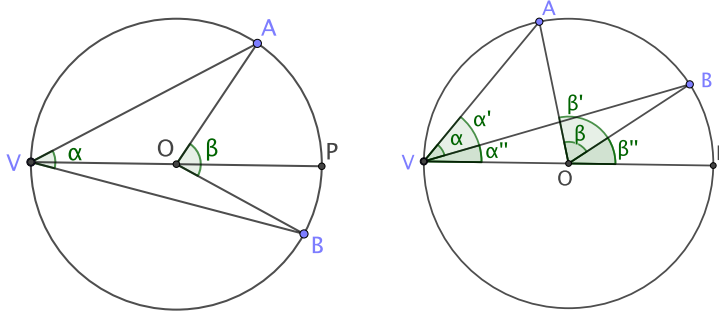
**Teorema 1.26** *La amplitud de un ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad de la del arco que abarca.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $P$  el punto de la circunferencia opuesto a  $V$ , y vamos a distinguir tres casos:

1) Si  $P$  es  $A$  o  $B$  (por ejemplo,  $B$ ), entonces  $\widehat{VO}$  es un radio de la circunferencia, luego el triángulo  $\widehat{VOA}$  es isósceles, luego tiene dos ángulos iguales a  $\alpha$ , luego el tercer ángulo es  $\pi - 2\alpha$ , luego el ángulo adyacente es  $\beta = 2\alpha$ .



2) Supongamos ahora que  $A$  y  $B$  están en semiplanos distintos respecto de la recta  $VP$  (figura de la izquierda):



Podemos aplicar el caso precedente a los ángulos  $\alpha_1 = \widehat{PVA}$  y  $\alpha_2 = \widehat{PVB}$ . Ambos serán la mitad de los ángulos centrales  $\beta_1$  y  $\beta_2$  correspondientes, por lo que  $\beta = \beta_1 + \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2\alpha$ .

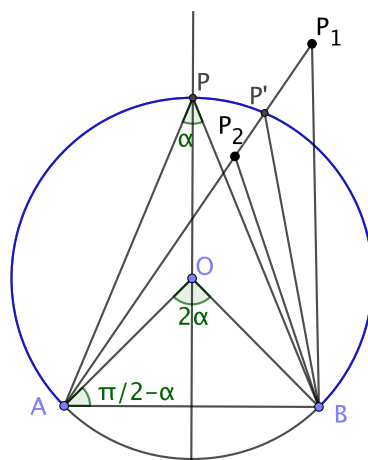
3) La tercera y última posibilidad (figura de la derecha) es que  $A$  y  $B$  estén en el mismo semiplano respecto de  $VP$ , con lo que uno de los ángulos  $\widehat{AVP}$  o  $\widehat{BVP}$  tiene que estar contenido en el otro. Supongamos que el primero es el mayor. Entonces  $\alpha$  es la diferencia de las amplitudes  $\alpha' = \widehat{AVP}$  y  $\alpha'' = \widehat{BVP}$ . Por el caso primero, sabemos que los ángulos centrales cumplen  $\beta' = 2\alpha'$ ,  $\beta'' = 2\alpha''$ , y entonces  $\beta = \beta' - \beta'' = 2\alpha' - 2\alpha'' = 2\alpha$ . ■

**El arco capaz de un segmento** El teorema anterior tiene una consecuencia muy útil:

**Teorema 1.27** *Dado un segmento  $\overline{AB}$  y uno de los semiplanos  $H$  determinados por la recta  $AB$ , el lugar geométrico de los puntos  $P$  de  $H$  tales que  $\widehat{APB}$  es una amplitud prefijada  $0 < \alpha < \pi$  es un arco de circunferencia de extremos  $A$  y  $B$ . Más aún, si  $P$  está en  $H$  y en el interior de dicha circunferencia, entonces  $\widehat{APB} > \alpha$  y si  $P$  está en el exterior entonces  $\widehat{APB} < \alpha$ .*

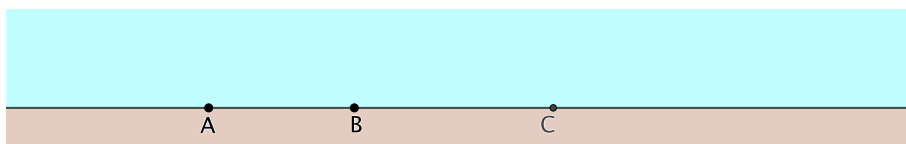
DEMOSTRACIÓN: Trazamos la mediatriz del segmento y construimos un ángulo de amplitud  $\pi/2 - \alpha$  con un lado coincidente con la semirecta  $\overrightarrow{AB}$  y contenido en el semiplano  $H$ . El otro lado del ángulo cortará a la mediatriz en un punto  $O$ . La intersección con  $H$  de la circunferencia de centro  $O$  que pasa por estos dos puntos es un arco de extremos  $A$  y  $B$ . Vamos a probar que cumple lo requerido. Si  $P$  está en dicho arco el ángulo  $\widehat{APB}$  abarca un arco de amplitud  $2\alpha$ , luego por el teorema anterior tiene amplitud  $\alpha$ .

Si tomamos cualquier otro punto  $P$  de  $H$  que no esté en el arco construido, como los puntos  $P_1$  y  $P_2$  de la figura, la recta  $AP$  cortará al arco en un punto  $P'$  tal que  $\widehat{AP'B} = \alpha$ . Entonces  $\widehat{AP_1B} < \widehat{AP'B} = \alpha < \widehat{AP_2B}$ , pues  $\widehat{AP'B}$  es la suma de los dos ángulos de  $\widehat{P'P_1B}$  distintos de  $\widehat{P_1P'B}$  y  $\widehat{AP_2B}$  es la suma de los dos ángulos de  $\widehat{AP_2B}$  distintos de  $\widehat{P'P_2B}$ .

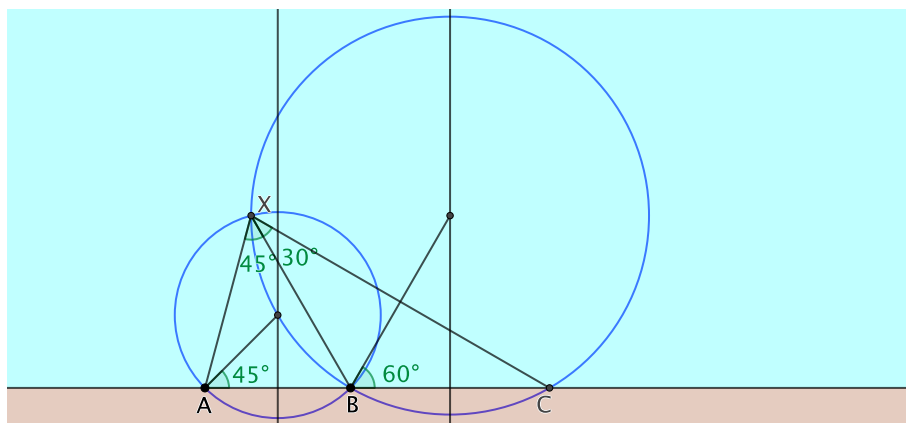


**Definición 1.28** El arco dado por el teorema anterior se llama *arco capaz* del segmento  $\overline{AB}$  en el semiplano  $H$  correspondiente a la amplitud  $\alpha$ .

**Ejemplo** Un barco, por la noche, ve los faros  $A$  y  $B$  formando un ángulo de amplitud  $\pi/4$  y los faros  $B$  y  $C$  con una amplitud de  $\pi/6$ . Determinar su posición.



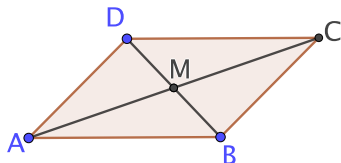
SOLUCIÓN: Basta trazar los arcos capaces de los segmentos  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  correspondientes a las amplitudes indicadas.



El barco se encuentra en la posición  $X$  determinada por la intersección de ambos arcos.

**División de segmentos** Veamos ahora un procedimiento para dividir un segmento dado en partes iguales. El método se apoya en un resultado sobre paralelogramos que tiene interés en sí mismo:

**Definición 1.29** Un *paralelogramo* es la figura formada por cuatro segmentos  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  y  $\overline{DA}$  tales que las rectas  $AB$  y  $CD$  son paralelas, al igual que  $AD$  y  $BC$ . Los puntos  $A, B, C, D$  se llaman *vértices* del paralelogramo, y los cuatro segmentos indicados son sus *lados*. Los segmentos  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$  son sus *diagonales*.

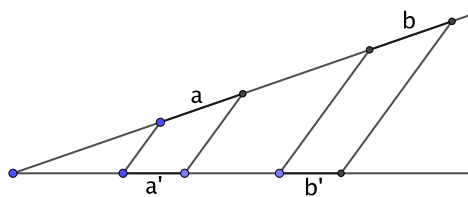


**Teorema 1.30** *Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales, y sus diagonales se cortan en su punto medio.*

DEMOSTRACIÓN: Los triángulos  $\widehat{ADC}$  y  $\widehat{CBA}$  tienen iguales el lado  $\overline{AC}$  y los ángulos  $\hat{A}$  y  $\hat{C}$ , por 1.20. Por lo tanto son iguales, lo que nos da las igualdades de los lados alternos del paralelogramo. La unicidad del teorema 1.4 implica que  $B$  y  $D$  están en semiplanos opuestos respecto de la recta  $AC$ , luego la diagonal  $\overline{BD}$  tiene que cortar a la recta  $AC$  en un punto  $M$ , e igualmente se razona que  $\overline{AC}$  tiene que cortar a  $BD$ , necesariamente en  $M$ , luego las dos diagonales se cortan en  $M$ .

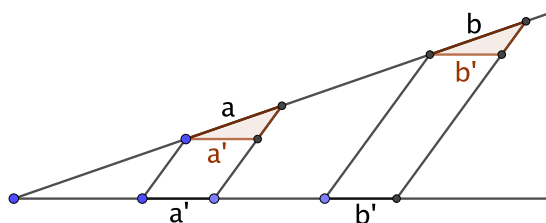
Ahora basta comparar los triángulos  $\widehat{AMD}$  y  $\widehat{CMB}$ , que tienen dos ángulos iguales por el teorema 1.20, y además  $\overline{AD} = \overline{BC}$ , luego el criterio ALA nos da que son iguales, luego en particular  $\overline{DM} = \overline{MB}$ , lo que prueba que  $M$  es el punto medio de la diagonal  $\overline{BD}$ . Igualmente se prueba que es el punto medio de  $\overline{AC}$ . ■

**Teorema 1.31** *En las condiciones de la figura, las longitudes  $a$  y  $b$  son iguales si y sólo si lo son  $a'$  y  $b'$ :*



DEMOSTRACIÓN: Hay que entender que  $a$  y  $b$  son dos segmentos cualesquiera situados sobre la semirrecta dada, sin que importe si se solapan o no. Ni siquiera excluimos que un extremo de uno de los segmentos pueda ser el vértice del ángulo.

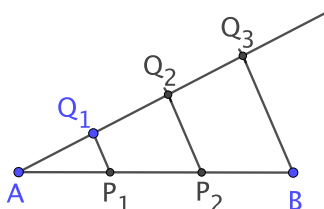
Los triángulos señalados en la figura tienen dos ángulos iguales por 1.20. Además, por el teorema 1.30, uno tiene lados  $a$  y  $a'$  y el otro lados  $b$  y  $b'$ .



Por lo tanto, si  $a = b$  o  $a' = b'$ , el criterio LAL nos da que los dos triángulos son iguales, luego se cumple que  $a = b$  y que  $a' = b'$ . ■

Con esto ya podemos resolver el problema de la división de segmentos:

**Problema 1.12** *Dividir un segmento dado en cualquier número de partes iguales prefijado.*



1. Consideramos cualquier punto  $Q_1$  no alineado con los extremos  $A$  y  $B$  del segmento dado y trazamos la semirrecta  $\overrightarrow{AQ_1}$ .
2. Con el compás, vamos marcando puntos  $Q_2, Q_3, \dots, Q_n$  sobre dicha semirrecta de modo que  $\overline{Q_i Q_{i+1}} = \overline{AQ_1}$ .
3. Trazamos el segmento  $\overline{Q_n B}$ .
4. Trazamos segmentos paralelos a éste que unan cada punto  $Q_i$  con un punto  $P_i$  de  $\overline{AB}$ .

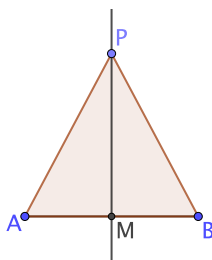
El teorema anterior garantiza que los  $n$  segmentos  $\overline{AP_1}, \overline{P_1 P_2}, \dots$  son iguales entre sí, con lo que tenemos dividido el segmento  $\overline{AB}$  en  $n$  partes iguales. ■

**Mediatrices y bisectrices** Recordemos que la mediatriz de un segmento es la recta perpendicular que pasa por su punto medio. Conviene tener presente esta caracterización:

**Teorema 1.32** *La mediatriz de un segmento  $\overline{AB}$  es el lugar geométrico de los puntos  $P$  que cumplen  $\overline{PA} = \overline{PB}$ .*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $M$  el punto medio de  $\overline{AB}$ . Si  $P$  cumple la condición del enunciado, entonces los triángulos  $\widehat{APM}$  y  $\widehat{BPM}$  tienen sus lados iguales, luego son iguales, luego los ángulos suplementarios  $\widehat{AMP}$  y  $\widehat{BMP}$  son iguales, luego son rectos, y así la recta  $PM$  es perpendicular a  $AB$ , luego es la mediatriz de  $\overline{AB}$ .

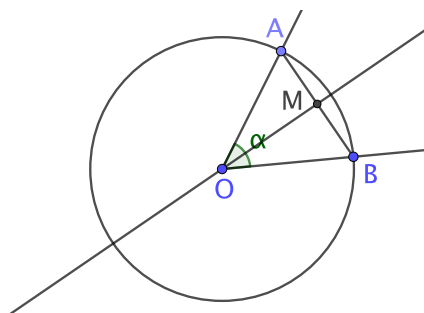




Recíprocamente, si  $P$  está en la mediatriz, los triángulos  $\widehat{APM}$  y  $\widehat{BPM}$  tienen iguales los lados  $\overline{AM} = \overline{BM}$  y  $\overline{PM}$ , así como el ángulo (recto) que forman, luego son iguales, luego  $\overline{PA} = \overline{PB}$ . ■

**Definición 1.33** La *bisectriz* de un ángulo es la semirrecta que lo divide en dos ángulos iguales.

**Problema 1.13** Construir la bisectriz de un ángulo dado.



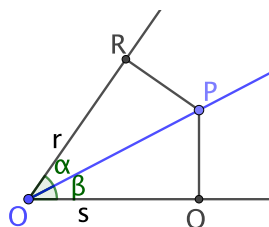
1. Si  $O$  es el vértice del ángulo dado, trazamos una circunferencia de centro  $O$  con un radio arbitrario, que cortará los lados en dos puntos  $A$  y  $B$ .
2. La mediatriz del segmento  $\overline{AB}$  pasa por  $O$  (por el teorema 1.32) y las dos semirrectas que  $O$  determina en ella son las bisectrices de  $\alpha$  y de su ángulo opuesto.

En efecto, si llamamos  $M$  al punto medio de  $\overline{AB}$ , los triángulos  $\widehat{OAM}$  y  $\widehat{OBM}$  tienen sus tres lados iguales, luego son iguales. En particular,  $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ , luego  $\overrightarrow{OM}$  es la bisectriz de  $\widehat{AOM}$ , y es fácil ver que la semirrecta opuesta es la bisectriz del ángulo opuesto. ■

Se cumple un análogo al teorema 1.32 para bisectrices en vez de mediatrices. Recordemos que la distancia de un punto  $P$  a una recta  $r$  es la distancia del  $P$  al pie de la perpendicular a  $r$  que pasa por  $P$ . Así:

**Teorema 1.34** La bisectriz de un ángulo convexo es el lugar geométrico de los puntos del ángulo que equidistan de sus lados.

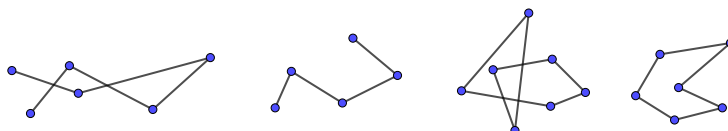
DEMOSTRACIÓN: Dado cualquier punto  $P$  en el ángulo, podemos considerar los triángulos rectángulos  $\overline{POR}$  y  $\overline{POQ}$ :



El punto  $P$  está en la bisectriz si y sólo si  $\alpha = \beta$ , si y sólo si los triángulos son iguales (pues tienen un lado  $\overline{OP}$  en común y dos ángulos iguales) si y sólo si  $\overline{PR} = \overline{PQ}$  (pues esto hace que tengan dos lados iguales, luego también el tercero, por el teorema de Pitágoras). ■

**Polígonos** Una *línea poligonal abierta* es una figura formada por varios segmentos  $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}$  en la que los puntos  $P_1, \dots, P_n$  son distintos dos a dos y se llaman *vértices* de la poligonal. Una *línea poligonal cerrada* es la figura formada por una poligonal abierta a la que se añade el segmento  $\overline{P_nP_1}$ .

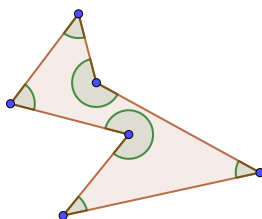
Una línea poligonal (abierta o cerrada) es *simple* si sus segmentos no tienen más puntos en común que los extremos comunes que exige la definición, es decir, si no se corta a sí misma.



La figura muestra, de izquierda a derecha, una poligonal abierta que no es simple, otra que sí que lo es, una poligonal cerrada que no es simple y otra que sí que lo es.

Las poligonales cerradas simples<sup>3</sup> se llaman también *polígonos* (gr. “varios ángulos”). Los segmentos que componen un polígono se llaman *lados*. Es claro que un polígono tiene el mismo número de vértices que de lados. Un polígono encierra una región del plano llamada su *interior*. En cada vértice, un polígono determina un *ángulo* (interior) que puede ser cóncavo o convexo.

<sup>3</sup>En ciertos contextos se llama también polígonos a las poligonales cerradas que no son simples, pero no es el convenio que adoptamos aquí.



La figura muestra un polígono con seis lados y seis vértices, con sus correspondientes ángulos (interiores).

Según su número de lados, los polígonos se clasifican en *triángulos*, *cuadriláteros*, *pentágonos*, *hexágonos*, etc.

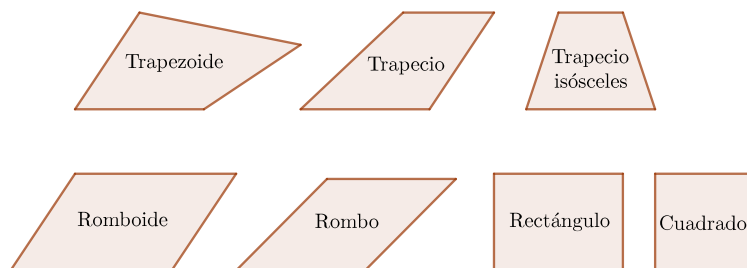
Un polígono es *equilátero* si sus lados son iguales, es *equiángulo* si sus ángulos son iguales y es *regular* si sus lados y ángulos son iguales.

En particular, todo cuadrilátero puede descomponerse en dos triángulos, luego el teorema 1.22 implica que los ángulos de un cuadrilátero suman un ángulo completo. En particular, si un cuadrilátero tiene sus cuatro ángulos iguales, éstos son ángulos rectos.

Un polígono es *convexo* si todos sus ángulos lo son.

Los cuadriláteros convexos con dos lados paralelos se llaman *trapezios* (gr. “mesita”), mientras que si no tienen lados paralelos se llaman *trapezoides*. Un trapezio es *isósceles* si sus lados paralelos tienen la misma mediatriz. En caso contrario son *escalenos*. Ya hemos definido antes los paralelogramos como los cuadriláteros con dos pares de lados paralelos. Los paralelogramos tienen sus lados iguales dos a dos. Si los tienen todos iguales se llaman *rombos* (gr. “peonza”) y en caso contrario *romboides*.

Los cuadriláteros con cuatro ángulos rectos se llaman *rectángulos*, y si además tienen los cuatro lados iguales, es decir, si son regulares, se llaman *cuadrados*. Claramente, los rectángulos son paralelogramos.

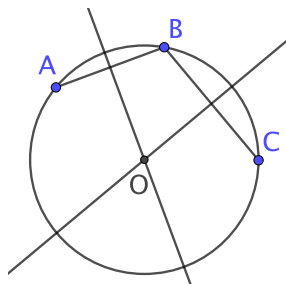


**Ejercicio:** Construir con regla y compás un rectángulo con unos lados dados.

Un polígono es *cíclico* si sus vértices están en una circunferencia, llamada *circunferencia circunscrita*. También se dice entonces que el polígono está *inscrita* en la circunferencia.

Todos los triángulos son cíclicos:

**Problema 1.14** *Dados tres puntos no alineados, encontrar el centro de la circunferencia que los contiene.*



1. Dados los tres puntos  $A, B, C$ , trazamos los segmentos  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$ .
2. Trazamos las mediatrices de ambos segmentos, que se cortan necesariamente en un punto  $O$ , pues en caso contrario serían paralelas, luego  $\overline{AB}$ , que es perpendicular a su mediatriz, también lo sería a la mediatriz de  $\overline{BC}$  (por el teorema 1.21), luego, por ese mismo teorema, las rectas  $AB$  y  $BC$  tendrían que ser paralelas o coincidentes, pero no son paralelas porque tienen el punto  $B$  en común, luego tienen que ser coincidentes, y entonces los puntos  $A, B, C$  están alineados.
3. El punto  $O$  es el centro requerido pues, por el teorema 1.32, al estar en la mediatriz de  $\overline{AB}$  cumple  $\overline{OA} = \overline{OB}$  y, al estar en la mediatriz de  $\overline{BC}$ , también  $\overline{OB} = \overline{OC}$ , luego los tres puntos están en la circunferencia de centro  $O$  y radio  $\overline{OA}$ . ■

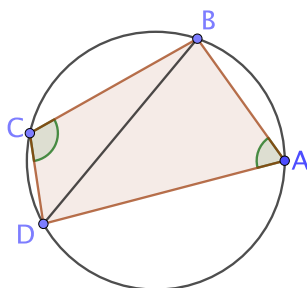
La circunferencia construida en el problema anterior es única, pues, por el teorema 1.32 el centro de una circunferencia está necesariamente en la mediatriz del segmento determinado por dos cualesquiera de sus puntos, luego vemos que una circunferencia tiene un único centro, lo que a su vez implica que tiene un único radio. Otra consecuencia es:

**Teorema 1.35** *Por tres puntos no alineados pasa una única circunferencia.*

En cambio, no todo cuadrilátero es cíclico. Una caracterización es la siguiente:

**Teorema 1.36** *Un cuadrilátero es cíclico si y sólo si sus ángulos opuestos son suplementarios.*

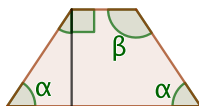
DEMOSTRACIÓN: La figura muestra un cuadrilátero cíclico. Sus ángulos  $\hat{A}$  y  $\hat{C}$  abarcan arcos de amplitud  $2\hat{A}$  y  $2\hat{C}$ , pero son dos arcos opuestos, luego  $2\hat{A} + 2\hat{C} = 2\pi$ , luego  $\hat{A} + \hat{C} = \pi$ , es decir, los ángulos son suplementarios.



Recíprocamente, dado un cuadrilátero que cumpla esta condición, consideramos la circunferencia que contiene a tres de sus vértices, por ejemplo  $A, B, D$ . Entonces el arco de extremos  $B$  y  $D$  que contiene a  $A$  es el arco capaz del segmento  $\overline{BD}$  correspondiente a una amplitud  $\hat{A}$ , luego el arco complementario es claramente el arco capaz de ese mismo segmento (pero en el semiplano opuesto) correspondiente a una amplitud  $\pi - \hat{A} = \hat{C}$ , luego  $C$  tiene que estar en dicho arco. ■

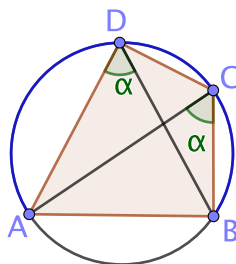
**Nota** La prueba del teorema anterior muestra que basta con que un par de ángulos opuestos de un cuadrilátero sean suplementarios para que éste sea cíclico. El otro par cumplirá necesariamente lo mismo. ■

Por ejemplo, un paralelogramo no puede ser cíclico salvo que sea un rectángulo, pues sus ángulos opuestos son iguales. En cambio, todo trapecio isósceles es cíclico, pues el ángulo  $\beta$  opuesto a  $\alpha$  es  $\beta = \pi/2 + \pi/2 - \alpha = \pi - \alpha$ .



Otro criterio es el siguiente:

**Teorema 1.37** *Un cuadrilátero es cíclico si y sólo si los ángulos señalados en la figura son iguales:*



DEMOSTRACIÓN: Si el cuadrilátero es cíclico, los dos ángulos están inscritos en la misma circunferencia y abarcan el mismo arco, luego son iguales por 1.26. Recíprocamente, si los ángulos son iguales, los puntos  $C$  y  $D$  están en el arco capaz del segmento  $\overline{AB}$  correspondiente a la amplitud  $\alpha$ , luego los cuatro vértices están en la misma circunferencia. ■

**Circunferencias** Consideremos ahora las intersecciones posibles entre una recta y una circunferencia. Si el lector trata de imaginar todas las posibilidades, se convencerá fácilmente de que no hay más que tres:

**Definición 1.38** Se dice que una recta es *secante* a una circunferencia si la corta en dos puntos, es *tangente* si la corta sólo en uno y es *exterior* si no tiene puntos en común con ella.

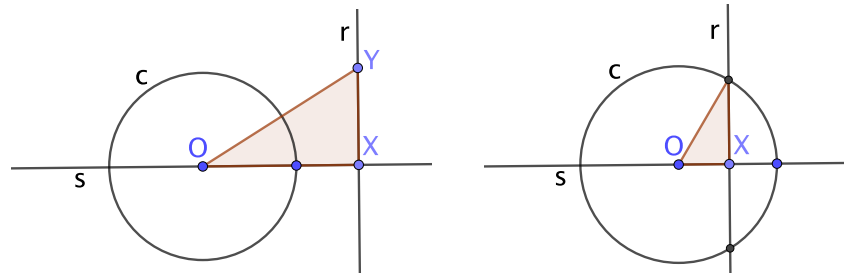
Puesto que no hay más posibilidades, vemos que tres puntos distintos en una circunferencia no pueden estar alineados, por lo que la hipótesis del teorema 1.32 es necesaria.

Es evidente que si una recta pasa por un punto  $P$  interior a una circunferencia de centro  $O$ , es decir, por un punto tal que  $\overline{OP}$  es menor que el radio, necesariamente es una recta secante. El teorema siguiente nos da una caracterización de las rectas secantes y tangentes:

**Teorema 1.39** Sea  $c$  una circunferencia de centro  $O$  y radio  $a$ . Sea  $r$  una recta, sea  $s$  la perpendicular a  $r$  que pasa por  $O$  y sea  $X$  el punto en que ésta corta a  $r$ . Entonces:

1. Si  $\overline{OX} > a$ , entonces  $r$  es exterior a  $c$ .
2. Si  $\overline{OX} = a$  entonces  $r$  es tangente a  $c$  y  $X$  es el punto de tangencia.
3. Si  $\overline{OX} < a$  entonces  $r$  y  $c$  son secantes.

DEMOSTRACIÓN: Si  $\overline{OX} > a$  entonces todo punto  $Y$  de  $r$  que no sea el propio  $X$  cumple  $\overline{OY} > \overline{OX} > a$ , luego ningún punto de  $r$  está en  $c$ . El mismo razonamiento se aplica si  $\overline{OX} = a$ , sólo que ahora el punto  $X$  sí que está en  $c$ .

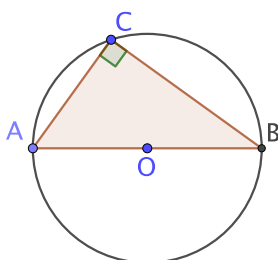


Si  $\overline{OX} < a$ , es decir, si  $X$  está dentro del círculo, es evidente que  $r$  corta a  $c$  exactamente en dos puntos. De hecho, es evidente que las rectas secantes a  $c$  son precisamente las que pasan por puntos interiores de  $c$ . ■

Así, para que una recta sea tangente a una circunferencia de centro  $O$  por uno de sus puntos  $P$  es necesario y suficiente que pase por  $P$  y sea perpendicular a la recta  $OP$ , lo que implica que por cada punto de la circunferencia pasa una única recta tangente.

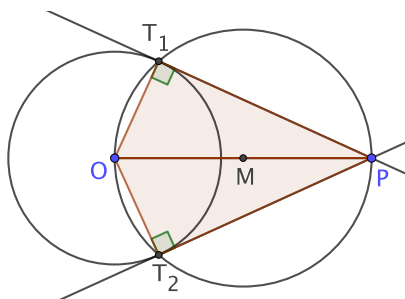
En particular, es fácil construir la recta tangente a una circunferencia por uno de sus puntos (basta considerar la recta que pasa por el punto  $P$  y el centro y trazar su perpendicular en  $P$ ). En cambio, no es tan inmediato cómo construir las tangentes a una circunferencia que pasan por un punto exterior  $P$ . Para ello conviene destacar un caso particular del teorema 1.26:

**Teorema 1.40 (Tales)** Si  $\overline{AB}$  es un diámetro de una circunferencia y  $C$  es un punto de la misma no contenido en  $\overline{AB}$ , entonces el triángulo  $\widehat{ABC}$  tiene un ángulo recto en  $C$ .



Es un caso particular del teorema 1.26, pues el arco abarcado por el ángulo  $\widehat{ACB}$  es llano, luego  $\hat{C}$  tiene que ser recto.

**Problema 1.15** Construir las tangentes a una circunferencia dada que pasan por un punto exterior  $P$ .

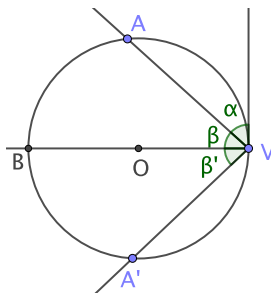


1. Trazamos el segmento  $\overline{OP}$ .
2. Calculamos su punto medio  $M$ .
3. Trazamos la circunferencia de centro  $M$  que pasa por  $O$  y  $P$ .

Como esta circunferencia pasa por un punto interior a la circunferencia dada (el punto  $O$ ) y por otro exterior (el punto  $P$ ), tiene que cortarla en dos puntos  $T_1$  y  $T_2$ . Por el teorema anterior los triángulos  $\widehat{OT_1P}$  y  $\widehat{OT_2P}$  tienen ángulos rectos en  $T_1$  y  $T_2$ , luego las rectas  $PT_1$  y  $PT_2$  son perpendiculares a los radios  $\overline{OT_1}$  y  $\overline{OT_2}$ , respectivamente, luego son las tangentes buscadas. ■

El teorema 1.26 admite variantes para ángulos que no necesariamente inscritos en una circunferencia, pero cuyos lados sean secantes o tangentes. Un caso intermedio es el de un ángulo *semiinscritos*, es decir, un ángulo con el vértice en la circunferencia, un lado secante y el otro tangente. El teorema 1.26 sigue siendo cierto en este caso:

**Teorema 1.41** *La amplitud de un ángulo semiinscritos en una circunferencia es igual a la mitad de la del arco que abarca.*



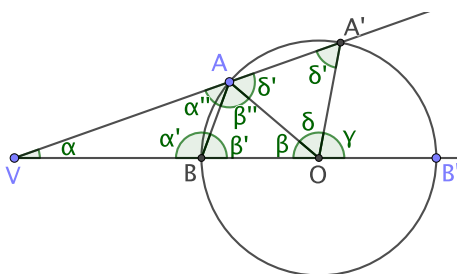
DEMOSTRACIÓN: Si el lado no tangente pasa por el centro  $O$  de la circunferencia, entonces el ángulo  $\alpha$  es recto (tiene amplitud  $\pi/2$ ) y el arco abarcado tiene amplitud  $\pi$ , luego ciertamente la amplitud de  $\alpha$  es la mitad de la del arco que abarca.

Si el ángulo semiinscritos no incluye al centro  $O$ , llamando  $\beta = \widehat{BVA}$ , tenemos que la amplitud del ángulo es  $\alpha = \pi/2 - \beta$ , mientras que la amplitud del arco abarcado es  $\pi$  menos la amplitud del arco abarcado por  $\widehat{BVA}$ , que es  $2\beta$  por el teorema 1.26, es decir, es  $\pi - 2\beta$ , el doble de  $\alpha$ .

Si el ángulo dado contiene al centro  $O$ , entonces se razona igualmente tomando  $\beta = \widehat{BVA'}$ . ■

Para ángulos no inscritos ni semiinscritos tenemos dos posibilidades, según que el vértice sea exterior o interior:

**Teorema 1.42** *Un ángulo con vértice exterior a una circunferencia y cuyos lados sean secantes a ella es igual a la semidiferencia de los arcos que abarca.*



DEMOSTRACIÓN: Como en 1.26, el problema se reduce al caso en que uno de los lados del ángulo pase por el centro  $O$  de la circunferencia, como muestra la figura.

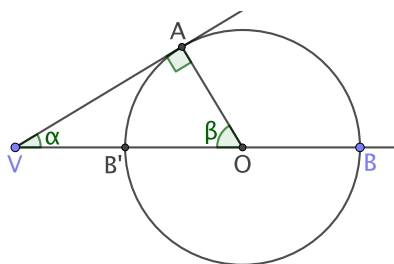


Entonces

$$\begin{aligned}\alpha &= \pi - \alpha' - \alpha'' = \beta'' + \delta' - (\pi - \beta') = \beta'' + \delta' - (\beta + \beta'') = \delta' - \beta \\ &= \frac{\pi - \delta}{2} - \beta = \frac{\pi - \delta - \beta}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma - \beta}{2}.\end{aligned}$$

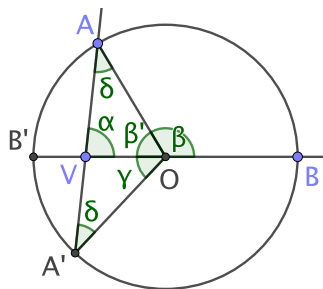
En el caso general  $\alpha$  será la suma o la resta de dos ángulos en el caso precedente y la conclusión es inmediata. ■

**Nota** El teorema anterior sigue siendo válido si uno de los lados del ángulo, o ambos, es tangente a la circunferencia en lugar de secante. La prueba se reduce una vez más al caso en el que un lado pasa por el centro y el otro es tangente.



Entonces se forma un triángulo rectángulo y es claro que los arcos abarcados miden  $\beta = \pi/2 - \alpha$  y  $\gamma = \pi/2 + \alpha$ , luego su semidiferencia es  $\alpha$ . ■

**Teorema 1.43** *Un ángulo con vértice interior a una circunferencia es igual a la semisuma de los arcos que abarca.*



DEMOSTRACIÓN: Una vez más la prueba se puede reducir al caso en que  $O$  está en uno de los lados (podemos suponer que  $O$  no es el vértice, porque ese caso es trivial). Ahora

$$\alpha = \pi - \delta - \beta' = \beta - \delta,$$

pero  $2\delta + \gamma + \beta' = \pi$ , luego  $2\delta = \beta - \gamma$ , luego

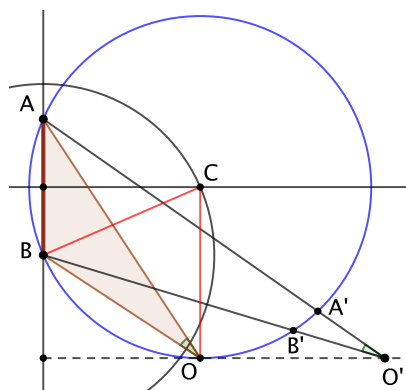
$$\alpha = \beta - \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

■

**El problema de Regiomontano** El problema siguiente fue planteado en 1471 por el matemático alemán Johannes Müller, más conocido como Regiomontano por su lugar de nacimiento (Königsberg):

*Un cuadro está colgado de una pared por encima de la altura de los ojos de un observador. ¿A qué distancia de la pared debe situarse para ver el cuadro con mayor ángulo?*

SOLUCIÓN: La figura muestra de perfil la pared en la que se encuentra el cuadro, cuyo perfil es a su vez el segmento  $\overline{AB}$ . La línea punteada representa la altura de los ojos del observador. Hay una única circunferencia que pasa por  $A$  y  $B$  y es tangente a la línea del observador. En efecto, el centro  $C$  de una tal circunferencia tiene que estar sobre la bisectriz de  $\overline{AB}$  y a una distancia de  $B$  igual a la distancia entre la bisectriz y la línea del observador, luego es la intersección de la bisectriz con la circunferencia de centro  $B$  y radio dicha distancia.



El punto de tangencia  $O$  es el punto desde el cual el cuadro se ve con ángulo máximo, pues dicho ángulo será la mitad del arco abarcado  $\widehat{AB}$ , mientras que cualquier otro punto  $O'$  a la altura de los ojos del observador estará fuera de la circunferencia, y el ángulo vendrá dado por el teorema 1.42, luego será la mitad de la resta  $\widehat{AB} - \widehat{A'B'}$  de los dos arcos que determina en la circunferencia, luego será menor que el ángulo desde  $O$ . ■

## Capítulo II

# Medida de longitudes, amplitudes y áreas

Dedicamos este capítulo a precisar la relación de los números reales con la geometría a través de la medida de ángulos, amplitudes y áreas, lo que a su vez preparará el tránsito a la geometría analítica que presentamos en el apéndice A. El lector que no tenga inconveniente en aceptar que la magnitud de un segmento, de un ángulo o de un área puede determinarse mediante un número real con respecto a una unidad prefijada puede pasar directamente al capítulo siguiente.

Recordemos que, dada una longitud  $\alpha$  y un número racional  $r = m/n$ , podemos definir  $r\alpha$  como la longitud del segmento que resulta de tomar un segmento de longitud  $\alpha$ , dividirlo en  $n$  partes iguales y sumar una de ellas consigo misma  $m$  veces.

Si  $\beta = r\alpha$ , podemos decir que  $r$  es la “razón” entre  $\alpha$  y  $\beta$ , en el sentido de que determina la magnitud de  $\beta$  en términos de la de  $\alpha$ . Sin embargo, tal y como explicábamos en la introducción, los pitagóricos descubrieron que no siempre hay un número racional que relacione las longitudes de dos segmentos en estos términos, y que fue Eudoxo quien, en un modelo sin precedentes de rigor matemático, formuló una teoría de proporciones que permitía comparar dos longitudes cualesquiera aunque fueran mutuamente inconmensurables, es decir, aunque no pudieran expresarse en términos de una proporción entre números naturales. En la base de dicha teoría se encuentra el principio siguiente:

*(\*) Si  $\alpha$  y  $\beta$  son dos longitudes arbitrarias (no nulas), existe un número natural  $n$  tal que  $\alpha < n\beta$ .*

En efecto, esto significa que si queremos recorrer una distancia  $\alpha$  dando pasos de longitud  $\beta$ , tras un número finito  $n$  de pasos habremos alcanzado nuestra meta, por lejana que estuviera o por pequeños que hayan sido nuestros pasos. Cuanto más lejana esté la meta o más pequeños sean los pasos, más pasos se requerirán, pero siempre acabaremos alcanzando nuestro destino.

A su vez, de este principio se deduce este otro:

(\*\*) Dada una unidad de medida  $\alpha$  y dos longitudes  $\beta < \gamma$ , existe un número racional  $r > 0$  tal que  $\beta < r\alpha < \gamma$ .

En efecto, podemos tomar un número natural  $n > 0$  tal que  $\alpha < n(\gamma - \beta)$ . Al dividir en  $n$  partes las longitudes  $\alpha$  y  $n(\gamma - \beta)$  vemos que  $(1/n)\alpha < \gamma - \beta$ . Igualmente, existe un número natural  $m$  tal que  $\beta < (m/n)\alpha$ . Si tomamos, concretamente, el mínimo  $m$  que cumple esto, tiene que ser  $m > 1$  (porque  $m = 1$  no lo cumple), luego será de la forma  $m = m_0 + 1$  y así se cumplirá que

$$\frac{m_0}{n}\alpha \leq \beta < \frac{m}{n}\alpha = \frac{m_0}{n}\alpha + \frac{1}{n}\alpha < \beta + (\gamma - \beta) = \gamma,$$

luego  $r = m/n$  cumple lo requerido.

Así, aunque no podemos garantizar que  $\beta$  o  $\gamma$  puedan expresarse en la forma  $r\alpha$ , sí que podemos afirmar que existe un segmento de longitud  $r\alpha$  (es decir, conmensurable con  $\alpha$ ) que nos permite distinguir  $\beta$  de  $\gamma$ , en el sentido de que podemos afirmar que  $r\alpha$  excede a  $\beta$ , pero no a  $\gamma$ .

Por lo tanto, podemos distinguir una longitud  $\beta$  de cualquier otra longitud  $\gamma$ , no igualándola a una longitud  $r\alpha$ , que tal vez no exista, pero sí comparándola con todas las longitudes de la forma  $r\alpha$ , cuando  $r$  varía en los números racionales positivos. Más precisamente, La relación entre  $\alpha$  y  $\beta$ , es decir, el tamaño de  $\beta$  con respecto a  $\alpha$ , está completamente determinada por la totalidad de los números racionales  $r$  que cumplen  $r\alpha < \beta$  (pues si sabemos cuáles cumplen esto, también sabemos que los que no lo cumplen son los que cumplen  $r\alpha \geq \beta$ ).

En otros términos, si nos proponemos medir una longitud  $\beta$  tomando como unidad de medida otra  $\alpha$ , nos encontramos con que los números racionales positivos se dividen en dos clases:

- A. Los números  $r > 0$  tales que  $r\alpha < \beta$ .
- B. Los números  $r > 0$  tales que  $\beta \leq r\alpha$ .

El problema es que no tiene por que haber ningún  $r$  para el que se dé la igualdad, sino que puede ocurrir que siempre se cumpla  $r\alpha < \beta$  o  $\beta < r\alpha$ . La teoría de Eudoxo consiste esencialmente en aprovechar que “medir  $\beta$ ”, es decir, determinar la “razón” o proporción que se da entre  $\alpha$  y  $\beta$ , es lo mismo que determinar a cuál de las dos clases pertenece cada número racional. Si sabemos distinguir qué números son de la clase  $A$  y cuáles de la clase  $B$ , conocemos exactamente el tamaño de  $\beta$  en relación a  $\alpha$  (es el único tamaño mayor que todos los tamaños  $r\alpha$ , con  $r$  en la primera clase y menor o igual que todos los tamaños  $r\beta$  con  $r$  en la segunda clase). Euclides plasmó así esta idea:

**Definición 5** *Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud que una tercera con una cuarta cuando cualquier equimúltiplo de la primera y la tercera exceden a la par, son iguales a la par o son inferiores a la par que cualquier equimúltiplo de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.* [Elementos, libro V]

En otros términos:

Se dice que  $\beta/\alpha = \delta/\gamma$  si, para todos los números naturales no nulos  $m$  y  $n$ , si  $m\alpha > n\gamma$  (resp.  $m\alpha = n\gamma$ ,  $m\alpha < n\gamma$ ), también  $m\beta > n\delta$  (resp.  $m\beta = n\delta$ ,  $m\beta < n\delta$ .)

No es difícil probar que  $\beta/\alpha = \delta/\gamma$  es equivalente a  $\gamma/\alpha = \delta/\beta$ , y de aquí que la definición anterior equivalga a esta otra, que entronca mejor con la discusión precedente:

*Se dice que  $\beta/\alpha = \delta/\gamma$  si, para todo número racional  $r > 0$  se cumple  $r\alpha < \beta$  si y sólo si  $r\gamma < \delta$ .*

En estos términos, vemos que la definición de proporcionalidad de Euclides afirma que  $\beta$  “es igual de grande” respecto a  $\alpha$  como  $\delta$  respecto a  $\gamma$  si cada múltiplo racional de  $\alpha$  se queda corto o se pasa de  $\beta$  si y sólo si el mismo múltiplo de  $\gamma$  se queda corto o se pasa de  $\delta$ .

Por ejemplo, si  $\beta$  es el doble de  $\alpha$ , la relación  $r\alpha < \beta$  la cumplirán exactamente los números racionales  $0 < r < 2$ , luego, si  $\beta/\alpha = \delta/\gamma$ , lo mismo sucede con la relación  $r\gamma < \delta$ , y esto se traduce en que  $\delta$  también es el doble de  $\gamma$ , por lo que  $\beta$  guarda con  $\alpha$  la misma proporción que  $\delta$  guarda con  $\gamma$ .

La relación con la discusión precedente es que  $\beta/\alpha = \delta/\gamma$  equivale a que las dos clases de números racionales  $A$  y  $B$  que se forman al tratar de comparar  $\alpha$  con  $\beta$  sean las mismas que se forman al tratar de comparar  $\gamma$  con  $\delta$ . Por lo tanto, lo que en el fondo hace Euclides era tomar como “medida” de la proporción entre  $\alpha$  y  $\beta$  las clases de números racionales positivos  $A$  y  $B$  correspondientes (o simplemente la clase  $A$ , porque ésta determina a su vez la clase  $B$ , que no consta sino de los números racionales positivos que no están en  $A$ ).

En realidad Euclides no considera en ningún momento conjuntos infinitos de números, igual que nunca trabaja con rectas infinitas, sino con segmentos prolongables indefinidamente, y por eso mismo nunca llegó a plasmar esta relación en términos numéricos, pero aquí vamos a ver que las clases  $A$  y  $B$  determinadas por dos longitudes  $\alpha$  y  $\beta$  pueden determinarse a su vez por un número, pero no un número racional, pues ya hemos señalado que los números racionales son insuficientes para medir longitudes arbitrarias, sino mediante un número real. El resultado final es que así restablecemos la concepción inicial pitagórica de que la proporción entre dos longitudes se puede expresar mediante un número, sólo que para ello tendremos que considerar números reales en vez de racionales.

Ahora bien, sucede que los matemáticos griegos trabajaban exclusivamente con magnitudes positivas. La idea de “números negativos” está completamente ausente en la matemática griega. Por ello, si tratáramos de introducir los números reales sin más que seguir las ideas que acabamos de discutir, llegaríamos únicamente a los números reales positivos. Es cierto que luego sería relativamente fácil “retocar” algebraicamente el resultado para incorporar números negativos, pero es más razonable aprovechar desde un principio que los números

racionales negativos también tienen una interpretación geométrica, lo cual nos lleva a discutir otra idea de la que tampoco hay rastro en el contexto de la matemática griega, y es la posibilidad de determinar los puntos de una recta mediante coordenadas numéricas. Nos ocupamos de ello en la primera sección.

## 2.1 Rectas y circunferencias graduadas

Recogemos aquí la definición que ya hemos discutido en la introducción precedente:

**Definición 2.1** Si  $\alpha$  es una longitud y  $r = m/n$  es un número racional positivo, definimos  $r\alpha$  como la longitud que resulta de tomar un segmento de longitud  $\alpha$ , dividirlo en  $n$  partes iguales y sumar  $m$  veces una de estas partes.

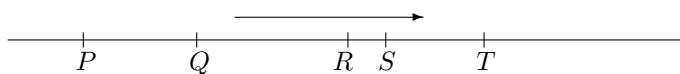
Si  $\beta = r\alpha$ , podemos decir que  $r$  es la “razón” entre las longitudes  $\alpha$  y  $\beta$ . Una comprobación rutinaria nos da las propiedades siguientes:

1.  $r(\alpha + \beta) = r\alpha + r\beta$ ,  $(r + s)\alpha = r\alpha + s\alpha$ ,  $(rs)\alpha = r(s\alpha)$ ,  $1\alpha = \alpha$ ,
2. Si  $r\alpha = r\beta$  entonces  $\alpha = \beta$ ,
3. Si  $r\alpha = s\alpha$ , entonces  $r = s$ ,
4. Si  $\alpha < \beta$  entonces  $r\alpha < r\beta$ ,
5. Si  $r < s$  entonces  $r\alpha < s\alpha$ .

Observemos que, en 1) la primera propiedad afirma que si sumamos una longitud que es  $r$  veces más grande que  $\alpha$  con otra que es  $r$  veces más grande que  $\beta$ , el resultado es  $r$  veces más grande que  $\alpha + \beta$ . Similarmente, la segunda propiedad puede interpretarse como que si una longitud mide  $r$  tomando  $\alpha$  como unidad de medida y otra mide  $s$ , entonces la medida de la suma es  $r + s$ . La tercera propiedad afirma que si una longitud es  $s$  veces más grande que  $\alpha$  y otra es  $r$  veces más grande que la primera, entonces ésta es  $rs$  veces más grande que  $\alpha$ .

Nuestro objetivo a medio plazo es estar en condiciones de afirmar esto mismo, pero sustituyendo los números racionales por números reales. Esta definición de “producto” de un número racional (posteriormente real) por una longitud expresa la noción de “medida” de longitudes, pero sólo involucra números positivos. Para “hacerles un hueco” a los números negativos introducimos seguidamente la noción de recta graduada.

Observemos en primer lugar que podemos movernos a lo largo de una recta exactamente en dos sentidos opuestos, si bien es preferible expresar esta idea en términos “estáticos” diciendo que una recta admite exactamente dos ordenaciones naturales. Basta una flecha para especificar una de ellas. Por ejemplo, en la figura siguiente, la flecha que hemos representado determina el orden respecto al cual  $P < Q < R < S < T$ .

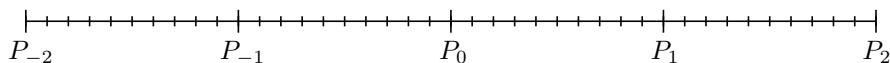


En cambio, con la flecha opuesta estaríamos especificando el orden opuesto, respecto al cual  $T < S < R < Q < P$ , y no hay más posibilidades. Ninguna de las dos ordenaciones “naturales” de la recta cumple  $P < R < Q$ , por ejemplo. Cuando fijamos en una recta una de sus dos ordenaciones naturales, se dice que hemos *orientando* la recta, o que hemos fijado en ella una *orientación*.

Una *recta graduada* es una recta en la que hemos seleccionado arbitrariamente dos puntos distintos,  $P_0$  y  $P_1$ .

En una recta graduada consideraremos siempre la única orientación que hace que  $P_0 < P_1$ , de modo que toda recta graduada es siempre una recta orientada. Llamaremos *semirrecta positiva* a la semirrecta de origen  $P_0$  que contiene a  $P_1$  o, equivalentemente, a la semirrecta formada por los puntos mayores que  $P_0$  respecto de la orientación asociada a la graduación. La semirrecta opuesta será la *semirrecta negativa*.

Pero con una graduación (es decir, fijando dos puntos  $P_0$  y  $P_1$  en una recta) no sólo estamos fijando en ella una orientación, sino también una unidad de medida, el segmento  $\overline{P_0P_1}$ . Esto nos permite asignar un punto de la recta a cada número racional  $r$ . Concretamente, a cada número racional  $r > 0$  le podemos asignar el único punto  $P_r$  de la semirrecta positiva que cumple  $\overline{P_0P_r} = r\overline{P_0P_1}$ , y a cada número racional  $r < 0$  le asignamos el punto que cumple  $\overline{P_0P_r} = (-r)\overline{P_0P_1}$  y está en la semirrecta negativa.



La figura muestra una recta graduada en la que están señalados los puntos asociados a los números racionales de la forma  $m/10$ , para los primeros valores de  $m$ , tanto positivos como negativos.

En general, es claro que  $r < s$  si y sólo si  $P_r < P_s$  en el orden determinado por la graduación.

Es importante recordar que esta asignación de números racionales a algunos puntos de una recta depende de la elección arbitraria de los puntos  $P_0$  y  $P_1$  o, en otros términos, de la elección de  $P_0$ , de la unidad de medida  $u = \overline{P_0P_1}$  y de la orientación de la recta (es decir, de la elección de la semirrecta determinada por  $P_0$  en la que situamos a  $P_1$ ). Cambiando estas elecciones podemos obtener distintas graduaciones de una misma recta.

La propiedad (\*\*) que hemos demostrado más arriba se traduce inmediatamente en esta otra:

**Teorema 2.2** Si  $P < Q$  son dos puntos de una recta graduada, existe un número racional tal que  $P < P_r < Q$ .

DEMOSTRACIÓN: Si  $P$  es negativo y  $Q$  positivo, basta tomar  $r = 0$ . Si  $0 \leq P < Q$ , cambiando  $P$  por un punto entre  $P$  y  $Q$  podemos suponer que  $0 < P < Q$ , en cuyo caso por (\*\*) existe un  $r$  tal que

$$\overline{P_0P} < r\overline{P_0P_1} < \overline{P_0Q},$$

lo cual equivale a que  $P < P_r < Q$ . Si los dos puntos son negativos se razona análogamente. ■

Esto significa que los puntos de una recta graduada asociados a números racionales están “por todas partes” en el sentido de que cualquier segmento, por pequeño que sea, esté donde esté, contiene uno de ellos (infinitos, de hecho). Sin embargo, el descubrimiento que hizo temblar la matemática griega es equivalente a que en una recta graduada hay puntos que no son de la forma  $P_r$ , para ningún número racional  $r$ .

Pero antes de entrar en el problema de cómo asignar números a los puntos restantes, vamos a ver que podemos graduar análogamente cualquier circunferencia.

**Definición 2.3** Si  $\alpha$  es una amplitud y  $r = m/n$  es un número racional positivo, definimos  $r\alpha$  como la amplitud que resulta de tomar un ángulo de amplitud  $\alpha$ , dividirlo en  $n$  partes iguales y sumar  $m$  veces una de estas partes (si es posible).

Al contrario de lo que sucede en el caso de las longitudes, la amplitud  $r\alpha$  no está definida para todos los números racionales, puesto que el ángulo  $(1/n)\alpha$  no se puede sumar repetidamente un número arbitrario de veces, sino que al cabo de un número finito de sumas llegaremos a un ángulo en cuyo ángulo opuesto no cabrá ya  $(1/n)\alpha$  y no será posible realizar ninguna suma más.

Ahora bien, es claro que, cuando se puede calcular,  $(m/n)\alpha$  depende realmente del número racional  $r = m/n$ , pero no de la fracción concreta con la que elegimos calcularlo.

Más aún, para toda amplitud  $\alpha$ , se cumple que  $r\alpha$  está definido al menos cuando  $0 < r \leq 1$ , pues si dividimos  $\alpha$  en  $n$  partes iguales, siempre podremos sumar al menos  $n$  de ellas hasta obtener de nuevo  $\alpha$ .

Notemos también que si  $r \leq s$  y  $s\alpha$  está definido, también lo está  $r\alpha$ , pues podemos expresar  $r = m/n$ ,  $s = m'/n$ , con  $m \leq m'$ , y si podemos sumar  $m'$  veces el ángulo  $(1/n)\alpha$  para calcular  $s\alpha$ , también podemos sumarlo  $m$  veces para calcular  $r\alpha$ .

También es fácil convencerse de que, cuando todos los ángulos implicados se pueden calcular, se cumplen las mismas propiedades que en el caso de las longitudes:

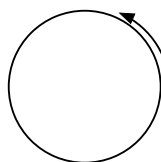
1.  $r(\alpha + \beta) = r\alpha + r\beta$ ,  $(r + s)\alpha = r\alpha + s\alpha$ ,  $(rs)\alpha = r(s\alpha)$ ,  $1\alpha = \alpha$ ,
2. Si  $r\alpha = r\beta$  entonces  $\alpha = \beta$ ,



3. Si  $r\alpha = s\alpha$ , entonces  $r = s$ ,
4. Si  $\alpha < \beta$  entonces  $r\alpha < r\beta$ .
5. Si  $r < s$  entonces  $r\alpha < s\alpha$ ,

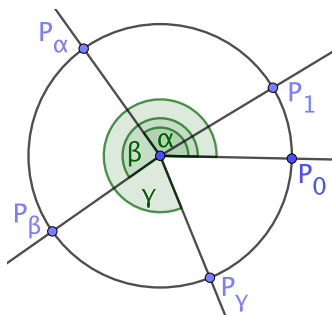
Si  $\beta = r\alpha$ , podemos decir que  $r$  es la “razón” entre las amplitudes  $\alpha$  y  $\beta$ , pero, al igual que sucede con las longitudes, dadas dos amplitudes  $\alpha$  y  $\beta$ , no tiene por qué existir un número racional que permita expresar  $\beta = r\alpha$ .

Al igual que por una recta podemos movernos en dos sentidos opuestos, en una circunferencia podemos girar también en dos sentidos opuestos. Si vemos la circunferencia de frente, podemos describirlos como el “sentido horario” (el sentido en que se mueven las agujas de un reloj) y el “sentido antihorario” (el sentido opuesto), pero hay que tener presente que basta mirar la circunferencia desde el lado opuesto para que el “sentido horario” se convierta en el “antihorario” y viceversa, por lo que estos términos son ambiguos en general. No obstante, basta una flecha, como en la figura, para especificar una orientación en una circunferencia:



Una *circunferencia graduada* es una circunferencia  $c$  (digamos, de centro  $O$ ) en la que hemos fijado dos puntos  $P_0$  y  $P_1$  que no sean opuestos. Llamaremos *semiplano inicial* al semiplano respecto de la recta  $OP_0$  que contiene a  $P_1$ .

Para cada amplitud  $\alpha$ , existe un único ángulo de amplitud  $\alpha$  que tiene a  $\overrightarrow{OP_0}$  como uno de sus lados y está contenido en el semiplano inicial si es convexo y lo contiene si es cóncavo. El lado distinto de  $\overrightarrow{OP_0}$  corta a la circunferencia  $c$  en un único punto  $P_\alpha$ , de modo que a amplitudes distintas corresponden puntos distintos (en virtud de los teoremas 1.10 y 1.11) salvo en el caso de las amplitudes correspondientes a los ángulos nulos y completos, pues a ambas les corresponde el punto  $P_0$ .



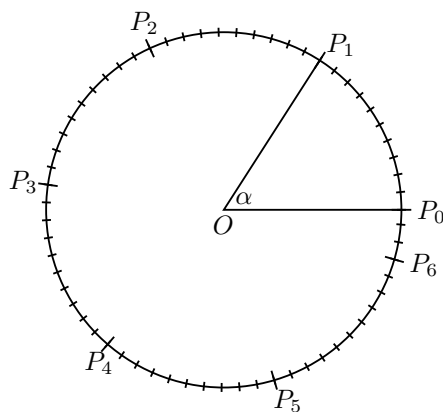
La figura muestra una circunferencia graduada junto con los puntos  $P_\alpha, P_\beta$  y  $P_\gamma$  correspondientes a tres amplitudes. Observemos cómo  $\alpha$  corresponde a un ángulo convexo, por lo que el ángulo  $\widehat{P_0OP_\alpha}$  está contenido en el semiplano inicial (el que contiene a  $P_1$ ), mientras que  $\beta$  y  $\gamma$  corresponden a ángulos cóncavos, por lo que sus ángulos correspondientes contienen el semiplano inicial.

Esto nos define una ordenación de los puntos de la circunferencia, dada por que  $P < Q$  si y sólo si, cuando representamos los puntos como  $P = P_\alpha$  y  $Q = P_\beta$  (de modo que, si tenemos que elegir entre la amplitud nula y la amplitud completa elegimos la primera), se cumple  $\alpha < \beta$ .

Si adoptamos el convenio habitual de representar  $P_0$  —como en la figura— sobre una recta horizontal y a la derecha del centro de la circunferencia y  $P_1$  en el semiplano superior, entonces moverse por la circunferencia en sentido ascendente significa girar en sentido antihorario, pero si elegimos  $P_0$  a la izquierda del centro (o  $P_1$  en el semiplano inferior, pero no ambas cosas), la relación se invierte y el sentido de giro ascendente pasa a ser el sentido horario. Así pues, una graduación de una circunferencia determina en ella una orientación.

En el caso de las amplitudes representadas en la figura anterior, como obviamente  $\alpha < \beta < \gamma$ , tenemos también que  $P_\alpha < P_\beta < P_\gamma$ . El punto  $P_0$  es el mínimo y, si vamos girando en sentido antihorario, vamos recorriendo la circunferencia en sentido creciente. No hay un punto máximo, pues a medida que nos acercamos de nuevo a  $P_0$  “desde abajo” vamos pasando por puntos cada vez mayores, sin que ninguno sea el mayor de todos.

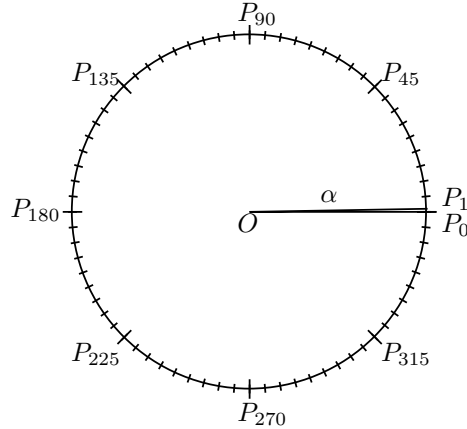
En una circunferencia graduada tomaremos como unidad de medida de amplitudes la del ángulo  $\alpha = \widehat{P_0OP_1}$ . Para cada número racional  $r$  para el que  $r\alpha$  esté definida, escribiremos  $P_r$  en lugar de  $P_{r\alpha}$ . Por ejemplo, la figura siguiente muestra una circunferencia graduada en la que  $P_n$  está definido hasta  $n = 6$ , mientras que  $P_{n/10}$  está definido hasta  $n = 62$ :



Una diferencia notable entre el caso de las longitudes y el de las amplitudes es que no tenemos ningún criterio particular para elegir una unidad de longitud, sino que la elección es necesariamente arbitraria. En cambio, existen muchas

formas de determinar una unidad de amplitud de ángulos. Por ejemplo, Euclides tomó como unidad el ángulo recto, mientras que otra elección tradicional es el *grado sexagesimal*, que no es sino la amplitud que resulta de dividir la circunferencia en 360 partes iguales (o el ángulo recto en 90 partes iguales).

La figura siguiente muestra una circunferencia graduada tomando como unidad el grado sexagesimal  $\alpha$ , en la que están representados los puntos  $P_r$  correspondientes a los múltiplos de 5 grados:



En cualquier circunferencia graduada se cumple el análogo al teorema 2.2:

**Teorema 2.4** Si  $P < Q$  son dos puntos de una circunferencia graduada, existe un número racional tal que  $P < P_r < Q$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea  $\alpha = \widehat{P_0OP_1}$  y consideremos las amplitudes  $\beta < \gamma$  que cumplen  $P = P_\beta$ ,  $Q = P_\gamma$ . Sustituyendo  $\gamma$  por otro ángulo  $\beta < \gamma' \leq \gamma$  podemos suponer que  $\gamma - \beta$  es menor que la amplitud opuesta  $\alpha^\circ$ . Esto implica que existe un número natural  $n > 0$  tal que  $\alpha < n(\gamma - \beta)$ , pues si  $n_0$  es el máximo natural que cumple  $n_0(\gamma - \beta) \leq \alpha$  y  $n = n_0 + 1$ , todavía es posible calcular

$$n(\gamma - \beta) = n_0(\gamma - \beta) + \gamma - \beta,$$

pues la condición para ello es que  $\gamma - \beta < (n_0(\gamma - \beta))^\circ < \alpha^\circ$ , y por la elección de  $n_0$  será  $n(\gamma - \beta) > \alpha$ .

Por lo tanto,  $(1/n)\alpha < \gamma - \beta$ . Tomando un  $n$  mayor si es necesario, podemos suponer que  $(1/n)\alpha < \beta^\circ$ , con lo que, por el mismo argumento, existe un número natural  $m$  tal que  $\beta < (m/n)\alpha$ . Si tomamos, concretamente, el mínimo  $m$  que cumple esto, tiene que ser  $m > 1$  (porque  $m = 1$  no lo cumple), luego será de la forma  $m = m_0 + 1$  y así se cumplirá que

$$\frac{m_0}{n}\alpha \leq \beta < \frac{m}{n}\alpha = \frac{m_0}{n}\alpha + \frac{1}{n}\alpha < \beta + (\gamma - \beta) = \gamma,$$

luego  $r = m/n$  cumple lo requerido. ■

## 2.2 Los números reales

En la sección anterior, con objeto de “poner en escena” a los números negativos, hemos transformado el problema clásico de cómo medir una longitud en términos de una unidad de medida (que sólo involucra cantidades positivas) en el problema “más moderno” de cómo asignar una coordenada a cada punto de una recta.

Al analizar el primero, habíamos llegado a la conclusión (que es la base de la teoría de las magnitudes de Eudoxo y Euclides) de que determinar la “razón” de una longitud  $\beta$  con respecto a una unidad de medida  $\alpha$  equivale a dividir los números racionales positivos en dos clases  $A$  y  $B$ , de modo que en la primera están los que cumplen  $r\alpha < \beta$  y en la segunda los que cumplen  $\beta \leq r\alpha$ . En términos de rectas graduadas, podemos decir lo siguiente:

A la hora de determinar la posición de un punto  $P$  en una recta graduada en términos de la graduación, los números racionales (tanto positivos como negativos) quedan divididos en dos clases:

A. Los números  $r$  tales que  $P_r < P$ .

B. Los números  $r$  tales que  $P \leq P_r$ .

Equivalentemente,  $P$  divide a la recta en dos semirrectas, y en la clase  $A$  están los números racionales tales que  $P_r$  está en una de las semirrectas, y en la clase  $B$  los que tienen  $P_r$  en la semirrecta opuesta.

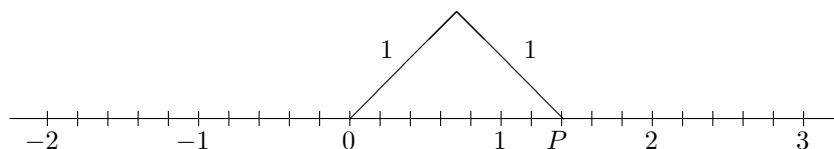
Es claro que si  $r < s$  y  $s$  está en la clase  $A$ , entonces  $r$  también está en la clase  $A$ , por lo que cualquier número de la clase  $A$  es menor que cualquier número de la clase  $B$ .

Así pues, tenemos  $\mathbb{Q}$  dividido en “dos mitades”  $A$  y  $B$ , y esta partición de  $\mathbb{Q}$  determina unívocamente la posición de  $P$  en la recta, pues  $P$  es el único punto que cumple a la vez que  $P_r < P$  para todo  $r$  de la clase  $A$  y que  $P \leq P_r$  para todo  $r$  de la clase  $B$ .

En efecto, si hubiera dos, digamos  $P < P'$ , por el teorema 2.2 habría un número racional  $r$  tal que  $P < P_r < P'$ , con lo que  $r$  debería estar en  $A$  por la propiedad de  $P'$  y en  $B$  por la propiedad de  $P$ , y tenemos una contradicción.

Si  $P = P_s$ , entonces el número racional  $s$  es claramente el mínimo de  $B$  y, por consiguiente, es mayor que todos los elementos de  $A$ . Podemos expresar esto diciendo que  $s$  está “entre  $A$  y  $B$ ”. Y el problema al que nos estamos enfrentando es que, en general, no tiene por qué haber ningún número racional entre  $A$  y  $B$ .

Consideremos el caso “clásico” de la raíz cuadrada de 2, para lo cual consideremos el triángulo rectángulo con catetos de longitud 1 que muestra la figura:



El teorema de Pitágoras implica que si el vértice del triángulo que hemos marcado como  $P$  (situado entre  $P_{7/5}$  y  $P_{8/5}$ , más cerca del primero que del segundo) fuera de la forma  $P_r$ , para cierto número racional  $r$ , éste tendría que cumplir  $r^2 = 2$ , pero es fácil ver que no existen números racionales con esta propiedad (véase el final de la sección 2.1 de [ITAI]). Más precisamente, no es difícil probar que, en este caso, las clases  $A$  y  $B$  determinadas por  $P$  son

$$A = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \leq 0 \text{ o } r^2 < 2\}, \quad B = \{r \in \mathbb{Q} \mid r > 0 \text{ y } r^2 > 2\},$$

pero no hay ningún número racional  $\sqrt{2}$  que sea mayor que todos los números de  $A$  y menor que todos los números de  $B$ . Podemos expresar esto diciendo que  $\mathbb{Q}$  tiene un “agujero microscópico” entre  $A$  y  $B$ . Tenemos dos partes de  $\mathbb{Q}$  “claramente separadas” (todos los números de  $A$  están por debajo de todos los números de  $B$ ) pero no hay ningún número que marque el final de  $A$  y el principio de  $B$ , mientras que el número que “debería” describir la posición de  $P$  en la recta graduada “debería” ser un número situado justo en esa posición.

La conclusión a la que llegamos es que, para estar en condiciones de asignar una coordenada a cada punto  $P$  de una recta graduada, necesitamos un cuerpo ordenado  $\mathbb{R}$  (a cuyos elementos llamaremos *números reales*<sup>1</sup>) que contenga a  $\mathbb{Q}$  y que cumpla además la propiedad siguiente:

*Si dividimos la totalidad de los números reales en dos conjuntos no vacíos  $A$  y  $B$  de modo que cada elemento de  $A$  es menor que cada elemento de  $B$ , entonces existe un número real que, o bien es el máximo de los elementos de  $A$ , o bien es el mínimo de los elementos de  $B$  (según si está en  $A$  o en  $B$ ).*

Esta propiedad se conoce como *completitud*, de modo que lo que estamos diciendo es que necesitamos un cuerpo ordenado completo.

Pero sucede que sólo existe un cuerpo ordenado completo, por lo que al decir que  $\mathbb{R}$  es un cuerpo ordenado completo ya estamos determinando exactamente qué son los números reales. Remitimos al lector a la sección 1.5 de [ITAI] para familiarizarse con sus propiedades básicas si es que no está ya familiarizado con ellas. El resumen es que los números reales están determinados por expresiones decimales posiblemente infinitas, como

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096980785696718753769\dots$$

Un número real no es ni más ni menos que una expresión de este estilo (tal vez con un signo negativo delante). Además, los números reales son un cuerpo arquimediano, es decir, que cumple la versión “abstracta” de la propiedad geométrica (\*), lo cual a su vez implica la versión abstracta de (\*\*), es decir, que entre dos números reales hay siempre un número racional. Esto a su vez hace que las operaciones entre números reales estén completamente determinadas por las operaciones correspondientes entre números racionales. Ahora es fácil probar:

<sup>1</sup>El calificativo de “real” no tiene una interpretación en este contexto, sino que se introdujo posteriormente para distinguir los números reales de los “imaginarios”, que forman parte de un cuerpo aún mayor que el de los números reales, el cuerpo  $\mathbb{C}$  de los números complejos.

**Teorema 2.5** *Para cada punto  $P$  en una recta graduada, existe un único número real  $\alpha_P$  que cumple que si  $r$  es un número racional, entonces  $P_r < P$  si y sólo si  $r < \alpha_P$ . Más en general, se cumple*

$$P_r < P, \quad P_r = P, \quad P_r > P \quad \text{si y sólo si} \quad r < \alpha_P, \quad r = \alpha_P, \quad r > \alpha_P,$$

*respectivamente. Más aún,  $P < Q$  si y sólo si  $\alpha_P < \alpha_Q$ .*

DEMOSTRACIÓN: Podemos modificar las definiciones de las clases  $A$  y  $B$  para que contengan entre ambas a todos los números reales y no sólo a los racionales. Concretamente, consideramos las clases de números reales:

- A. Los números reales  $\alpha$  tales que existe un número racional  $r$  que cumpla  $\alpha \leq r$  y  $P_r < P$ .
- B. Los números reales  $\alpha$  tales que  $\alpha > r$  para todo número racional  $r$  que cumple  $P_r < P$ .

Es obvio que estas clases contienen a las clases respectivas de números racionales que teníamos definidas, pero ahora todo número real está en una de ellas y es claro que todo número real menor o igual que un elemento de  $A$  está en  $A$ , por lo que cada elemento de  $A$  es menor que cada elemento de  $B$ . Ahora podemos aplicar la completitud de  $\mathbb{R}$  para concluir que existe un número real  $\alpha_P$  que es el máximo de  $A$  o bien el mínimo de  $B$ .

Veamos que cumple lo requerido. Si  $P_r < P$ , entonces, por el teorema 2.2 existe un número racional  $s$  tal que  $P_r < P_s < P$ , de donde se sigue que  $r < s$  y  $s \in A$ , luego  $r < s \leq \alpha_P$ .

Recíprocamente, si  $P \leq P_r$ , entonces  $r \in B$ , pues si fuera  $r \in A$  existiría un número racional  $s$  tal que  $r \leq s$  y  $P_s < P$ , luego  $P_r \leq P_s < P$ , en contradicción con lo supuesto. Por lo tanto,  $\alpha_P \leq r$ .

Se cumple que  $\alpha_P$  es único, pues si  $\alpha'_P$  cumpliera lo mismo, podemos suponer que  $\alpha_P < \alpha'_P$ , y existiría un número racional entre ambos,  $\alpha_P < r < \alpha'_P$ , pero entonces debería ser  $P \leq P_r$  y  $P_r < P$ , con lo que tenemos una contradicción.

Si  $P_r > P$ , podemos tomar  $s$  tal que  $P_r > P_s > P$ . Por la parte ya probada, tiene que ser  $\alpha_P \leq s < r$ . Recíprocamente, si  $\alpha_P < r$ , podemos tomar un número racional  $\alpha_P < s < r$ , con lo que, por la parte ya probada,  $P \leq P_s < P_r$ .

Si  $P = P_r$ , es obvio que  $r$  cumple la propiedad requerida, luego por la unicidad tiene que ser  $\alpha_P = r$ .

Por último, si tenemos dos puntos  $P < Q$ , podemos tomar un número racional tal que  $P < P_r < Q$ , y entonces  $\alpha_P < r < \alpha_Q$ . Recíprocamente, si  $\alpha_P < \alpha_Q$ , podemos tomar un número racional tal que  $\alpha_P < r < \alpha_Q$ , y entonces  $P < P_r < Q$ . ■

En otras palabras, ahora tenemos asignada una coordenada real  $\alpha_P$  a cada punto  $P$  de una recta graduada, de modo que si  $P = P_r$ , su coordenada es precisamente  $r$ . Además, la ordenación de los números reales se corresponde con la ordenación de los puntos de la recta.

En principio, ya hemos resuelto el problema que nos habíamos planteado: extender el cuerpo  $\mathbb{Q}$  de los números racionales para asignar coordenadas a todos los puntos de una recta, pero con ello se nos ha planteado el problema recíproco: ¿podemos asegurar que todo número real es la coordenada de un punto de la recta?

La respuesta es afirmativa si aceptamos la versión geométrica de la completitud de  $\mathbb{R}$ :

**Principio de continuidad** *Si dividimos los puntos de una recta orientada en dos conjuntos no vacíos  $A$  y  $B$  de modo que cada punto de  $A$  es menor que cada punto de  $B$ , entonces existe un punto  $P$  que, o bien es el máximo de los elementos de  $A$ , o bien es el mínimo de los elementos de  $B$  (según si está en  $A$  o en  $B$ ). Equivalentemente,  $A$  y  $B$  tienen que ser las semirrectas determinadas por un punto  $P$  de la recta.*

Enseguida discutiremos el contenido geométrico de este principio, pero en primer lugar veamos que zanja definitivamente el problema de la correspondencia entre los números reales y los puntos de una recta:

**Teorema 2.6** *Dada una recta graduada, la asignación  $P \mapsto \alpha_P$  hace corresponder biunívocamente los puntos de la recta con los números reales.*

DEMOSTRACIÓN: Sólo falta demostrar que todo número real  $\alpha$  es de la forma  $\alpha_P$ , para un cierto punto  $P$  de la recta graduada. En efecto, podemos dividir la recta en dos clases:

- A. Los puntos  $P$  tales que  $\alpha_P < \alpha$ .
- B. Los puntos  $P$  tales que  $\alpha \leq \alpha_P$ .

Notemos que hay puntos de ambos tipos, pues existen números racionales  $r < \alpha < s$ , y entonces  $P_r$  está en  $A$  y  $P_s$  está en  $B$ . Es claro que esta partición de la recta cumple los requisitos del principio de completitud, luego existe un punto  $P$  que es el máximo de  $A$  o bien el mínimo de  $B$ .

Si fuera  $\alpha_P < \alpha$ , podríamos tomar un número racional  $r$  tal que  $\alpha_P < r < \alpha$ , con lo que  $P < P_r$  y así  $P$  y  $P_r$  estarían ambos en  $A$ , pero  $P$  no sería el máximo, lo cual es imposible. Si, por el contrario,  $\alpha < \alpha_P$ , tomamos  $\alpha < r < \alpha_P$  y entonces  $P_r < P$  y ambos están en  $B$ , con lo que  $P$  no es el mínimo y de nuevo tenemos una contradicción. Así pues, tiene que ser  $\alpha_P = \alpha$ . ■

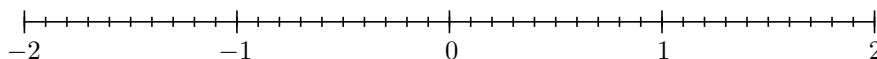
El resumen de lo que hemos probado es lo siguiente:

1. No siempre es posible determinar la posición de un punto  $P$  en una recta graduada mediante un número racional.
2. En general es necesario considerar el conjunto  $A$  de todos los números racionales que cumplen  $P_r < P$  (y también, si se quiere, el conjunto  $B$  de los que cumplen lo contrario, pero en realidad  $B$  está determinado por  $A$ , pues es simplemente el conjunto de los números racionales que no están en  $A$ ).

3. Sin embargo, los conjuntos  $A$  y  $B$  están determinados por un único número real  $\alpha_P$ , que es el único número real situado entre ambos, es decir, el único que cumple que los elementos de  $A$  son los números racionales  $r < \alpha_P$  y los elementos de  $B$  los números racionales  $r \geq \alpha_P$ .
4. En conclusión, el número real  $\alpha_P$  determina completamente la posición del punto  $P$  en una recta graduada.

De este modo, el cuerpo  $\mathbb{R}$  de los números reales puede verse como una “recta abstracta”, que se puede “materializar” en cualquier recta sin más que graduarla fijando en ella dos puntos  $P_0$  y  $P_1$ . Con esto cada punto de la recta puede identificarse con un único número real.

Así, a partir de ahora, cuando representemos así una recta graduada:



deberemos recordar que, aunque sólo “marquemos” en ella unos pocos números, en realidad todos los números reales tienen un lugar asignado en ella.

**El principio de continuidad** Pasemos a examinar con más detalle el contenido geométrico del principio de continuidad. Hasta ahora hemos aceptado sin discusión alguna cualquier afirmación geométrica que pueda considerarse como “intuitivamente evidente”. Por poner un par de ejemplos:

*Si una recta  $r$  pasa por un punto  $P$  interior a una circunferencia  $c$  de centro  $O$  (es decir, tal que  $\overline{OP}$  sea menor que el radio de  $c$ ), entonces  $r$  corta a  $c$  exactamente en dos puntos.*

*Por un punto exterior a una recta pasa una única paralela.*

¿Podemos considerar el principio de continuidad como un hecho evidente como los dos anteriores y que, por lo tanto, no necesita mayor discusión? La respuesta<sup>2</sup> es que sí, aunque no exactamente en el mismo sentido. Los dos ejemplos que hemos puesto corresponden a afirmaciones cuya negación es intuitivamente inconcebible: no es posible imaginar una recta que pase por un punto interior de una circunferencia sin que la corte en dos puntos, al igual que no es posible imaginar dos rectas paralelas a una tercera que se corten en un punto. Por eso podemos decir que —siempre que entendamos por “punto”, “recta”, “circunferencia” etc., lo que intuitivamente entendemos como tales—, esas afirmaciones son incuestionablemente verdaderas *a priori*.

En cambio, la situación que plantea el principio de continuidad es la posibilidad de tener una recta dividida en dos “cuasisemirrectas” opuestas, pero que podrían no tener origen. Eso supondría que la recta tendría un “agujero

<sup>2</sup>En este punto estamos entrando en una cuestión de filosofía de la matemática, por lo que posiblemente habrá disparidad de opiniones, no sólo entre los filósofos, sino también entre los matemáticos que saben de lo que hablan, de modo que el lector deberá analizar críticamente lo que sigue y juzgar por sí mismo si comparte nuestro punto de vista.



microscópico”, un agujero de grosor nulo, pero que no dejaría de ser un agujero en el sentido de que “faltaría un punto” en el lugar donde tendría que estar el origen común de ambas “semirrectas”. Ahora bien, los “agujeros microscópicos” no se ven, por lo que nadie puede decir con fundamento “veo claramente que las rectas no tienen agujeros microscópicos”, del mismo modo que nadie puede decir “veo claramente que esta recta tiene aquí un agujero microscópico”.

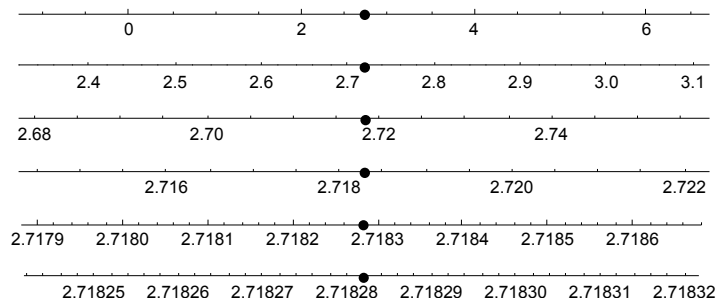
En determinadas circunstancias, disponemos de argumentos geométricos que nos garantizan que determinados “huecos microscópicos” tienen que estar ocupados por un punto, como es el caso de  $\sqrt{2}$  que ya hemos discutido, pero consideremos un número real famoso que, no obstante, no tiene conexión alguna con la geometría elemental, el número de Euler:

$$e = 2.7182818284590452353602874713526624977572470936999 \dots$$

¿Cómo sabemos que hay un punto en la recta con coordenada  $e$ ? ¿Quién puede decir que “ve” que existe o que no existe tal punto?

La respuesta —siempre a nuestro juicio— es la siguiente:

Un punto no es más que una posición en el plano (o, si nos limitamos a considerar los puntos de una recta, no es más que una posición en la recta). Cuando afirmamos que, efectivamente, existe un punto en toda recta graduada de coordenada  $e$ , lo que queremos decir es que podemos responder con absoluta precisión a la pregunta de dónde está ese punto. Así, en la figura siguiente vemos varias ampliaciones sucesivas de una recta graduada, y en todas ellas hemos marcado la posición que ocupa el número  $e$ .



El hecho de que siempre podamos señalar, con cualquier grado de precisión que se requiera, en qué punto de la recta se encuentra el número  $e$  es tanto como afirmar que existe el punto ocupado por el número  $e$ . Preguntarse si podría no existir es lo mismo que preguntarse si podría no existir el número natural 7, de modo que entre el 6 y el 8 hubiera un “hueco” y que cuando hablamos del 7 en realidad no estuviéramos hablando de nada. Igual que el 7 existe —como objeto matemático ideal— simplemente porque podemos usarlo para contar, también podemos afirmar que el punto de coordenada  $e$  existe porque podemos señalar su posición en cualquier recta. No es cuestión de si uno “ve que existe o ve que falta”, del mismo modo que la existencia del 7 no depende de que uno “vea” o “no vea” el 7.

Es verdad que buena parte de la geometría euclídea sigue siendo válida si consideramos rectas “porosas” que no contengan más que, por ejemplo, puntos de coordenadas algebraicas, pero, si trabajamos con tales rectas, simplemente estamos renunciando a considerar los puntos que no queremos considerar, lo cual no quita para que “estén ahí a nuestra disposición” para cuando queramos usarlos. En este sentido, podríamos considerar que el principio de continuidad es, no ya una afirmación geométrica intuitivamente evidente, sino casi una afirmación analítica, es decir una afirmación que es cierta por el mero significado de sus términos. ■

Veamos otro uso de la completitud de  $\mathbb{R}$ :

**Teorema 2.7** *Para cada circunferencia graduada, existe un único número real  $\pi$  tal que los puntos  $P_r$  están definidos exactamente para los números racionales que cumplen  $0 < r < 2\pi$ .*

DEMOSTRACIÓN: Podemos dividir los números reales en dos clases:

- A. Los números  $\alpha$  tales que existe un número racional  $r > 0$  tal que  $P_r$  está definido y  $\alpha \leq r$ .
- B. Los números  $\alpha$  que no cumplen lo anterior.

Notemos que si  $r > 0$  es un número racional, entonces  $r$  está en  $A$  si  $P_r$  está definido y está en  $B$  en caso contrario. Además, todo número real menor o igual que un elemento de  $A$  está en  $A$ , por lo que cada elemento de  $A$  es menor que cada elemento de  $B$ , y podemos aplicar la completitud de  $\mathbb{R}$ , que nos da un número real  $\mu$  que es el máximo de  $A$  o bien el mínimo de  $B$ . Llamemos  $\pi = \mu/2$ , de modo que  $\mu = 2\pi$ .

Si  $r > 0$  cumple que  $P_r$  está definido, por 2.4, podemos tomar un número racional  $s$  tal que  $P_r < P_s$ , con lo que  $s$  está en  $A$ , luego  $r < s \leq 2\pi$ . Recíprocamente, si  $0 < r < 2\pi$  es un número racional, necesariamente  $r$  está en  $A$ , pues si estuviera en  $B$  el número  $2\pi$  estaría en  $B$ , pero no sería su mínimo. Por lo tanto, existe un  $s$  tal que  $r \leq s$  y  $P_s$  está definido, luego  $P_r$  también está definido.

Sólo falta probar que  $\pi$  es único, pero si  $\pi'$  cumpliera lo mismo y, por ejemplo,  $\pi < \pi'$ , podríamos tomar un número racional  $2\pi < r < 2\pi'$ , y entonces  $P_r$  tendría que estar definido por la propiedad de  $\pi'$  y no tendría que estarlo por la propiedad de  $\pi$ . ■

Por ejemplo, si graduamos una circunferencia tomando como unidad de amplitudes el ángulo recto, entonces  $\pi = 2$ , y si tomamos como unidad el grado sexagesimal, entonces  $\pi = 180$ , pero si tomamos una amplitud arbitraria, el número  $\pi$  puede ser irracional.

Ahora podemos probar el teorema análogo a 2.5 y 2.6:

**Teorema 2.8** *Consideremos una circunferencia graduada  $c$  y sea  $\pi > 0$  el número real dado por el teorema anterior. Para cada punto  $P$  en  $c$ , existe un único número real  $0 \leq \alpha_P < 2\pi$  que cumple que si  $r$  es un número racional, entonces  $P_r < P$  si y sólo si  $r < \alpha_P$ .*

Más en general, se cumple

$$P_r < P, \quad P_r = P, \quad P_r > P \quad \text{si y sólo si} \quad r < \alpha_P, \quad r = \alpha_P, \quad r > \alpha_P,$$

respectivamente. Más aún,  $P < Q$  si y sólo si  $\alpha_P < \alpha_Q$ .

La asignación  $P \mapsto \alpha_P$  hace corresponder biunívocamente los puntos de la circunferencia con los números reales  $0 \leq \alpha < 2\pi$ .

DEMOSTRACIÓN: Podemos dividir los números reales en dos clases:

- A. Los números  $\alpha$  tales que existe un número racional  $0 < r < 2\pi$  de modo que  $\alpha \leq r$  y  $P_r \leq P$ .
- B. Los números que no están en A.

Una vez más es claro que podemos aplicar la completitud de  $\mathbb{R}$  para concluir que existe un número  $\alpha_P$  que es el máximo de A o bien el mínimo de B.

Como A contiene obviamente al 0 y a todos los números negativos, es claro que  $0 \leq \alpha_P$ . Por otro lado, tomando un número racional  $s$  tal que  $P < P_s$ , vemos que  $\alpha_P < s < 2\pi$ .

Veamos que  $\alpha_P$  cumple lo requerido. Si  $P_r < P$ , por 2.4 existe un número racional  $s$  tal que  $P_r < P_s < P$ , de donde se sigue que  $r < s$  y  $s \in A$ , luego  $r < s \leq \alpha_P$ .

Recíprocamente, si  $r < \alpha_P$ , podemos tomar un número racional  $r < s < \alpha_P$ , y necesariamente  $s$  está en A, luego existe otro número racional  $t$  tal que  $s \leq t$  y  $P_t \leq P$ . En total,  $P_r < P_s \leq P_t \leq P$ .

Se cumple que  $\alpha_P$  es único, pues si  $\alpha'_P$  cumpliera lo mismo, podemos suponer que  $\alpha_P < \alpha'_P$ , y existiría un número racional entre ambos,  $\alpha_P < r < \alpha'_P$ , pero entonces debería ser  $P \leq P_r$  y  $P_r < P$ , con lo que tenemos una contradicción.

Si  $P_r > P$ , podemos tomar  $s$  tal que  $P_r > P_s > P$ . Por la parte ya probada, tiene que ser  $\alpha_P \leq s < r$ . Recíprocamente, si  $\alpha_P < r$ , podemos tomar un número racional  $\alpha_P < s < r$ , con lo que, por la parte ya probada,  $P \leq P_s < P_r$ .

Si  $P = P_r$ , es obvio que  $r$  cumple la propiedad requerida, luego por la unicidad tiene que ser  $\alpha_P = r$ .

Si tenemos dos puntos  $P < Q$ , podemos tomar un número racional tal que  $P < P_r < Q$ , y entonces  $\alpha_P < r < \alpha_Q$ . Recíprocamente, si  $\alpha_P < \alpha_Q$ , podemos tomar un número racional tal que  $\alpha_P < r < \alpha_Q$ , y entonces  $P < P_r < Q$ .

Ahora sólo falta probar que si  $0 \leq \alpha < 2\pi$  es un número real arbitrario, existe un punto  $P$  en la circunferencia graduada tal que  $\alpha_P = \alpha$ . Podemos suponer que  $\alpha > 0$ , pues ciertamente el punto  $P_0$  cumple  $\alpha_{P_0} = 0$ .

Podemos dividir los puntos de la circunferencia en dos clases:

- A. Los puntos  $P$  tales que  $\alpha_P < \alpha$ .
- B. Los puntos  $P$  tales que  $\alpha \leq \alpha_P$ .

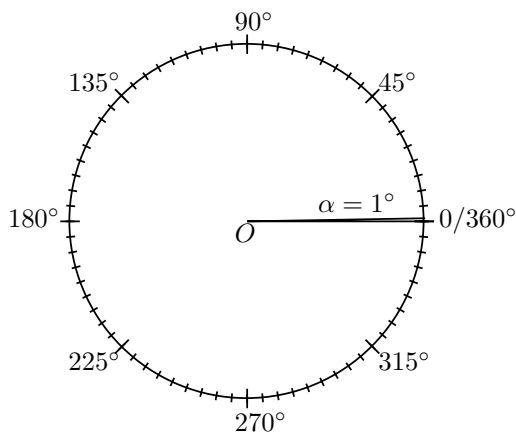
Notemos que hay puntos de ambas clases, porque podemos tomar números racionales  $0 < r < \alpha < s < 2\pi$ , y entonces  $P_r$  está en  $A$  y  $P_s$  está en  $B$ . También es claro que si  $Q < P$  y  $P$  está en  $A$ , lo mismo le sucede a  $Q$ , por lo que tenemos la circunferencia partida en dos clases  $A$  y  $B$ , de modo que cada punto de  $A$  es anterior a cada punto de  $B$ .

Observemos además que no puede haber dos puntos  $P < Q$  en la circunferencia situados entre  $A$  y  $B$ , es decir, que sean mayores o iguales que todos los puntos de  $A$  y menores o iguales que todos los puntos de  $B$ , pues entre ambos tendría que haber un tercer punto que no estaría ni en  $A$  ni en  $B$ .

Y si existe un punto  $P$  situado entre  $A$  y  $B$ , entonces  $\alpha_P = \alpha$ , pues si fuera  $\alpha_P < \alpha$ , podríamos tomar un número racional tal que  $\alpha_P < r < \alpha$ , y entonces  $P < P_r$  con  $P_r$  en  $A$ , en contradicción con lo supuesto sobre  $P$ , y si fuera  $\alpha < \alpha_P$ , entonces un número racional  $\alpha < s < \alpha_P$  haría que  $P_s < P$  con  $P_s$  en  $B$ , también en contra de lo supuesto.

Por lo tanto, el teorema queda probado si admitimos que existe un punto  $P$  situado entre  $A$  y  $B$ , pero esto —que no es sino la versión para circunferencias del principio de continuidad— es cierto por el mismo argumento con el que hemos justificado el principio para rectas: los conjuntos  $A$  y  $B$  determinan ciertamente una posición en la circunferencia, luego decir que hay un punto en dicha posición es tan obvio como decir que hay un número natural para contar cualquier conjunto finito de cosas.<sup>3</sup> ■

Así pues, a partir de aquí sabemos que en una circunferencia graduada podemos situar todos los números reales  $0 \leq \alpha < 2\pi$ . Conviene considerar que  $2\pi$  se sitúa en el mismo punto que 0:



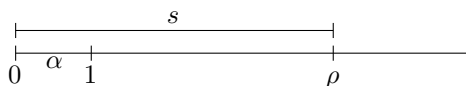
La figura muestra la circunferencia graduada sexagesimal. Es costumbre escribir  $90^\circ$  para representar  $90\alpha$ , donde  $\alpha$  es la longitud de un grado sexagesimal.

<sup>3</sup>Dicho de otro modo: el principio de continuidad para circunferencias no es ni más ni menos evidente que el principio de continuidad para rectas. Podríamos demostrar aquél a partir de éste usando la proyección estereográfica, pero sería demostrar un hecho a partir de otro que no es ni más ni menos evidente que lo que queremos demostrar.

## 2.3 Medida de segmentos y ángulos

**Medida de segmentos** Una vez hemos resuelto el problema de cómo incorporar los números reales a la graduación de una recta o de una circunferencia, podemos volver al contexto clásico con el problema de la medida de longitudes. Para medir un segmento sólo necesitamos poner sobre él una regla graduada (técnicamente, una recta graduada) situando uno de sus extremos en el 0 y viendo en qué punto está el otro. Con la notación que venimos empleando, este proceso cotidiano de arrimar una regla a un segmento para ver cuánto mide se describe así:

**Definición 2.9** La *medida* de un segmento  $s$  respecto de una unidad de longitud  $\alpha$  es el número real  $m_\alpha(s) = \rho > 0$  que cumple que, en una recta graduada que cumpla  $\overline{P_0P_1} = \alpha$ , el segmento  $\overline{P_0P_\rho}$  tiene la misma longitud que  $s$ .



Notemos la dependencia de la longitud  $\alpha$  que tomamos como unidad. No obtendremos el mismo resultado midiendo un segmento con una regla graduada en centímetros que con otra graduada en pulgadas.

Es claro que  $m_\alpha(s)$  depende únicamente de la longitud del segmento  $s$ , por lo que, si  $\beta$  es una longitud, podemos llamar  $m_\alpha(\beta)$  a la medida de cualquier segmento de longitud  $\beta$ .

Más aún, si dos longitudes cumplen  $\beta < \gamma$  y  $m_\alpha(\beta) = \rho$ ,  $m_\alpha(\gamma) = \sigma$ , al situarlas sobre una recta graduada con un extremo en  $P_0$ , los otros extremos cumplirán  $P_\rho < P_\sigma$ , de donde  $\rho < \sigma$ . En otras palabras:

*Dos longitudes cumplen  $\beta < \gamma$  si y sólo si  $m_\alpha(\beta) < m_\alpha(\gamma)$ . En particular, dos longitudes son iguales si y sólo si miden lo mismo respecto a la misma unidad de medida.*

Otro hecho obvio es que, para todo número real  $\rho$ , existe una (única) longitud  $\beta$  tal que  $m_\alpha(\beta) = \rho$  (basta tomar la longitud de  $\overline{P_0P_\rho}$ ).

Llamaremos  $\rho\alpha$  a la única longitud que cumple  $m_\alpha(\rho\alpha) = \rho$ .

Así hemos definido el producto de un número real positivo por una longitud. Conviene caracterizarlo en términos del producto de números racionales por longitudes que ya teníamos definido:

**Teorema 2.10** Si  $\alpha$  es una longitud y  $\rho > 0$  es un número real, entonces  $\rho\alpha$  es la única longitud que cumple  $r\alpha < \rho\alpha < s\alpha$  para todos los números racionales  $0 < r < \rho < s$ .

DEMOSTRACIÓN: Fijada una recta graduada con  $\overline{P_0P_1} = \alpha$  como unidad de longitud,  $\rho\alpha$  es la longitud del segmento  $\overline{P_0P_\rho}$ , pero si  $0 < r < \rho < s$ , entonces se cumple  $P_r < P_\rho < P_s$ , por lo que

$$r\alpha = \overline{P_0P_r} < \overline{P_0P_\rho} = \rho\alpha < \overline{P_0P_s} = s\alpha.$$

Recíprocamente, si una longitud  $\beta$  cumple esto y  $m_\alpha(\beta) = \sigma$ , entonces el punto  $P_\sigma$  cumple  $P_r < P_\sigma < P_s$ , luego también  $0 < r < \sigma < s$ , para todos los números racionales  $0 < r < \rho < s$ . Claramente, esto sólo es posible si  $\sigma = \rho$ , con lo que  $\beta = \rho\alpha$ . (Por ejemplo, si  $\rho < \sigma$ , un número racional  $\rho < s < \sigma$  no cumpliría las desigualdades requeridas.) ■

**Teorema 2.11** Dadas longitudes  $\alpha$  y  $\beta$  y números reales positivos  $\rho$  y  $\sigma$ :

1.  $\rho(\alpha + \beta) = \rho\alpha + \rho\beta$ ,  $(\rho + \sigma)\alpha = \rho\alpha + \sigma\alpha$ ,  $(\rho\sigma)\alpha = \rho(\sigma\alpha)$ ,  $1\alpha = \alpha$ ,
2. Si  $\rho\alpha = \rho\beta$  entonces  $\alpha = \beta$ ,
3. Si  $\rho\alpha = \sigma\alpha$ , entonces  $\rho = \sigma$ ,
4. Si  $\rho < \sigma$  entonces  $\rho\alpha < \sigma\alpha$ ,
5. Si  $\alpha < \beta$  entonces  $\rho\alpha < \rho\beta$ .

DEMOSTRACIÓN: 1) Tomemos números racionales  $0 < r < \rho < r'$ . Entonces

$$r\alpha < \rho\alpha < r'\alpha, \quad r\beta < \rho\beta < r'\beta,$$

luego, teniendo en cuenta que sabemos que los números racionales cumplen las propiedades que queremos probar para números reales,

$$r(\alpha + \beta) < \rho\alpha + \rho\beta < r'(\alpha + \beta),$$

pero  $\rho(\alpha + \beta)$  es la única longitud que cumple estas desigualdades, luego tiene que ser  $\rho(\alpha + \beta) = \rho\alpha + \rho\beta$ .

Sea  $\tau$  el único número real que cumple  $\rho\alpha + \sigma\alpha = \tau\alpha$ . Vamos a probar que  $\tau = \rho + \sigma$ . Para ello usamos que  $\rho + \sigma$  es el único número real  $\tau$  que cumple

$$r + s < \tau < r' + s',$$

para todos los números racionales  $r < \rho < r'$ ,  $s < \sigma < s'$ .

Así pues, basta observar que

$$r\alpha < \rho\alpha < r'\alpha, \quad s\alpha < \sigma\alpha < s'\alpha,$$

luego

$$(r + s)\alpha < \tau\alpha < (r' + s')\alpha,$$

luego en efecto,  $r + s < \tau < r' + s'$ , por lo que  $\tau = \rho + \sigma$ .

El mismo argumento vale para la tercera igualdad, esta vez tomando el número  $\tau$  que cumple  $\rho(\sigma\alpha) = \tau\alpha$ . Hay que probar que  $\tau = \rho\sigma$ , pero si tomamos números racionales  $r < \rho < r'$ ,  $s < \sigma < s'$ , entonces

$$s\alpha < \sigma\alpha < s'\alpha,$$

luego  $(rs)\alpha < \tau\alpha < (r's')\alpha$ , luego  $rs < \tau < r's'$ , y esto implica que  $\tau = \rho\sigma$ . La última propiedad es inmediata.

Los apartados 2) y 3) son consecuencias de 4) y 5), respectivamente. A su vez, para probar 4) basta tomar un número racional  $\rho < r < \sigma$ , con lo que  $\rho\alpha < r\alpha < \sigma\alpha$ . Finalmente, para probar 5) observamos que, si  $\beta = \sigma\alpha$ , entonces,  $1\alpha < \sigma\alpha$ , y por 4) tiene que ser  $1 < \sigma$ , luego  $\rho < \rho\sigma$  y, de nuevo por 4),  $\rho\alpha < \rho\sigma\alpha = \rho\beta$ . ■

Observemos que la segunda propiedad del primer apartado del teorema anterior se puede expresar en términos de medidas de longitudes como que

$$m_\alpha(\beta + \gamma) = m_\alpha(\beta) + m_\alpha(\gamma).$$

Esta propiedad, es decir, que la medida de la suma de longitudes es la suma de las medidas, caracteriza la medida de un segmento salvo la elección de la unidad de medida, en el sentido que precisa el teorema siguiente:

**Teorema 2.12** *Sea  $m$  un criterio que asigna a cada longitud  $\alpha$  un número real  $m(\alpha) > 0$  de modo que*

$$m(\alpha + \beta) = m(\alpha) + m(\beta).$$

*Entonces, para todo par de longitudes, se cumple que*

$$m(\beta) = m(\alpha) m_\alpha(\beta).$$

DEMOSTRACIÓN: La propiedad que suponemos en  $m$  implica que, para todo número natural  $p > 0$ , se cumpla que  $m(p\alpha) = pm(\alpha)$ . En particular,

$$m(\alpha) = m\left(q \frac{1}{q}\alpha\right) = q m\left(\frac{1}{q}\alpha\right),$$

luego

$$m\left(\frac{1}{q}\alpha\right) = \frac{1}{q}m(\alpha),$$

luego  $m((p/q)\alpha) = (p/q)m(\alpha)$  o, equivalentemente, para todo número racional  $r > 0$ , se cumple que  $m(r\alpha) = rm(\alpha)$ .

Por otro lado, si  $\alpha < \beta$ , se cumple que  $m(\alpha) < m(\beta)$ , pues la longitud  $\gamma = \beta - \alpha$  cumple  $\beta = \alpha + \gamma$ , luego  $m(\beta) = m(\alpha) + m(\gamma) > m(\alpha)$ .

Tomemos números racionales  $0 < r < m(\beta)/m(\alpha) < s$ . Esto implica que

$$0 < m(r\alpha) < m(\beta) < m(s\alpha),$$

luego  $r\alpha < \beta < s\alpha$ . Por el teorema 2.10 concluimos que  $m(\beta)/m(\alpha) = m_\alpha(\beta)$ . ■

En particular, si aplicamos el teorema anterior cuando  $m = m_\gamma$ , tenemos la fórmula:

$$m_\gamma(\beta) = m_\alpha(\beta) m_\gamma(\alpha),$$

que nos dice cómo cambiar de unidad de medida. Por ejemplo, la medida de un segmento en pulgadas ( $\gamma$ ) es su medida en centímetros ( $\alpha$ ) multiplicada por las pulgadas  $m_\gamma(\alpha)$  que mide un centímetro.

**Las proporciones de Euclides** Según hemos visto, la medida  $m_\alpha(\beta)$  expresa cómo es de grande  $\beta$  en relación con  $\alpha$ , y ahora podemos observar que lo que expresa es exactamente lo mismo que Euclides expresó en sus *Elementos* evitando la noción de número real.

Para ponerlo de manifiesto conviene expresar

$$\frac{\beta}{\alpha} = m_\alpha(\beta). \quad (2.1)$$

Así, un número racional cumple  $0 < r < \beta/\alpha$  (resp.  $r = \beta/\alpha$  o  $\beta/\alpha < r$ ) si y sólo si  $r\alpha < \beta$  (resp.  $r\alpha = \beta$ ,  $\beta < r\alpha$ ).

En efecto, si llamamos  $\rho = \beta/\alpha$ , entonces  $m_\alpha(\beta) = \rho$ , luego  $\beta = \rho\alpha$ , luego, por 2.10, la desigualdad  $0 < r < \beta/\alpha = \rho$  equivale a que  $r\alpha < \rho\alpha = \beta$ . Igualmente se razonan los otros casos.

Por lo tanto, la igualdad  $\beta/\alpha = \delta/\gamma$  equivale a la igualdad de proporciones que Euclides tomo como definición.

Notemos que la proporción  $\alpha/\beta$  es un número real, mientras que  $\alpha$  y  $\beta$  son longitudes, es decir, segmentos considerados con independencia de su posición en el plano, pero que, en sí mismos, no tienen asignados ningún número. Precisamente, lo que hacemos es asignar arbitrariamente a  $\alpha$  la medida 1 y ver cuánto mide entonces  $\beta$ .

Si queremos calcular una proporción  $\beta/\alpha$  manteniendo cualquier otra unidad de medida prefijada  $\gamma$ , el teorema 2.12 (véase la observación posterior) nos da que

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{m_\gamma(\beta)}{m_\gamma(\alpha)}, \quad (2.2)$$

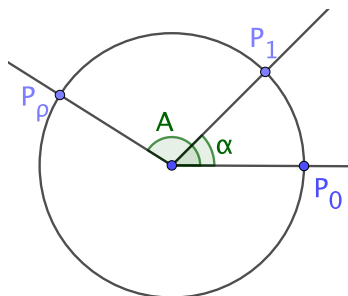
donde el segundo término sí que es un cociente de números reales, es decir, que la proporción entre dos segmentos es el cociente de las medidas de sus longitudes, respecto de cualquier unidad de medida. ■

Dado de dos longitudes son iguales si y sólo si tienen la misma medida respecto de una misma unidad de medida, cuando podamos presuponer una unidad de medida prefijada, no distinguiremos entre longitudes y medidas de longitudes, es decir, que cuando hablemos de la longitud de un segmento nos referiremos a la medida de su longitud, que es un número real positivo.

**Medida de ángulos** Todo lo que acabamos de probar para la medida de segmentos vale con cambios mínimos obvios para la medida de ángulos. La definición siguiente no es sino la descripción del proceso usual para medir un ángulo situando sobre él un círculo graduado con el 0 sobre uno de sus lados y mirar el valor que marca el otro lado:

**Definición 2.13** La *medida* de un ángulo  $A$  respecto de una unidad de amplitud  $\alpha$  es el número real  $m_\alpha(A) = \rho \geq 0$  que cumple que, en una circunferencia graduada de centro  $O$  que cumpla  $\widehat{P_0OP_1} = \alpha$ , el ángulo asociado al punto  $P_\rho$  tiene la misma amplitud que  $A$ .





Si  $\pi$  es el número dado por el teorema 2.7, la medida de cualquier ángulo es un número real  $0 \leq m_\alpha(A) < 2\pi$ . Ahora bien, con esta definición, al ángulo completo le corresponde el punto  $P_0$  igual que al ángulo nulo, y ambos tienen medida 0. Es preferible tratar aparte el ángulo completo y convenir que su medida es  $2\pi$ .

Con este último convenio se cumple que dos ángulos son iguales si y sólo si tienen la misma medida (respecto de una misma unidad de amplitudes). Más aún, se cumple  $A < B$  si y sólo si  $m_\alpha(A) < m_\alpha(B)$ .

Como en el caso de las longitudes, podemos definir la medida de una amplitud  $m_\alpha(\beta)$  como la medida de cualquier ángulo de amplitud  $\beta$ .

Como en el caso de las longitudes, también es obvio el hecho siguiente:

*Dos amplitudes cumplen  $\beta < \gamma$  si y sólo si  $m_\alpha(\beta) < m_\alpha(\gamma)$ . En particular, dos amplitudes son iguales si y sólo si miden lo mismo respecto a la misma unidad de medida.*

También es obvio que para todo número real  $0 \leq \rho \leq 2\pi$  existe una única amplitud  $\beta$  tal que  $m_\alpha(\beta) = \rho$ , entendiendo que la amplitud nula es la de medida 0 y la amplitud del ángulo completo es la de medida  $2\pi$ .

Llamaremos  $\rho\alpha$  a la única amplitud<sup>4</sup> que cumple  $m_\alpha(\rho\alpha) = \rho$ .

**Teorema 2.14** *Si  $\alpha$  es una amplitud y  $\rho > 0$  es un número real tal que  $\rho\alpha$  está definido, entonces  $\rho\alpha$  es la única amplitud que cumple  $r\alpha < \rho\alpha < s\alpha$  para todos los números racionales  $0 < r < \rho < s$  tales que  $s$  está definido.*

DEMOSTRACIÓN: Fijada una circunferencia graduada con  $\overline{P_0OP_1} = \alpha$  como unidad de longitud,  $\rho\alpha$  es la longitud del ángulo asociado a  $P_\rho$ . Si  $\rho$  es la medida  $2\pi$  del ángulo completo, entonces  $\rho\alpha$  es el ángulo completo y obviamente es el único que cumple  $r\alpha < \rho\alpha$  para todo número racional  $0 < r < \rho$  (y no hay ningún  $s$  que cumpla el enunciado).

<sup>4</sup>Aquí tenemos un inconveniente técnico, y es que sólo hemos definido circunferencias graduadas respecto a una unidad de amplitud menor que  $\pi$  (la amplitud de los ángulos llanos), por lo que  $\rho\alpha$  sólo lo tenemos definido cuando  $\alpha < \pi$ . Sin embargo, nada impide definir  $\rho\alpha$  para cualquier otra amplitud (si  $\rho$  es suficientemente pequeño). Una forma de hacerlo es observar que  $\alpha' = (1/4)\alpha < \pi$ , y podemos definir  $\rho\alpha = (4\rho)(1/4)\alpha$ .

Supongamos, pues, que  $\rho < 2\pi$ . Entonces, si  $0 < r < \rho < s < 2\pi$ , entonces se cumple  $P_r < P_\rho < P_s$ , por lo que, al considerar las amplitudes de los ángulos correspondientes,  $r\alpha < \rho\alpha < s\alpha$ .

Recíprocamente, si una amplitud  $\beta$  cumple esto y  $m_\alpha(\beta) = \sigma$ , entonces el punto  $P_\sigma$  cumple  $P_r < P_\sigma < P_s$ , luego también  $0 < r < \sigma < s$ , para todos los números racionales  $0 < r < \rho < s < 2\pi$ . Claramente, esto sólo es posible si  $\sigma = \rho$ , con lo que  $\beta = \rho\alpha$ , con lo que el teorema queda probado.<sup>5</sup> ■

La prueba del teorema siguiente es análoga a la del teorema 2.11, así que la dejamos a cargo del lector:

**Teorema 2.15** *Dadas amplitudes  $\alpha$  y  $\beta$  y números reales positivos  $\rho$  y  $\sigma$ , las propiedades siguientes se cumplen siempre que los productos implicados puedan calcularse:*

1.  $\rho(\alpha + \beta) = \rho\alpha + \rho\beta$ ,  $(\rho + \sigma)\alpha = \rho\alpha + \sigma\alpha$ ,  $(\rho\sigma)\alpha = \rho(\sigma\alpha)$ ,  $1\alpha = \alpha$ ,
2. Si  $\rho\alpha = \rho\beta$  entonces  $\alpha = \beta$ ,
3. Si  $\rho\alpha = \sigma\alpha$ , entonces  $\rho = \sigma$ ,
4. Si  $\rho < \sigma$  entonces  $\rho\alpha < \sigma\alpha$ ,
5. Si  $\alpha < \beta$  entonces  $\rho\alpha < \rho\beta$ .

En particular, la segunda igualdad del primer apartado equivale a que

$$m_\alpha(\beta + \gamma) = m_\alpha(\beta) + m_\alpha(\gamma).$$

Como en el caso de las longitudes, esta igualdad caracteriza la medida de amplitudes salvo por la elección de la unidad de medida:

**Teorema 2.16** *Sea  $m$  un criterio que asigna a cada amplitud  $\alpha$  un número real  $m(\alpha) > 0$  de modo que*

$$m(\alpha + \beta) = m(\alpha) + m(\beta).$$

*Entonces, para todo par de amplitudes, se cumple que*

$$m(\beta) = m(\alpha) m_\alpha(\beta).$$

DEMOSTRACIÓN: La propiedad que suponemos en  $m$  implica que, para todo número natural  $p > 0$  tal que  $p\alpha$  esté definida, se cumpla que  $m(p\alpha) = pm(\alpha)$ . En particular,

$$m(\alpha) = m\left(q \frac{1}{q}\alpha\right) = q m\left(\frac{1}{q}\alpha\right),$$

<sup>5</sup>La prueba supone que  $\alpha < \pi$ , pero en caso contrario, aplicándolo a  $\alpha' = (1/4)\alpha$ , obtenemos que  $\rho\alpha = (4\rho)\alpha'$  es la única longitud que cumple  $(r/4)\alpha < \rho\alpha < (s/4)\alpha$  para todos los números racionales  $r < 4\rho < s$ , lo cual equivale a la conclusión del enunciado para  $\alpha$ .

luego

$$m\left(\frac{1}{q}\alpha\right) = \frac{1}{q}m(\alpha).$$

A su vez, si la amplitud  $(p/q)\alpha$  está definida,  $m((p/q)\alpha) = (p/q)m(\alpha)$  o, equivalentemente, para todo número racional  $r > 0$  tal que la amplitud  $r\alpha$  esté definida, se cumple que  $m(r\alpha) = r m(\alpha)$ .

Por otro lado, si  $\alpha < \beta$ , se cumple que  $m(\alpha) < m(\beta)$ , pues la longitud  $\gamma = \beta - \alpha$  cumple  $\beta = \alpha + \gamma$ , luego  $m(\beta) = m(\alpha) + m(\gamma) > m(\alpha)$ .

Tomemos ahora un número racional  $0 < r < m(\beta)/m(\alpha)$ . Esto equivale a que  $m(r\alpha) < m(\beta)$ , y también a que  $r\alpha < \beta$  o a que  $r = m_\alpha(r\alpha) < m_\alpha(\beta)$ .

Por lo tanto, entre  $m(\beta)/m(\alpha)$  y  $m_\alpha(\beta)$  no hay números racionales, luego se trata del mismo número real. ■

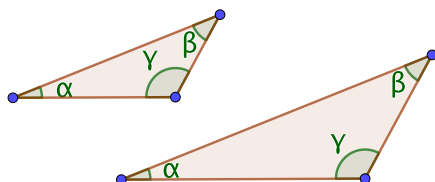
En particular, si aplicamos el teorema anterior a otra medida  $m_\gamma$ , tenemos que

$$m_\gamma(\beta) = m_\gamma(\alpha)m_\alpha(\beta),$$

que nos indica cómo cambiar de unidad de medida de amplitudes.

## 2.4 El teorema de Tales

Los criterios de igualdad de triángulos considerados en el teorema 1.23 muestran que si dos triángulos tienen iguales tres datos de los seis formados por las longitudes de sus tres lados y las amplitudes de sus tres ángulos, entonces son iguales, salvo en dos casos: la igualdad de dos lados y un ángulo distinto del comprendido entre ellos (en cuyo caso puede haber hasta dos triángulos desiguales con los mismos datos) y el caso de la igualdad de los tres ángulos.



La figura muestra dos triángulos con los ángulos iguales, y es evidente que no son iguales. En esta sección demostraremos que dos triángulos son iguales exactamente cuando sus lados son proporcionales. Esto tiene un nombre:

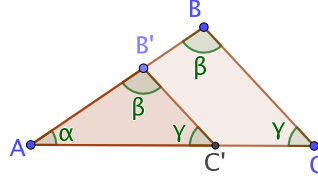
**Definición 2.17** Diremos que dos triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{A'B'C'}$  son *semejantes* si sus lados son proporcionales dos a dos, es decir, si<sup>6</sup>

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

<sup>6</sup>Los cocientes hay que entenderlos en el sentido de (2.1) o (2.2), es decir, como proporciones entre longitudes o, equivalentemente, como cocientes de las (medidas de las) longitudes de los lados respecto de cualquier unidad de longitud.

En estos términos, vamos a probar que dos triángulos son semejantes si y sólo si tienen sus ángulos iguales. Esto es esencialmente lo mismo que el teorema de Tales. Para probarlo conviene introducir la definición siguiente:

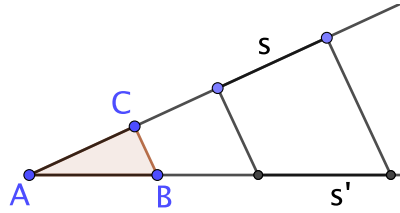
Dos triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{AB'C'}$  se encuentran en *posición de Tales* si están situados como muestra la figura, es decir, tienen un vértice  $A$  y el ángulo correspondiente en común y los lados opuestos  $\overline{BC}$  y  $\overline{B'C'}$  son paralelos:



Es claro que dos triángulos en posición de Tales tienen sus ángulos iguales pues, por ejemplo, el ángulo  $\hat{B}'$  es opuesto por el vértice al ángulo alterno interno a  $\hat{B}$ . Recíprocamente, si dos triángulos tienen sus ángulos iguales, al hacer transportar uno de ellos para que uno de sus ángulos pase a coincidir con el que tiene igual en el otro triángulo, ambos quedan en posición de Tales, pues si se tiene la situación de la figura y los ángulos marcados con la misma letra son iguales, las rectas  $BC$  y  $B'C'$  son paralelas (la semirrecta paralela a  $\overrightarrow{BC}$  que pasa por  $B'$  forma con  $\overrightarrow{B'A}$  el mismo ángulo  $\beta$  que  $\overrightarrow{B'C'}$ , luego tiene que ser  $\overrightarrow{B'C'}$ ).

**Teorema 2.18 (Teorema de Tales)** *Si dos triángulos están en posición de Tales, entonces son semejantes.*

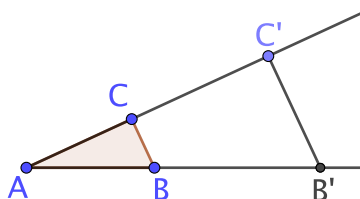
DEMOSTRACIÓN: Dado cualquier triángulo  $\widehat{ABC}$ , a cada segmento  $s$  situado en la semirrecta  $\overrightarrow{AC}$  le podemos asociar el segmento  $s'$  sobre la semirrecta  $\overrightarrow{AB}$  que se obtiene trazando las paralelas por sus extremos a la recta  $BC$ :



Por el teorema 1.31, la longitud de  $s'$  sólo depende de la longitud  $\alpha$  de  $s$ , luego podemos llamarla  $m(\alpha)$ . Si dos segmentos  $s$  y  $t$  comparten uno de sus extremos, es obvio que lo mismo sucede con  $s'$  y  $t'$ , de donde se sigue que  $m(\alpha + \beta) = m(\alpha) + m(\beta)$ . Por el teorema 2.12 tenemos que

$$m(\beta) = m(\alpha)m_{\alpha}(\beta).$$

Ahora consideramos otro triángulo  $\widehat{A'B'C'}$  en posición de Tales respecto de  $\widehat{ABC}$  con  $A = A'$  y aplicamos la fórmula precedente a  $\alpha = \overline{AC}$  y  $\beta = \overline{A'C'}$ :



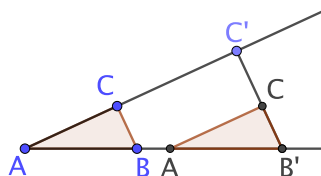
La conclusión es que

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} m_{\alpha}(\beta) = \overline{AB} \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}},$$

luego

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}.$$

Pero los dos triángulos pueden ponerse también en posición de Tales con  $B = B'$ :



y entonces obtenemos que

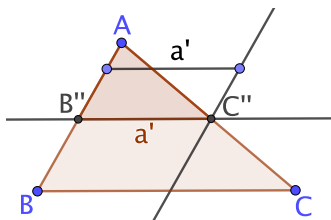
$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}},$$

con lo que los dos triángulos son semejantes. ■

Finalmente:

**Teorema 2.19** *Dos triángulos son semejantes si y sólo si tienen los ángulos iguales.*

DEMOSTRACIÓN: Si dos triángulos tienen los ángulos iguales, entonces pueden ponerse en posición de Tales, luego son semejantes. Recíprocamente, si dos triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{A'B'C'}$  son semejantes y  $a' = \overline{B'C'}$ , la figura muestra cómo construir un triángulo  $\widehat{AB''C''}$  en posición de Tales respecto de  $\widehat{ABC}$  de modo que  $\overline{B''C''} = \overline{BC}$ :

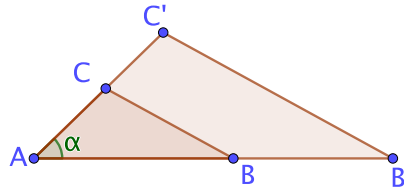


Así,  $\widehat{AB''C''}$  es semejante a  $\widehat{ABC}$ , que a su vez es semejante a  $\widehat{A'B'C'}$ , luego  $\widehat{AB''C''}$  es semejante a  $\widehat{A'B'C'}$ , pero además tienen un lado igual, luego de la definición de semejanza se deduce que tienen los tres lados iguales, luego son iguales. Así pues,  $\widehat{A'B'C'}$  es igual a otro triángulo en posición de Tales respecto de  $\widehat{ABC}$ , luego tienen los lados iguales. ■

También es útil la variante siguiente:

**Teorema 2.20** *Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales formando ángulos iguales.*

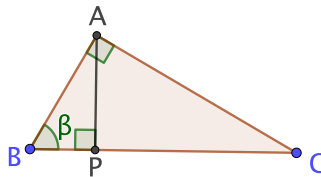
DEMOSTRACIÓN: No perdemos generalidad si suponemos que los ángulos iguales son, de hecho, coincidentes:



Si probamos que la recta  $BC$  es paralela a  $B'C'$ , los triángulos estarán en posición de Tales, luego serán semejantes. Ahora bien, la paralela a  $BC$  que pasa por  $B'$  forma un triángulo  $AB'C''$  en posición de Tales con  $\widehat{ABC}$ , luego  $\widehat{AB'C''}$  es semejante a  $\widehat{ABC}$  y, por consiguiente, también a  $\widehat{A'B'C'}$ , pero  $\widehat{AB'C''}$  y  $\widehat{A'B'C'}$  tienen el lado  $\overline{AB'}$  en común, luego tienen que tener todos los lados iguales y, por consiguiente, son iguales. Así pues,  $\widehat{A'B'C'}$  está en posición de Tales con  $\widehat{ABC}$  y ambos triángulos son semejantes. El recíproco es obvio. ■

Con esto podemos dar una prueba del teorema de Pitágoras que, al contrario de la que hemos dado en la introducción, no depende del concepto de área:

**Teorema 2.21 (Teorema de Pitágoras)** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*



DEMOSTRACIÓN: Dado un triángulo rectángulo  $\widehat{ABC}$  con ángulo recto  $\hat{A}$ , sea  $P$  el pie de la perpendicular a  $BC$  que pasa por  $A$ . Notemos que  $P$  no puede ser  $B$  ni  $C$ , pues entonces el triángulo tendría dos ángulos rectos. También es fácil ver que si  $P$  quedara fuera del lado el triángulo tendría un ángulo obtuso.

Los triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{PBA}$  tienen igual el ángulo  $\beta$  y además tienen un ángulo recto, luego tienen dos ángulos iguales y, por lo tanto, los tres, luego son semejantes. En particular

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}.$$

Razonando análogamente con  $\widehat{PAC}$  obtenemos que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}.$$

Por lo tanto:

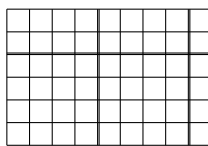
$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BCBP} + \overline{BCCP} = \overline{BC}(\overline{BP} + \overline{PC}) = \overline{BC}^2. \quad \blacksquare$$

## 2.5 Áreas

La palabra *geometría* significa “medida de la tierra” y, en efecto, uno de los problemas geométricos más antiguos es el de medir la superficie de un terreno. Del mismo modo que medir un segmento es esencialmente determinar “cuantas veces cabe en él” un segmento unitario, medir el área de una figura consiste en determinar “cuantas veces cabe en ella” un cuadrado de lado unitario. Consideremos el caso más simple:



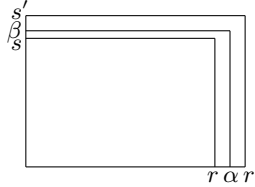
Si los lados de un rectángulo miden 2 y 3 unidades de longitud, respectivamente, es evidente que el rectángulo es 6 veces mayor que el cuadrado de lado unitario, pues literalmente contiene 6 copias del cuadrado unitario. Consideremos ahora un rectángulo cuyos lados midan  $9/4$  y  $3/2$ :



En este rectángulo no cabe un número exacto de cuadrados unitarios, pero cada cuadrado unitario puede dividirse en 16 cuadrados de lado  $1/4$ , y en el rectángulo caben exactamente  $9 \cdot 6 = 54$  de estos cuadrados, a los que es natural asignarles un área de  $1/16$ , por lo que el área total es de  $54/16 = (9/4) \cdot (3/2)$ .

Es fácil convencerse de que, en general, el área de un rectángulo cuyos lados tengan medidas racionales  $r$  y  $s$  “debe ser”  $rs$ , en el sentido de que si, por ejemplo, el resultado es  $54/16$ , eso significa que el rectángulo es 54 veces mayor que la dieciseisava parte del cuadrado unidad.

Por último, si las medidas de los lados de un rectángulo son números reales (positivos) arbitrarios  $\alpha$  y  $\beta$ , observamos que, para todos los números racionales  $0 < r < \alpha < r'$ ,  $0 < s < \beta < s'$  el rectángulo dado contiene uno de lados  $r$ ,  $s$  y está contenido en otro de lados  $r'$ ,  $s'$ :



Por lo tanto, el área  $A$  del rectángulo debe ser un número real que cumpla

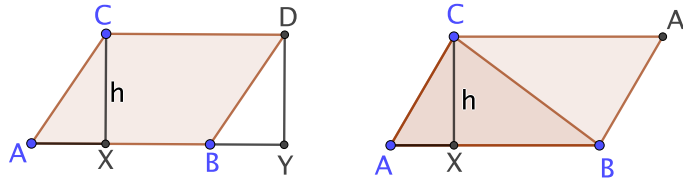
$$rs < A < r's'.$$

Ahora bien, en la sección 1.5 de [ITA1] se prueba que el único número real que cumple esto para todos los números racionales  $0 < r < \alpha < r'$ ,  $0 < s < \beta < s'$  es  $\alpha\beta$ . Por lo tanto:

*El área de un rectángulo es el producto de (la longitud de) su base por (la de) su altura.*

Con el cálculo del área de un rectángulo hemos explotado todas las ideas que hemos necesitado para determinar la longitud de un segmento, pero, mientras con ello dejábamos completamente resuelto el problema de definir lo que entendemos por medir longitudes, en el caso de las áreas no hemos hecho más que empezar, y necesitamos ideas nuevas.

Consideremos, por ejemplo, el caso de un paralelogramo como el que muestra la figura de la izquierda:



Observamos que  $\widehat{AXC} = \widehat{BYD}$ , porque tienen iguales los lados  $\overline{AC} = \overline{BD}$  y  $\overline{XC} = \overline{YD}$ , así como el ángulo que forman. Como consecuencia,  $\overline{AX} = \overline{BY}$ , luego  $\overline{AB} = \overline{XY}$ .

Ahora podemos argumentar que el área del paralelogramo será la misma que el área que la figura que resulta de quitarle el primer triángulo y añadirle el segundo, pero dicha figura es un rectángulo cuya área sabemos calcular. Si llamamos *base* de un paralelogramo a cualquiera de sus lados y *altura* (correspondiente a dicha base) al segmento perpendicular a la base que une ésta con un vértice del lado opuesto (el segmento  $h$  en la figura), vemos que el rectángulo que se forma tiene un lado de longitud igual a la base y otro igual a la altura. Por lo tanto:



*El área de un paralelogramo es el producto de su base [una cualquiera] por su altura [correspondiente].*

A su vez, dado un triángulo cualquiera, como el de la figura de la derecha, fijamos un lado cualquiera como *base* y llamamos *altura* (correspondiente a esa base) al segmento perpendicular a la base que la une con el vértice opuesto, entonces podemos formar un paralelogramo como muestra la figura, de modo que  $\widehat{ABC} = \widehat{A'CB}$ , porque los lados son iguales. Por lo tanto, el área del triángulo debe ser la mitad del área del paralelogramo, y así:

*El área de un triángulo es la mitad del producto de su base [una cualquiera] por su altura [correspondiente].*

Ahora bien, como ya hemos señalado en la introducción, el uso que estamos haciendo del concepto de área es problemático, en cuanto a que, a diferencia de lo que sucede con la medida de longitudes y amplitudes, no tenemos una definición general de lo que hay que entender por área de una figura plana independiente de los razonamientos concretos con los que justificamos que el área de una figura dada tiene que tener un cierto valor. Por ejemplo, en un triángulo podemos elegir tres bases, que en general tendrán longitudes distintas, y sus correspondientes tres alturas, también distintas. ¿Quién nos asegura que al calcular el producto de la una base por su altura y dividir entre 2 obtendremos siempre el mismo resultado? En este caso en concreto es fácil asegurarlo:

**Teorema 2.22** *En un triángulo  $\widehat{ABC}$ , el producto de una base por su altura correspondiente es el mismo para las tres elecciones posibles.*

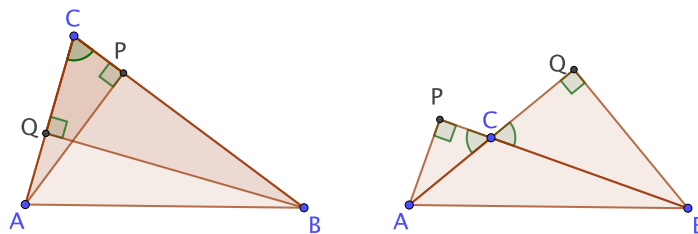
DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar, concretamente, que el resultado es el mismo tanto si tomamos como base  $\overline{BC}$  como si tomamos  $\overline{AC}$ .

En primer lugar observamos que si el ángulo  $\hat{C}$  es recto, entonces la altura correspondiente a  $\overline{BC}$  es  $\overline{AC}$  y viceversa, por lo que la conclusión es inmediata.

Si  $\hat{C}$  no es recto, llamamos  $P$  al pie de la altura correspondiente a  $\overline{BC}$  (es decir, el punto donde corta a la recta  $BC$ ) y  $Q$  al pie de la altura correspondiente a  $\overline{AC}$ . Ninguno de los dos es igual a  $C$ , pues en tal caso  $\hat{C}$  sería recto.

Si  $\hat{C}$  es agudo, entonces  $P$  está en la semirrecta  $\overrightarrow{CB}$  y  $Q$  está en la semirrecta  $\overrightarrow{CA}$ , por lo que los triángulos  $\widehat{CAP}$  y  $\widehat{CBQ}$  tienen el ángulo  $\hat{C}$  en común.

En cambio, si  $\hat{C}$  es obtuso, entonces  $P$  está en la semirrecta opuesta a  $\overrightarrow{CB}$  y  $Q$  está en la semirrecta opuesta a  $\overrightarrow{CA}$ , y los triángulos  $\widehat{CAP}$  y  $\widehat{CBQ}$  tienen ángulos en  $\hat{C}$  opuestos por el vértice, pero en ambos casos son iguales:

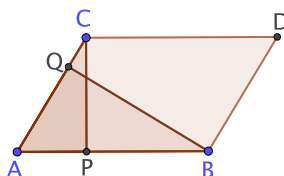


Como además ambos tienen un ángulo recto, concluimos que tienen sus tres ángulos iguales, luego son proporcionales. Por lo tanto:

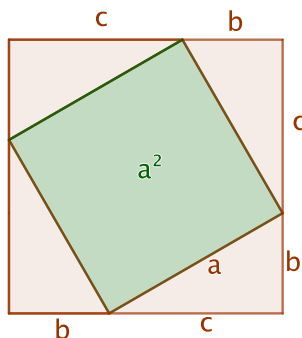
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}},$$

lo que equivale a que  $\overline{AP} \cdot \overline{BC} = \overline{BQ} \cdot \overline{AC}$ , es decir, a que el producto de una base por su altura correspondiente es el mismo en ambos casos. ■

**Ejercicio:** Probar que el área de un paralelogramo, calculada como base  $\times$  altura, no depende de la elección de la base y de la altura.



Sin embargo, aun teniendo esto en cuenta, no es obvio que, por ejemplo, en la demostración mediante áreas del teorema de Pitágoras que hemos dado en la introducción, el área del cuadrado mayor, que por definición es  $(b + c)^2$ , tenga que coincidir con la suma del área  $a^2$  del cuadrado de la hipotenusa más las áreas de los cuatro triángulos:



a menos que admitamos que cada figura tiene una magnitud intrínseca llamada área de manera que figuras iguales tienen áreas iguales y que se conserva en las subdivisiones.

Nuevamente, en el caso que acabamos de poner como ejemplo, podríamos probar mediante un argumento *ad hoc* que las dos formas de calcular el área del cuadrado mayor tienen que dar el mismo resultado, pero en su lugar, para una definición general del área de una figura plana “razonable” remitimos al lector a la definición [ITAn A.7] de la medida de Jordan en  $\mathbb{R}^2$ , que es un criterio que permite asignar un número real  $m(A)$  a cada elemento  $A$  de una familia suficientemente amplia de subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  que incluye a todas las figuras que vamos a considerar en este libro (en virtud de los teoremas [ITAn A.13]

e [ITAn A.15]) y de modo que si una figura se descompone en un número finito de figuras y éstas se reordenan sin solapamientos (más allá de solapar segmentos de área nula), la medida de la figura resultante es la misma (teorema [ITAn A.16]).

Esto justifica todas las manipulaciones que vamos a hacer en este libro para calcular áreas, pero la prueba de estos hechos no es inmediata. Para empezar, necesitamos justificar que el plano euclídeo puede identificarse con  $\mathbb{R}^2$  de modo análogo a como una recta puede identificarse con  $\mathbb{R}$  a través de una graduación. Nos ocupamos de ello en el apéndice A, donde mostramos la conexión entre la *geometría sintética* que estamos exponiendo aquí y la *geometría analítica* que permite expresar los distintos conceptos geométricos (rectas, segmentos, ángulos, etc.) en términos de coordenadas en  $\mathbb{R}^2$ . Los resultados del apéndice A son, pues, necesarios, para que los resultados de [ITAn] puedan interpretarse en nuestro contexto.



## Capítulo III

# Resultados básicos de la geometría euclídea

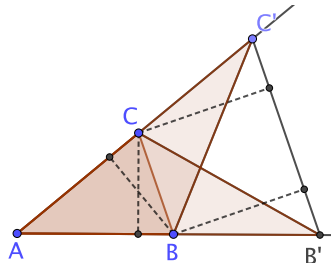
Tras el paréntesis técnico del capítulo anterior, ya tenemos a nuestra disposición el vocabulario básico de la geometría euclídea plana, y ahora lo enriqueceremos un poco con más conceptos y resultados relativos a áreas, polígonos, etc., hasta llegar a la trigonometría.

### 3.1 Cálculo de áreas

Para que el lector que haya decidido saltarse el capítulo anterior no eche nada en falta, será necesario que lea la introducción de la sección 2.4 y en particular la definición 2.17 de semejanza de triángulos y de lo que se entiende por posición de Tales, que no dependen del resto del capítulo. A continuación viene la demostración del teorema de Tales, para la que a continuación ofrecemos una alternativa basada en el concepto de área:

**Teorema 3.1 (Teorema de Tales)** *Si dos triángulos están en posición de Tales, entonces son semejantes.*

DEMOSTRACIÓN: Usamos la notación  $(ABC)$  para referirnos al área del triángulo  $\widehat{ABC}$ .



Observemos que

$$\frac{(ABC')}{(ABC)} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}, \quad \frac{(ACB')}{(ABC)} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}},$$

pues en ambos casos los triángulos cuyas áreas comparamos tienen la misma altura, luego sus áreas son proporcionales a sus bases.

Por otra parte,  $(BCB') = (BCC')$ , pues ambos triángulos tienen la misma base  $\overline{BC}$  y la misma altura. Por lo tanto, añadiendo a ambas el área  $(ABC)$  obtenemos que  $(ABC') = (ACB')$ . Por lo tanto,

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}.$$

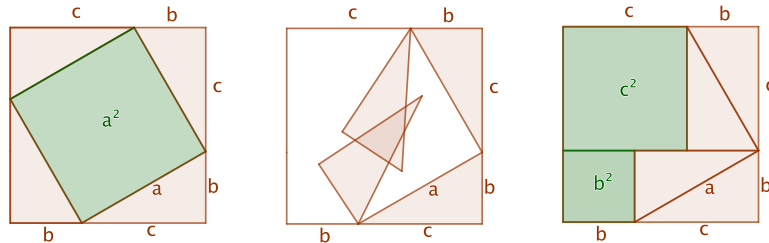
Para probar la proporcionalidad del tercer par de lados basta considerar un triángulo igual a  $\widehat{ABC}$  en posición de tales con  $\widehat{AB'C'}$  con ángulo común  $\hat{B}'$  (compárese con la parte final de la demostración de 2.18). ■

Recordemos por último que el teorema de Tales implica el teorema 2.19, por el que dos triángulos son semejantes si y sólo si tienen sus ángulos iguales.

Por completitud incluimos aquí la demostración del teorema de Pitágoras que hemos dado en la introducción:

**Teorema 3.2 (Teorema de Pitágoras)** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

DEMOSTRACIÓN: Dado un triángulo rectángulo de hipotenusa  $a$  y catetos  $b$  y  $c$ , podemos formar con él la figura de la izquierda:

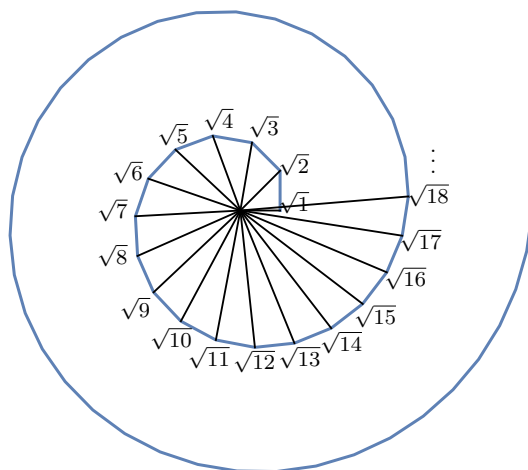


Observemos que el cuadrilátero central es un cuadrado de lado  $a$ , pues cada uno de sus ángulos sumado a los dos ángulos del triángulo dado suman  $\pi$  (la medida de un ángulo llano), luego el ángulo del cuadrilátero es igual al tercer ángulo del triángulo (el ángulo recto). Si ahora movemos los triángulos hasta situarlos en la posición de la derecha, obtenemos el mismo cuadrado total, luego, si llamamos  $A$  al área del triángulo, tenemos que

$$a^2 + 4A = b^2 + c^2 + 4A,$$

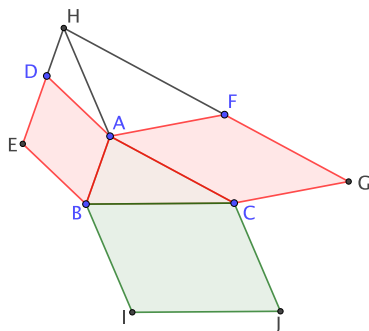
de donde  $a^2 = b^2 + c^2$ . ■

**La espiral de Teodoro** Las raíces cuadradas de los números naturales pueden construirse recurrentemente usando que si un triángulo rectángulo tiene un cateto de longitud  $\sqrt{n}$  y otro de longitud 1, entonces la hipotenusa mide  $\sqrt{n+1}$ . Aplicando esto recurrentemente a partir de un triángulo rectángulo con catetos de longitud 1 se obtiene la *espiral de Teodoro*. Según Platón, Teodoro usó esta espiral para demostrar la irracionalidad de  $\sqrt{n}$ , cuando  $n$  no es un cuadrado perfecto, hasta  $n = 17$ .

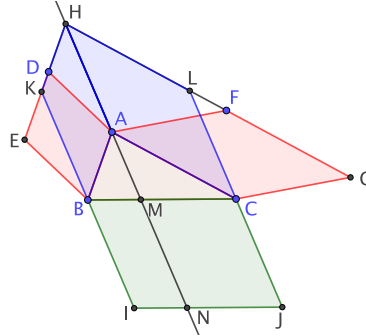


**El teorema del área de Pappus** Pappus de Alejandría vivió en el siglo IV d.C. y fue uno de los últimos grandes matemáticos griegos. Escribió un tratado en ocho libros titulado *Συναγωγή* (“La colección”), que no se conserva en su totalidad. El libro IV empieza con la siguiente generalización del teorema de Pitágoras:

**Teorema 3.3** Sobre dos lados de un triángulo arbitrario  $\widehat{ABC}$  trazamos dos paralelogramos  $ABDE$  y  $ACFG$ . Llamamos  $H$  al punto de corte de las rectas  $DE$  y  $FG$  y sobre el tercer lado  $BC$  formamos un paralelogramo cuyos lados  $BI$  y  $CJ$  sean iguales y paralelos a  $AH$ . Entonces, el área de este tercer paralelogramo es la suma de las áreas de los otros dos.



DEMOSTRACIÓN: Basta considerar los paralelogramos intermedios que muestra la figura siguiente:



Se cumple que el área de  $ABED$  es la misma que la de  $ABHK$ , pues ambos tienen la misma base  $\overline{AB}$  y la misma altura. Lo mismo se aplica a  $ACFG$  y  $ACHL$ . A su vez, el área de  $ABHK$  es la misma que la de  $BMIN$ , pues ambos paralelogramos tienen la misma base  $\overline{AH} = \overline{IB}$  y la misma altura. Lo mismo se aplica a  $ACHL$  y  $CMJN$ , con lo que la suma de las áreas de los dos paralelogramos dados es igual a la suma de las áreas de  $BMIN$  y  $CMJN$ , que es el área del tercer paralelogramo del enunciado. ■

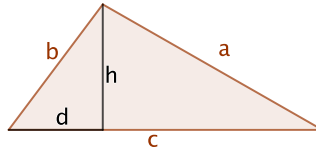
**El área de un triángulo** Hay muchas fórmulas que permiten calcular el área de un triángulo. Una de las más famosas es la fórmula de Herón, que tiene la ventaja de que sólo requiere conocer los lados del triángulo, sin necesidad de calcular la altura:

**Teorema 3.4 (Fórmula de Herón)** *El área de un triángulo de lados  $a, b, c$  viene dada por*

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

donde  $s$  es el semiperímetro  $s = (a + b + c)/2$ .

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la figura siguiente:



Por el teorema de Pitágoras,  $b^2 = h^2 + d^2$  y

$$a^2 = h^2 + (c - d)^2 = h^2 + c^2 + d^2 - 2cd,$$

luego  $a^2 - b^2 = c^2 - 2cd$ , y a su vez

$$d = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}.$$



Volviendo a la igualdad inicial:

$$\begin{aligned}
 h^2 &= b^2 - d^2 = b^2 - \left( \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} \right)^2 \\
 &= \left( b + \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} \right) \left( b - \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} \right) \\
 &= \frac{2bc - a^2 + b^2 + c^2}{2c} \frac{2bc + a^2 - b^2 - c^2}{2c} \\
 &= \frac{((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2)}{4c^2} \\
 &= \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)}{4c^2} \\
 &= \frac{2s \cdot 2(s-a) \cdot 2(s-c) \cdot 2(s-b)}{4c^2} \\
 &= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}.
 \end{aligned}$$

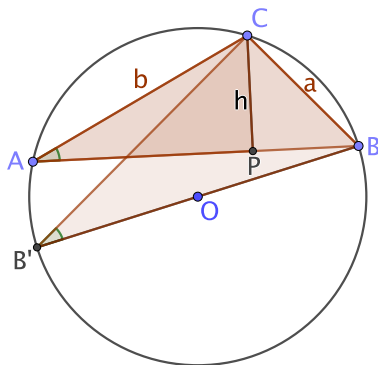
Finalmente, el área del triángulo es

$$S = \frac{ch}{2} = \sqrt{\frac{c^2}{4} \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{c^2}} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \quad \blacksquare$$

Veamos otra fórmula en la que interviene el *circunradio* del triángulo, es decir, el radio de su circunferencia circunscrita:

**Teorema 3.5** *El área de un triángulo  $\widehat{ABC}$  viene dada por  $S = abc/4R$ , donde  $a, b, c$  son las longitudes de sus lados y  $R$  es su circunradio.*

DEMOSTRACIÓN: Cambiando si es preciso los nombres de los vértices podemos suponer que el ángulo  $A$  es agudo.



Sea  $h$  la altura correspondiente al lado  $\overline{AB}$ , sea  $P$  su pie y sea  $B'$  el punto opuesto a  $B$  en la circunferencia circunscrita. Notemos que no puede ser  $B' = C$ , pues entonces  $\widehat{ABC} = \widehat{ABB'}$  y el ángulo  $A$  sería recto por el teorema de Tales 1.40. Por lo tanto, podemos formar el triángulo  $\widehat{B'BC}$ , que tiene un ángulo recto en  $C$ , de nuevo por el teorema de Tales.

El ángulo  $\widehat{CB'B}$  abarca un arco con los mismos extremos que  $\widehat{CAB}$ , luego ambos arcos tienen que ser iguales u opuestos, luego por 1.26 los ángulos tienen que ser iguales o suplementarios, pero como ambos son agudos ( $\widehat{CB'B}$  lo es porque forma parte de un triángulo rectángulo) tienen que ser iguales.

Así, los triángulos  $\widehat{APC}$  y  $\widehat{B'CB}$  son semejantes, ya que tienen dos ángulos iguales (contando el ángulo recto), luego

$$\frac{h}{b} = \frac{a}{2R}$$

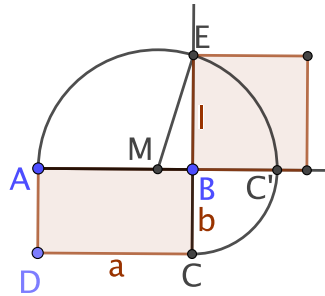
y así el área del triángulo es

$$S = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}bc\frac{h}{b} = \frac{1}{2}\frac{abc}{2r} = \frac{abc}{4R}. \quad \blacksquare$$

**La cuadratura del rectángulo** Tal y como hemos señalado en la introducción, los griegos concebían los problemas de cálculo de áreas como cuadraturas, es decir, como el problema de encontrar un cuadrado de área igual al de una figura dada. Por ejemplo:

**Problema 3.1** *Cuadrar un rectángulo dado.*

Consideremos dado un rectángulo  $ABCD$ . Si es cuadrado no hay nada que hacer. Podemos suponer que  $AB$  es uno de los lados mayores.



1. Prolongamos el lado  $AB$ , y abatimos el lado  $BC$  sobre la prolongación, lo que determina un punto  $C'$ .
2. Calculamos el punto medio  $M$  del segmento  $\overline{AC'}$ .
3. Llamamos  $E$  al punto donde la circunferencia de centro  $M$  y radio  $\overline{MC'}$  corta a la semirrecta  $\overline{CB}$ .
4. El cuadrado de lado  $\overline{BE}$  es el requerido.

En efecto, si los lados del rectángulo miden  $a$  y  $b$ , entonces  $\overline{AC'} = a + b$ , luego  $\overline{MC'} = \overline{ME} = (a + b)/2$ , mientras que

$$\overline{MB} = (a + b)/2 - b = (a - b)/2.$$

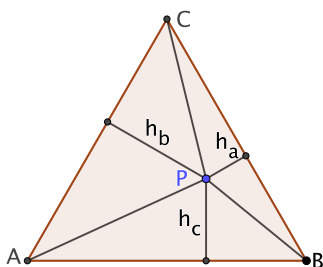
El teorema de Pitágoras nos da entonces que la longitud  $l$  de  $\overline{BE}$  cumple

$$l^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + 2ab - a^2 - b^2 + 2ab}{4} = ab. \blacksquare$$

Para cuadrar un triángulo basta trazar la paralela a un lado por el vértice opuesto para formar un rectángulo del doble de área, dividir el rectángulo por la mitad y luego aplicar la construcción precedente.

En la introducción hemos descrito la cuadratura de la lúnula de Hipócrates, que confundió a muchos matemáticos griegos al hacerles creer que un argumento similar debería llevar a la solución de la cuadratura del círculo. Veamos ahora una última aplicación del concepto de área:

**Teorema 3.6 (Viviani)** *Si  $P$  es un punto contenido en un triángulo equilátero, la suma de las distancias a sus lados es igual a la altura del triángulo.*



DEMOSTRACIÓN: Si llamamos  $l$  al lado del triángulo y  $h$  a su altura, basta observar que el área del triángulo es la suma de las áreas de los tres triángulos determinados por  $P$ :

$$\frac{1}{2}hl = \frac{1}{2}lh_a + \frac{1}{2}lh_b + \frac{1}{2}lh_c,$$

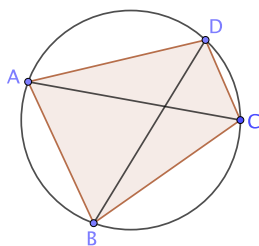
de donde  $h_a + h_b + h_c = h$ .  $\blacksquare$

## 3.2 El teorema de Ptolomeo

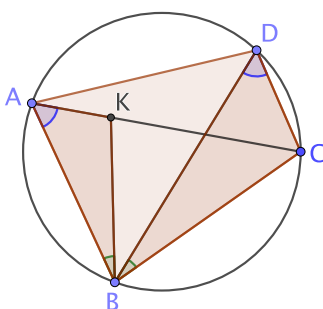
En el siglo II d.C., el astrónomo griego Claudio Ptolomeo escribió su tratado de astronomía *Μαθηματικὴ Σύνταξις* (Tratado matemático) que posteriormente fue conocido como “el gran tratado”. El superlativo *μεγίστη* (el mayor) se convirtió en árabe en *al-majisti*, y fue a través de la versión árabe como llegó a Occidente, donde pasó a ser conocido como el *Almagesto*. El teorema siguiente está demostrado en el capítulo X del libro I:

**Teorema 3.7 (Ptolomeo)** *En un cuadrilátero cíclico, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos:*

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}.$$



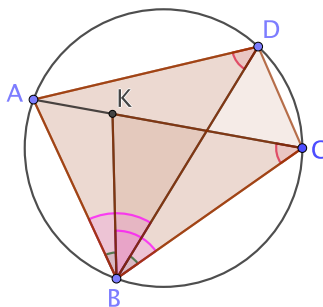
DEMOSTRACIÓN: Nombrando adecuadamente los vértices, podemos suponer que  $\widehat{ABD} \geq \widehat{DBC}$ . Tomamos el punto  $K$  sobre  $\overline{AC}$  que hace que  $\widehat{ABK} = \widehat{DBC}$ .



Entonces los triángulos  $\widehat{ABK}$  y  $\widehat{DBC}$  son semejantes, pues tienen dos ángulos iguales (notemos que  $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$  porque ambos ángulos están inscritos en la circunferencia y abarcan el mismo arco). Por lo tanto:

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}.$$

Por otra parte, también son semejantes los triángulos  $\widehat{ABD}$  y  $\widehat{KBC}$ :



En efecto,  $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$  porque ambos ángulos inscritos abarcan el mismo arco, mientras que

$$\widehat{ABK} + \widehat{CBK} = \widehat{ABC} = \widehat{CBD} + \widehat{ABD},$$

luego  $\widehat{CBK} = \widehat{ABD}$ . Por lo tanto

$$\frac{\overline{CK}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}.$$

Así pues:

$$\overline{AK} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD}, \quad \overline{CK} \cdot \overline{BD} = \overline{BC} \cdot \overline{DA}$$

y, sumando:

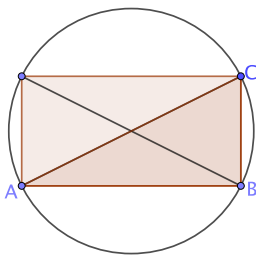
$$(\overline{AK} + \overline{CK}) \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{DA},$$

que es lo mismo que

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}.$$

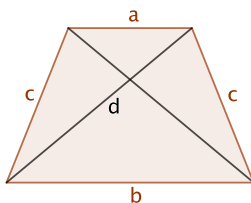
■

Observemos que, cuando se aplica a un rectángulo, el teorema de Ptolomeo nos da como caso particular el teorema de Pitágoras:



$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2.$$

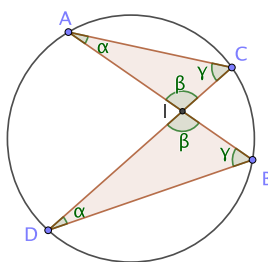
En el caso de un trapecio isósceles las dos diagonales tienen la misma longitud  $d$ , y el teorema de Ptolomeo se reduce a  $d^2 = ab + c^2$ :



Incluimos aquí un resultado sencillo que no depende del teorema de Ptolomeo, pero está relacionado, y es una fórmula que relaciona los cuatro segmentos determinados por el corte de las diagonales de un cuadrilátero cíclico:

**Teorema 3.8** Si dos cuerdas de una circunferencia se cortan como muestra la figura, entonces

$$\overline{AI} \cdot \overline{IB} = \overline{CI} \cdot \overline{ID}.$$



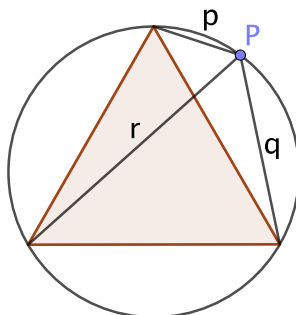
DEMOSTRACIÓN: Basta observar que los dos triángulos señalados en la figura son semejantes, pues los ángulos  $\beta$  son opuestos por el vértice y los otros dos abarcan el mismo arco. Esto implica que

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{ID}} = \frac{\overline{CI}}{\overline{IB}},$$

de donde se sigue la igualdad del enunciado. ■

Terminamos con una consecuencia curiosa del teorema de Ptolomeo:

**Teorema 3.9** *Dados un triángulo equilátero y un punto  $P$  en su circunferencia circunscrita distinto de sus vértices, entonces la distancia de  $P$  al vértice más lejano es la suma de las distancias a los dos vértices más cercanos:  $r = p + q$ .*

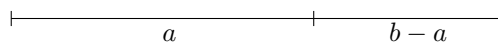


DEMOSTRACIÓN: Basta aplicar el teorema de Ptolomeo al cuadrilátero que resulta de añadir el punto  $P$  a los tres vértices del triángulo. Si el lado del triángulo es  $l$ , obtenemos que  $rl = pl + ql$ . ■

### 3.3 La sección áurea

En los *Elementos* de Euclides encontramos la definición siguiente:

**Definición 3** *Se dice que un segmento ha sido cortado en extrema y media razón cuando el segmento entero es a la parte mayor como ésta es a la menor.* [Elementos, Libro VI]



Equivalentemente,

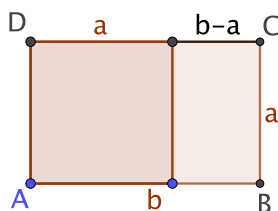
$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b-a},$$

lo cual equivale a que  $b^2 - ab - a^2 = 0$ , o también a que  $(b/a)^2 - b/a - 1 = 0$ . Resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos que

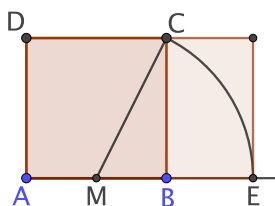
$$\frac{b}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.61803398874989484820\dots$$

Los griegos consideraron que esta proporción era especialmente “estética” y adecuada para construcciones arquitectónicas. Actualmente se la conoce como *sección áurea* o *número áureo*, si bien la primera referencia que se conoce de este nombre aparece en un libro 1835 del matemático alemán Martin Ohm (hermano del físico al que se debe la ley de Ohm), quien se refiere a la "sección dorada" como un “nombre usual” para referirse a la proporción que estamos considerando.

Por ejemplo, un *rectángulo áureo*, es decir, un rectángulo cuyos lados estén en proporción áurea tiene la propiedad de que, al quitarle el mayor cuadrado que contiene, queda un rectángulo similar.



**Problema 3.2** Construir un rectángulo áureo a partir del lado menor.



1. Construimos un cuadrado sobre el lado dado  $\overline{AB}$ .
2. Calculamos el punto medio  $M$  del lado  $\overline{AB}$ .
3. Trazamos la semirrecta  $\overrightarrow{AB}$ .
4. Abatimos el segmento  $\overline{MC}$  sobre la semirrecta, hasta un segmento  $\overline{ME}$ .

5. El segmento  $\overline{AE}$  es el lado mayor del rectángulo áureo.

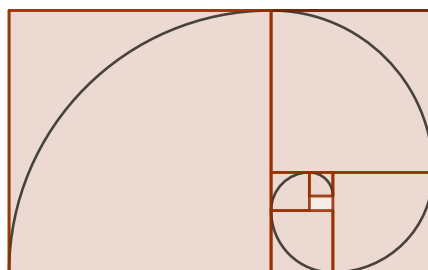
En efecto, si llamamos  $a$  a la longitud de  $\overline{AB}$ , entonces  $\overline{MB} = a/2$ , luego

$$\overline{ME} = \overline{MC} = \frac{\sqrt{5}}{2}a,$$

luego

$$\overline{AE} = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}a. \quad \blacksquare$$

A partir de un rectángulo áureo, eliminando cuadrados, podemos ir obteniendo una sucesión de rectángulos áureos cada vez menores. Trazando en cada uno de ellos un arco de circunferencia se obtiene la *espiral áurea*:



También podemos construir un rectángulo áureo a partir del lado mayor, lo cual equivale a dividir un segmento dado en proporción áurea:

**Problema 3.3** *Dividir un segmento dado en proporción áurea.*

1. Dado un segmento  $\overline{AB}$ , calculamos su punto medio  $M$ .
2. Levantamos la perpendicular a  $\overline{AB}$  en  $B$  y marcamos en ella el punto  $C$  que cumple  $\overline{BM} = \overline{BC}$ .

Así, si tomamos la longitud de  $\overline{AB}$  como unidad de longitud, entonces  $\overline{BC} = 1/2$ .

3. Trazamos el segmento  $\overline{AC}$ .

Por el teorema de Pitágoras,  $\overline{AC} = \sqrt{5}/2$ .

4. Marcamos el punto  $D$  que cumple  $\overline{CD} = \overline{CB}$ .

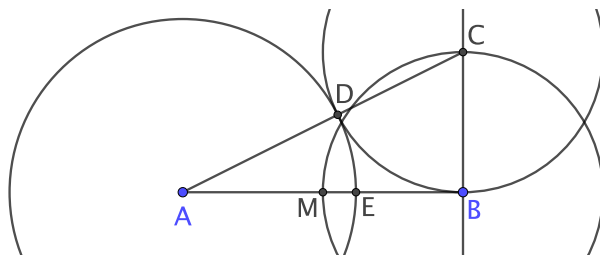
Así  $\overline{AD} = (\sqrt{5} - 1)/2$ .

5. Marcamos en  $\overline{AB}$  el punto  $E$  que cumple  $\overline{AD} = \overline{AE}$ .

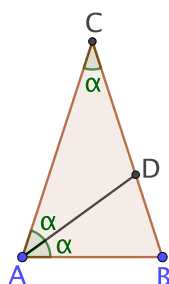
Así

$$\frac{AB}{AE} = \frac{1}{(\sqrt{5} - 1)/2} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$





Un *triángulo áureo* es un triángulo isósceles  $\widehat{ACB}$  tal que cuando se biseca uno de sus ángulos iguales el triángulo  $\widehat{BAD}$  es semejante al triángulo completo:



Es claro entonces que si  $\alpha$  es el ángulo desigual, los ángulos iguales deben medir  $2\alpha$  cada uno, luego  $5\alpha = \pi$ , y así  $\alpha = \pi/5$ . Recíprocamente, si  $\alpha = \pi/5$ , entonces los ángulos iguales miden  $2\pi/5$  cada uno, luego al bisecar uno de ellos se obtiene otro triángulo con un ángulo igual a  $\alpha$  y otro a  $2\alpha$ , luego es semejante al dado. En resumen:

*Un triángulo es áureo si sus ángulos miden  $\pi/5$ ,  $2\pi/5$  y  $2\pi/5$ .*

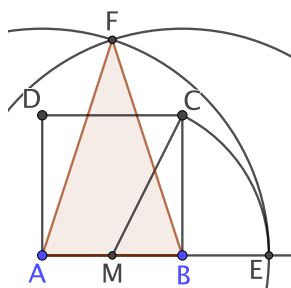
La semejanza entre los triángulos se traduce en que

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}},$$

pero  $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{CD}$ , luego esto equivale a

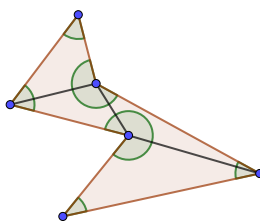
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}},$$

que a su vez significa que  $D$  divide a  $\overline{BC}$  en proporción áurea, y vemos también que los lados desiguales de un triángulo áureo están en proporción áurea. En particular, para construir un triángulo áureo basta modificar el final de la construcción de un rectángulo áureo, para acabar formando un triángulo en lugar de un rectángulo:



### 3.4 Polígonos regulares

Observemos que el concepto de medida de un ángulo nos permite sumar ángulos más allá de la medida de un ángulo completo. Por ejemplo, es fácil convencerse de que todo polígono de  $n$  lados puede descomponerse en  $n - 2$  triángulos con vértices en los vértices del polígono. La figura muestra una triangulación de un hexágono:



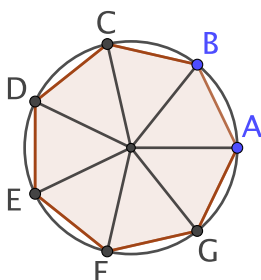
La idea es que siempre es posible elegir dos vértices tales que, al cortar el segmento que los une, “desprenden” un triángulo del polígono, de modo que el polígono resultante tiene un vértice menos y un lado menos. El teorema 1.22 tiene entonces esta generalización:

**Teorema 3.10** *Los ángulos de un polígono de  $n$  lados suman  $(n - 2)\pi$ .*

Así, por ejemplo, los ángulos de un hexágono suman  $4\pi$ , que es el doble de un ángulo completo. Esto no tendría sentido como suma de ángulos propiamente dicha, pero significa que si medimos los ángulos de un hexágono y sumamos los resultados obtendremos un total de  $720^\circ$  si tomamos como unidad el grado sexagesimal, o 8 si tomamos como unidad el ángulo recto, etc. Usando estas amplitudes “inexistentes” podemos obtener resultados sobre amplitudes “de verdad”. Por ejemplo:

**Teorema 3.11** *Cada ángulo de un polígono regular de  $n$  lados mide  $\frac{n - 2}{n}\pi$ .*

Observemos que existen polígonos regulares con cualquier número de lados  $n \geq 3$ . Basta dividir un círculo en  $n$  ángulos iguales de amplitud  $\frac{2\pi}{n}$  y unir los puntos en los que los lados cortan a la circunferencia.



Así se forman  $n$  triángulos isósceles cuyos ángulos iguales miden

$$\frac{1}{2} \left( \pi - \frac{2\pi}{n} \right) = \frac{1}{2} \frac{(n-2)\pi}{n},$$

luego los ángulos del polígono resultante son todos iguales y miden

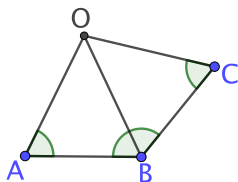
$$\frac{(n-2)\pi}{n}.$$

Todos los triángulos son iguales, por el criterio LAL, luego los lados del polígono también son iguales y es, pues, un polígono regular.

Acabamos de probar que existen polígonos regulares cíclicos con cualquier número de lados  $n \geq 3$ . Recíprocamente:

**Teorema 3.12** *Todo polígono regular es cíclico.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos un ángulo  $\widehat{ABC}$  de un polígono regular de  $n$  lados. Sabemos que su amplitud es  $\frac{n-2}{n}\pi$ . Construimos triángulos de lados  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  con ángulos  $\frac{n-2}{2n}\pi$ :



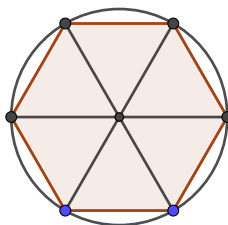
Observemos que los triángulos tienen iguales sus ángulos y un lado, luego son iguales, luego el tercer vértice  $O$  es el mismo para ambos (en principio los dos vértices  $O$  y  $O'$  tendrían que estar ambos sobre la bisectriz del ángulo  $\widehat{ABC}$ , pero por la igualdad de los triángulos tiene que ser  $\overline{OB} = \overline{O'B}$ , luego los puntos  $O$  y  $O'$  coinciden). Así pues,  $O$  es el centro de la circunferencia que pasa por  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Pero el proceso se puede repetir con el ángulo siguiente  $\widehat{BCD}$ : el triángulo isósceles  $\widehat{COD}$  tiene que tener como tercer vértice el mismo punto  $O$ , y así concluimos que todos los vértices del polígono están en la misma circunferencia de centro  $O$ . ■

Puesto que por tres puntos no alineados pasa una única circunferencia, es claro que cada polígono regular está inscrito en una única circunferencia. Su radio se llama *radio* del polígono.

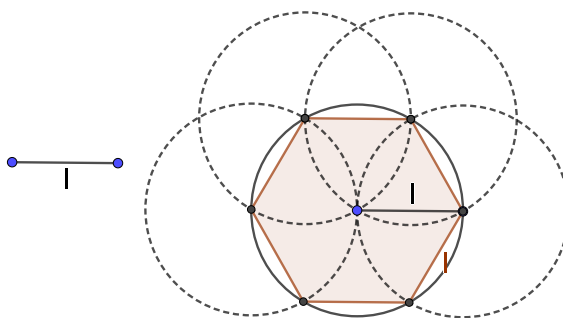
**Teorema 3.13** *Dos polígonos regulares con el mismo número de lados son iguales si y sólo si lo son sus lados.*

DEMOSTRACIÓN: Si dos polígonos regulares tienen sus lados iguales, los triángulos isósceles construidos en el teorema anterior son también iguales, luego ambos están inscritos en circunferencias del mismo radio. Podemos suponer que son la misma circunferencia, y que un vértice es coincidente, pero entonces es claro que los dos polígonos coinciden. ■

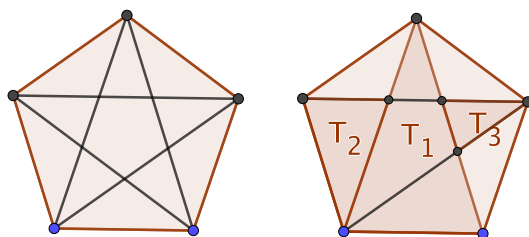
**El hexágono regular** Es fácil construir un triángulo equilátero y un cuadrado con un lado dado. El caso del hexágono regular también es sencillo.



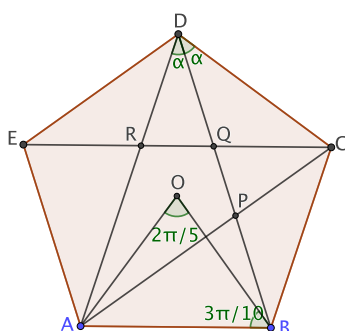
Basta observar que los seis triángulos isósceles en que se descompone un hexágono regular son en realidad equiláteros, pues todos sus ángulos miden  $\pi/3$ . Por lo tanto, para construir un hexágono regular de lado  $l$  basta trazar una circunferencia de radio  $l$ , elegir en ella un punto cualquiera y usar el compás para marcar lados de longitud  $l$ :



**El pentágono regular** La construcción de un pentágono regular ya requiere un análisis geométrico más profundo, aunque ya tenemos hecho prácticamente todo el trabajo necesario. La figura siguiente muestra un pentágono regular en el que hemos trazado también sus *diagonales*, es decir los segmentos que unen dos vértices no consecutivos.



Vemos que las diagonales forman varios triángulos y un pentágono menor. La clave de la geometría del pentágono consiste en que los triángulos marcados como  $T_1, T_2$  y  $T_3$  en la figura de la derecha son áureos.



En efecto, los ángulos centrales del pentágono miden  $2\pi/5$ , luego el ángulo  $\widehat{DBA}$  mide  $3\pi/10$ , luego los ángulos del pentágono, como  $\widehat{EDC}$ , miden  $3\pi/5$ . Ahora bien, por el teorema 1.26, sabemos que el ángulo  $\alpha = \widehat{ADB}$  mide la mitad de  $2\pi/5$ , es decir,  $\alpha = \pi/5$ , y como el triángulo  $T_1 = \widehat{ADB}$  es claramente isósceles, concluimos que es áureo.

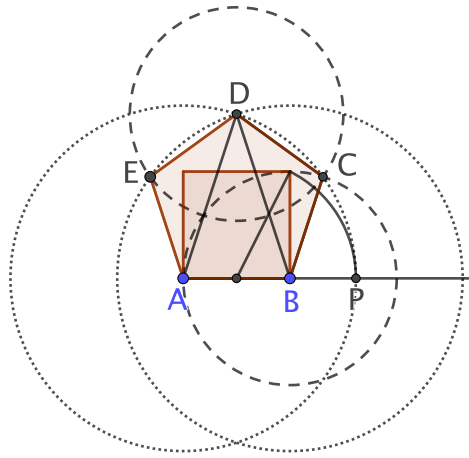
A su vez, como  $\widehat{ADC} = 3\alpha$ , tiene que ser  $\widehat{BDC} = \alpha$ , luego el triángulo  $T_2 = \widehat{PDC}$  es también áureo, pues  $BD$  es la bisectriz de  $\widehat{ADC}$ , luego  $T_2$  es el triángulo áureo que dicha bisectriz determina en el triángulo áureo  $\widehat{ADC}$ .

A su vez,  $T_3 = \widehat{RDQ}$  es el triángulo áureo que la bisectriz  $DB$  determina en el triángulo áureo  $\widehat{CDR}$ .

En particular, del hecho de que  $T_1$  sea áureo se sigue que las diagonales y los lados de un pentágono están en proporción áurea.

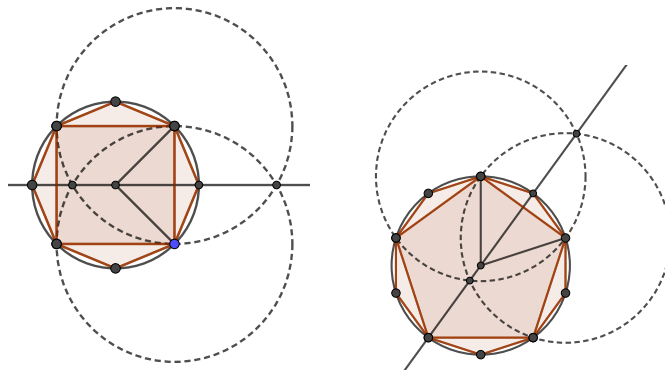
**Nota** Este hecho (que es lo único que necesitamos en la construcción del pentágono que vamos a ver a continuación) se deduce también del teorema de Ptolomeo aplicado al trapecio isósceles formado por cuatro de los vértices del pentágono, que nos da que la relación entre la diagonal y el lado es  $d^2 = dl + l^2$ , luego  $(d/l)^2 - d/l - 1 = 0$ , y esto implica que  $d/l$  es el número áureo. ■

**Problema 3.4** Construir un pentágono regular a partir de un lado.

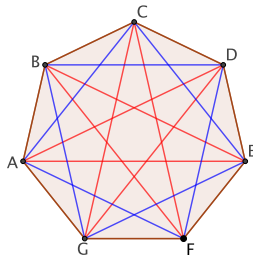


1. Dado el lado  $\overline{AB}$ , construimos el segmento  $\overline{AP}$  en proporción áurea según el problema 3.2.
2. Construimos el triángulo isósceles  $\widehat{ABD}$  cuyos lados iguales son iguales a  $\overline{AP}$ .
3. Sobre el segmento  $\overline{BD}$  construimos el triángulo isósceles  $\widehat{BCD}$  cuyos lados iguales son iguales a  $\overline{AB}$ .
4. Sobre el segmento  $\overline{AD}$  construimos igualmente el triángulo  $\widehat{AED}$ .
5. Los puntos  $A, B, C, D, E$  son los vértices del pentágono requerido. ■

**El octógono y el decágono** Es fácil construir un octógono regular, así como un decágono regular, sin más que bisecar los ángulos de un cuadrado o de un pentágono:



**El heptágono regular** Un heptágono regular tiene dos clases de diagonales, “cortas” y “largas”:

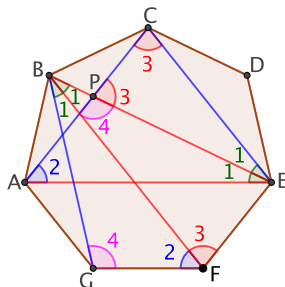


La geometría del heptágono está determinada por el hecho siguiente:

**Teorema 3.14** Las diagonales  $d_1$  y  $d_2$  de un heptágono regular de lado  $l$  cumplen la relación

$$\frac{d_1 + d_2}{l} = \frac{d_1}{l} \frac{d_2}{l}.$$

DEMOSTRACIÓN: En la figura siguiente, los ángulos marcados con un número  $n$  miden  $n\theta$ , donde  $\theta = \pi/14$ . En el caso de los que tienen su vértice en un vértice del heptágono es consecuencia inmediata del teorema 1.26, y los que tienen vértice  $P$  se obtienen sin más que tener en cuenta que los ángulos de un triángulo suman  $\pi/2 = 7\theta$ :



Por consiguiente, el triángulo  $\widehat{AEP}$  es semejante a  $\widehat{FBG}$  y, como tienen un lado igual  $\overline{AE} = \overline{FB}$ , de hecho son iguales, luego  $\overline{AP} = l$  es la longitud del lado del heptágono.

Por otro lado,  $\widehat{BEF}$  es semejante a  $\widehat{EPC}$ , luego, llamando  $d_1$  a la diagonal larga y  $d_2$  a la corta:

$$\frac{\overline{CP}}{d_2} = \frac{l}{d_1},$$

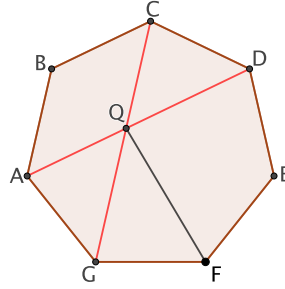
luego  $\overline{CP} = (d_2/d_1)l$ . Por otra parte,

$$d_2 = \overline{AC} = \overline{AP} + \overline{PC} = \left(1 + \frac{d_2}{d_1}\right)l,$$

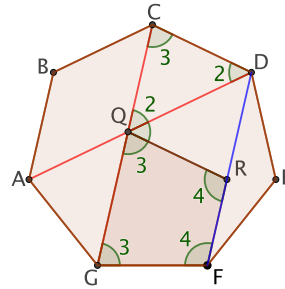
y de aquí se llega a la relación del enunciado. ■

No existen expresiones sencillas para las diagonales o el circunradio de un heptágono regular en función de su lado, pero el teorema siguiente basta para diseñar una construcción:

**Teorema 3.15** *En un heptágono regular de lado  $l$ , el segmento  $\overline{QF}$  que muestra la figura mide  $l\sqrt{2}$ :*



DEMOSTRACIÓN: En la figura hemos trazado el segmento  $\overline{QR}$  paralelo a  $\overline{CD}$ . Observemos que el triángulo  $\widehat{QCD}$  es isósceles, pues tiene ángulos iguales a  $3\theta$  y  $2\theta$  (con  $\theta = \pi/14$ ) y por consiguiente el tercer ángulo mide también  $2\theta$ . Esto hace que  $\overline{QC} = l$ .



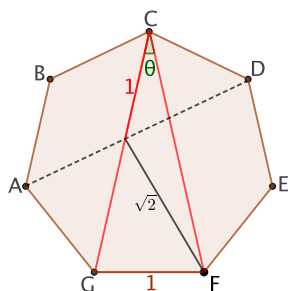
Por otro lado, por el paralelismo tenemos que  $\overline{QR} = l = \overline{GF}$ . Tenemos un cuadrilátero cuyo ángulo en  $Q$  mide  $3\theta$  también por paralelismo y tiene otros dos ángulos iguales a  $3\theta$  y  $4\theta$ , luego el ángulo en  $R$  tiene que ser  $4\theta$ . Esto implica que es un trapecio isósceles y podemos aplicarle el teorema de Ptolomeo, según el cual

$$\overline{QF}^2 = \overline{QG} \cdot \overline{RF} + l^2 = (d_1 - l)(d_2 - l) + l^2 = d_1 d_2 - (d_1 + d_2)l + 2l^2 = 2l^2,$$

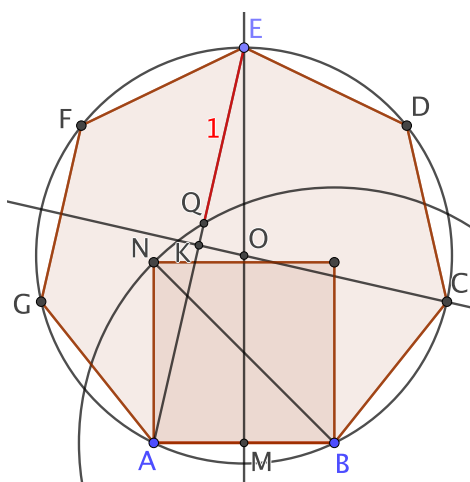
por el teorema anterior. ■

Así pues, el “esqueleto” de un heptágono regular de lado unitario está formado por un triángulo isósceles con un ángulo  $\theta = \pi/14$  determinado por que si a uno de sus lados iguales le restamos una unidad, llegamos a un punto que dista  $\sqrt{2}$  del vértice del lado opuesto. Esto es suficiente para construir un heptágono regular. En realidad puede probarse que el heptágono no es constructible con regla y compás. Sin embargo:





**Problema 3.5** Construir un heptágono regular a partir de un lado.



1. Dado un segmento  $\overline{AB}$ , construimos un cuadrado con dicho lado.
2. Trazamos la circunferencia de centro  $B$  y radio la diagonal del cuadrado.
3. Trazamos la mediatriz de  $\overline{AB}$ .

4. En este punto hay que emplear el procedimiento que los griegos llamaban *neusis* (“inclinación”), consistente en tomar una regla con dos marcas que correspondan con la longitud del lado, situarla sobre el punto  $A$  y dejar que una de las marcas recorra la mediatriz hasta que la otra marca toque la circunferencia en un punto  $Q$ . Trazamos la recta resultante, que cortará a la mediatriz en un punto  $E$ .

De este modo, si tomamos la longitud del segmento dado como unidad de medida, tenemos que  $\overline{BQ} = \overline{BN} = \sqrt{2}$ . El punto  $E$  obtenido de esta forma es claramente único, luego tiene que ser el vértice de heptágono regular opuesto al lado  $\overline{AB}$ .

5. Trazamos la mediatriz del segmento  $\overline{AE}$ , que cortará a la mediatriz de  $\overline{AB}$  en un punto  $O$ .

Por estar en la mediatriz de  $\overline{AE}$ , el punto  $O$  está a la misma distancia de  $A$  y  $E$  y, por estar en la mediatriz de  $\overline{AB}$ , también está a la misma distancia de  $C$ .

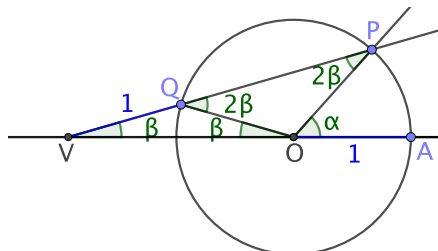
6. Trazamos la circunferencia de centro  $O$  y radio  $\overline{OA}$  que pasará por  $A$ ,  $B$  y  $E$ .
7. Con el compás marcamos en la circunferencia vértices que situados a una distancia  $\overline{AB}$ , que serán los vértices del heptágono.

(En realidad  $C$  se obtiene automáticamente como intersección de la mediatriz de  $\overline{AE}$  con la circunferencia, y  $D$  y  $G$  pueden obtenerse trazando la perpendicular a  $\overline{BQ}$  por  $Q$ , de modo que sólo falta calcular  $F$ .) ■

**El eneágono regular** Hasta aquí hemos visto cómo construir polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 10 lados. Ahora vamos a mostrar la construcción de un eneágono regular como consecuencia de un resultado más general, a saber, un procedimiento debido a Arquímedes para trisecar cualquier ángulo dado (es decir, para dividirlo en tres partes iguales). Así, trisecando los ángulos de un triángulo equilátero obtenemos un eneágono regular.

Tal y como hemos señalado en la introducción, la trisección de un ángulo arbitrario no es posible con regla y compás (y, en particular, la trisección de un ángulo de  $120^\circ$  para obtener uno de  $40^\circ$  y formar así un eneágono regular figura entre las construcciones imposibles), pero sí que podemos llevarla a cabo si usamos una regla con dos marcas y empleamos la *neusis*:

**Problema 3.6** *Trisecar un ángulo dado.*

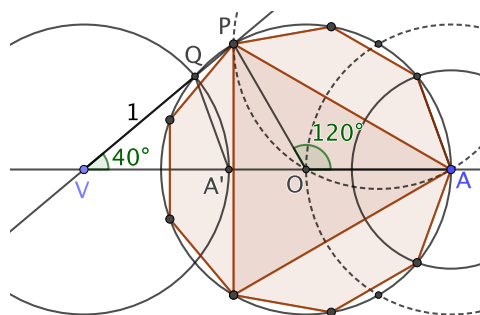


1. Dado un ángulo de vértice  $O$ , trazamos la circunferencia de centro  $O$  y radio unitario, llamamos  $A$  y  $P$  a los puntos en los que corta a los lados del ángulo y trazamos la recta  $OA$ .
2. Mediante *neusis*, trazamos la recta que pasa por  $P$  y un punto  $V$  en  $OA$  de modo que el punto  $Q$  donde la recta corta a la circunferencia cumpla  $\overline{VQ} = 1$ .

Así el triángulo  $\widehat{VQO}$  es isósceles, luego tiene dos ángulos iguales  $\beta$ . El ángulo desigual mide  $\pi - 2\beta$ , luego su suplementario mide  $2\beta$ . El triángulo  $\widehat{POQ}$  también es isósceles, y su tercer ángulo mide  $\pi - 4\beta$ , luego en  $O$  tenemos que  $\beta + \pi - 4\beta + \alpha = \pi$ , de donde  $\alpha = 3\beta$ . ■

**Problema 3.7** *Construir un eneágono regular.*

1. Trazamos una circunferencia con el radio del eneágono  $\overline{OA}$ .
2. Construimos en ella un triángulo equilátero.
3. Trisecamos uno de sus ángulos (de amplitud  $\pi/3$ ) para obtener un ángulo  $\widehat{QVA'}$  de amplitud  $\pi/9$ .
4. Trazamos la circunferencia de centro  $V$  y radio 1, que cortará a la recta  $OA$  en un punto  $A'$ .
5. Trazamos el segmento  $\overline{QA'}$ .
6. Trazamos la circunferencia de centro  $A$  y radio  $\overline{QA'}$ , que cortará a la circunferencia de centro  $O$  y radio  $\overline{OA}$  en dos vértices del eneágono.
7. Con el compás marcamos los vértices restantes y los unimos.

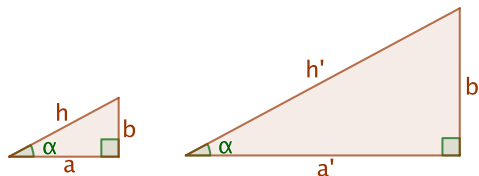


■

### 3.5 Trigonometría

Hemos probado que si dos triángulos tienen, por ejemplo, dos lados iguales, así como el ángulo que forman, entonces son iguales. Por lo tanto, si conocemos las longitudes de dos lados de un triángulo y la amplitud del ángulo que forman, con esos datos tendríamos que poder calcular la longitud del tercer lado y las amplitudes de los dos ángulos. Sin embargo, no es evidente cómo obtener estos resultados a partir de los hechos que conocemos hasta ahora. La trigonometría resuelve completamente todos los problemas de este tipo.

**Las razones trigonométricas** Consideremos dos triángulos rectángulos con un mismo ángulo  $\alpha$ . Entonces los tres ángulos son iguales, luego son semejantes:



Esto se traduce en que

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{h}{h'},$$

o, equivalentemente,

$$\frac{a}{h} = \frac{a'}{h'}, \quad \frac{b}{h} = \frac{b'}{h'}, \quad \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}.$$

Así pues, los cocientes  $a/h$ ,  $b/h$  y  $b/a$  dependen únicamente del ángulo  $\alpha$ , pero no del triángulo rectángulo considerado.

**Definición 3.16** Llamaremos *seno*, *coseno* y *tangente* de un ángulo agudo  $\alpha$  a los cocientes

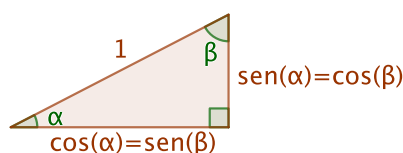
$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{h}, \quad \text{cos } \alpha = \frac{a}{h}, \quad \text{tan } \alpha = \frac{b}{a}$$

formados en cualquier triángulo rectángulo con un ángulo igual a  $\alpha$  entre el cateto opuesto  $b$ , el cateto contiguo  $a$  y la hipotenusa  $h$ . Estos valores se conocen conjuntamente como las *razones trigonométricas* del ángulo  $\alpha$ .

Considerando un triángulo rectángulo con ángulos  $\alpha$  y  $\pi/2 - \alpha$  e hipotenusa unitaria, es claro que

$$\text{sen}(\pi/2 - \alpha) = \text{cos } \alpha, \quad \text{cos}(\pi/2 - \alpha) = \text{sen } \alpha,$$

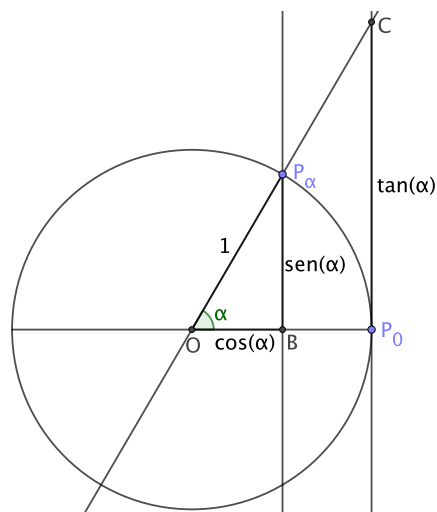
es decir, el seno de un ángulo es el coseno de su complementario, y viceversa:



El teorema de Pitágoras nos da también la relación fundamental:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1.$$

Si tomamos una circunferencia graduada de radio 1 y representamos en ella el ángulo  $\alpha = \widehat{P_0 O P_\alpha}$ , podemos visualizar el seno y el coseno de  $\alpha$  como las longitudes  $\overline{BP_\alpha}$  y  $\overline{OB}$ , respectivamente, mientras que la tangente es la longitud del segmento tangente  $\overline{P_0 C}$ .



Ahora bien, con esta representación podemos extender la definición del seno y el coseno a todos los ángulos convexos.<sup>1</sup> Por ejemplo, si  $\alpha = 0$ , entonces  $P_\alpha = P_0 = B = C$ , con lo que

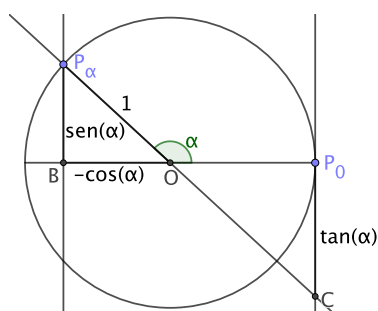
$$\operatorname{sen} 0 = 0, \quad \operatorname{cos} 0 = 1, \quad \operatorname{tan} 0 = 0.$$

Si  $\alpha = \pi/2$ , entonces  $B = O$ , con lo que

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1, \quad \operatorname{cos} \frac{\pi}{2} = 0,$$

mientras que  $\operatorname{tan}(\pi/2)$  no está definida. Si  $\alpha$  es un ángulo obtuso, convendremos en que el coseno y la tangente son negativos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}(\pi - \alpha), \quad \operatorname{cos} \alpha = -\operatorname{cos}(\pi - \alpha), \quad \operatorname{tan} \alpha = -\operatorname{tan}(\pi - \alpha),$$



<sup>1</sup>Estas figuras hacen natural llamar al seno de un ángulo  $\alpha$  su “media cuerda”. Así lo hizo el matemático indio Aryabhata, que vivió a principios del VI d.C., que se refería al seno de un ángulo como su *ardha-jiva*, que luego fue abreviado a *jiva* (cuerda). Al coseno lo llamaba *koti-jiva* (cuerda del arco complementario). Los árabes transcribieron *jiva* como *jiba* (que en árabe no significa nada), pero, o bien los árabes, o bien los traductores cristianos, acabaron confundiendo *jiba* con la palabra árabe *jayb*, que significa “seno”, “bahía” y se escribe igual, pues en árabe sólo se escriben las consonantes, y así *jiva* fue traducido al latín por *sinus* y *koti-jiba* por *cosinus*.

Por último, para  $\alpha = \pi$  tenemos que  $B = P_\pi$ , con lo que

$$\operatorname{sen} \pi = 0, \quad \operatorname{cos} \pi = -1, \quad \operatorname{tan} \pi = 0.$$

De este modo tenemos definidas las razones trigonométricas para todo ángulo convexo, con la única excepción de la tangente de  $\pi/2$ , que no está definida. Notemos que, en todos los casos, el teorema de Pitágoras nos da la relación fundamental:

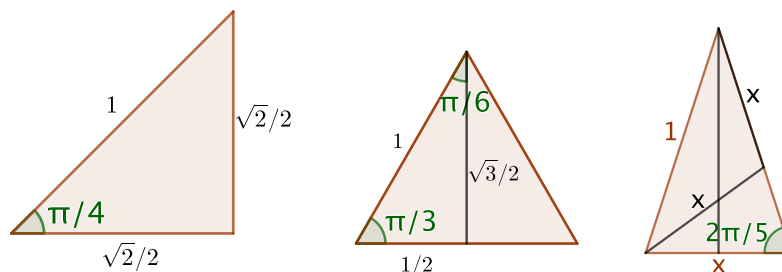
$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1.$$

Observemos también que en todos los casos

$$\operatorname{tan} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}.$$

Es fácil calcular las razones trigonométricas de algunos ángulos:

$\alpha$	$\operatorname{sen} \alpha$	$\operatorname{cos} \alpha$	$\operatorname{tan} \alpha$
0	0	1	0
$\pi/10$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$
$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$2\pi/5$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
$\pi/2$	1	0	—



En efecto, para calcular el seno y el coseno de  $\pi/4$  basta considerar un triángulo rectángulo isósceles de hipotenusa unitaria y aplicar el teorema de Pitágoras.

Considerando un triángulo equilátero de lado unitario concluimos inmediatamente que  $\operatorname{cos} \pi/3 = \operatorname{sen} \pi/6 = 1/2$ , y la relación fundamental nos da que  $\operatorname{sen} \pi/3 = \operatorname{cos} \pi/6 = \sqrt{3}/2$ .

Para calcular  $\operatorname{cos} 2\pi/5$  consideramos un triángulo áureo, de modo que, en la figura de la derecha,  $x = 2 \operatorname{cos} 2\pi/5$  y, como el triángulo es semejante al determinado por la bisectriz, tiene que ser

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x},$$

de donde  $x^2 + x - 1 = 0$  y, por consiguiente,

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2} \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}.$$

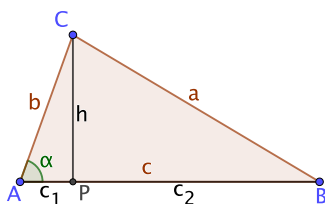
La relación fundamental nos da el valor del seno. ■

**Resolución de triángulos** La relación entre las razones trigonométricas y los problemas sobre triángulos viene dada por los teoremas siguientes. El teorema del coseno es una generalización del teorema de Pitágoras:

**Teorema 3.17 (Teorema del coseno)** *Todo triángulo  $\widehat{ABC}$  verifica la relación*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea  $P$  el pie de la altura del triángulo desde  $C$  (que puede o no estar en  $\overline{AB}$ ). Podemos suponer que el triángulo no es rectángulo, pues en caso contrario el teorema se reduce al de Pitágoras. Entonces  $P$  es distinto de  $B$  y  $C$ . Sean  $c_1$ ,  $c_2$  y  $h$  las longitudes indicadas en la figura.



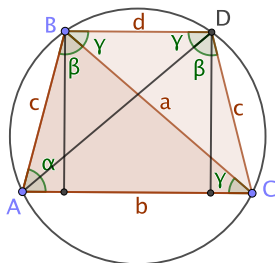
Por el teorema de Pitágoras se cumple

$$a^2 = h^2 + c_2^2, \quad b^2 = h^2 + c_1^2,$$

luego  $a^2 = b^2 - c_1^2 + c_2^2$ .

Por otra parte,  $c = c_2 \pm c_1$ , donde el signo es positivo si  $A$  es agudo y negativo si es obtuso. Así,  $c_2^2 = (c \mp c_1)^2 = c^2 + c_1^2 \mp 2cc_1$ , con lo que  $a^2 = b^2 + c^2 \mp 2cc_1$ . Ahora bien,  $c_1 = \pm b \cos \alpha$ , luego concluimos que  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ . ■

**Nota** El teorema del coseno generaliza al teorema de Pitágoras y a su vez es un caso particular del teorema de Ptolomeo, pues si tenemos un triángulo  $\widehat{ABC}$ , consideramos su circunferencia circunscrita y en ella el punto  $D$  donde la corta la paralela a  $AC$  que pasa por  $B$ :



Se forma así un trapecio isósceles cuyas diagonales miden  $a$ . Al aplicarle el teorema de Ptolomeo resulta

$$a^2 = bd + c^2,$$

pero  $d = b - 2c \cos \alpha$ , luego en definitiva queda

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \quad \blacksquare$$

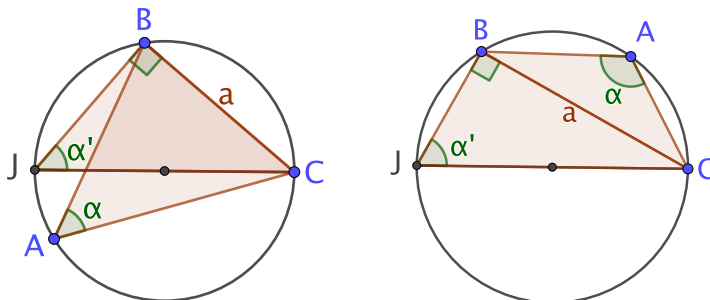
Ahora probamos el teorema de los senos, que generaliza al hecho de que dos triángulos son semejantes si y sólo si tienen los ángulos iguales.

**Teorema 3.18 (Teorema de los senos)** *Si  $R$  es el circunradio de un triángulo  $\widehat{ABC}$ , entonces se cumple*

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la circunferencia circunscrita al triángulo y sea  $J$  el punto diametralmente opuesto a  $C$  en ella. Si  $J = B$  entonces el ángulo  $\alpha$  abarca una semicircunferencia, luego es un ángulo recto (teorema 1.26), y trivialmente se cumple

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{2R}{1} = 2R.$$



Si  $B \neq J$  entonces los ángulos  $\alpha = \widehat{BAC}$  y  $\alpha' = \widehat{BJC}$  abarcan arcos comprendidos entre  $B$  y  $C$ , que pueden ser iguales, como en la figura de la izquierda, u opuestos, como en la figura de la derecha. Esto implica que los ángulos son iguales o suplementarios, (pues en el segundo caso los ángulos centrales correspondientes suman  $2\pi$ , luego, por 1.26) los ángulos inscritos suman  $\pi$ ), luego tienen el mismo seno. Por otra parte el ángulo  $\widehat{JBC}$  es recto, pues abarca un semicírculo. Así pues

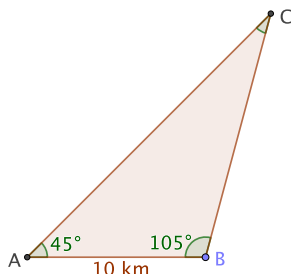
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \alpha'} = \frac{a}{a/2R} = 2R. \quad \blacksquare$$

**Ejercicio:** Demostrar el teorema 3.5 a partir del teorema de los senos.

Veamos algunos ejemplos de aplicación de estos teoremas:



**Ejemplo 1** Dos ciudades  $A$  y  $B$  están a 10 km de distancia. Un día se desata un incendio en un punto  $C$ , y el humo se observa en las direcciones que indica la figura:



¿A qué distancia se encuentra el fuego de la ciudad  $B$ ?

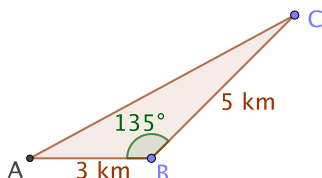
SOLUCIÓN: El ángulo en  $C$  es de  $30^\circ$ , luego el teorema de los senos nos da que

$$\frac{10}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{\overline{BC}}{\operatorname{sen} 45^\circ},$$

luego

$$\overline{BC} = \frac{10\sqrt{2}/2}{1/2} = 14.14 \text{ km.}$$

**Ejemplo 2** Si caminamos 3 km hacia el este y luego 5 km hacia el noreste, ¿cuánto nos hemos alejado del punto de partida?

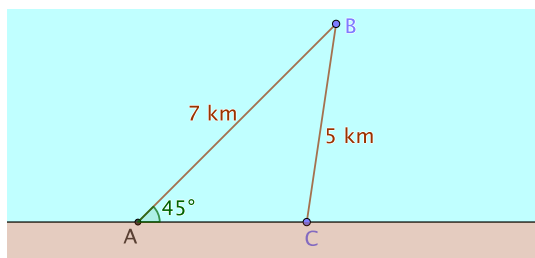


SOLUCIÓN: Por el teorema del coseno, tenemos que

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos 135^\circ = 9 + 25 + 30 \frac{\sqrt{2}}{2} = 55.21,$$

luego  $b = \sqrt{55.21} = 7.43 \text{ km.}$

**Ejemplo 3** Una lancha se aleja de la costa en dirección noreste, recorre 7 km y luego regresa a la costa recorriendo 5 km. ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida?



SOLUCIÓN: Llamando  $x = \overline{AC}$ , por el teorema del coseno, tenemos que

$$5^2 = x^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot x \cos 45^\circ,$$

luego

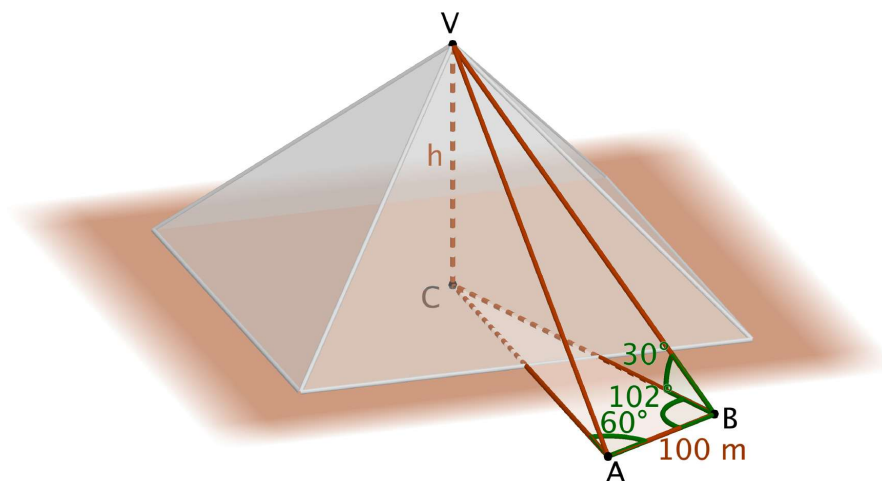
$$x^2 - 7\sqrt{2}x + 24 = 0.$$

Esto nos da las soluciones

$$x = \frac{7\sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{2} = \begin{cases} 3\sqrt{2} = 4.24 \text{ km} \\ 4\sqrt{2} = 5.65 \text{ km} \end{cases}$$

La solución que muestra la figura es la menor, pero la lancha podría haber navegado hacia el este en el segundo tramo, y entonces habría acabado a 5.65 km del punto de partida. ■

**Ejemplo 4** Veamos ahora cómo se puede medir la altura de una pirámide (o de cualquier objeto) mediante trigonometría. Basta elegir dos puntos  $A$  y  $B$  cuya distancia sea conocida y, desde ellos, medir los ángulos que se indican en la figura (todos ellos son fáciles de medir con un teodolito):



Con los datos de la figura, el ángulo  $\hat{C}$  del triángulo  $\widehat{ABC}$  es de  $18^\circ = \pi/10$ , y por el teorema de los senos,

$$\frac{100}{\text{sen } 18^\circ} = \frac{\overline{BC}}{\text{sen } 60^\circ},$$

luego

$$\overline{BC} = \frac{100}{(-1 + \sqrt{5})/4} \frac{\sqrt{3}}{2} = 280.25 \text{ m},$$

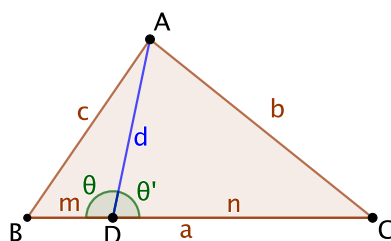
y entonces

$$\frac{h}{280.25} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

luego  $h = 161.8 \text{ m}$ . ■

El teorema siguiente fue demostrado en 1746 por el matemático británico Matthev Stewart:

**Teorema 3.19 (Teorema de Stewart)** *En la situación de la figura:*



se cumple la relación  $b^2m + c^2n = a(d^2 + mn)$ .

DEMOSTRACIÓN: Aplicamos el teorema del coseno a los dos triángulos pequeños:

$$c^2 = d^2 + m^2 - 2md \cos \theta, \quad b^2 = d^2 + n^2 - 2nd \cos \theta' = d^2 + n^2 + 2nd \cos \theta.$$

Multiplicamos la primera ecuación por  $n$ , la segunda por  $m$  y sumamos:

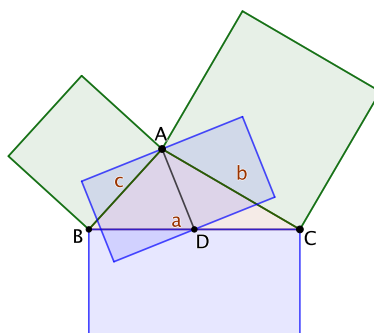
$$mb^2 + nc^2 = (m+n)d^2 + mn^2 + nm^2 = (m+n)mn + (m+n)d^2 = a(d^2 + mn).$$

El caso particular en que  $m = n$  es más antiguo:

**Teorema 3.20 (Teorema de Apolonio)** *Si D es el punto medio del lado  $\overline{BC}$  de un triángulo:*

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2).$$

Equivalentemente, en la figura siguiente el área de los dos cuadrados es igual al área de los dos rectángulos:



**Cálculo de las razones trigonométricas** Todos los ejemplos anteriores estaban “amañados” para que los ángulos involucrados estuvieran entre aquellos pocos de los que conocemos sus razones trigonométricas, pero esto no es algo que pueda esperarse en ejemplos reales. Es obvio que la trigonometría sirve de muy poco si no sabemos cómo calcular las razones trigonométricas de un ángulo arbitrario. La clave para ello está en el teorema siguiente:

**Teorema 3.21** Si  $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi/2$ , entonces

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha,$$

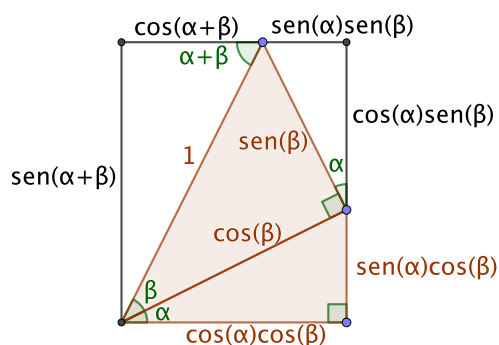
$$\operatorname{cos}(\alpha + \beta) = \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta.$$

DEMOSTRACIÓN: Si  $\alpha = 0$  o  $\beta = 0$ , teniendo en cuenta que  $\operatorname{sen} 0 = 0$  y  $\operatorname{cos} 0 = 1$ , las fórmulas son triviales. Igualmente, como  $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$  y  $\operatorname{cos}(\pi/2) = 0$ ,  $\operatorname{sen} \pi = 0$ ,  $\operatorname{cos} \pi = -1$ , se comprueba que las fórmulas son válidas para  $\alpha = \beta = \pi/2$ . Si  $\beta = \pi/2$  y  $0 < \alpha < \pi/2$ , tenemos

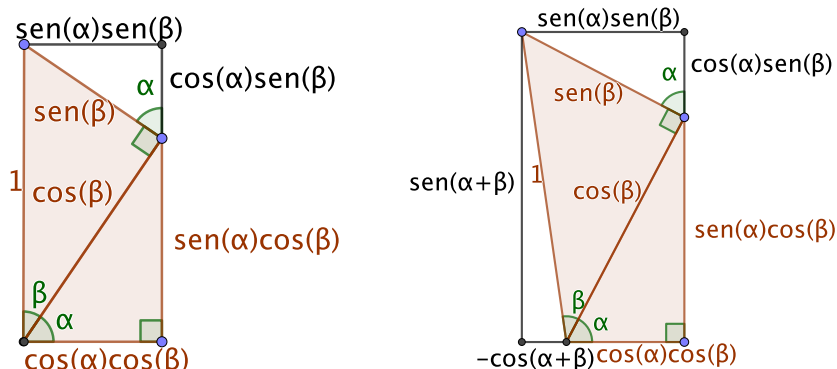
$$\operatorname{sen}(\alpha + \pi/2) = \operatorname{sen}(\pi - \pi/2 - \alpha) = \operatorname{sen}(\pi/2 - \alpha) = \operatorname{cos} \alpha,$$

$$\operatorname{cos}(\alpha + \pi/2) = -\operatorname{cos}(\pi - \pi/2 - \alpha) = -\operatorname{cos}(\pi/2 - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha,$$

donde hemos usado la relación entre las razones trigonométricas de un ángulo agudo y las de su complementario. Lo mismo vale si es  $\alpha = \pi/2$ , luego sólo falta probar el teorema cuando  $0 < \alpha, \beta < \pi/2$ . Consideramos primero el caso en que  $\alpha + \beta < \pi/2$ .



La figura muestra un triángulo rectángulo de hipotenusa unitaria y ángulo  $\beta$ , con lo que sus catetos son  $\cos \beta$  y  $\sin \beta$ . Sobre el cateto  $\cos \beta$  está construido otro triángulo rectángulo de ángulo  $\alpha$ , con lo que sus catetos son  $\cos \alpha \cos \beta$  y  $\sin \alpha \cos \beta$ . El otro ángulo no recto de este triángulo es  $\pi/2 - \alpha$ , luego el ángulo situado sobre él en la figura es también  $\alpha$ , como se indica. Observemos también que el ángulo marcado como  $\alpha + \beta$  tiene en efecto esta amplitud porque es alterno interno con  $\alpha + \beta$ . Las dos fórmulas del enunciado son inmediatas a partir de la figura. Si  $\alpha + \beta$  es recto u obtuso la situación es similar:



En particular, si  $0 \leq \beta \leq \pi/4$ , tenemos que

$$\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta, \quad \cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = 2 \cos^2 \beta - 1.$$

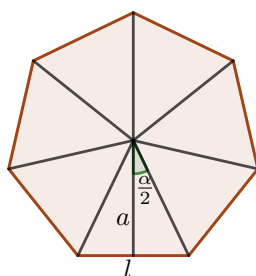
A su vez, llamando  $\alpha = 2\beta$ , obtenemos que

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

luego

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}.$$

**Ejemplo: El área de un polígono regular** Consideremos un polígono regular de  $n$  lados, y sea  $\alpha = 2\pi/n$ .



Es claro que el área del polígono es  $n$  veces el área del triángulo formado por el centro y dos vértices consecutivos. La altura de dicho triángulo es lo que se llama el *apotema* del polígono, de modo que el área es

$$S = \frac{nla}{2}.$$

Notemos que  $nl$  es el *perímetro* del polígono (la suma de las longitudes de sus lados), por lo que la fórmula también se expresa como  $S = pa/2$ . Por otro lado, la trigonometría nos da que

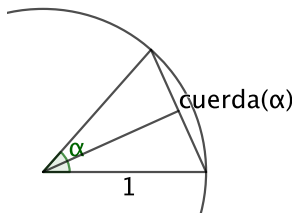
$$\frac{l/2}{a} = \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}},$$

luego la relación entre el área y el lado de un polígono regular es:

$$S = \frac{nl^2}{4} \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}. \quad \blacksquare$$

Las fórmulas del seno y el coseno del ángulo mitad nos permiten calcular las razones trigonométricas de  $\pi/2^n$  para todo número natural  $n$ , y a su vez, usando las fórmulas para el seno y el coseno de una suma, podemos calcular las razones trigonométricas de todos los ángulos de la forma  $\alpha = m\pi/2^n$ , para  $0 \leq m/2^n \leq 1/2$ . Pero todo ángulo entre 0 y  $\pi/2$  puede aproximarse con cualquier grado de precisión deseado por un ángulo de esta forma, lo que nos permite aproximar  $\sin \alpha$  y  $\cos \alpha$  con cualquier grado de precisión deseado.

La primera tabla trigonométrica de que se tiene referencia se debe al astrónomo griego Hiparco, que vivió en el siglo II a.C. Era una tabla de cuerdas. Los griegos definían la *cuerda* de un ángulo como la longitud de la cuerda que une los extremos de un arco de amplitud  $\alpha$  en una circunferencia de radio 1.

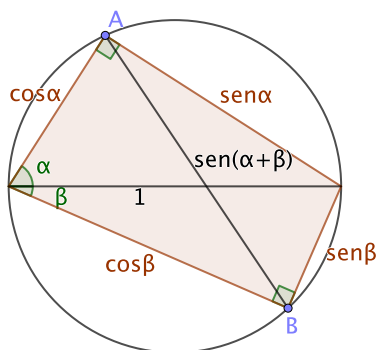


Trabajar con cuerdas es equivalente a trabajar con senos, pues, claramente:

$$\text{cuerda}(\alpha) = 2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Concretamente, Hiparco tabuló las cuerdas de los ángulos entre 0 y  $180^\circ$  a intervalos de  $7.5^\circ$  (es decir, en arcos de  $1/24$  de circunferencia). Varios siglos más tarde, Ptolomeo incluyó en el capítulo XI de su *Almagesto* una tabla con las cuerdas de los ángulos entre 0 y  $180^\circ$  a intervalos de medio grado. Esta tabla no fue mejorada hasta el siglo XVI, cuando el matemático suizo Joost Bürgi publicó una tabla de senos a intervalos de 2 segundos de arco.

Ptolomeo usó el teorema que hoy lleva su nombre para el cálculo de cuerdas. Observemos que incluye como caso particular la fórmula para el seno de una suma. Basta considerar en una circunferencia de radio  $1/2$  un cuadrilátero con una diagonal igual a un diámetro:

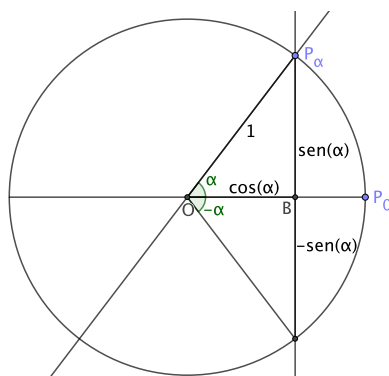


Notemos que una diagonal mide 1 y la otra es  $\sin(\alpha + \beta)$  por el teorema de los senos, ya que en este caso  $2R = 1$ .

Nosotros vamos a resolver el problema del cálculo de las razones trigonométricas probando que las funciones seno y coseno que hemos definido aquí son las mismas definidas en el capítulo V de [ITAn] y, por consiguiente, las mismas que calcula cualquier calculadora de bolsillo. Para ello extendemos las funciones seno y coseno al intervalo  $[-\pi, \pi]$  con el convenio:

$$\sin(-\beta) = -\sin \beta, \quad \cos(-\beta) = \cos \beta, \quad \tan(-\beta) = -\tan \beta.$$

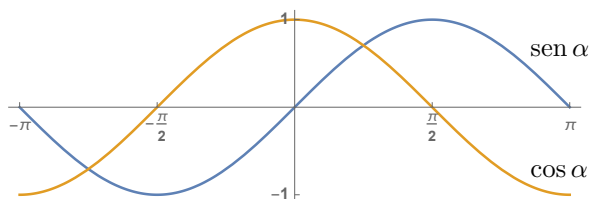
La figura muestra que este convenio es natural si entendemos que  $-\alpha$  es otra forma de nombrar al ángulo  $2\pi - \alpha$ :



Ahora tenemos definidas dos funciones

$$\sin, \cos : [-\pi, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

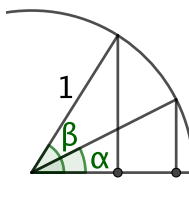
cuyas gráficas resultan ser las siguientes:



Sobre ellas, entre otras cosas, sabemos lo siguiente:

1.  $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$ .
2.  $\text{sen} : [0, \pi/2] \rightarrow [0, 1]$  es estrictamente creciente y suprayectiva, mientras que  $\text{cos} : [0, \pi/2] \rightarrow [0, 1]$  es estrictamente decreciente y suprayectiva.

En efecto, las funciones toman todos los valores entre 0 y 1 porque ciertamente toman los valores 0 y 1 y, si  $0 < x < 1$ , podemos construir un triángulo rectángulo con catetos  $x$  y  $\sqrt{1-x^2}$ , y entonces la hipotenusa medirá 1, luego  $x$  será el seno de uno de sus ángulos y el coseno del otro. Por otro lado, es evidente que, para ángulos agudos, cuando mayor es un ángulo, mayor es su seno y menor su coseno:



3. Si  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ , entonces

$$\text{sen}(\alpha + \pi/2) = \text{cos } \alpha, \quad \text{cos}(\alpha + \pi/2) = -\text{sen } \alpha.$$

Esto es un caso particular de 3.21 y se traduce en que el valor de las funciones seno y coseno en el intervalo  $[0, \pi/2]$  determina los valores que toman en  $[\pi/2, \pi]$ , luego determinan los valores que toman en todo el intervalo  $[0, \pi]$ .

4.  $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen } \alpha, \quad \text{cos}(-\alpha) = \text{cos } \alpha$ .

Esto se cumple por definición, y se traduce en que el valor de las funciones seno y coseno en el intervalo  $[0, \pi/2]$  determinan de hecho los valores que toman sobre todo el intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

Finalmente observamos que podemos extender las definiciones de las funciones seno y coseno a todos los números reales estableciendo que se repitan periódicamente, como muestran las gráficas siguientes:





Técnicamente, observamos que, dado cualquier número real  $\alpha$ , existe un único número entero  $k$  tal que

$$-\pi + 2k\pi \leq \alpha < \pi + 2k\pi,$$

pues estas desigualdades equivalen a

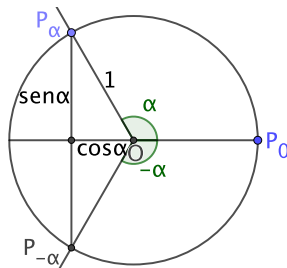
$$k \leq \frac{\pi + \alpha}{2\pi} < k + 1,$$

lo cual equivale a que  $k = E[(\pi + \alpha)/2\pi]$ . Por lo tanto,  $\alpha$  se expresa de forma única como  $\alpha = \alpha_0 + 2k\pi$ , con  $-\pi \leq \alpha_0 < \pi$  y podemos definir

$$\text{sen } \alpha = \text{sen } \alpha_0, \quad \text{cos } \alpha = \text{cos } \alpha_0.$$

En particular, si  $-\pi \leq \alpha < \pi$  la nueva definición coincide con la que ya teníamos, mientras que, con la nueva definición, tenemos  $\text{sen } \pi = \text{sen}(-\pi) = 0$ ,  $\text{cos } \pi = \text{cos}(-\pi) = -1$ , luego el resultado también coincide con la definición anterior.

**Nota** Conviene observar que la extensión al intervalo  $[-2\pi, 2\pi]$  tiene una interpretación geométrica natural. Consideremos por ejemplo la figura siguiente:



Tomemos, por ejemplo, el grado sexagesimal como unidad de amplitud. Entonces, el punto  $P_\alpha$  de la figura corresponde tanto a  $\alpha = 120^\circ$  como a  $\alpha = 120 - 360 = -240^\circ$ , es decir, que es el punto al que llegamos tanto girando  $P_0$  un ángulo de  $120^\circ$  en sentido antihorario como  $240^\circ$  en sentido horario. Igualmente, el punto  $P_{-\alpha}$  es tanto  $P_{-120}$  como  $P_{240}$ .

En general, cada punto de una circunferencia graduada puede determinarse por un único  $0 \leq \alpha < 2\pi$  y también por un único  $-2\pi < \alpha \leq 0$ . En cualquier caso,  $\text{sen } \alpha$  es el cateto indicado en la figura, con el convenio de que el seno es positivo si  $P_\alpha$  está en el semiplano superior y negativo si está en el semiplano inferior. Igualmente,  $\text{cos } \alpha$  es el cateto indicado, con el convenio de que es positivo si está en el semiplano derecho y negativo si está en el izquierdo.

Hemos probado que las funciones

$$\text{sen}, \text{cos} : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$$

cumplen todas las hipótesis del teorema [ITAn 5.3]. La conclusión es que, si llamamos  $p$  al número que hasta ahora estábamos llamando  $\pi$ , es decir, a la

amplitud del ángulo llano, que depende de la elección de la unidad de medida, se cumple que las funciones  $\sin x$  y  $\cos x$  que hemos definido aquí coinciden con las funciones  $\sin((\pi/p)x)$  y  $\cos((\pi/p)x)$  definidas en [ITAn 5.1], donde ahora  $\pi = 3.1415\dots$  es el número definido allí mismo.

Equivalentemente, si tomamos como unidad de amplitud  $2R/\pi$ , donde  $R$  es la amplitud del ángulo recto y  $\pi$  es el definido en [ITAn], entonces la medida del ángulo llano es precisamente este valor de  $\pi$  y las funciones  $\sin$  y  $\cos$  que hemos definido aquí coinciden exactamente con las definidas en [ITAn], por lo que la unidad de amplitud  $2R/\pi$  no es sino el *radián*, definido en [ITAn 5.6], de modo que, según [ITAn 5.7], la medida de un ángulo  $\alpha$  en radianes coincide con la longitud del arco que abarca en una circunferencia graduada de radio unitario.

En lo sucesivo tomaremos siempre como  $\pi$  el valor definido en [ITAn], es decir, la longitud de una circunferencia de diámetro 1, o el área de un círculo de radio 1, y a partir de aquí damos por sabido que las funciones trigonométricas cumplen todas las propiedades demostradas en [ITAn]. En particular, las fórmulas del teorema 3.21 son válidas para todas las amplitudes reales, no necesariamente entre 0 y  $\pi/2$ . También contamos con las funciones inversas

$$\arcsen x, \quad \arccos x, \quad \arctan x$$

introducidas en la sección 5.3 de [ITAn] y que nos permiten calcular (por ejemplo, a través del desarrollo en serie [ITAn 6.11]) los ángulos cuyo seno, coseno o tangente toma un valor dado.

**La aproximación del heptágono de Durero** Por ejemplo, ahora sólo necesitamos una calculadora para concluir que

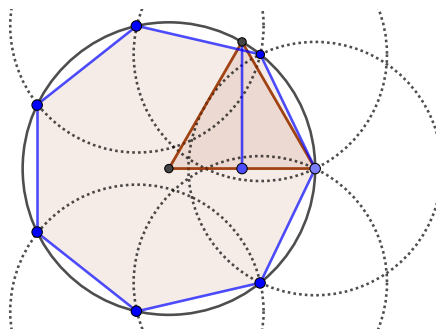
$$\sen \frac{\pi}{7} = 0.433884\dots \quad 4 \sen \frac{\pi}{7} = 1.735535\dots$$

y este valor se parece bastante a  $\sqrt{3} = 1.732051\dots$

El lado de un heptágono regular de radio 1 mide

$$2 \sen \pi/7 = 0.867767\dots,$$

por lo que si lo aproximamos por  $\sqrt{3}/2 = 0.866025\dots$  (la altura de un triángulo equilátero de lado unitario) estamos cometiendo un error del 2%. Esta aproximación del heptágono regular se atribuye al pintor Alberto Durero:



Seis de los ángulos del polígono construido miden realmente

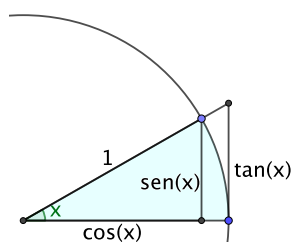
$$2 \arcsen(\sqrt{3}/4) = 51.317813 \dots^\circ$$

en lugar de los  $360/7 = 51.428571 \dots^\circ$  que deberían medir, lo que supone un error de un 0.22%. El último mide  $52.093125 \dots^\circ$ , lo que supone un error de casi  $40'$  (un 1.3%). ■

Es interesante considerar la demostración geométrica siguiente de las desigualdades

$$\cos x \leq \frac{\sen x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}, \quad 1 \leq \frac{\tan x}{x} \leq \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (3.1)$$

válidas para  $0 < |x| < \pi/2$ . Podemos suponer  $x > 0$ , y entonces basta considerar la figura siguiente:



El arco que limita el sector circular sombreado tiene longitud  $x$ , mientras que la circunferencia completa tiene longitud  $2\pi$  por lo que el sector circular es la  $x/2\pi$ -ava parte del círculo completo, que tiene área  $\pi$ , luego el sector circular tiene área  $x/2$ . Comparando esta área con la de los dos triángulos que muestra la figura concluimos que

$$\frac{1}{2} \cos x \sen x \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} \tan x = \frac{1}{2} \frac{\sen x}{\cos x}.$$

De la primera desigualdad se sigue que

$$\frac{\sen x}{x} \leq \frac{1}{\cos x},$$

y de la segunda

$$\cos x \leq \frac{\sen x}{x}.$$

Esto nos da la primera serie de desigualdades de (3.1) y, dividiendo entre  $\cos x$ , obtenemos la segunda. ■

En particular,

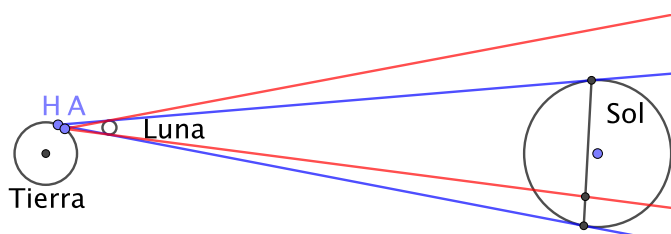
$$0 \leq \tan x - x = x \left( \frac{\tan x}{x} - 1 \right) \leq x \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = x \frac{\sen^2 x}{\cos^2 x} = x^3 \left( \frac{\tan x}{x} \right)^2,$$

luego si  $x$  es pequeño (basta  $x \leq 0.9$ ) se cumple que  $0 \leq \tan x - x \leq 2x^3$ , luego la diferencia entre  $x$  y  $\tan x$  es mucho menor que  $x$ , por lo que  $\tan x \approx x$  es una buena aproximación.

**Hiparco y la distancia a la Luna** El astrónomo griego Hiparco calculó de dos formas distintas la distancia de la Tierra a la Luna. Con una obtuvo la estimación de  $67 + 1/3$  radios terrestres, y con otra concluyó que era de 71 radios terrestres. En realidad es de 60.33. Vamos a presentar el segundo cálculo que, aunque es el que le llevó a un resultado más alejado del real, es el más exacto desde un punto de vista geométrico.

Hiparco se basó en un eclipse de sol, que en la región del Helesponto —por ejemplo, en Nicea, su ciudad natal— fue total, pero en Alejandría, donde vivía, fue parcial. Según Hiparco, la Luna sólo ocultó las cuatro quintas partes del Sol. Estos datos cuadran bien con un eclipse que tuvo lugar el 14 de marzo de 190 a.C.

La figura muestra dos puntos  $H$  y  $A$  de la superficie terrestre junto con las zonas ocultadas por la Luna en cada una de ellos. En el caso de  $H$  la Luna “encaja” con el Sol y lo oculta completamente, mientras que en el caso de  $A$  deja una zona al descubierto.



Cuando hablamos del diámetro solar nos referimos al diámetro aparente en la esfera celeste, y lo natural es considerarlo, no como una longitud, sino como un ángulo. A lo largo del año el diámetro aparente del sol oscila entre  $31'36''$  y  $32'42''$ . Hiparco lo estimó en un 650-avo de circunferencia, es decir,

$$\alpha = \frac{360}{650} = 0.553846^\circ = 33'13.84''.$$

Que la Luna dejó  $1/5$  del disco solar sin cubrir hay que entenderlo como que dejó un ángulo  $\mu = \alpha/5$  sin cubrir. Así pues:

$$\mu = \frac{360}{650 \cdot 5} = 0.110769^\circ.$$

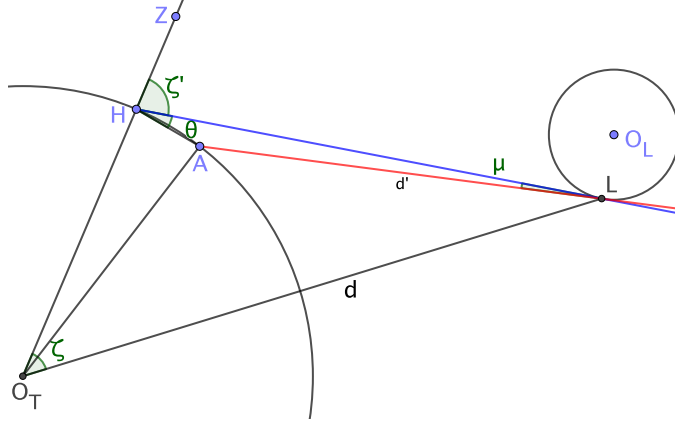
Si ahora nos fijamos en la zona de la figura próxima a la Tierra y la Luna veremos que el ángulo  $\mu$  tiene su vértice en el punto  $L$  donde se ve el borde de la Luna desde  $H$  y desde  $A$  (en realidad son dos puntos distintos, pero prácticamente indistinguibles), y es igual a su opuesto por el vértice, que forma parte del triángulo  $\widehat{HAL}$  en la figura siguiente. Para resolverlo necesitamos conocer  $\widehat{HA}$  y  $\theta$ . Veamos en primer lugar cómo calcular  $\theta$ :

En primer lugar,  $\widehat{ZHA} = \pi - \widehat{O_THA}$ , y a su vez, como el triángulo  $\widehat{O_THA}$  es isósceles:

$$\widehat{O_THA} = \frac{\pi - \widehat{AO_TH}}{2}.$$

Ahora,  $\widehat{AO_T H} = \phi_H - \phi_A$  es la diferencia entre las latitudes<sup>2</sup> de  $H$  y  $A$ . En total:

$$\widehat{ZHA} = \pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\phi_H - \phi_A}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\phi_H - \phi_A).$$



Hiparco había medido las longitudes y latitudes de varios lugares tomando como referencia las estrellas. Algunos de sus resultados nos han llegado a través de la *Geografía* de Estrabón, en la que consta que conocía las latitudes de  $31^\circ$  para Alejandría y  $41^\circ$  para Nicea (las mediciones actuales son  $31^\circ 12'$  y  $40^\circ 25'$ , respectivamente), lo que nos da  $\phi_H - \phi_A = 10^\circ$ . A su vez,

$$\theta = \widehat{LHA} = \widehat{ZHA} - \zeta'.$$

Ahora tenemos en cuenta que si unimos  $H$  y  $O_T$  con un punto situado en la Luna, los segmentos  $\overline{HL}$  y  $\overline{O_T L}$  se van a ver casi paralelos en la Tierra, por lo que los ángulos  $\zeta$  y  $\zeta'$  serán muy parecidos (la diferencia será del orden de medio grado). Aceptando, pues,  $\zeta' = \zeta$ , obtenemos la estimación

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\phi_H - \phi_A) - \zeta.$$

Para el cálculo de  $\zeta$  podemos desprestigiar la diferencia entre  $\overline{O_T L}$  y  $\overline{O_T O_L}$ , y entonces  $\zeta$  es la resta de la latitud  $\phi_H$  (es decir, el ángulo que  $H$  forma con el ecuador) menos la declinación  $\delta$  de la Luna (el ángulo que la Luna forma con el ecuador). En el eclipse del 14 de marzo de  $-190$  la declinación fue  $\delta = -3^\circ$  (es decir, que la Luna estaba un poco más baja que el ecuador), y cabe suponer que Hiparco conocía este dato. Por lo tanto,  $\zeta = \phi_H - \delta = 41^\circ + 3^\circ = 44^\circ$ . Continuando el cálculo:

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\phi_H - \phi_A) - \phi_H + \delta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\phi_H + \phi_A) + \delta.$$

<sup>2</sup>Alejandría y Nicea están casi sobre el mismo meridiano, pero la figura supone que el Sol y la Luna también se encontraban alineados con dicho meridiano, lo cual requeriría que el eclipse hubiera sucedido a mediodía, y no fue así, sino que tuvo lugar por la mañana temprano. Esto hace que el cálculo dé en realidad una cota inferior para la distancia a la Luna.

En definitiva:

$$\theta = 90^\circ - \frac{1}{2}(41^\circ + 31^\circ) - 3^\circ = 51^\circ.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que el triángulo  $\widehat{O_TAH}$  es isósceles con ángulo desigual de  $10^\circ$ , es claro que

$$\overline{AH} = 2R_T \operatorname{sen} 5^\circ,$$

donde  $R_T$  es el radio de la Tierra. Hiparco estimó

$$2 \operatorname{sen} 5^\circ = \frac{600}{3438} \approx 0.17452.$$

El valor real es 0.1743...

Con estos valores ya podemos resolver el triángulo  $\widehat{HAL}$ . Aplicamos el teorema de los senos:

$$\frac{d'}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{\overline{AH}}{\operatorname{sen} \mu}.$$

No vamos a entrar en las aproximaciones que hizo Hiparco para calcular los senos (o las cuerdas), pero poniendo los valores reales se obtiene  $d' = R_T \cdot 70.15$ . Probablemente Hiparco obtuvo  $d' \approx 70R_T$ , y para calcular la distancia entre el centro de la Tierra y el centro de la Luna añadió un radio terrestre y concluyó que  $d = 71R_T$ .

Aunque hemos hecho bastantes aproximaciones, el dato más sensible es el valor de  $\mu$ . Por ejemplo, si en lugar de suponer que el eclipse en Alejandría dejó  $1/5 = 10/50$  del Sol sin cubrir hubiéramos supuesto que había dejado  $11/50$  sin cubrir (algo difícilmente distinguible sin instrumentos precisos) el resultado obtenido habría sido de 65 radios terrestres, mucho más ajustado a la realidad. De todos modos, la figura siguiente muestra a escala la Tierra, la Luna a la distancia real y la Luna a la distancia calculada por Hiparco.



No cabe duda de que, en relación a los medios disponibles, el resultado es excelente. ■

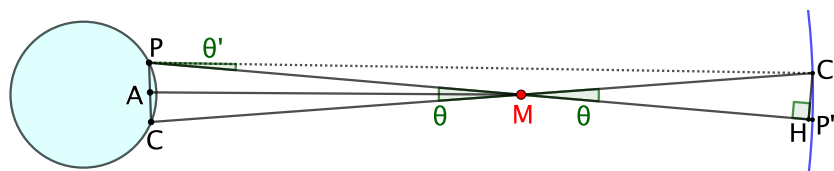
**Paralaje** El *paralaje* (gr. “diferencia”) es un fenómeno óptico muy fácil de producir sin más que extender verticalmente un dedo cerca de la nariz y mirarlo alternativamente con uno y otro ojo. Veremos que el dedo parece cambiar de posición respecto de los objetos más lejanos. El cerebro humano usa el paralaje producido por la distancia entre ambos ojos para estimar la distancia entre los objetos, y los astrónomos se dieron cuenta de que el mismo principio podría servir para calcular la distancia de la Tierra a diversos cuerpos celestes.

En realidad esta idea subyace ya en el cálculo de Hiparco de la distancia de la Tierra a la Luna, que depende esencialmente de una estimación del cambio de posición aparente del borde de la Luna respecto del Sol cuando se observa desde dos puntos distintos de la Tierra suficientemente alejados como para que éste sea apreciable.

El cuerpo celeste más cercano a la Tierra después de la Luna es Marte, y el 1 de octubre de 1672 el astrónomo italiano Giovanni Cassini midió su paralaje respecto de la esfera celeste observándolo simultáneamente desde dos puntos distintos de la superficie terrestre. Dado que Marte está mucho más lejos que la Luna, para que el paralaje fuera apreciable era necesario que los puntos de observación estuvieran mucho más separados que Alejandría y Nicea, así que Cassini había enviado a su ayudante Jean Richer a Cayena, en la Guayana Francesa, para que observara Marte mientras él lo observaba desde París.

La fecha no era casual, sino que fue elegida porque ese día Marte se encontraba en oposición perihélica, lo que significa que Marte, la Tierra y el Sol estaban alineados (en ese orden) con Marte cerca de su perihelio, lo cual implica que era un momento en el que la distancia a la Tierra es menor y además, al medir la distancia a Marte en ese momento estaba midiendo en realidad la diferencia entre los radios de las órbitas respectivas.

La situación geométrica es la siguiente:



Al observar Marte desde el punto  $P$  (París), el planeta se ve situado en un punto  $P'$  de la esfera celeste, mientras que al observarlo desde el punto  $C$  (Cayena), se ve situado en un punto  $C'$ . Ahora observamos que el ángulo  $\theta$  con el que los puntos  $C'$  y  $P'$  se ven desde Marte es prácticamente el mismo que el ángulo  $\theta'$  con que estos puntos se ven desde París y, de hecho, desde cualquier punto de la superficie terrestre. En efecto, si consideramos el triángulo rectángulo  $\overline{MHC'}$ , tenemos que  $\overline{C'H} = \overline{MH} \tan \theta$ , luego

$$\theta' = \arctan \frac{\overline{MH} \tan \theta}{\overline{PM} + \overline{MH}} = \arctan \frac{\tan \theta}{1 + \overline{PM}/\overline{MH}} \approx \arctan \tan \theta = \theta,$$

pues la distancia de Marte a la esfera celeste es infinitamente mayor que su distancia a la Tierra, luego  $\overline{PM}/\overline{MH}$  es prácticamente 0. El valor que Cassini y Richer obtuvieron fue  $\theta = 19''$ . Para calcular la distancia a Marte usamos que

$$\overline{MA} = \frac{\overline{PC}}{2 \tan(\theta/2)}$$

donde la distancia (en línea recta)  $\overline{PC}$  entre París y Cayena es de 6700 km, lo que nos permite concluir que Marte se encontraba a unos 72.7 millones de km de la Tierra.<sup>3</sup>

<sup>3</sup>El valor de la distancia entre París y Cayena podía mejorarse ligeramente, pues en realidad es de 6680 km y, con instrumentos de mayor precisión, Cassini y Richer habrían obtenido que el ángulo era más bien  $\theta = 16.6''$ . Repitiendo el cálculo con estos datos la distancia Tierra-Marte resulta ser en realidad de 78.3 millones de km. El error de Cassini y Richer fue de poco más de un 7%.

De aquí Cassini obtuvo mucha más información. La tercera ley de Kepler afirma que, para cada planeta, el cuadrado de su periodo orbital es proporcional al cubo del radio de su órbita. Así, como Marte tarda 687 días en dar una vuelta completa alrededor del Sol y la Tierra tarda 365.25 días, sus radios respectivos cumplen la relación

$$\frac{R_M^3}{R_T^3} = \frac{687^2}{365.25^2},$$

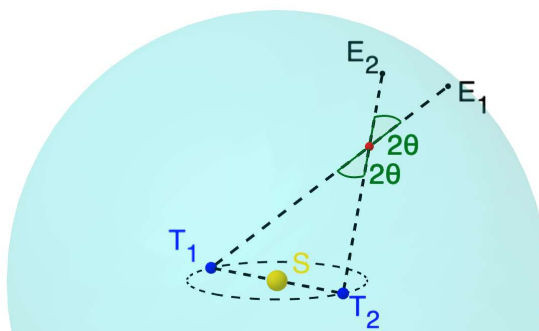
luego  $R_M = 1.52374R_T$ , y uniendo esto a que, según la medición de Cassini,  $R_M - R_T = 72.7$  millones de km, concluimos que  $R_T = 139$  millones de km. La distancia media de la Tierra al Sol es lo que se conoce como una *unidad astronómica*, y su valor real (obtenido por telemetría con radares desde sondas espaciales) es<sup>4</sup>

$$1 \text{ ua} = 149\,597\,870\,700 \text{ m},$$

por lo que el error de Cassini es poco más de un 7%. Igualmente se puede calcular la distancia al Sol de todos los planetas del sistema solar.

Las estrellas están demasiado lejanas para que se pueda apreciar paralaje alguno al observarlas desde cualquier par de puntos de la superficie terrestre, pero conociendo la distancia de la Tierra al Sol se puede observar una misma estrella desde dos puntos opuestos de la órbita terrestre, y esta distancia es suficiente para detectar paralajes en las estrellas más próximas, al menos con instrumentos de precisión suficiente.

Concretamente, el *paralaje* de una estrella se define como la mitad del ángulo que forman sus posiciones aparentes en la esfera celeste cuando es observada desde dos puntos diametralmente opuestos de la órbita terrestre (medido respecto a las estrellas para las que no se observa desplazamiento alguno, que son la inmensa mayoría).



Como antes, el doble del paralaje  $2\theta$  es indistinguible del ángulo con que se ven desde la estrella los dos puntos de observación, por lo que la distancia de la estrella al Sol resulta ser

$$d = \frac{U}{\tan \theta},$$

<sup>4</sup>Con los datos indicados en la nota precedente se obtiene el valor real  $R_T = 149.476$  millones de km.



donde  $U = 149\,597\,870.7$  km es una unidad astronómica. Los paralajes estelares son siempre ángulos tan pequeños que les podemos aplicar tranquilamente la aproximación  $\tan \theta \approx \theta$  que hemos discutido en la página 117, con lo que la distancia  $d$  puede calcularse más sencillamente como  $d = U/\theta$  (con  $\theta$  expresado en radianes). Si llamamos  $\theta''$  al paralaje expresado en segundos de arco, que es la unidad habitual, entonces

$$d = \frac{180 \cdot 3600 U}{\pi \theta''}.$$

La longitud

$$\text{pc} = \frac{180 \cdot 3600 U}{\pi} = 30\,856\,775\,814\,913.673 \text{ km} \approx 3.261563777 \text{ años luz}$$

se llama *parsec* (paralaje de un segundo de arco) y es la distancia a la que se encuentra una estrella cuyo paralaje sea de un segundo. Hemos probado que si el paralaje en segundos de una estrella es  $\theta''$ , entonces su distancia al Sol es de

$$d = \frac{1}{\theta''} \text{ pc}.$$

El primer paralaje estelar fue medido en 1838 por el astrónomo alemán Friedrich Wilhelm Bessel, que estableció para la estrella 61 Cygni un paralaje de  $0.314''$ , lo que corresponde a una distancia de  $3.184713$  pc, o de  $10.387$  años luz.

Es interesante observar el error cometido al aproximar la tangente por el ángulo: El valor de  $\theta$  en grados es  $0.0000152231495868\dots$ , mientras que su tangente es  $0.0000152231495880\dots$ . La distancia (en años luz) calculada con y sin la aproximación es, respectivamente

$$d_{\text{apr}} = 10.38714578\dots, \quad d_{\text{ex}} = 10.387145787\dots$$

El error es inferior a  $100\,000$  km. Otra cosa es el error en la medición del paralaje. Hoy se sabe que en realidad es  $\theta = 0.286''$  y que la distancia de la estrella es de  $11.398$  años luz. El error cometido por Bessel fue de un  $8.5\%$ .

La estrella más próxima al Sol es Alfa Centauri, con un paralaje de  $768.7''$ , lo que corresponde a una distancia de  $1.295$  pc o  $4.22$  años luz, pero no es lo habitual. En general, los paralajes estelares son desorbitadamente pequeños. Por ejemplo, el de la estrella polar es de  $0.007576''$ , y los mejores telescopios situados en la Tierra no pueden apreciar paralajes menores de  $0.01$  segundos de arco (pero, por ejemplo, el telescopio espacial *Hubble* puede alcanzar una precisión de  $0.00002''$  y con sondas espaciales que se alejen más de la Tierra se pueden medir paralajes aún menores). ■

**La fórmula de Bretschneider** Uno de los problemas más prácticos que puede resolver la geometría es el cálculo del área de un cuadrilátero, pues es más frecuente encontrarse con parcelas de terreno en forma de cuadrilátero que

triangulares o circulares, etc. En principio, la forma natural de abordar el problema es dividir el cuadrilátero en dos triángulos, pero eso exige conocer la longitud de la diagonal correspondiente, y la forma en que ésta divide a los ángulos que conecta. En 1842 Anton Bretschneider publicó una fórmula muy simple.

En la prueba vamos a usar un hecho elemental que tienen interés en sí mismo: el área de un triángulo puede expresarse en términos de dos de sus lados y el ángulo que forman como

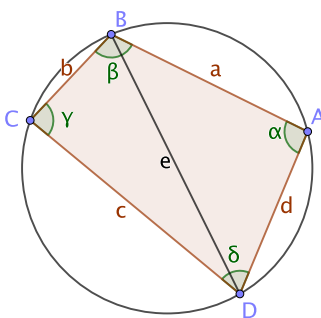
$$S = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} \alpha,$$

pues  $h = c \operatorname{sen} \alpha$  es la altura correspondiente a la base  $b$ .

**Teorema 3.22 (Fórmula de Bretschneider)** *El área de un cuadrilátero como el de la figura viene dada por*

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd \cos^2((\alpha + \gamma)/2)},$$

donde  $s = (a + b + c + d)/2$  es el semiperímetro del cuadrilátero.



DEMOSTRACIÓN: Por la observación precedente, el área del cuadrilátero viene dada por

$$S = \frac{1}{2}ad \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} \gamma,$$

luego

$$S^2 = \frac{1}{4}(a^2d^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + b^2c^2 \operatorname{sen}^2 \gamma + 2abcd \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \gamma).$$

Por el teorema del coseno, la diagonal  $e$  cumple:

$$e^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma.$$

Por lo tanto,

$$a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2ad \cos \alpha - 2bc \cos \gamma,$$

luego

$$\begin{aligned} (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 &= 4a^2d^2 \cos^2 \alpha + 4b^2c^2 \cos^2 \gamma - 4abcd \cos \alpha \cos \gamma \\ &= 4a^2d^2 + 4b^2c^2 - 4a^2d^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - 4b^2c^2 \operatorname{sen}^2 \gamma - 4abcd \cos \alpha \cos \gamma. \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(a^2d^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + b^2c^2 \operatorname{sen}^2 \gamma) &= \frac{1}{4}(a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \cos \alpha \cos \gamma) \\ &\quad - \frac{1}{16}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2. \end{aligned}$$

Sustituimos en la fórmula para  $S^2$ :

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{4}(a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd(\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \gamma - \cos \alpha \cos \gamma)) \\ &\quad - \frac{1}{16}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 \\ &= \frac{1}{4}(a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \cos(\alpha + \gamma)) - \frac{1}{16}(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 \\ &= \frac{1}{16}(4a^2d^2 + 4b^2c^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2) - \frac{1}{2}abcd \cos(\alpha + \gamma) \\ &= \frac{1}{16}(-a^4 - b^4 - c^4 - d^4 + 2a^2d^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2d^2b^2 + 2d^2c^2 + 2b^2c^2) \\ &\quad - \frac{1}{2}abcd \cos(\alpha + \gamma). \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} &(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d) = \\ &-a^4 - b^4 - c^4 - d^4 + 2a^2d^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2d^2b^2 + 2d^2c^2 + 2b^2c^2 + 8abcd, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{16}(-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d) \\ &\quad - \frac{1}{2}abdd - \frac{1}{2}abcd \cos(\alpha + \gamma) \\ &= (s - a)(s - b)(s - b)(s - d) - \frac{1}{2}abcd(1 + \cos(\alpha + \gamma)) \\ &= (s - a)(s - b)(s - b)(s - d) - abcd \cos^2 \frac{\alpha + \gamma}{2}, \end{aligned}$$

donde hemos usado la fórmula para el coseno del ángulo mitad. ■

La fórmula se simplifica si el cuadrilátero es cíclico, pues entonces el teorema 1.36 nos da que  $\alpha + \gamma = \pi$ , luego el coseno se anula. La fórmula resultante la conocía el matemático indio Brahmagupta en el siglo VI:

**Teorema 3.23 (Fórmula de Brahmagupta)** *El área de un cuadrilátero cíclico de lados  $a, b, c, d$  viene dada por la fórmula*

$$S = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)},$$

donde  $s = (a + b + c + d)/2$  es el semiperímetro.

Haciendo  $d = 0$  obtenemos como caso particular la fórmula de Herón (teorema 3.4).

### 3.6 Homotecias

Estudiamos ahora un último concepto geométrico elemental, que no es sino la noción familiar de “cambio de escala”. Una imagen puede ampliarse o reducirse para mostrar las mismas figuras mayores o menores, pero respetando las proporciones. Para abordarlo conviene introducir el convenio siguiente:

**Longitudes dirigidas** Si  $A, B, C, D$  son cuatro puntos alineados, consideraremos que la razón

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$$

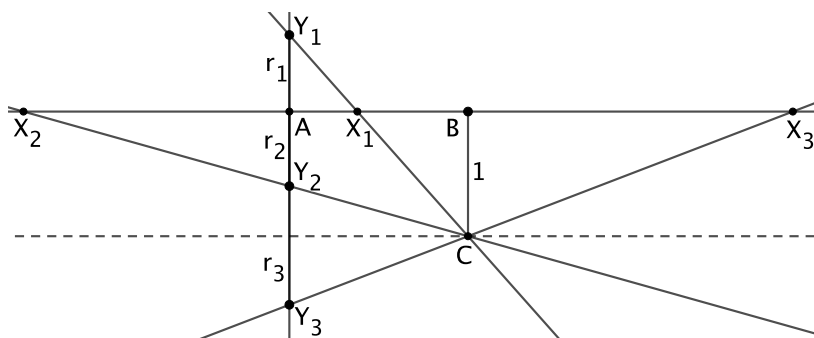
es positiva si los pares  $(A, B)$  y  $(C, D)$  inducen la misma orientación en la recta, es decir, si para movernos de  $A$  hasta  $B$  tenemos que desplazarnos en el mismo sentido que para movernos de  $C$  hasta  $D$ . En caso contrario consideraremos que la razón es negativa.

Así, dados tres puntos colineales  $B, C, D$  con  $C \neq D$ , existe un único punto  $A$  en la recta que pasa por ellos tal que la razón anterior toma un valor dado. En principio habría dos posibilidades, una en cada semirrecta con origen en  $B$ , pero el ajuste del signo descarta una de ellas.

Nos van a interesar principalmente razones de la forma

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}},$$

que serán positivas si y sólo si  $X$  está entre  $A$  y  $B$ . Notemos además que, fijados  $A \neq B$ , existe un único punto  $X$  en la recta  $AB$  para el que la proporción anterior toma un valor prefijado  $r \neq -1$ .



En efecto, si trazamos un segmento  $\overline{BC}$  de longitud 1 y perpendicular a  $\overline{AB}$ , para cada  $r \neq 1$  podemos considerar el punto  $Y$  que hace que el segmento  $\overline{AY}$  tenga longitud  $|r|$  y que esté en el semiplano opuesto a  $C$  respecto de  $AB$  si  $r > 0$  y en el mismo semiplano si  $r < 0$ . Entonces, sin considerar signos, el punto  $X$  donde se cortan las rectas  $AB$  e  $YC$  cumple

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = \frac{|r|}{1} = |r|,$$

por lo que hay exactamente dos puntos  $X$  que cumplen esto para cada  $r \neq 0, \pm 1$  (los que se obtienen tomando  $Y$  en un semiplano u otro), y uno solo que cumple la relación teniendo en cuenta los signos. (Para  $r = 0$  hay un único punto, que es  $X = A$  y para  $r = 1$  hay un único punto que es el punto medio de  $\overline{AB}$ .) Además, todo punto  $X$  de la recta  $AB$  distinto de  $B$  corresponde con un único valor de  $r$ .

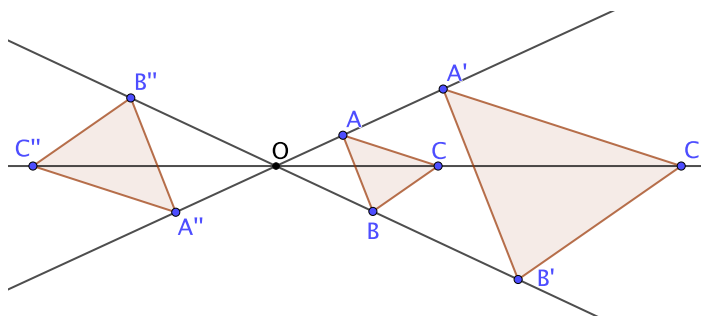
Notemos por último que

$$\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = -\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}},$$

por lo que si expresamos la proporción de esta forma, el valor que no puede darse es  $r = 1$ . En realidad este valor se da cuando  $A = B$ . ■

Pasamos ya a estudiar las homotecias. Para determinar una ampliación o reducción de una figura tenemos que especificar el factor de la escala  $r$ , pero también tenemos que elegir el único punto que no se moverá al efectuar la transformación, de modo que “ampliar” o “reducir” una imagen supone siempre ampliar o reducir *alrededor de un centro fijo*.

Por ejemplo, la figura siguiente muestra un triángulo  $\widehat{ABC}$  y dos “ampliaciones”  $\widehat{A'B'C'}$  y  $\widehat{A''B''C''}$  respecto de un punto  $O$ :



La definición siguiente precisa la idea:

**Definición 3.24** Fijado un punto  $O$  y un número real  $r \neq 0$ , definimos el *punto homotético* (gr. “en la misma situación”)  $P'$  de un punto  $P$  como el punto situado en la recta  $OP$  de modo que  $\overline{OP'} = |r|\overline{OP}$  y con la condición de que  $P$  y  $P'$  están en la misma semirrecta respecto de  $O$  si  $r > 0$  y en semirrectas opuestas si  $r < 0$ . El homotético de  $O$  se define como  $O' = O$ .

La transformación del plano que a cada punto  $P$  le asigna  $P'$  se llama *homotecia* de centro  $O$  y razón  $r$ .

Dos figuras son *homotéticas* (respecto de  $O$  y  $r$ ) si una está formada por los puntos homotéticos de los que componen la otra.

Observemos que una homotecia de razón  $r = 1$  deja invariantes a todos los puntos, mientras que una homotecia de razón  $-1$  no es más que un giro de  $180^\circ$  respecto a su centro.

Por ejemplo, la homotecia de centro  $O$  que transforma  $\widehat{ABC}$  en  $\widehat{A'B'C'}$  en la figura anterior tiene razón positiva, mientras que la que lo transforma en  $\widehat{A''B''C''}$  tiene razón negativa.

**Nota** Las homotecias se expresan de forma más simple en términos de longitudes dirigidas, pues la condición para que  $P'$  sea el punto homotético de un punto  $P \neq O$  es que

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OP}} = r.$$

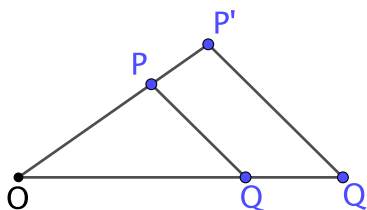
En efecto, basta tener en cuenta que  $\overline{OP'}/\overline{OP}$  es positivo si y sólo si  $\overline{P'O}/\overline{OP}$  es negativo, es decir, si y sólo si  $O$  no está entre  $P$  y  $P'$ , que es equivalente a decir que  $P$  y  $P'$  están en la misma semirrecta respecto de  $O$ . ■

Es claro que si aplicamos a un punto una homotecia de razón  $r$  y a continuación otra de razón  $s$  con el mismo centro, obtenemos el mismo resultado que si aplicamos la homotecia de razón  $rs$ .

En particular, la homotecia de centro  $O$  y razón  $1/r$  es la inversa de la homotecia de centro  $O$  y razón  $r$ , en el sentido de que las aplicamos sucesivamente obtenemos el punto de partida. Otra consecuencia es que toda homotecia de razón  $r < 0$  se puede obtener aplicando (en cualquier orden) la homotecia de razón  $-r > 0$  y la homotecia de razón  $-1$ .

Observemos que, dados dos puntos  $P$  y  $Q$ , se cumple que  $\overline{P'Q'} = |r|\overline{PQ}$ .

En efecto, esto es trivialmente cierto si uno de los puntos es  $O$  y se comprueba sin dificultad si la recta  $PQ$  pasa por  $O$  (hay que distinguir si los puntos están al mismo lado de  $O$  o en lados opuestos). En caso contrario basta aplicar el teorema de Tales:



Puesto que  $\overline{OP'}/\overline{OP} = |r| = \overline{OQ'}/\overline{OQ}$ , los triángulos  $\widehat{OPQ}$  y  $\widehat{OP'Q'}$  son semejantes, luego también  $\overline{P'Q'}/\overline{PQ} = |r|$ .

Esto implica a su vez que si tres puntos  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  son colineales, lo mismo les sucede a sus homotéticos, pues si, por ejemplo,  $Q$  está entre los otros dos, se cumple que

$$\overline{PR} = \overline{PQ} + \overline{QR},$$

y multiplicando por  $|r|$  obtenemos que

$$\overline{P'R'} = \overline{P'Q'} + \overline{Q'R'},$$

pero, por la desigualdad triangular, tres puntos cumplen esta relación si y sólo si están alineados (con  $Q'$  entre los otros dos).

En otras palabras, las homotecias transforman rectas en rectas, y la figura anterior muestra además que la recta homotética de una recta que no pase por el centro de la homotecia es una recta paralela (y claramente es la misma recta si pasa por el centro de la homotecia).

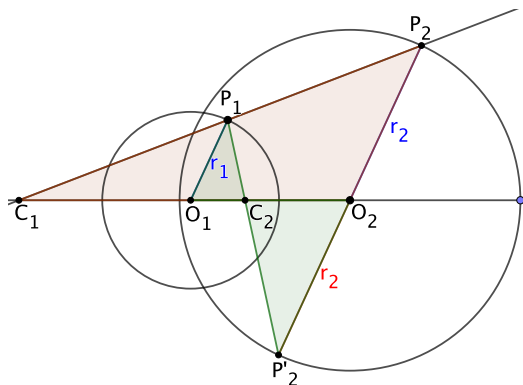
El hecho de que una homotecia transforme rectas en rectas paralelas implica que transforma ángulos en ángulos iguales, luego dos triángulos homotéticos son semejantes (pero el recíproco no es cierto, pues dos triángulos homotéticos tienen que tener lados paralelos).

Otra consecuencia obvia de que las homotecias multiplican las distancias por un factor constante es que la imagen de una circunferencia de centro  $A$  y radio  $s$  por una homotecia de razón  $r$  es la circunferencia de centro  $A'$  y radio  $|r|s$ .

Más aún, dos circunferencias cualesquiera siempre son homotéticas. Concretamente:

**Teorema 3.25** *Dadas dos circunferencias de centros distintos  $O_1$  y  $O_2$  y radios  $r_1$  y  $r_2$ , existen exactamente dos homotecias que transforman una en la otra, de razón  $\pm r_2/r_1$ , salvo si  $r_1 = r_2$ , en cuyo caso sólo hay una de razón  $-1$ .*

DEMOSTRACIÓN: Una homotecia entre las dos circunferencias debe transformar  $O_1$  en  $O_2$ , luego su centro  $C$  tiene que estar en la recta  $O_1O_2$ .



Y la razón tiene que ser necesariamente  $r = \pm r_2/r_1$ . Además, si un punto  $P_1$  de la primera circunferencia se transforma en  $P_2$  en la segunda, tiene que cumplirse que

$$\frac{\overline{CP_2}}{\overline{CP_1}} = \frac{\overline{CO_2}}{\overline{CO_1}} = r = \pm \frac{r_2}{r_1}.$$

Notemos que la relación de los signos es correcta:  $C$  está entre  $P_1$  y  $P_2$  si y sólo si la homotecia tiene razón negativa, si y sólo si  $C$  está entre  $O_1$  y  $O_2$ . Ahora bien, sólo existen dos puntos  $C_1$  y  $C_2$  en la recta  $O_1O_2$  que cumplen la relación

$$\frac{\overline{CO_2}}{\overline{CO_1}} = \pm \frac{r_2}{r_1},$$

uno para cada elección del signo, es decir, uno situado entre  $O_1$  y  $O_2$  y otro fuera del segmento. La única excepción se da si  $r_1 = r_2$ , en cuyo caso el valor 1 no puede darse, por lo que sólo hay un centro posible para una homotecia entre las dos circunferencias, que tendrá razón  $-1$ .

Ahora sólo falta observar que si un punto  $C$  cumple la relación anterior, realmente la homotecia de centro  $C$  y razón  $\pm r_2/r_1$  transforma una circunferencia en la otra. En efecto, dicha homotecia transforma cada punto  $P_1$  de la primera circunferencia en un punto  $P_2$  que cumple

$$\frac{\overline{O_2P_2}}{\overline{O_1P_1}} = r = \pm \frac{r_2}{r_1},$$

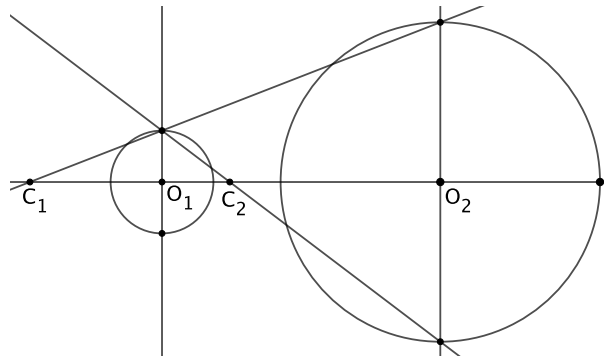
luego  $\overline{O_2P_2} = r_2$  y así  $P_2$  está en la segunda circunferencia. ■

Si tenemos dos circunferencias con un mismo centro  $O$ , es claro que las homotecias de centro  $O$  y razones  $\pm r_2/r_1$  transforman una en la otra, y son las únicas posibles.

**Definición 3.26** Se llaman *centros de similitud* de dos circunferencias dadas a los centros de las homotecias que transforman una en la otra.

Hemos probado que si las circunferencias tienen centros distintos, entonces tienen dos centros de similitud, uno correspondiente a una homotecia de razón positiva y otro a otra de razón negativa. Si los radios son iguales, entonces sólo existe el centro de similitud correspondiente a una homotecia negativa, mientras que si los centros son iguales entonces hay un único centro de similitud común para la homotecia positiva y la negativa.

La figura siguiente muestra cómo calcular los centros de similitud de dos circunferencias:

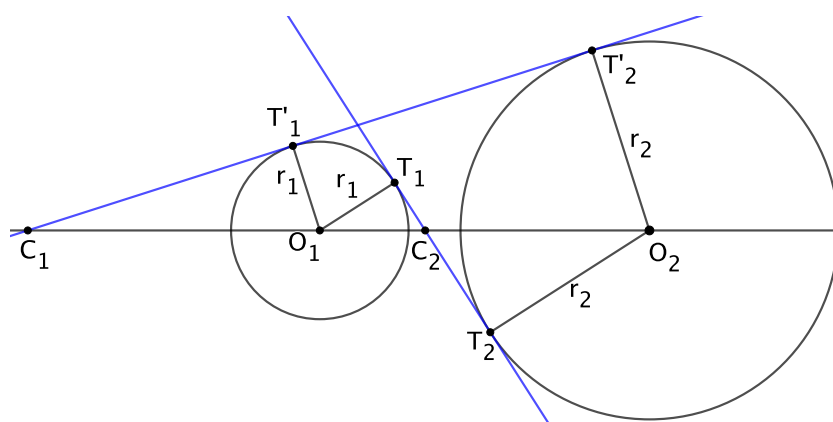




Basta trazar perpendiculares a la recta  $O_1O_2$  y unir los puntos donde éstas cortan a las circunferencias con rectas que cortarán a  $O_1O_2$  en los centros buscados.

**Teorema 3.27** *Si una recta  $r$  es tangente a dos circunferencias de centros  $O_1$  y  $O_2$ , entonces, o bien  $r$  es paralela a la recta  $O_1O_2$  (y esto requiere que ambas circunferencias tengan el mismo radio) o bien  $r$  corta a  $O_1O_2$  en uno de los dos centros de similitud de las circunferencias.*

DEMOSTRACIÓN: Descartamos el caso trivial en que  $r$  es paralela a  $O_1O_2$  y supongamos que  $r$  corta a esta recta en un punto  $C$ . Una posibilidad es que  $r$  sea tangente a ambas circunferencias precisamente en el punto  $C$ , en cuyo caso las circunferencias son tangentes entre sí y  $C$  es uno de sus puntos de similitud.



Descartando también este caso y de acuerdo con la figura, el teorema de Tales nos da que

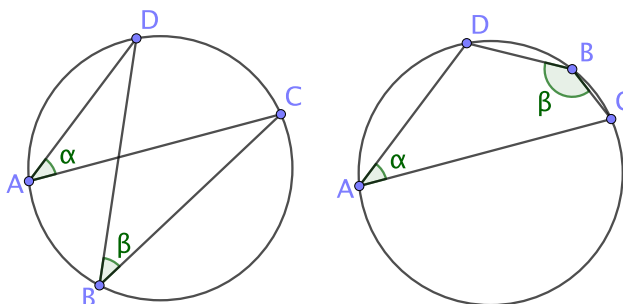
$$\frac{\overline{CO_2}}{\overline{CO_1}} = \frac{r_2}{r_1}$$

si consideramos longitudes positivas. Si las consideramos dirigidas, entonces el miembro derecho será  $\pm r_2/r_1$ , según si  $C$  está situado o no entre los dos centros. Pero esta relación es la que caracteriza a los centros de similitud, luego  $C$  tiene que ser uno de ellos. ■

Notemos que, para que puedan existir de hecho tangentes a las dos circunferencias que pasen por un centro de similitud, es necesario que éste sea exterior a ambas, luego dos circunferencias tienen un máximo de cuatro tangentes comunes, pero que pueden ser menos —incluso ninguna— si alguno de los centros de similitud es interior a alguna de ellas, o si las circunferencias son tangentes entre sí (en cuyo caso hay una única tangente común asociada a dicho centro).

### 3.7 Ángulos dirigidos

Consideremos cuatro puntos  $A, B, C, D$  situados sobre una circunferencia:

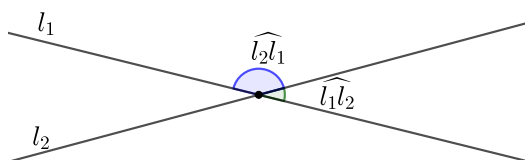


Si están situados como muestra la figura de la izquierda, podemos afirmar que  $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ , pues son dos ángulos inscritos que abarcan el mismo arco. Sin embargo, esto ya no es cierto si la situación es la de la derecha, pues ahora los ángulos abarcan arcos opuestos y, por consiguiente, no son iguales, sino suplementarios.

En muchas demostraciones geométricas suele suceder que las hipótesis de trabajo puedan materializarse en casos distintos como los que muestran las dos figuras anteriores, y no únicamente dos casos, sino que si se dan simultáneamente varias situaciones que dan lugar a casos distintos, el número total de casos que es necesario contemplar se multiplica. Esto hace que muchos libros presenten demostraciones incompletas porque razonan sobre una figura en concreto sin contemplar las diferencias que pueden ser relevantes en otros casos compatibles con las hipótesis, pero que no se corresponden con la figura considerada (de modo que, por ejemplo, unos ángulos que se afirma que son iguales puedan no serlo en otros casos).

Aquí vamos a introducir una forma de medir ángulos que permite plantear razonamientos que en muchos casos son independientes de los distintos casos que pueden darse, lo que asegura que los argumentos son completos sin necesidad de distinguir un número tedioso de casos y subcasos posibles. Lo único que vamos a hacer es comprobar que varios hechos básicos pueden formularse en términos de la noción de “ángulo dirigido” que vamos a estudiar, por lo que tal vez el lector prefiera saltarse temporalmente esta sección hasta el momento en que sea necesaria en el capítulo siguiente, y así podrá ver inmediatamente aplicaciones que justifican el interés del concepto.

Dos rectas secantes  $l_1$  y  $l_2$  determinan dos pares de ángulos suplementarios, como muestra la figura siguiente. Lo que vamos a hacer aquí es dar un criterio para nombrarlos de modo que uno sea  $\widehat{l_1 l_2}$  y el otro  $\widehat{l_2 l_1}$ . La cuestión es que el criterio sea general, y no simplemente elegir en cada caso particular a qué ángulo llamamos de cada manera.



El criterio que vamos a adoptar es éste:

**Definición 3.28** Dadas dos rectas  $l_1$  y  $l_2$ , definimos el *ángulo dirigido*  $\widehat{l_1 l_2}$  como el ángulo que hay que girar  $l_1$  en sentido antihorario<sup>5</sup> para que pase a ser paralela a (o coincidente con)  $l_2$ . Así el ángulo dirigido entre dos rectas paralelas es 0 y, en general,  $0 \leq \widehat{l_1 l_2} < \pi$ .

El lector puede comprobar que los nombres de los ángulos en la figura precedente se ajusta a este criterio. Si movemos  $l_1$  en sentido antihorario para llegar a  $l_2$ , el ángulo que recorremos es el marcado como  $\widehat{l_1 l_2}$  y no el marcado como  $\widehat{l_2 l_1}$ .

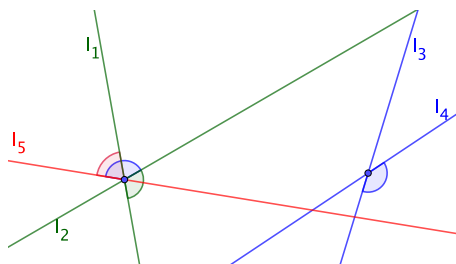
En general, los ángulos  $\widehat{l_1 l_2}$  y  $\widehat{l_2 l_1}$  son suplementarios y son distintos salvo en el caso en que las rectas son paralelas, en cuyo caso ambos son nulos. Por ello en todas las consideraciones que involucren ángulos dirigidos será esencial el orden en que escribimos las rectas.

Definimos la suma de ángulos dirigidos mediante:

$$\widehat{l_1 l_2} + \widehat{l_3 l_4} = \widehat{l_1 l_5},$$

donde  $l_5$  es la recta que cumple que  $\widehat{l_2 l_5} = \widehat{l_3 l_4}$ .

Por ejemplo, en la figura tenemos unos ángulos  $\widehat{l_1 l_2} = 110^\circ$ ,  $\widehat{l_3 l_4} = 140^\circ$ . La recta  $l_5$  se obtiene girando  $140^\circ$  la recta  $l_2$  en sentido antihorario, y así la suma es  $\widehat{l_1 l_5} = 70^\circ$ .



Numéricamente se obtiene de calcular  $110^\circ + 140^\circ = 250^\circ$  y restar  $180^\circ$ , con lo que obtenemos el valor indicado de  $70^\circ$ . Así pues, hemos de distinguir entre la suma de las amplitudes de dos ángulos dirigidos (que en este caso sería de  $250^\circ$ ) de la amplitud de la suma de los ángulos dirigidos (que en este caso es  $70^\circ$ ). La segunda se obtiene restando  $180^\circ$  a la suma de las amplitudes si ésta alcanza o sobrepasa los  $180^\circ$ .

Teniendo esto en cuenta es fácil convencerse de que la suma de ángulos dirigidos es asociativa y conmutativa. Más aún, todo ángulo tiene un inverso, ya que  $\widehat{l_1 l_2} + \widehat{l_2 l_1} = 0$ , pues las amplitudes suman  $180^\circ$ , luego la suma como ángulos dirigidos es 0.

<sup>5</sup>El concepto de “sentido antihorario” es externo a la geometría pura, pues requiere saber cómo se mueven las agujas de un reloj. En realidad basta fijar como “positivo” uno de los dos sentidos de giro posibles y exigir que el giro se haga en sentido positivo. Es irrelevante si el sentido elegido es el antihorario o el horario.

En particular vemos que, al contrario de lo que sucede con los ángulos no dirigidos, podemos sumar cualquier número de ángulos dirigidos aunque la suma de sus amplitudes exceda los 180 o los 360 grados. El resultado es simplemente la amplitud que resulta de restar el múltiplo de  $180^\circ$  adecuado para que el resultado esté en el rango  $0 \leq \alpha < 180^\circ$ .

La definición de suma permite intercalar cualquier recta en un ángulo dirigido, es decir, que se cumple la igualdad:

$$\widehat{l_1 l_2} = \widehat{l_1 l_3} + \widehat{l_3 l_2},$$

pues la suma puede calcularse con  $l_5 = l_2$ . Veamos un par de aplicaciones:

**Teorema 3.29** Si  $r$  y  $s$  son perpendiculares a  $r'$  y  $s'$ , respectivamente, entonces  $\widehat{rs} = \widehat{r's'}$ .

$$\text{DEMOSTRACIÓN: } \widehat{rs} = \widehat{rr'} + \widehat{r's'} + \widehat{s's} = \widehat{r's'} + 90^\circ + 90^\circ = \widehat{r's'}. \quad \blacksquare$$

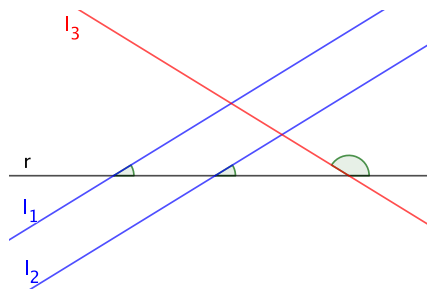
**Teorema 3.30** Dos rectas  $l_1$  y  $l_2$  son paralelas si y sólo si existe una recta  $r$  tal que  $\widehat{rl_1} = \widehat{rl_2}$ , y en tal caso esto se cumple de hecho para toda recta  $r$ .

DEMOSTRACIÓN: Es fácil razonarlo a partir de las definiciones, pero podemos probarlo formalmente observando que

$$\widehat{rl_1} = \widehat{rl_2} + \widehat{l_2 l_1},$$

y este ángulo vale  $\widehat{rl_2}$  si y sólo si  $\widehat{l_2 l_1} = 0$ , lo cual equivale a que  $l_1$  y  $l_2$  sean paralelas.  $\blacksquare$

Ahora bien, como siempre, el orden es fundamental, pues las rectas de la figura siguiente cumplen  $\widehat{rl_1} = \widehat{rl_2} = \widehat{l_3 r}$ , pero sólo  $l_1$  y  $l_2$  son paralelas:



Otra relación útil es la siguiente:

**Teorema 3.31** Si  $l_1, l_2, l_3, l_4$  son rectas cualesquiera, se cumple

$$\widehat{l_1 l_2} + \widehat{l_3 l_4} = \widehat{l_1 l_4} + \widehat{l_3 l_2}.$$

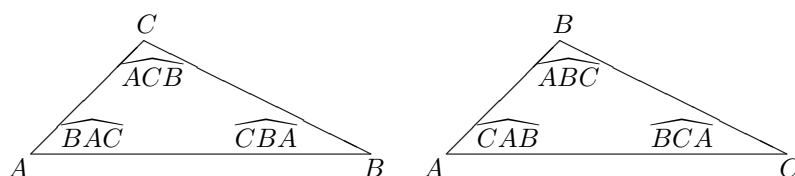
DEMOSTRACIÓN: Basta tener en cuenta que

$$\widehat{l_1 l_2} = \widehat{l_1 l_4} + \widehat{l_4 l_2}, \quad \widehat{l_3 l_4} = \widehat{l_3 l_2} + \widehat{l_2 l_4}.$$

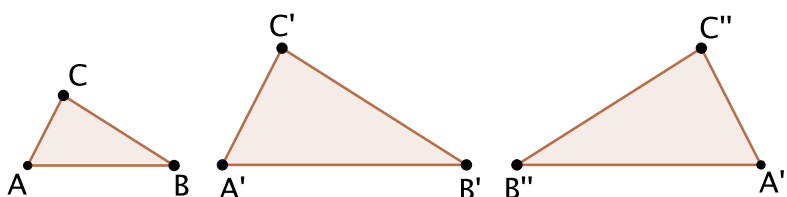
■

**Definición 3.32** Dados puntos  $A \neq B \neq C$ , definimos el ángulo dirigido  $\widehat{ABC} = \widehat{AB}, \widehat{BC}$ . Notemos que  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{CBA}$  son ángulos suplementarios.

Si nombramos los vértices de un triángulo de modo que al pasar de  $A$  a  $B$  y de  $B$  a  $C$  giramos en sentido antihorario, entonces sus ángulos interiores son  $\widehat{BAC}$ ,  $\widehat{CBA}$ ,  $\widehat{ACB}$ , mientras que si los nombramos en sentido horario, los ángulos interiores son  $\widehat{CAB}$ ,  $\widehat{ABC}$ ,  $\widehat{BCA}$ :



A la hora de comparar los ángulos dirigidos de dos triángulos semejantes tenemos que distinguir el caso de que la semejanza sea *directa* o *inversa*, en el sentido que ilustra la figura siguiente:



Los tres triángulos son semejantes, pero si recorremos los vértices de  $\widehat{ABC}$  y los homólogos en  $\widehat{A'B'C'}$  en el mismo orden, por ejemplo  $A \rightarrow B \rightarrow C$ ,  $A' \rightarrow B' \rightarrow C'$ , en ambos casos giramos en el mismo sentido (antihorario), mientras que si recorremos  $A'' \rightarrow B'' \rightarrow C''$  el sentido de giro se invierte. La semejanza directa de triángulos es equivalente a las igualdades de ángulos dirigidos:

$$\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}, \quad \widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'}, \quad \widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'},$$

mientras que la semejanza inversa equivale a

$$\widehat{BAC} = \widehat{C''A''B''}, \quad \widehat{CBA} = \widehat{A''B''C''}, \quad \widehat{ACB} = \widehat{B''C''A''}.$$

En efecto, en ambos casos, los tres miembros izquierdos corresponden, o bien a los tres ángulos interiores de un triángulo, o bien a los tres ángulos exteriores, y lo mismo vale para el miembro derecho, y no puede ocurrir que los tres ángulos

interiores de un triángulo sean iguales a los tres exteriores de otro, pues entonces el triángulo tendría al menos dos ángulos rectos u obtusos, lo cual es imposible. Por lo tanto, si se da cualquiera de los dos grupos de igualdades, los triángulos tienen sus ángulos iguales y son semejantes.

Más aún, basta con que se den dos de las tres igualdades, pues si los ángulos internos de uno de los triángulos son  $\alpha, \beta, \gamma$ , no puede ocurrir que las desigualdades de ángulos orientados se traduzcan en que el segundo triángulo tiene ángulos internos  $\pi - \alpha, \pi - \beta$ , pues tendría que ser  $2\pi - \alpha - \beta < \pi$ , luego  $\alpha + \beta > \pi$ , y esto es imposible, luego en realidad el segundo triángulo tiene dos ángulos internos iguales a los del primero y los ángulos restantes también tienen que ser iguales.

Es inmediato comprobar que tres puntos distintos  $A, B, C$  son colineales si y sólo si  $\widehat{ABC} = 0$ . En cualquier caso, tanto si son colineales como si no lo son, se cumple que

$$\widehat{BAC} + \widehat{CBA} + \widehat{ACB} = 0,$$

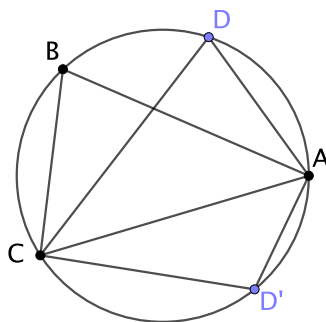
bien porque los tres sumandos son nulos (si los puntos son colineales), bien porque los ángulos interiores de un triángulo suman  $180^\circ$  y los exteriores  $360^\circ$ , luego suman 0 como ángulos dirigidos. Pero, como siempre, el orden de las letras es fundamental.

Otro hecho obvio es que un triángulo es isósceles con  $\hat{A}$  como ángulo desigual si y sólo si  $\widehat{ACB} = \widehat{CBA}$ .

Veamos ahora el tratamiento en términos de ángulos dirigidos de los casos que habíamos planteado al inicio de esta sección. En la prueba del teorema siguiente tenemos que distinguir varios casos, pero eso es justo lo que nos permitirá sustituir una distinción de casos en otras pruebas por una aplicación de este teorema:

**Teorema 3.33** *Cuatro puntos distintos  $A, B, C, D$  están sobre una misma circunferencia o sobre una misma recta si y sólo si*

$$\widehat{ABC} = \widehat{ADC}.$$



DEMOSTRACIÓN: Supongamos que  $A, B, C$  no son colineales y consideremos la circunferencia que los contiene. Si  $D$  está sobre la misma circunferencia, los ángulos no dirigidos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{ADC}$  son iguales o suplementarios según si abarcan el mismo arco o bien abarcan arcos opuestos.

Si son iguales, es decir, si  $B$  y  $D$  están en el mismo semiplano respecto de  $AC$ , hay que distinguir dos casos: si  $A - B - C$  están ordenados de modo que al pasar de  $A$  a  $B$  y de  $B$  a  $C$  giramos en sentido antihorario (como en la figura), resulta que los ángulos dirigidos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{ADC}$  son suplementarios de los ángulos no dirigidos correspondientes, luego también son iguales, mientras que si al recorrer  $A - B - C$  giramos en sentido antihorario, los ángulos dirigidos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{ADC}$  coinciden con los no dirigidos y también son iguales.

Si los ángulos no dirigidos son suplementarios (como sucede en la figura si tomamos  $D'$  en lugar de  $D$ ), y  $A - B - C$  se recorren en sentido antihorario, entonces el ángulo dirigido  $\widehat{ABC}$  es el suplementario del no dirigido, mientras que el ángulo dirigido  $\widehat{ADC}$  es el mismo que el no dirigido, luego igualmente los ángulos dirigidos coinciden, y análogamente se razona si  $A - B - C$  se recorren en sentido horario.

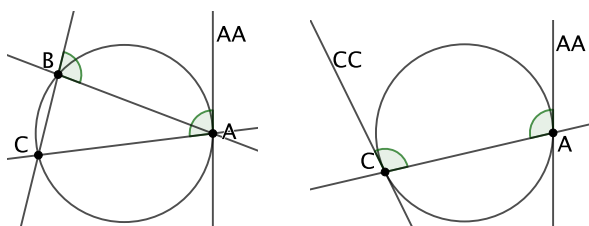
Recíprocamente, si se da la igualdad de ángulos dirigidos  $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ , los ángulos no dirigidos correspondientes tienen que ser iguales o suplementarios, y en ambos casos se cumple que  $D$  está sobre la circunferencia que contiene a  $A, B, C$ .

Falta considerar el caso en que  $A, B, C$  son colineales. Entonces  $\widehat{ABC} = 0$ , luego el teorema equivale a que  $D$  está sobre la recta  $AC$  si y sólo si  $\widehat{ADC} = 0$ , lo cual es obviamente cierto. ■

El teorema anterior admite una generalización parcial si, fijada una circunferencia y dos puntos distintos  $A, C$  sobre ella, convenimos en que  $AA$  representa la tangente a la circunferencia que pasa por  $A$ , con lo que  $\widehat{AAC} = \widehat{AA, AC}$ .

**Teorema 3.34** Si  $A, B, C, D$  son puntos situados sobre una circunferencia con  $A \neq C$ , la igualdad  $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$  se da incluso si  $B$  y  $D$  coinciden con  $A$  o  $C$ .

DEMOSTRACIÓN: Si se da una única coincidencia, podemos suponer que es  $A = D$  (las demás se reducen a ésta intercambiando los nombres de los puntos y el orden de los ángulos).

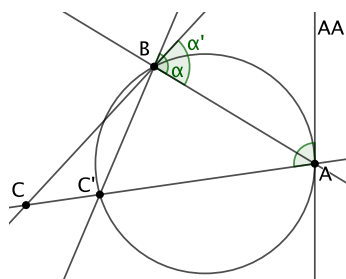


Entonces la situación es la de la figura de la izquierda. Hay que probar que  $\widehat{AB, BC} = \widehat{AA, AC}$ . El ángulo dirigido  $\widehat{AA, AC}$  es igual a un ángulo semiinscrito no dirigido que abarca un arco limitado por  $A$  y  $C$ . Puede ser igual o

suplementario del ángulo no dirigido  $\widehat{ABC}$ . Si  $B$  está en el arco abarcado, entonces los ángulos no dirigidos son suplementarios, pero el ángulo dirigido  $\widehat{ABC}$  es el suplementario del ángulo no dirigido correspondiente, por lo que los ángulos dirigidos son iguales. Similarmente, si  $B$  está en el arco opuesto, entonces los ángulos no dirigidos son iguales, y el ángulo dirigido  $\widehat{ABC}$  es el mismo que el no dirigido.

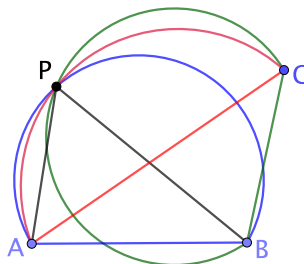
Si se dan dos coincidencias, no perdemos generalidad si nos restringimos al caso  $\widehat{AAC} = \widehat{ACC}$ , que es el que ilustra la figura de la derecha, y es fácil concluir que también se da la igualdad requerida. ■

**Nota** Se cumple un recíproco parcial del teorema anterior: si sabemos que  $A$  y  $B$  son dos puntos distintos en una circunferencia y que  $\widehat{ABC} = \widehat{AAC}$ , para cierto punto  $C$  distinto de  $A$  y  $B$ , entonces  $C$  está en la circunferencia.



La razón es que si  $C'$  es el otro punto en el que  $AC$  corta a la circunferencia (de la hipótesis se sigue que  $AC \neq AA$ ) se cumple que  $\widehat{ABC'} = \widehat{AAC'} = \widehat{AAC}$ , luego por hipótesis  $\widehat{ABC} = \widehat{ABC'}$  (en la figura,  $\alpha = \alpha'$ ), lo cual sólo puede suceder si  $BC = BC'$ , pues un ángulo está contenido en el otro, luego  $C = C'$ . ■

Por último, observemos que, fijados dos puntos  $A$  y  $B$ , el lugar geométrico de los puntos  $P$  distintos de  $A$  y  $B$  tales que el ángulo  $\widehat{APB}$  toma un valor fijo es un arco de circunferencia con extremos  $A$  y  $B$  (salvo que el valor sea  $90^\circ$ , en cuyo caso es una circunferencia completa, o que sea  $0$ , en cuyo caso es la recta  $AB$ ).



En cualquier caso, si tomamos tres puntos no colineales  $A, B, C$ , vemos que los ángulos  $\widehat{APB}$  y  $\widehat{BPC}$  determinan completamente todo  $P$  distinto de  $A, B, C$ .



Por simetría podemos considerar los tres ángulos  $\widehat{APB}$ ,  $\widehat{BPC}$ ,  $\widehat{CPA}$ , si bien son redundantes, pues claramente

$$\widehat{APB} + \widehat{BPC} + \widehat{CPA} = 0.$$

En general, dar estos tres ángulos no es la forma más eficiente de determinar un punto  $P$ , pues no todas las combinaciones de ángulos son posibles (aunque respeten la última ecuación), pero veremos que en algunos casos existen expresiones sencillas para los ángulos que determinan ciertos puntos, y entonces es posible sacarles partido.



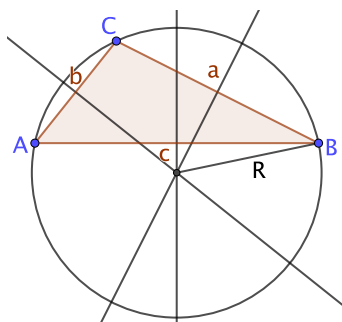
## Capítulo IV

# Triángulos

Ya hemos estudiado los hechos fundamentales de la geometría del triángulo, desde los teoremas de Tales y Pitágoras hasta la trigonometría básica. En este capítulo vamos a profundizar más en ella.

### 4.1 Puntos notables de un triángulo

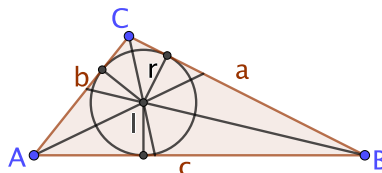
**El circuncentro** Que dos rectas se corten en un punto no es “noticia”, pero que una tercera recta pase justamente por el mismo punto de corte ya es algo que normalmente reclama una explicación. Es lo que sucede con las mediatrices de los lados de un triángulo. Si el lector experimenta, verá que las tres se cortan siempre en un mismo punto, y no es evidente que esto tenga que ser siempre así. En realidad sí que es inmediato teniendo en cuenta la teoría que hemos expuesto hasta este momento, pues en virtud del teorema 1.32 sabemos que el *circuncentro* del triángulo, es decir, el centro de la circunferencia circunscrita tiene que estar en las tres mediatrices:



Recordemos que, según el teorema 3.5, el *circunradio*  $R$  del triángulo, es decir, el radio de la circunferencia circunscrita, puede calcularse a partir del área  $S$  del triángulo como

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

**El incentro** El lector puede comprobar que las bisectrices de los ángulos de un triángulo también se cortan siempre en un mismo punto. La explicación la proporciona ahora el teorema 1.34 en lugar de 3.5: si  $I$  es el punto en el que se cortan las bisectrices de los ángulos  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$ , por dicho teorema sabemos que  $I$  está a la misma distancia  $r$  de  $b$  y  $c$ , y también a la misma distancia (que tiene que ser  $r$  también) de  $a$  y  $c$ , luego está a la misma distancia  $r$  de  $a$  y  $b$ , luego  $I$  también está en la bisectriz de  $\hat{C}$ :

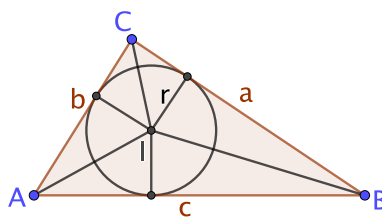


Esto significa que  $I$  está a la misma distancia  $r$  de los pies de las perpendiculares a los tres lados que pasan por  $I$ , luego la circunferencia de centro  $I$  y radio  $r$  es tangente a los tres lados (véase la observación tras el teorema 1.39). Por ello recibe el nombre de *circunferencia inscrita* en el triángulo, el punto  $I$  se llama *incentro* del triángulo y el radio  $r$  se llama *inradio*.

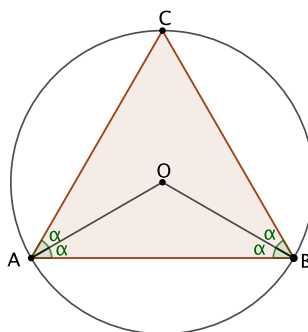
Al igual que sucede con el circunradio, es fácil expresar el inradio de un triángulo en términos de su área y de las longitudes de sus lados. Para ello basta observar la figura siguiente, en la que vemos que el triángulo se divide en tres triángulos de altura  $r$  y bases  $a, b, c$ , por lo que su área es

$$S = \frac{1}{2}r(a + b + c) = rs,$$

donde  $s = (a + b + c)/2$  es el semiperímetro.



**Teorema 4.1** *El incentro de un triángulo coincide con el circuncentro si y sólo si el triángulo es equilátero.*



DEMOSTRACIÓN: El triángulo  $\widehat{AOB}$  es isósceles, pero si  $I = O$ , entonces  $OA$  es la bisectriz del ángulo  $\hat{A}$ , e igualmente  $OB$  es la bisectriz de  $\hat{B}$ , luego  $\hat{A} = \hat{B}$ . Igualmente podemos concluir que  $\hat{B} = \hat{C}$ , por lo que el triángulo es equilátero. ■

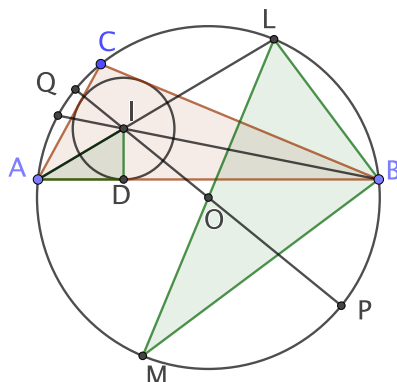
Euler encontró esta fórmula para la distancia del incentro al circuncentro de un triángulo:

**Teorema 4.2 (Euler)** Si  $R$  es el circunradio y  $r$  el inradio de un triángulo, la distancia del circuncentro al incentro viene dada por  $d = \sqrt{R(R - 2r)}$ . En particular,  $R \geq 2r$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea  $D$  el pie la perpendicular a  $AB$  por el incentro  $I$ , de modo que  $\overline{ID} = r$ . Llamamos  $L$  al punto distinto de  $A$  donde la bisectriz  $AI$  corta a la circunferencia circunscrita y  $M$  al punto diametralmente opuesto. Así los triángulos  $\widehat{ADI}$  y  $\widehat{MBL}$  son semejantes, pues tienen ambos un ángulo recto y además  $\widehat{IAD} = \widehat{LMB}$  porque ambos abarcan el mismo arco. Por lo tanto

$$\frac{\overline{ID}}{\overline{BL}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{ML}}.$$

Equivalentemente,  $\overline{AI} \cdot \overline{BL} = 2Rr$ .



Por otra parte, el arco de extremos  $L$  y  $B$  abarcado por  $\widehat{IAD}$  mide  $\hat{A}$ , al igual que el arco de extremos  $C$  y  $L$ , pues la bisectriz  $\overrightarrow{AI}$  divide al arco abarcado por  $\hat{A}$  en dos arcos iguales. Por lo tanto  $\widehat{CBL} = \hat{A}/2$  y  $\widehat{IBL} = \hat{A}/2 + \hat{B}/2$ .

Similarmente, el ángulo  $\widehat{BIL}$  abarca un arco  $\hat{A}$  y su opuesto por el vértice abarca un arco  $\hat{B}$ , luego por 1.43  $\widehat{BIL} = \hat{A}/2 + \hat{B}/2$ , y así  $\widehat{BIL} = \widehat{IBL}$ , por lo que el triángulo  $\widehat{ILB}$  es isósceles y  $\overline{BL} = \overline{IL}$ .

Así pues,  $\overline{AI} \cdot \overline{IL} = 2Rr$ . Si  $O$  es el circuncentro y llamamos  $P$  y  $Q$  a los puntos donde la recta  $OI$  corta a la circunferencia circunscrita, por 3.8 tenemos que  $\overline{PI} \cdot \overline{QI} = \overline{AI} \cdot \overline{IL} = 2Rr$ , que es lo mismo que

$$R^2 - d^2 = (R + d)(R - d) = 2Rr,$$

de donde se sigue la fórmula del enunciado. ■

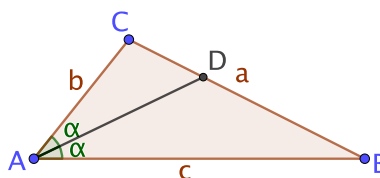
Observemos que la igualdad  $R = 2r$  equivale a que  $I = O$ , es decir, a que el triángulo sea equilátero.

En general, los puntos donde las bisectrices de un triángulo cortan al lado opuesto no coinciden con los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita (que son los pies de las perpendiculares a los lados que pasan por el incentro). Podemos encontrar propiedades sencillas que determinan unos y otros. Respecto de los puntos de corte de las bisectrices tenemos lo siguiente:

**Teorema 4.3** Una bisectriz de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados adyacentes.

DEMOSTRACIÓN: Basta aplicar el teorema de los senos:

$$\frac{\overline{CD}}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{D}}, \quad \frac{\overline{DB}}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{D}},$$

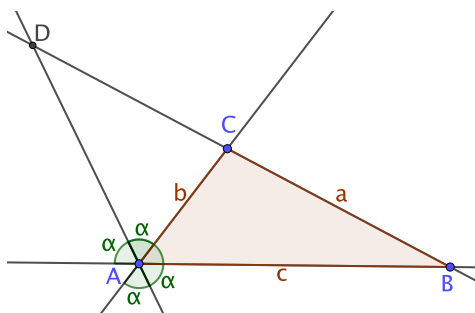


donde hemos usado que los dos ángulos  $\hat{D}$  correspondientes a los triángulos  $\widehat{ADC}$  y  $\widehat{ADB}$  son suplementarios, luego tienen el mismo seno. Por lo tanto

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} = \frac{b}{c}. \quad \blacksquare$$

**Nota: Bisectrices exteriores** Conviene observar que el teorema anterior vale igualmente para las bisectrices de los ángulos exteriores de un triángulo, es decir, los ángulos adyacentes a sus ángulos (interiores). En la figura vemos la bisectriz exterior del ángulo  $\hat{A}$ , que corta a la prolongación del lado opuesto  $\overline{CB}$  en un punto  $D$ , y sigue siendo cierto que

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} = \frac{b}{c}.$$

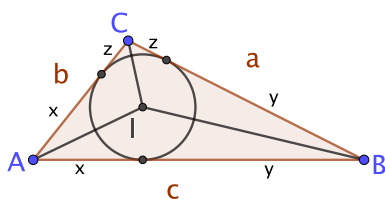


En efecto, Observemos que el ángulo  $\widehat{DAB}$  es suplementario a  $\alpha$ , luego su seno coincide con el de  $\alpha$ , y así,

$$\frac{\overline{CD}}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \hat{D}}, \quad \frac{\overline{DB}}{\text{sen } \alpha} = \frac{c}{\text{sen } \hat{D}},$$

exactamente igual que en la prueba del teorema anterior. ■

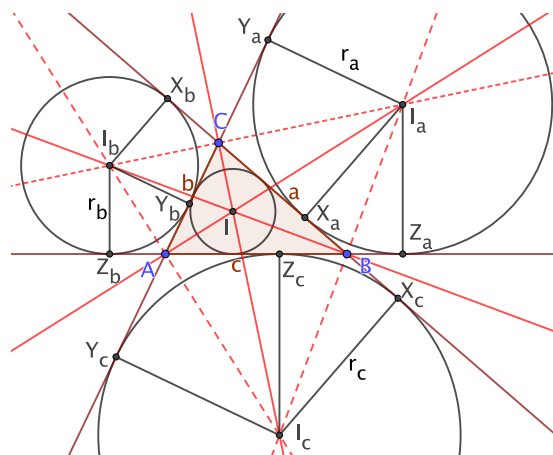
Respecto a los puntos de tangencia, si llamamos  $x, y, z$  a las longitudes que muestra la figura siguiente:



tenemos que  $a = y + z, b = x + z, c = x + y$ , luego  $x + y + z = (a + b + c)/2 = s$ , y así

$$x = s - a, \quad y = s - b, \quad z = s - c. \quad \blacksquare$$

**Los excentros** En la figura siguiente hemos representado las *bisectrices exteriores* de un triángulo, es decir, las bisectrices de sus ángulos exteriores, las cuales claramente son las rectas perpendiculares a sus bisectrices interiores. Consideremos el punto  $I_a$  donde se cortan las bisectrices exteriores de  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$  (notemos que tienen que cortarse, pues si fueran paralelas también lo serían sus perpendiculares, las bisectrices interiores de  $\hat{B}$  y  $\hat{C}$ , que no lo son).



Así, el punto  $I_a$  está a la misma distancia de las prolongaciones de los lados  $b$  y  $a$ , por una parte, y también a la misma distancia  $r_a$  de las prolongaciones de los lados  $a$  y  $c$ , luego está a la misma distancia de las prolongaciones de  $b$

y  $c$ , lo cual se traduce en que la bisectriz interior de  $\hat{A}$  también pasa por  $I_a$ . Por consiguiente, la circunferencia de centro  $I_a$  y radio  $r_a$  es tangente a las prolongaciones de los tres lados. Lo mismo se aplica a los  $I_b$  e  $I_c$ .

Los puntos  $I_a, I_b, I_c$  se llaman *excentros* del triángulo dado, los números  $r_a, r_b, r_c$  se llaman *exradios* y las circunferencias de centro en cada excentro y el exradio correspondiente se llaman *circunferencias excritas* al triángulo. Las circunferencias excritas y la circunferencia inscrita se llaman *circunferencias tritangentes* al triángulo.

Es fácil calcular los nueve puntos de tangencia. Por ejemplo,  $\overline{BX_b} = \overline{BZ_b}$  y

$$\begin{aligned}\overline{BX_b} + \overline{BZ_b} &= \overline{BC} + \overline{CX_b} + \overline{BA} + \overline{AZ_b} \\ &= \overline{BC} + \overline{CY_b} + \overline{BA} + \overline{AY_b} = a + b + c = 2s,\end{aligned}$$

luego  $\overline{BX_b} = \overline{BZ_b} = s$ . Por otro lado,

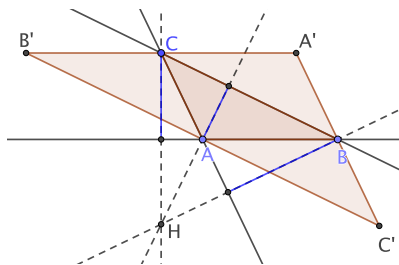
$$\overline{CY_b} = \overline{CX_b} = \overline{BX_b} - a = s - a.$$

Pero en el apartado anterior hemos visto que  $s - a$  es también la distancia de  $A$  al punto de tangencia de la circunferencia inscrita en  $\overline{AC}$ , luego:

**Teorema 4.4** *Los puntos de tangencia en un lado de un triángulo con la circunferencia inscrita y la circunferencia circunscrita correspondiente son simétricos respecto del punto medio del lado.*

**El ortocentro** Vamos a probar ahora que las alturas de un triángulo también son concurrentes.

En efecto, dado un triángulo  $\widehat{ABC}$ , basta trazar paralelas a cada lado por el vértice opuesto, con lo que se forma otro triángulo  $\widehat{A'B'C'}$ .



Teniendo en cuenta las relaciones de paralelismo, es claro que  $\widehat{A'B'C'}$  está formado por  $\widehat{ABC}$  y otros tres triángulos iguales, lo que a su vez implica que las prolongaciones de las alturas de  $\widehat{ABC}$  son las mediatrices de  $\widehat{A'B'C'}$ , luego ya sabemos que se cortan en un punto  $H$ , que se conoce como *ortocentro* del triángulo dado, y que, según acabamos de ver, es el circuncentro de  $\widehat{A'B'C'}$ .

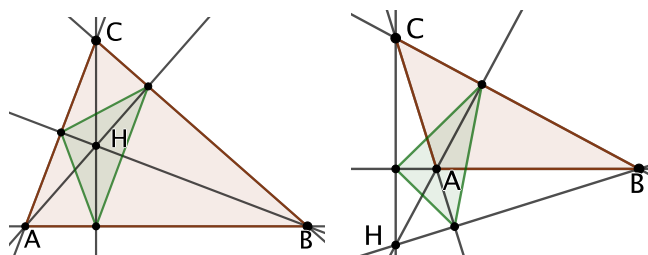
En un triángulo que no sea rectángulo, los pies de las alturas son tres puntos no alineados que determinan un nuevo triángulo, que se conoce como *triángulo órtico* del triángulo dado.



Basta observar la figura del apartado anterior para convencerse de que todo triángulo es el triángulo órtico del triángulo formado por sus excentros.

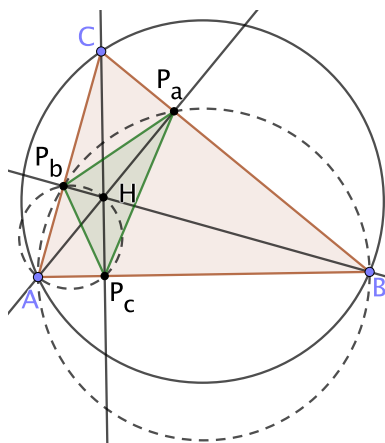
**Teorema 4.5** *El ortocentro y los vértices de un triángulo no rectángulo coinciden con el incentro y los excentros de su triángulo órtico.*

Es importante entender correctamente el enunciado: en un triángulo acutángulo el ortocentro es el incentro del triángulo órtico, y los vértices son los excentros, pero si el triángulo es obtusángulo es el ángulo obtuso el que hace de incentro del triángulo órtico, y el ortocentro y los otros dos vértices son los excentros.



Veamos un primer ejemplo de cómo el uso de ángulos dirigidos nos permite tratar ambos casos simultáneamente.

DEMOSTRACIÓN: Consideramos un triángulo no rectángulo, como el que muestra la figura, en la que hemos representado el ortocentro  $H$  y el triángulo órtico.



Trivialmente tenemos que  $\widehat{AP_bB} = \pi/2 = \widehat{AP_aB}$ , luego el teorema 3.33 nos da que los cuatro puntos  $A, B, P_a, P_b$  están sobre una circunferencia (la que tiene a  $\overline{AB}$  por diámetro). Similarmente,  $\widehat{AP_bH} = \pi/2 = \widehat{AP_cH}$ , luego también se cumple que  $A, H, P_b, P_c$  están sobre una misma circunferencia (la que tiene a  $\overline{AH}$  por diámetro). Ahora aplicamos 3.33 reordenando los puntos:

$$\widehat{HP_cP_b} = \widehat{HAP_b} = \widehat{HAC} = \widehat{P_aAP_b} = \widehat{P_aBP_b} = \widehat{CBH}.$$

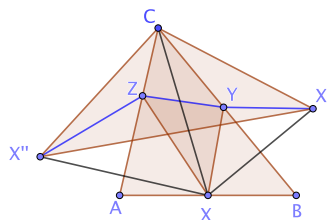
Pero igual que hemos llegado a  $\widehat{HP_cP_b} = \widehat{HAC}$ , podemos llegar a la igualdad  $\widehat{P_aP_cH} = \widehat{P_aP_cH}$ , y así concluimos que  $\widehat{HP_cP_b} = \widehat{P_aP_cH}$ , pero esto se interpreta como que la altura  $HP_c = CP_c$  y su perpendicular  $AB$  son las bisectrices interior y exterior (sin especificar cuál es cuál) del ángulo  $P_c$  del triángulo órtico.

Ahora, considerando las figuras previas a la demostración, en el caso de un triángulo acutángulo es fácil convencerse de que  $H$  queda en el interior del triángulo órtico, por lo que las tres alturas tienen que ser sus bisectrices interiores, mientras que en un triángulo con el ángulo  $A$  obtuso, los lados  $AB$  y  $AC$  tienen que ser bisectrices interiores, luego  $A$  es el incentro y el lado  $BC$  es una bisectriz exterior, de donde a su vez se sigue que  $H, B, C$  tienen que ser los excentros. ■

El triángulo órtico es la solución a un problema planteado en 1775 por el matemático italiano Giovanni Fagnano. Él lo resolvió analíticamente, pero existen pruebas geométricas sencillas, como la que vamos a ver:

**Teorema 4.6** *De entre todos los triángulos que pueden formarse con un punto en cada lado de un triángulo acutángulo dado, el que tiene menor perímetro es el triángulo órtico.*

DEMOSTRACIÓN: Fijado un triángulo acutángulo arbitrario, tomemos puntos  $X, Y, Z$  arbitrarios en sus lados. Llamamos  $X'$  y  $X''$  a los puntos simétricos de  $X$  respecto de las rectas  $BC$  y  $AC$ , respectivamente.



Entonces, el perímetro de  $\widehat{X''YZ}$  es la longitud de la poligonal  $X''ZYX'$ . Fijado el punto  $X$  los valores para  $Y, Z$  que minimizan el perímetro son los que hacen que la poligonal coincida con el segmento  $\overline{X'X''}$ . Por lo tanto, sólo tenemos que determinar qué valor de  $X$  hace mínima la longitud de  $\overline{X'X''}$ .

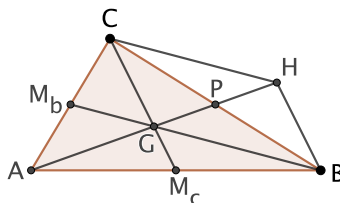
Para ello observamos que los triángulos  $\widehat{XCX'}$  y  $\widehat{XCX''}$  son isósceles, por lo que  $\widehat{X'CX''} = 2\hat{C}$ . Por lo tanto el triángulo  $\widehat{X'CX''}$  es isósceles y su ángulo desigual es  $2\hat{C}$  independientemente de la elección de  $X$ , por lo que todos los triángulos correspondientes a distintas elecciones son similares, y  $\overline{X'X''}$  será mínimo cuando sean mínimos los lados iguales, que coinciden con  $\overline{CX}$ , pero este segmento es mínimo cuando  $X$  es el pie de la altura del triángulo dado que pasa por  $C$ . Como esto vale para los tres puntos, el triángulo que minimiza el perímetro es el triángulo órtico. ■

**Nota** Es fácil ver que si el triángulo es rectángulo u obtusángulo el problema de Fagnano no tiene solución, pues se pueden formar triángulos de perímetro

tan pequeño como se desee por encima del doble de la longitud de la altura del ángulo recto u obtuso. ■

**El baricentro** Ahora probaremos que las *medianas* de un triángulo (es decir, los segmentos que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto) también se cortan en un punto.

**Teorema 4.7** *Las medianas de un triángulo se cortan en un punto y cada una de ellas divide a cualquier otra en dos segmentos de longitudes  $1/3$  y  $2/3$  del total.*



DEMOSTRACIÓN: Sea  $G$  el punto en el que se cortan dos medianas, por ejemplo, las correspondientes a los vértices  $B$  y  $C$ . Trazamos la recta  $AG$ , que cortará al lado  $\overline{BC}$  en un punto  $P$  y en  $H$  a la paralela a  $GB$  que pasa por  $C$ .

Los triángulos  $\widehat{AHC}$  y  $\widehat{AGM}_b$  están en posición de tales, luego  $G$  es el punto medio de  $\overline{AH}$ . A su vez, como  $\widehat{AHB}$  y  $\widehat{AGM}_c$  tienen dos lados proporcionales que forman el mismo ángulo, tienen que estar en posición de Tales, luego  $\overline{BH}$  es paralelo a  $CG$ . Por lo tanto,  $BHCG$  es un paralelogramo, y las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio (teorema 1.30), luego  $P$  es el punto medio de  $\overline{CB}$ , lo que prueba que  $\overline{AP}$  es la tercera mediana del triángulo.

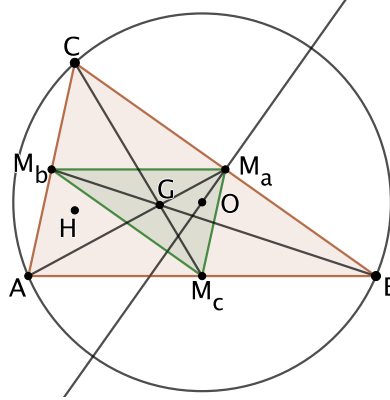
Además, hemos obtenido que  $\overline{AG} = \overline{GH} = 2\overline{GP}$ , luego, en efecto, los dos segmentos en que  $\overline{CM}_c$  divide a la mediana  $\overline{AP}$  miden  $2/3$  y  $1/3$  del total. ■

El punto de intersección de las medianas de un triángulo se llama *baricentro* (gr. “centro de gravedad”) porque puede probarse que es el centro de gravedad del triángulo, es decir, el punto sobre el cual se mantendría en equilibrio si lo dejáramos descansar sobre la punta de un alfiler.

No vamos a demostrar este hecho, pero notemos que, admitiendo que un triángulo tiene que tener un centro de gravedad, éste tiene que ser el baricentro que hemos definido, pues cada mediana divide al triángulo en dos triángulos de la misma área (tienen la misma base y la misma altura) luego el segmento que une el centro de gravedad con un vértice tiene que ser la mediana, ya que de lo contrario un lado pesaría más que el otro y el triángulo no se mantendría en equilibrio.

**El triángulo medial** Se llama *triángulo medial* de un triángulo dado  $\widehat{ABC}$  al triángulo que tiene por vértices los puntos medios de los lados. El teorema 4.7 implica que la homotecia de centro en el baricentro del triángulo y razón  $-2$  transforma el triángulo medial en el triángulo dado.

En particular, el baricentro de un triángulo coincide con el de su triángulo medial (pues es fácil ver que una homotecia entre dos triángulos conserva el baricentro, al igual que todos los otros puntos notables que hemos definido).

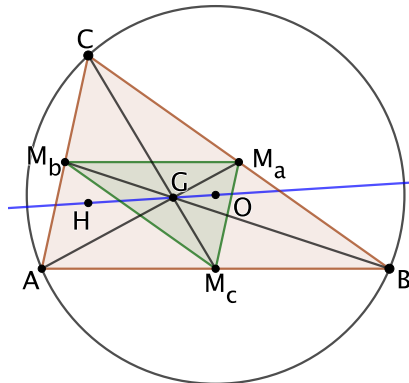


Por otra parte, el circuncentro  $O$  de un triángulo es el ortocentro de su triángulo medial, pues, por ejemplo,  $M_bM_c$  es paralela a  $BC$ , luego la mediatriz  $OM_a$  de  $BC$  es perpendicular a  $M_bM_c$ , luego es la altura del triángulo medial correspondiente al vértice  $M_a$  y concluimos que  $O$  es la intersección de dichas alturas. Con esto tenemos prácticamente demostrado el teorema 4.8 siguiente.

**La recta de Euler** Observemos que si el circuncentro de un triángulo coincide con su baricentro, es que el triángulo es equilátero, y en tal caso ambos puntos coinciden con el ortocentro. En efecto, tenemos que las medianas coinciden con las mediatrices, por lo que cada vértice está en la mediatriz del lado opuesto, luego equidista de los otros dos vértices, luego los dos lados a los que pertenece tienen la misma longitud. Como esto vale para todos los lados, el triángulo es equilátero.

Para triángulos no equiláteros tenemos el teorema siguiente:

**Teorema 4.8 (Euler)** *En un triángulo no equilátero, el circuncentro  $O$  el baricentro  $G$  y el ortocentro  $H$  son colineales. Más aún,  $G$  está entre los otros dos y  $\overline{GH} = 2\overline{GO}$ .*



DEMOSTRACIÓN: Según las observaciones precedentes sobre el triángulo medial, éste se transforma en el triángulo de partida mediante la homotecia de centro  $G$  y razón  $-2$ , luego el circuncentro  $O$ , que, según hemos razonado en el apartado anterior, es el ortocentro del triángulo medial, se transforma mediante dicha homotecia en el ortocentro  $H$  del triángulo dado, y esto vuelve inmediata la conclusión. ■

**Nota** De la demostración se sigue también que  $\overline{CH} = 2\overline{OM}_c$ , es decir, que la distancia de un vértice al ortocentro es el doble de la distancia del punto medio del lado opuesto al circuncentro. ■

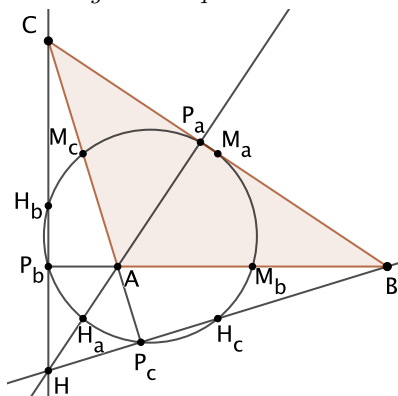
La recta que pasa por el circuncentro, el baricentro y el ortocentro se llama *recta de Euler* del triángulo. En general no contiene al incentro, pero la demostración tendrá que esperar hasta el capítulo siguiente (teorema 5.41).

## 4.2 La circunferencia de los nueve puntos

Probamos ahora uno de los resultados más famosos de la geometría del triángulo de entre los que no fueron descubiertos por los antiguos griegos:

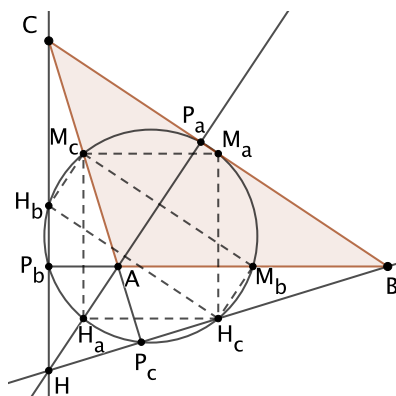
**Teorema 4.9** *Dado un triángulo arbitrario, los nueve puntos siguientes están sobre una misma circunferencia:*

- Los puntos medios de los lados  $M_a, M_b, M_c$ ,
- Los pies de las alturas  $P_a, P_b, P_c$ ,
- Los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro  $H$  con cada uno de los vértices.



DEMOSTRACIÓN: El segmento  $\overline{M_bM_c}$  es claramente paralelo a  $BC$ , porque une los puntos medios de dos lados de  $\widehat{ABC}$ , e igualmente  $\overline{H_bH_c}$  es paralelo a  $BC$  porque une los puntos medios de dos lados del triángulo  $\widehat{HBC}$ .

Similarmente,  $\overline{M_cH_b}$  es paralelo a  $HA$ , porque une los puntos medios de dos lados de  $\widehat{CHA}$ , e igualmente sucede con  $\overline{M_bH_c}$ . Por lo tanto,  $M_b, M_c, H_c, H_b$  son los vértices de un rectángulo, luego los cuatro puntos están sobre una misma circunferencia cuyo centro es la intersección de sus diagonales.

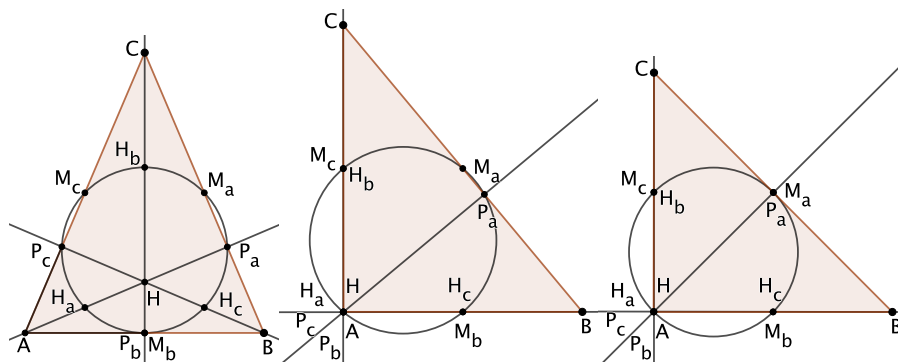


Pero el mismo razonamiento se aplica a  $M_a, M_c, H_a, H_c$ , y ambos rectángulos tienen en común la diagonal  $M_c H_c$ , luego ésta es un diámetro común de las dos circunferencias, pero esto implica que las dos son la misma, luego los seis puntos están sobre la misma circunferencia.

Por último,  $M_c P_b H_c$  es un ángulo recto y la diagonal  $M_c H_c$  es un diámetro de la circunferencia, luego  $P_b$  también está en ella, e igualmente se razona con  $P_a$  y  $P_c$  (teniendo en cuenta que las cuatro diagonales de los dos rectángulos son diámetros de la misma circunferencia). ■

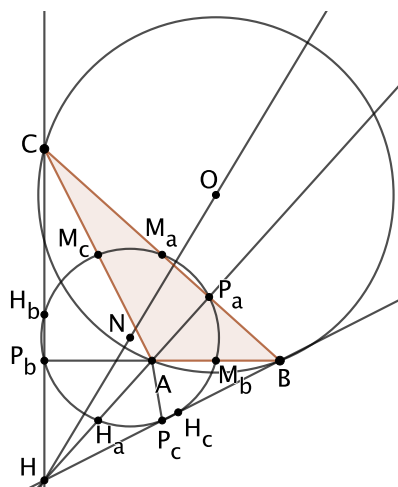
La circunferencia dada por el teorema anterior se conoce como *circunferencia de los nueve puntos* del triángulo dado.

Observemos que en un triángulo isósceles coinciden dos de los nueve puntos, en un triángulo equilátero se reducen a seis, en un triángulo rectángulo se reducen a cinco y, si además es isósceles, a cuatro:



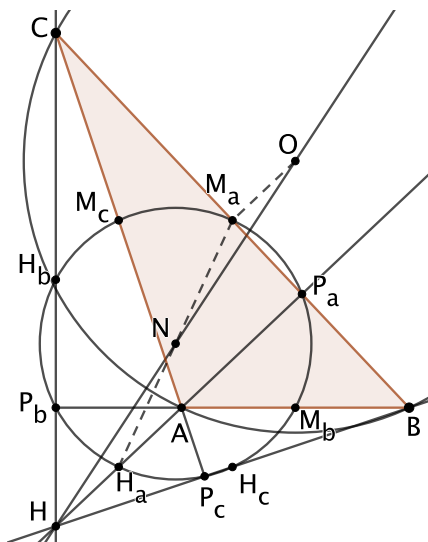
Sucede que el centro  $N$  de la circunferencia de los nueve puntos está sobre la recta de Euler:

**Teorema 4.10** *El centro  $N$  de la circunferencia de los nueve puntos es el punto medio del segmento que une el ortocentro con el circuncentro, y su radio es la mitad del circunradio.*



DEMOSTRACIÓN: Si el triángulo es equilátero es fácil ver que  $H = O = N$ . En caso contrario sabemos que  $H \neq O$ . Llamemos  $N$  al punto de corte de  $\overline{OH}$  y  $\overline{H_aM_a}$ . Vamos a probar que es el punto medio de ambos segmentos, y en la prueba del teorema 4.9 hemos visto que el punto medio del segundo es precisamente el centro de la circunferencia de los nueve puntos, con lo que la primera parte del teorema quedará demostrada.

Tenemos que  $OM_a$  es la mediatriz del lado  $\overline{BC}$ , luego es perpendicular a  $BC$ , al igual que  $HH_a$ , que es la altura del lado  $BC$ . Por lo tanto  $OM_a$  es paralela a  $HH_a$ , y esto hace que los triángulos  $\widehat{NM_aO}$  y  $\widehat{NH_aH}$  sean semejantes.



Pero  $\overline{AH} = 2\overline{OM_a}$  (véase la nota tras el teorema 4.8), y  $\overline{HH_a} = \frac{1}{2}\overline{HA}$ , luego  $\overline{HH_a} = \overline{OM_a}$ , por lo que los triángulos  $\widehat{NM_aO}$  y  $\widehat{NH_aH}$  son iguales. Esto prueba que  $\overline{NH} = \overline{NO}$  y que  $\overline{H_aN} = \overline{NM_a}$ , como teníamos que probar.

Finalmente, basta considerar el triángulo  $\widehat{H A O}$ . El segmento  $\overline{H_a N}$  une los puntos medios de dos de sus lados, luego  $\widehat{H H_a N}$  es un triángulo semejante y, como  $\overline{H O} = 2 \overline{H N}$ , también  $\overline{A O} = 2 \overline{H_a N}$ , pero el primer segmento es un radio de la circunferencia circunscrita y el segundo de la circunferencia de los nueve puntos. ■

Por lo tanto:

**Teorema 4.11** *La circunferencia de los nueve puntos es homotética a la circunferencia circunscrita respecto de la homotecia con centro en el ortocentro  $H$  y razón  $1/2$ .*

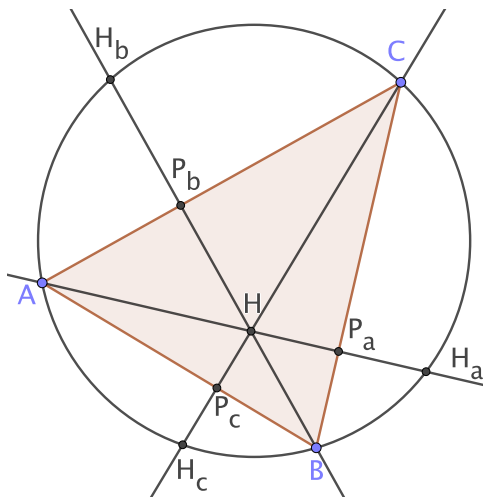
DEMOSTRACIÓN: Es obvio que la imagen de la circunferencia circunscrita por la homotecia indicada es la circunferencia que tiene su centro en el punto medio de  $\overline{H O}$  (es decir, en  $N$ ) y radio igual a la mitad del circunradio luego por el teorema anterior se trata de la circunferencia de los nueve puntos. ■

Equivalentemente:

**Teorema 4.12** *La circunferencia de los nueve puntos está formada por los puntos medios de todos los segmentos que unen el ortocentro  $H$  con un punto de la circunferencia circunscrita.*

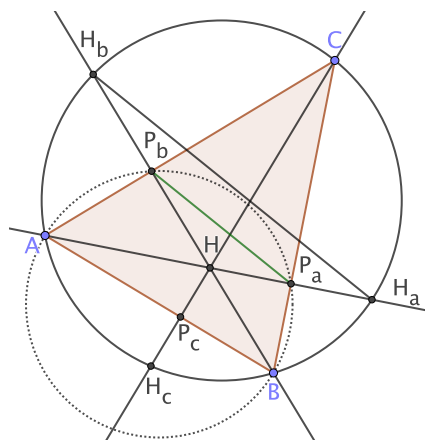
Veamos algunas aplicaciones, para lo cual necesitamos el hecho siguiente:

**Teorema 4.13** *Si  $H_a, H_b, H_c$  son los puntos donde las alturas de un triángulo no rectángulo cortan a la circunferencia circunscrita, entonces los vértices del triángulo son los puntos medios de los tres arcos determinados por ellos.*



DEMOSTRACIÓN: Como  $\widehat{A P_a B} = \widehat{A P_b B} = \pi/2$ , los cuatro puntos  $A, B, P_a, P_b$  están sobre una circunferencia, luego  $\widehat{P_a A P_b} = \widehat{P_a B P_b}$ , que es lo mismo que  $\widehat{H_a A C} = \widehat{C B H_b}$ , y esto significa que  $C$  es el punto medio del arco de extremos  $H_a, H_b$  que lo contiene.

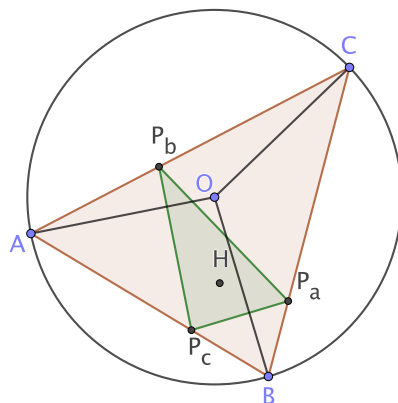




En las condiciones del teorema anterior, como  $P_a$  y  $P_b$  son los puntos medios de los segmentos  $\overline{HH_a}$  y  $\overline{HH_b}$ , es decir, como  $H_a$  y  $H_b$  son los puntos homotéticos de  $P_a$  y  $P_b$  respecto de la homotecia de centro  $H$  y razón 2, la recta  $H_aH_b$  es homotética a  $P_aP_b$ , luego ambas son paralelas.

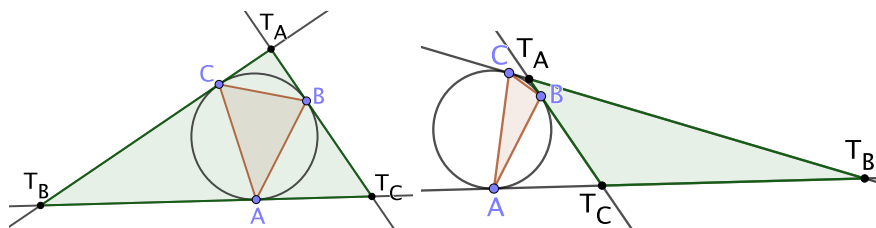
De aquí deducimos a su vez:

**Teorema 4.14** *Los radios de la circunferencia de un triángulo no rectángulo que pasan por los vértices son perpendiculares a los lados correspondientes del triángulo órtico.*

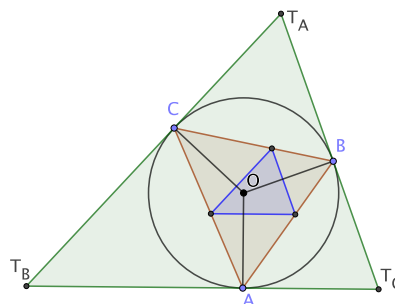


DEMOSTRACIÓN: En las condiciones del teorema anterior, como  $C$  es el punto medio del arco de extremos  $H_a$  y  $H_b$ , es claro que el radio  $\overline{OC}$  es perpendicular a la cuerda  $\overline{H_aH_b}$ , y ésta es paralela al lado  $\overline{P_aP_b}$  del triángulo órtico.

**El triángulo tangencial** Si un triángulo no es rectángulo, las rectas tangentes a su circunferencia circunscrita en los vértices del triángulo forman un nuevo triángulo llamado *triángulo tangencial*. Si el triángulo es rectángulo dos de las tangentes son paralelas, por lo que no determinan ningún triángulo. Si es acutángulo la circunferencia circunscrita es la circunferencia inscrita del triángulo tangencial, mientras que si es obtusángulo es una de sus circunferencias excritas:

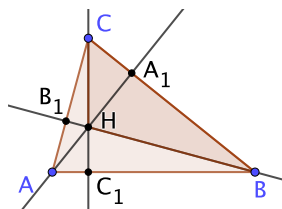


**Teorema 4.15** *Los lados del triángulo tangencial de un triángulo no rectángulo son paralelos a los lados correspondientes del triángulo órtico. En particular, ambos son semejantes.*



**DEMOSTRACIÓN:** Basta tener en cuenta que los radios de la circunferencia circunscrita que pasan por los vértices del triángulo son perpendiculares a los lados de ambos triángulos. ■

**Sistemas ortocéntricos** Un *sistema ortocéntrico* es el conjunto de los cuatro vértices  $A, B, C$  de un triángulo no rectángulo y su ortocentro  $H$ .



El interés de esta definición radica en que los cuatro puntos están en realidad en las mismas condiciones, es decir, que cualquiera de los cuatro puntos es el ortocentro del triángulo formado por los otros tres. Por ejemplo, si consideramos el triángulo  $\widehat{HBC}$ , tenemos que la altura por  $C$  es la perpendicular a  $BH$  que pasa por  $C$ , pero ésta es  $CA$ , e igualmente la altura por  $B$  es  $AB$ , luego el ortocentro es  $A$ .

Más aún, el pie de la altura de  $\widehat{HBC}$  por  $C$  es  $B_1$ , que es el pie de la altura de  $\widehat{ABC}$  por  $B$ . Similarmente, el pie de la altura de  $\widehat{HBC}$  por  $B$  es el pie de la altura de  $\widehat{ABC}$  por  $C$ , y el pie de la altura de  $\widehat{HBC}$  por  $A$  es el pie  $A_1$  de la altura de  $\widehat{ABC}$  por  $A$ . Por lo tanto:

**Teorema 4.16** *Los cuatro triángulos que se forman con tres puntos cualesquiera de un sistema ortocéntrico tienen el mismo triángulo órtico.*

Antes de extraer más consecuencias observemos que hay otro ejemplo sencillo de sistemas ortocéntricos:

**Teorema 4.17** *El incentro y los excentros de un triángulo forman un sistema ortocéntrico.*

DEMOSTRACIÓN: Basta tener en cuenta que, como las bisectrices exteriores son perpendiculares a las interiores, éstas son las alturas del triángulo  $\widehat{I_a I_b I_c}$  (véase la figura del apartado sobre los excentros en la página 145), luego el incentro  $I$  es el ortocentro del triángulo formado por los excentros. Más aún, los pies de las alturas de este triángulo son precisamente  $A, B, C$ , luego la circunferencia circunscrita de  $\widehat{ABC}$  es la circunferencia de los nueve puntos de  $\widehat{I_a I_b I_c}$ . ■

El teorema siguiente es una consecuencia trivial del teorema 4.16 de la que extraeremos a su vez más consecuencias:

**Teorema 4.18** *Los cuatro triángulos formados con tres puntos de un sistema ortocéntrico tienen la misma circunferencia de los nueve puntos.*

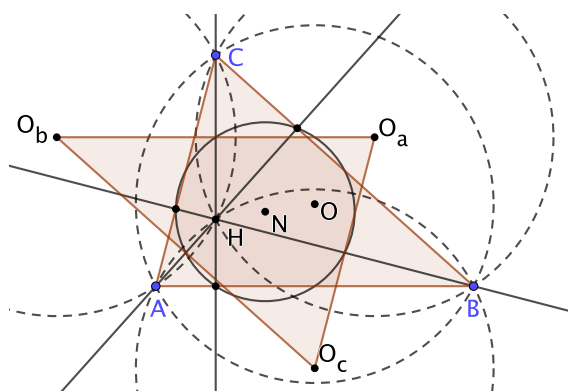
DEMOSTRACIÓN: Basta tener en cuenta que, por definición, la circunferencia de los nueve puntos es la circunferencia circunscrita al triángulo órtico. ■

El teorema 4.10 nos da entonces:

**Teorema 4.19** *Los cuatro triángulos determinados por un sistema ortocéntrico tienen el mismo circunradio.*

Más aún:

**Teorema 4.20** *Los circuncentros de los cuatro triángulos formados por un sistema ortocéntrico forman también un sistema ortocéntrico.*



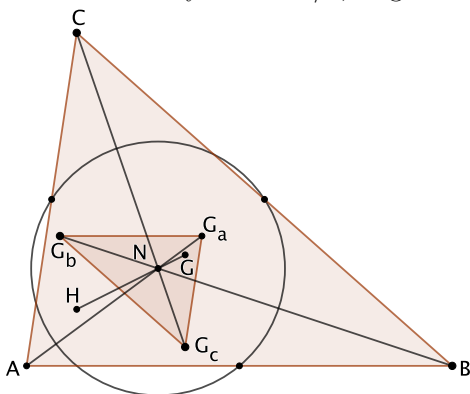
DEMOSTRACIÓN: Sabemos que los cuatro triángulos tienen una misma circunferencia de los nueve puntos con un mismo centro  $N$ . Si  $O$  es el ortocentro de uno de ellos, por 4.10 sabemos que  $N$  es el punto medio entre  $O$  y el cuarto punto del sistema (el que no es un vértice del triángulo considerado). En otras palabras, los cuatro ortocentros son los cuatro puntos simétricos de los cuatro vértices respecto de  $N$  o, dicho de otro modo, los puntos en que se transforman los cuatro puntos del sistema dado al aplicarles un giro de  $180^\circ$  alrededor de  $N$ :

Es claro entonces que también forman un sistema ortocéntrico. Más aún, puesto que un giro alrededor de  $N$  deja fija a la circunferencia de los nueve puntos, el sistema de los circuncentros tiene la misma circunferencia de los nueve puntos que el sistema dado. ■

En particular vemos que cualquier sistema ortocéntrico está formado por los circuncentros de otro sistema ortocéntrico, concretamente, del formado por sus circuncentros, pues uno se obtiene a partir del otro mediante un giro de  $180^\circ$  alrededor del centro común  $N$  de la circunferencia de los nueve puntos.

**Teorema 4.21** *Los baricentros de los cuatro triángulos determinados por un sistema ortocéntrico forman otro sistema ortocéntrico.*

DEMOSTRACIÓN: Combinando los teoremas 4.8 y 4.10, es decir, teniendo en cuenta que los puntos  $H - N - G - O$  están alineados de modo que  $\overline{HN} = \overline{NO}$  y  $\overline{HG} = 2\overline{GO}$ , se concluye inmediatamente que  $\overline{HN} = 3\overline{NG}$ . Esto se traduce en que los cuatro baricentros son los homotéticos del sistema ortocéntrico respecto de la homotecia de centro  $N$  y razón  $-1/3$ , luego también son un sistema ortocéntrico.



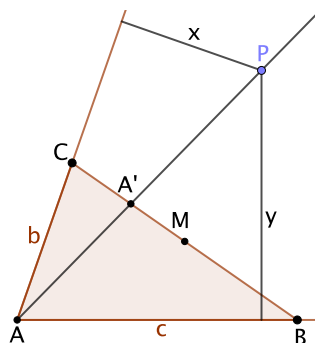
### 4.3 Simedianas

**Definición 4.22** Las *simedianas* de un triángulo son las rectas simétricas a las medianas respecto de las bisectrices.

El concepto de “simediana” puede parecer artificioso, pero en realidad es muy natural. Por ejemplo, aquí tenemos una caracterización métrica sencilla de los puntos de una simediana:

**Teorema 4.23** *Un punto  $P$  está en la simediana del vértice  $A$  de un triángulo  $\widehat{ABC}$  si y sólo si las distancias de  $P$  a las rectas  $AB$  y  $AC$  son proporcionales a las longitudes de los lados correspondientes, es decir, si, con la notación de la figura, se cumple que*

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{c}.$$



DEMOSTRACIÓN: Si  $P$  está en la simediana, consideramos los segmentos simétricos a  $\overline{PQ}$ ,  $\overline{PR}$ , que serán perpendiculares a los lados del triángulo, luego

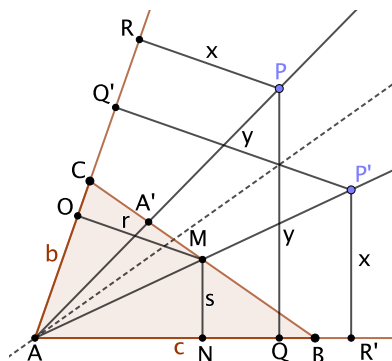
$$\frac{x}{s} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AM}} = \frac{y}{r},$$

luego  $x/y = s/r$ . Por otra parte, los triángulos  $\widehat{AMB}$  y  $\widehat{AMC}$  tienen la misma área, pues tienen bases iguales  $BM = MC$  y las alturas correspondientes también son las mismas. Pero si calculamos las áreas con las bases  $b$  y  $c$ , vemos que

$$1 = \frac{(AMB)}{(AMC)} = \frac{cs}{br}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{x}{y} = \frac{s}{r} = \frac{b}{c}.$$



Recíprocamente, si se cumple esta relación, el mismo razonamiento con áreas nos da que  $x/y = s/r$ . Si llamamos  $P'$  al punto situado sobre la mediana  $AM$  que está a una distancia  $x$  de  $AB$ , entonces

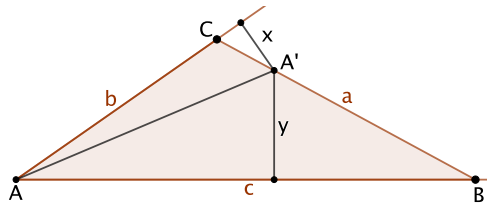
$$\frac{x}{s} = \frac{\overline{AP'}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{Q'P'}}{r},$$

luego  $\overline{Q'P'} = y$ , y esto implica que el simétrico de  $P'$  respecto de la bisectriz es  $P$ , luego  $P$  está en la simediana. ■

En particular, si aplicamos esto al punto  $A'$  en que la simediana corta al lado opuesto  $BC$ , tenemos que las simedianas cumplen un resultado análogo a lo que el teorema 4.3 afirma sobre las bisectrices:

**Teorema 4.24** *Cada simediana de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los cuadrados de los lados contiguos, es decir, si  $A'$  es la intersección entre  $BC$  y la simediana de  $A$ , se cumple que*

$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \frac{c^2}{b^2}.$$

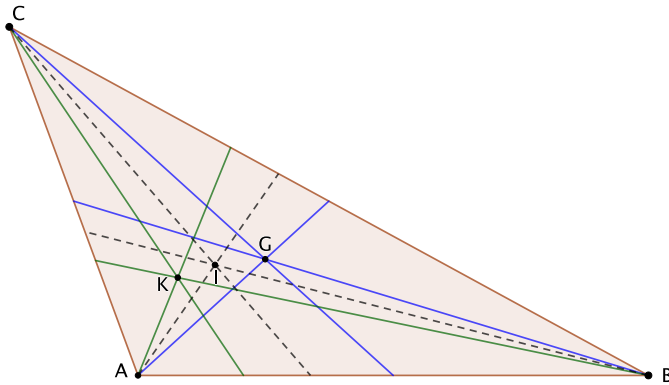


DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior sabemos que  $x/y = b/c$ . Ahora basta considerar áreas:

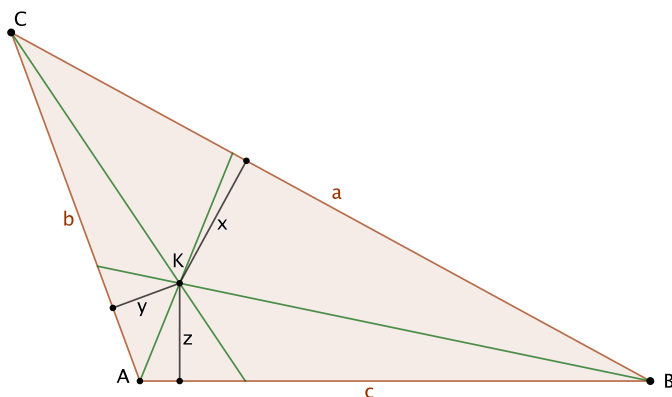
$$\frac{\overline{BA'}}{\overline{A'C}} = \frac{(AA'B)}{(AA'C)} = \frac{cy}{bx} = \frac{c^2}{b^2}. \quad \blacksquare$$

Pero la consecuencia más interesante de 4.23 es que, como cabría esperar a la vista de otros casos similares:

**Teorema 4.25** *Las simedianas de un triángulo se cortan en un mismo punto.*



DEMOSTRACIÓN: Sea  $K$  el punto donde se cortan dos simedianas, por ejemplo, las de  $A$  y  $B$ .



Por el teorema 4.23 sabemos que

$$\frac{y}{z} = \frac{b}{c}, \quad \frac{x}{z} = \frac{a}{c},$$

luego

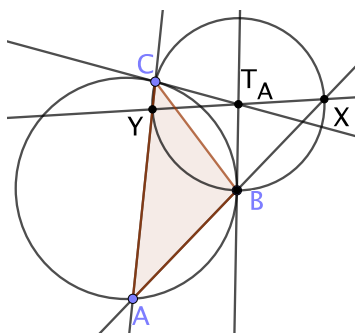
$$\frac{x}{y} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b},$$

y de nuevo por 4.23 concluimos que  $K$  está también en la simediana de  $C$ . ■

El punto  $K$  dado por el teorema anterior se llama *punto simediano* del triángulo.

El teorema siguiente muestra una situación en la que las simedianas aparecen de forma natural:

**Teorema 4.26** *La recta que une cada vértice de un triángulo no rectángulo con el vértice correspondiente de su triángulo tangencial es la simediana correspondiente a dicho vértice.*



DEMOSTRACIÓN: Trazamos la circunferencia de centro  $T_A$  que pasa por  $B$  y  $C$ . Notemos que la recta  $AB$  no puede ser tangente a ella, pues eso significaría que la tangente  $T_A B$  es perpendicular a  $AB$ , luego  $AB$  pasaría por el circuncentro y el triángulo sería rectángulo. Sea, pues,  $X$  el otro punto donde  $AB$  corta a  $T_A B$ .

Vamos a considerar ángulos dirigidos, y así no necesitamos distinguir los casos en los que el triángulo es acutángulo u obtusángulo. Por el teorema 3.34, tenemos que

$$\widehat{ACB} = \widehat{ABB} = \widehat{XBT_A} = \widehat{T_A X B} = \widehat{T_A X A},$$

donde en la penúltima igualdad hemos usado que el triángulo  $\widehat{XT_A B}$  es isósceles. Así

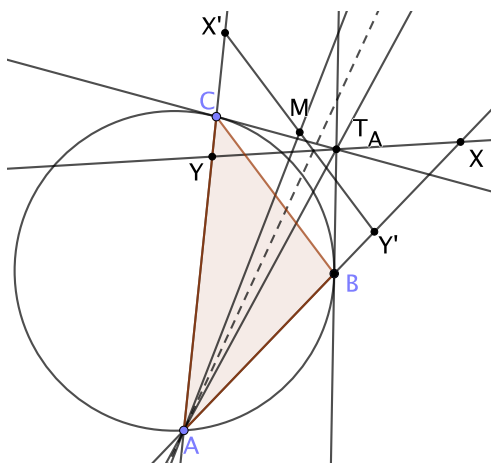
$$\widehat{XAC} + \widehat{T_A X A} = \widehat{BCA} + \widehat{ACB} \neq 0,$$

pues la suma de dos ángulos de un triángulo no puede ser 0. Esto se traduce en que las rectas  $AC$  y  $T_A X$  no son paralelas, luego se cortan en un punto  $Y$ , con lo que se forma un triángulo  $\widehat{AXY}$  con dos ángulos en común con  $\widehat{ABC}$ , luego el tercer ángulo tiene que ser  $\widehat{AYX} = \widehat{CBA}$ .

Vamos a probar que  $\widehat{YT_A} = \widehat{T_A X}$ . Si  $Y = C$  es trivial y, en caso contrario, basta ver que el triángulo  $\widehat{T_A C Y}$  es isósceles, pues entonces  $\widehat{YT_A} = \widehat{CT_A} = \widehat{T_A X}$ . Ahora bien, de nuevo por 3.34:

$$\widehat{CYT_A} = \widehat{AYX} = \widehat{CBA} = \widehat{CCA} = \widehat{T_A C A} = \widehat{T_A C Y},$$

luego el triángulo tiene dos ángulos iguales.

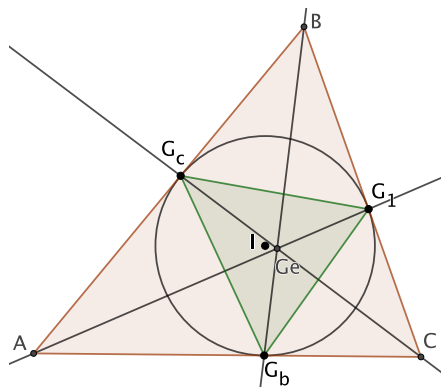


Ahora la conclusión es sencilla: tenemos que  $AT_A$  es una mediatriz del triángulo  $\widehat{AXY}$ , luego si aplicamos a este triángulo la simetría respecto a la bisectriz de  $\hat{A}$ , obtendremos otro triángulo que no sólo será semejante a  $\widehat{ABC}$ , sino que estará en posición de Tales y la recta  $AM$  simétrica de  $AT_A$  será su mediatriz, pero es fácil ver que dos triángulos en posición de Tales comparten la mediatriz respecto del vértice común, y esto prueba que  $AT_A$  es la simediana de  $\widehat{ABC}$  correspondiente al vértice  $A$ . ■



**El punto de Gergonne** El triángulo cuyos vértices son los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita de un triángulo se llama *triángulo de Gergonne* del triángulo dado. El teorema siguiente lo tenemos prácticamente demostrado:

**Teorema 4.27** *Las rectas que unen los vértices de un triángulo con los vértices correspondientes de su triángulo de Gergonne pasan por un mismo punto.*



DEMOSTRACIÓN: Claramente, el triángulo dado es el triángulo tangencial de su triángulo de Gergonne, luego las rectas que unen cada vértice del triángulo con el vértice correspondiente del triángulo de Gergonne pasan por el punto simediano del triángulo de Gergonne. ■

El punto de intersección de las rectas que unen cada vértice de un triángulo con el punto de tangencia de la circunferencia inscrita en el lado opuesto se llama *punto de Gergonne* del triángulo, y acabamos de probar que coincide con el punto simediano del triángulo de Gergonne.

## 4.4 El teorema de Miquel

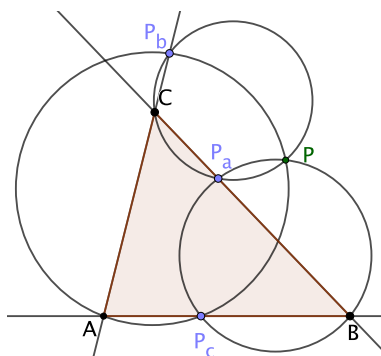
La primera demostración del teorema siguiente fue publicada por Auguste Miquel en 1838:

**Teorema 4.28 (Miquel)** *Sea  $\widehat{ABC}$  un triángulo y sean  $P_a, P_b, P_c$  puntos situados sobre las rectas  $BC, AC$  y  $AB$ , respectivamente, distintos de los vértices del triángulo. Entonces, las tres circunferencias que pasan por los un vértice y por los dos puntos elegidos en los lados contiguos pasan por un mismo punto  $P$ .*

**Nota** El resultado es válido igualmente si admitimos que los puntos  $P_a, P_b, P_c$  coincidan con los vértices del triángulo, con la condición de que no haya dos coincidentes con el mismo vértice. ■

DEMOSTRACIÓN: Consideremos las circunferencias que pasan por  $AP_bP_c$  y por  $BP_aP_c$ . Ambas tienen el punto  $P_c$  en común. Llamemos  $P$  al otro punto de corte, entendiendo que  $P = P_c$  en caso de que las circunferencias sean tangentes.

Vamos a probar que  $P$  está también en la circunferencia que pasa por  $CP_aP_b$ . Podemos suponer que  $P$  es distinto de estos tres puntos, o de lo contrario la conclusión es trivial.



Veamos que no puede ser  $P = A$ . En tal caso la segunda circunferencia pasa por los puntos colineales  $A, P_c, B$ , lo que exige que  $P_c$  coincida con  $A$  o con  $B$ . Pero  $P = A = P_c$  es imposible, pues  $P = A$  significa que la primera circunferencia es tangente a  $AB$  por  $A$ , y  $P = P_c$  significa que ambas son tangentes entre sí, luego la segunda también tendría que ser tangente a  $AB$  por  $A$ , cuando contiene a  $B$ . La otra alternativa tampoco puede darse, pues si  $P = A$  y  $P_c = B$ , la segunda circunferencia tendría que ser tangente a  $AB$  por  $B$ , y a la vez contener a  $A$ . Por simetría, tampoco puede ser  $P = B$ .

Los teoremas 3.33 y 3.34 nos dan que  $\widehat{PP_bA} = \widehat{PP_cA}$  incluso si algunos puntos están repetidos, ya que todos ellos están sobre la misma circunferencia, e igualmente  $\widehat{PP_cB} = \widehat{PP_aB}$ . Esto equivale a

$$\widehat{PP_b, AC} = \widehat{PP_c, AB}, \quad \widehat{PP_c, AB} = \widehat{PP_a, BC},$$

luego  $\widehat{PP_b, AC} = \widehat{PP_a, BC}$ , que es lo mismo que  $\widehat{PP_bC} = \widehat{PP_aC}$  (entendiendo que si  $P_b = C$  entonces  $AC = P_bC$  es la tangente a la tercera circunferencia por  $C$ , e igualmente si  $P_a = C$ ). Por el teorema 3.33 (o por la nota tras 3.34 en caso de que haya alguna repetición) concluimos que  $P, C, P_a, P_b$  están sobre una misma circunferencia (ya que no pueden ser colineales), y esto es lo mismo que decir que  $P$  está sobre la tercera circunferencia. ■

**Definición 4.29** El punto  $P$  dado por el teorema anterior es el *punto de Miquel* del triángulo  $\widehat{ABC}$  respecto de la terna de puntos  $P_a, P_b, P_c$ . Las tres circunferencias cuya intersección es  $P$  son las *circunferencias de Miquel*.

**Teorema 4.30** En las condiciones del teorema anterior, se cumple la relación siguiente entre ángulos dirigidos:

$$\widehat{BPC} = \widehat{BAC} + \widehat{P_bP_aP_c}.$$

DEMOSTRACIÓN: Usando 3.33 y luego 3.31:

$$\begin{aligned} \widehat{BPC} &= \widehat{BPP_a} + \widehat{P_aPC} = \widehat{BP_cP_a} + \widehat{P_aP_bC} = \widehat{AB, P_cP_a} + \widehat{P_aP_b, AC} \\ &= \widehat{AB, AC} + \widehat{P_aP_b, P_aP_c} = \widehat{BAC} + \widehat{P_bP_aP_c}. \end{aligned}$$

Notemos que si,  $P = P_b$  o  $P = P_c$ , algunas igualdades se cumplen trivialmente. ■

Como consecuencia:

**Teorema 4.31** *Los puntos  $P_a, P_b, P_c$  están alineados si y sólo si su punto de Miquel está en la circunferencia circunscrita del triángulo.*

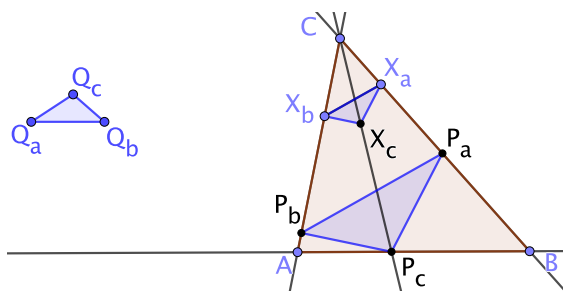
DEMOSTRACIÓN: Los puntos están alineados si y sólo si  $\widehat{P_bP_aP_c} = 0$ , lo que a su vez equivale a que  $\widehat{BPC} = \widehat{BAC}$ , que por 3.33 equivale a que los cuatro puntos  $A, B, C, P$  estén sobre la misma circunferencia. ■

Más en general, el teorema 4.30 nos dice que si un punto  $P$  determina un triángulo  $\widehat{P_aP_bP_c}$ , los ángulos  $\widehat{P_bP_aP_c}$  están determinados por  $P, A, B, C$  (basta sumar  $\widehat{CBA}$  a la ecuación del teorema para despejar  $\widehat{P_bP_aP_c}$ ), por lo que todos los triángulos  $\widehat{P_aP_bP_c}$  que determinan un mismo punto de Miquel  $P$  son (directamente) semejantes. Más aun:

**Teorema 4.32** *Dados dos triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{Q_aQ_bQ_c}$ , existe un único punto  $P$  que es el punto de Miquel de una terna  $P_a, P_b, P_c$  tal que el triángulo  $\widehat{P_aP_bP_c}$  es directamente semejante al segundo.*

DEMOSTRACIÓN: La unicidad se debe al teorema 4.30, que afirma que los ángulos dirigidos que  $P$  forma con los vértices del primer triángulo están completamente determinados por los dos triángulos dados, y estos ángulos determinan el punto  $P$ . La existencia se desprende de la construcción siguiente. ■

**Problema 4.1** *Dado un triángulo, determinar puntos  $P_a, P_b, P_c$  en las prolongaciones de sus lados de modo que el triángulo  $\widehat{P_aP_bP_c}$  sea directamente semejante a otro dado.*

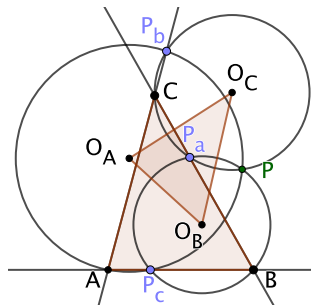


1. Trazamos un segmento cualquiera  $\overline{X_aX_b}$  con los extremos en los lados  $BC$  y  $AC$  del triángulo.

2. Construimos un triángulo  $\widehat{X_a X_b X_c}$  directamente similar al dado.
3. Trazamos el punto  $P_c$  donde  $CX_c$  corta a  $AB$ .
4. Construimos el triángulo  $\widehat{P_a P_b P_c}$  con lados paralelos a los de  $\widehat{X_a X_b X_c}$ . ■

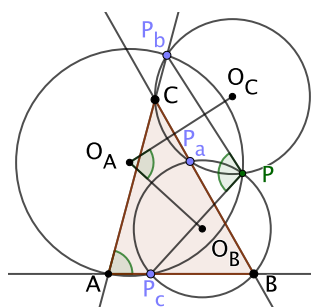
Ahora bien, pueden existir dos puntos distintos  $P$  y  $Q$  que sean puntos de Miquel de dos ternas de puntos inversamente semejantes, pero no puede haber más de dos, ya que, para un tercero, tendría la terna correspondiente sería directamente semejante a la de uno de los dos, luego coincidiría con  $P$  o con  $Q$ .

**Teorema 4.33** *Los centros de las circunferencias de Miquel de un punto respecto de un triángulo forman un triángulo directamente semejante al triángulo de partida.*



DEMOSTRACIÓN: Observemos que  $O_A O_C$  es perpendicular a  $PP_b$ , pues los dos centros están en la mediatriz de la cuerda  $\widehat{PP_b}$ . Igualmente  $O_A O_B$  es perpendicular a  $PP_c$ , y esto se traduce en que  $O_C \widehat{O_A O_B} = \widehat{P_b P P_c}$ , como ángulos dirigidos.

Por otro lado, como  $A$  está en la misma circunferencia,  $\widehat{P_b P P_c} = \widehat{P_b A P_c} = \widehat{C A B}$ . Por lo tanto, los triángulos  $\widehat{A B C}$  y  $O_A \widehat{O_B O_C}$  tienen sus ángulos dirigidos iguales, lo cual implica que son (directamente) semejantes.



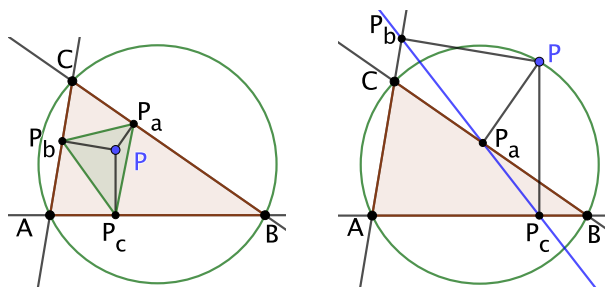
Dado un triángulo  $\widehat{A B C}$  y un punto cualquiera  $P$ , existen infinitas elecciones de puntos  $P_a, P_b, P_c$  cuyo punto de Miquel es  $P$ . Una elección notable consiste en tomar los pies de las perpendiculares por  $P$  a las rectas  $BC, AC$

y  $AB$ , respectivamente. Notemos que si  $P$  no es ninguno de los vértices, entonces no pueden darse dos coincidencias como  $A = P_b = P_c$ , por lo que es posible aplicar el teorema de Miquel a los puntos  $P_a, P_b, P_c$ , y el punto de Miquel correspondiente resulta ser el propio  $P$  pues, por ejemplo,  $P_a$  y  $P_b$  están en la circunferencia que tiene por diámetro  $\overline{P_c}$ , luego  $P$  está en la circunferencia que pasa por  $P_a, P_b$  y  $C$ , e igualmente sucede con las otras tres. Si se da una coincidencia, como  $P_a = C$ , tenemos obviamente que la circunferencia que pasa por  $P, C$  y  $P_b$  es tangente a  $BC$  en  $C$ , luego también es la circunferencia que hay que considerar en este caso.

Por lo tanto, el teorema siguiente es un caso particular del teorema 4.31:

**Teorema 4.34 (Simson)** Dado un triángulo  $\widehat{ABC}$  y un punto  $P$ , los pies  $P_a, P_b, P_c$  de las perpendiculares por  $P$  a las rectas  $BC, AC$  y  $AB$  están sobre una misma recta si y sólo si  $P$  está sobre la circunferencia circunscrita del triángulo.

**Definición 4.35** Dado un triángulo  $\widehat{ABC}$  y un punto  $P$ , si  $P$  no está situado sobre la circunferencia circunscrita del triángulo, se llama *triángulo pedal* de  $P$  al triángulo cuyos vértices son los pies  $P_a, P_b, P_c$  de las perpendiculares por  $P$  a las rectas  $BC, AC$  y  $AB$ . Si  $P$  está en la circunferencia circunscrita, se llama *recta de Simson* a la recta que pasa por los puntos  $P_a, P_b, P_c$ .

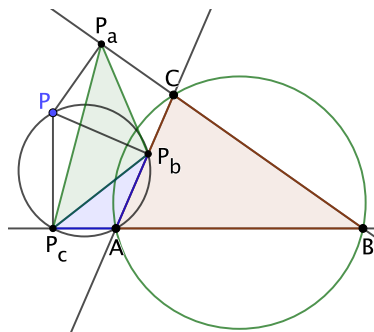


Tanto si  $P$  está o no en la circunferencia circunscrita, si  $P_b \neq A \neq P_c$ , los ángulos rectos en  $P_b$  y  $P_c$  implican que ambos puntos están en la circunferencia de diámetro  $\overline{P_a}$ , y podemos aplicar el teorema de los senos al triángulo  $\widehat{AP_b P_c}$ , que nos da:

$$\frac{\overline{P_b P_c}}{\text{sen } \hat{A}} = \overline{AP}.$$

Notemos que el ángulo  $\hat{A}$  de dicho triángulo puede ser igual o suplementario al correspondiente a  $\widehat{ABC}$ , pero el seno es el mismo en ambos casos.

Si, por ejemplo,  $A = P_c$ , aplicamos el teorema 3.34 a los puntos  $A, P, P_b$  con la tangente a la circunferencia en  $A$ , que es  $AB$ , y el resultado es que  $\widehat{BA, AP_b} = \widehat{P_c P P_b}$ , pero el primer ángulo es  $\hat{A}$  o su suplementario (ambos con el mismo seno), luego el triángulo rectángulo  $\widehat{P_c P P_b}$  cumple que su ángulo en  $P$  (o su suplementario) vale  $\alpha$  y llegamos a la misma conclusión.



Por otro lado, el teorema de los senos aplicado a  $\widehat{ABC}$  nos da que

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R,$$

donde  $R$  es el circunradio. En resumen:

**Teorema 4.36** Dado un triángulo  $\widehat{ABC}$  y un punto arbitrario  $P$ , sean  $P_a$ ,  $P_b$ ,  $P_c$  los pies de las perpendiculares a  $BC$ ,  $AC$  y  $AB$ , respectivamente. Entonces:

$$\overline{P_b P_c} = \overline{AP} \sin \hat{A} = \frac{\overline{AP}}{2R} a,$$

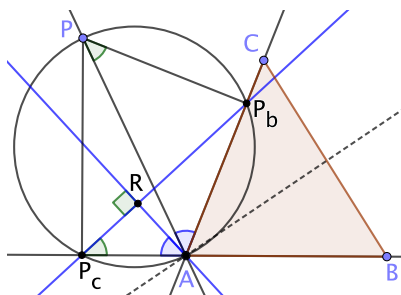
donde  $R$  es el circunradio del triángulo.

En particular, si en punto  $P$  no está sobre la circunferencia circunscrita y está definido el triángulo pedal, el teorema anterior nos da las longitudes de sus lados.

Más en particular, vemos que si  $P$  es el circuncentro del triángulo, entonces las longitudes  $\overline{AP}$  son todas iguales a  $R$ , luego los lados del triángulo pedal del circuncentro son proporcionales a los del triángulo dado, lo cual es obvio, pues se trata simplemente del triángulo medial. No obstante, ahora sabemos que éste es el único caso en el que el triángulo pedal es semejante al triángulo de partida.

Vamos a obtener algunas propiedades de la recta de Simson. Para ello necesitaremos el siguiente teorema general:

**Teorema 4.37** Consideremos un triángulo  $\widehat{ABC}$  y un punto  $P \neq A$ . Sean  $P_b$  y  $P_c$  los pies de las perpendiculares por  $P$  a los lados  $AC$  y  $AB$ , respectivamente. Entonces, la recta simétrica de  $PA$  respecto de la bisectriz del ángulo  $\hat{A}$  es perpendicular a  $P_b P_c$ .



DEMOSTRACIÓN: Como  $\widehat{PP_cA} = \pi/2 = \widehat{PP_bA}$ , los cuatro puntos  $P, P_b, P_c, A$  están sobre una circunferencia. Aquí tenemos que tratar separadamente cuatro casos triviales: si  $P_c = A$ , entonces la recta  $P_bP_c$  es el lado  $AC$  y  $PP_c$  es perpendicular a  $AB$ , luego la recta simétrica de  $PP_c$  respecto de la bisectriz es perpendicular a la simétrica de  $AB$ , que es  $AC$ , como queríamos probar. Otro caso trivial se da si  $P = P_b$ , con lo que  $PA = AC$ , la recta simétrica de  $PA$  es  $AB$  y ésta es perpendicular a  $PP_c$ . Los casos  $P_b = A$  o  $P = P_c$  son análogos.

Descartados estos casos, tenemos que  $\widehat{P_bP_cA} = \widehat{P_bPA}$  porque ambos ángulos abarcan el mismo arco (o bien arcos opuestos) y, llamando  $r$  a la recta simétrica a  $PA$  respecto de la bisectriz, también  $\widehat{PAP_b} = \widehat{P_cA}$ ,  $r$ , pues  $r$  es la recta simétrica de  $PA$  y  $P_cA$  es la recta simétrica de  $P_bA$ .

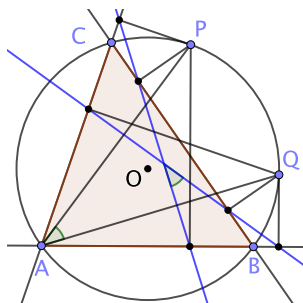
Concluimos que los ángulos que las rectas  $P_bP_c$  y  $r$  forman con  $P_cA$  son los mismos (o ambos son suplementarios) a los que  $PP_b$  y  $AC$  forman con  $PA$ , pero éstos suman  $\pi/2$ , luego los dos primeros suman también  $\pi/2$  o bien  $3\pi/2$ , pero no suman  $\pi$ , que es lo que tendrían que sumar para que las rectas fueran paralelas. Por lo tanto, éstas se cortan en un punto  $R$  y dos ángulos del triángulo  $\widehat{ARP_c}$  tienen que ser iguales o suplementarios de los de  $\widehat{AP_bP}$ , luego tienen que ser iguales (porque los del segundo son ambos agudos) y concluimos que el ángulo en  $R$  tiene que ser recto, luego las dos rectas consideradas en el enunciado son perpendiculares. ■

Si aplicamos el teorema anterior al caso en que  $P$  está en la circunferencia circunscrita del triángulo, tenemos que los tres pares de puntos que podemos formar con  $P_a, P_b, P_c$  determinan la misma recta (la recta de Simson). Así:

**Teorema 4.38** *Si  $P$  es un punto en la circunferencia circunscrita de un triángulo que no coincida con ninguno de sus vértices, entonces su recta de Simson es perpendicular a las tres rectas simétricas de las rectas que unen  $P$  con cada vértice respecto de la bisectriz de dicho vértice. En particular, éstas son paralelas entre sí.*

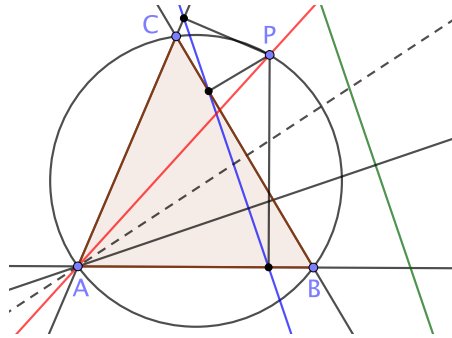
Veamos otra consecuencia:

**Teorema 4.39** *Si  $P$  y  $Q$  son dos puntos en la circunferencia circunscrita de un triángulo y  $S_P, S_Q$  son sus rectas de Simson, entonces  $2\widehat{S_P S_Q} = \widehat{QOP}$ , donde  $O$  es el circuncentro. En particular, las rectas de Simson correspondientes a puntos diametralmente opuestos son perpendiculares.*



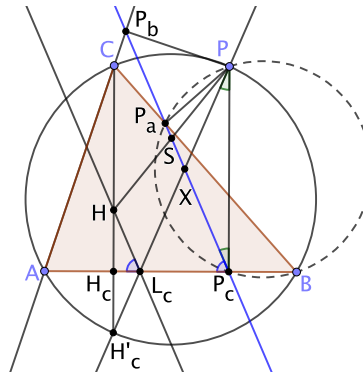
DEMOSTRACIÓN: Obviamente, el triángulo tendrá un vértice distinto de  $P$  y  $Q$ . Podemos suponer que es  $A$ . Entonces  $\widehat{2QAP} = \widehat{QOP}$ . Si llamamos  $l_P$  y  $l_Q$  a las rectas simétricas de  $PA$  y  $PQ$  respecto de la bisectriz de  $\hat{A}$ , tenemos que  $\widehat{l_P l_Q} = \widehat{QAP}$  y, como por 4.37 las rectas de Simson son perpendiculares a  $l_P$  y  $l_Q$ , se cumple que  $\widehat{S_P S_Q} = \widehat{l_P l_Q}$ . ■

Así, si fijamos un punto  $Q$  en la circunferencia circunscrita y hacemos que el otro punto  $P$  de una vuelta completa, el ángulo  $\widehat{QOP}$  toma una vez cada valor entre  $0$  y  $\pi$ , por lo que lo mismo sucede con el ángulo entre las rectas de Simson, lo que significa que hay un único punto  $P$  en la circunferencia circunscrita cuya recta de Simson sea paralela a una recta dada.



Para construirla basta trazar la perpendicular a la recta dada por uno de los vértices (digamos  $A$ ) y luego calcular su simétrica respecto de la bisectriz. El punto buscado será el punto distinto de  $A$  donde dicha recta corta a la circunferencia circunscrita. Si el punto buscado es  $A$  la recta obtenida será tangente, pues si cortara a la circunferencia en otro punto  $P$ , entonces la recta de Simson de  $P$  sería paralela a la de  $A$ , lo cual es imposible.

**Teorema 4.40** *La recta de Simson de cualquier punto  $P$  de la circunferencia circunscrita a un triángulo pasa por el punto medio  $X$  del segmento  $\overline{PH}$ , donde  $H$  es el ortocentro del triángulo.*





DEMOSTRACIÓN: Sea  $H'_c$  el simétrico del ortocentro  $H$  respecto del lado  $AB$ . Equivalentemente, el pie de la altura  $H_c$  es el punto medio del segmento  $\overline{HH'_c}$ , de donde se sigue que  $H'_c$  está en la circunferencia circunscrita, por el teorema 4.11.

Como  $\widehat{PP_aB} = \pi/2 = \widehat{PP_bB}$ , los cuatro puntos están sobre una misma circunferencia, luego, considerando ángulos dirigidos, también se cumple

$$\widehat{P_aP_cP} = \widehat{P_aBP} = \widehat{PH'_cP} = \widehat{P_cPH'_c}.$$

Supongamos en primer lugar que estos ángulos no son rectos. Entonces la recta de Simson  $P_cP_a$  y la recta  $PH'_c$  se cortan en un punto  $X$  y forman un triángulo isósceles:  $\overline{PX} = \overline{XP_c}$ .

Además, como  $PP_c$  es perpendicular a  $AB$  y no es perpendicular a  $PH'_c$ , esta recta no es paralela a  $AB$ , luego la corta en un punto  $L_c$ , de modo que el triángulo  $\widehat{PP_cL_c}$  es rectángulo y, teniendo en cuenta que  $\widehat{PP_cX}$  es isósceles, es fácil concluir que  $X$  es el punto medio de la hipotenusa  $\overline{PL_c}$ . Como  $\overline{H_cH} = \overline{HH'_c}$ , tenemos que

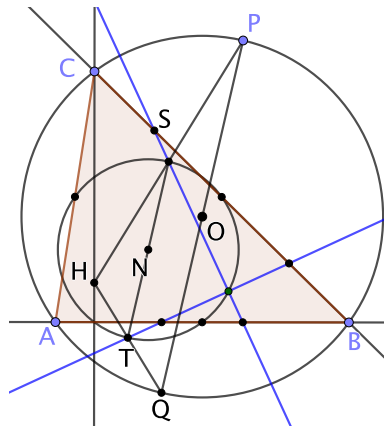
$$\widehat{HL_cH_c} = \widehat{L_cH_cH'_c} = \widehat{P_cL_cP} = \widehat{XP_cL_c},$$

y esto significa que la recta de Simson es paralela a  $HL_c$ . Por consiguiente, si pasa por el punto medio de  $\overline{PL_c}$ , también pasa por el punto medio  $S$  de  $\overline{PH}$ .

Falta contemplar el caso en que la recta de Simson es perpendicular a  $PP_c$ , en cuyo caso, puesto que pasa por  $P_c$ , tiene que coincidir con la recta  $AB$ , luego los pies de las altura  $P_a$  y  $P_b$  tienen que ser  $B$  y  $A$ , respectivamente. Además, hemos probado que  $H'_cP$  también es perpendicular a  $PP_c$ , luego es paralela a  $AB$ . Ahora basta considerar el triángulo rectángulo  $\widehat{PH'_cH}$ , Como  $H_c$  es el punto medio de  $\overline{HH'_c}$ , también el punto de corte  $S$  entre  $AB$  y  $\overline{HP}$  es el punto medio de este segmento. ■

Observemos que, en las condiciones del teorema anterior, el punto de corte  $S$  entre la recta de Simson y  $\overline{PH}$  está sobre la circunferencia de los nueve puntos, por el teorema 4.11.

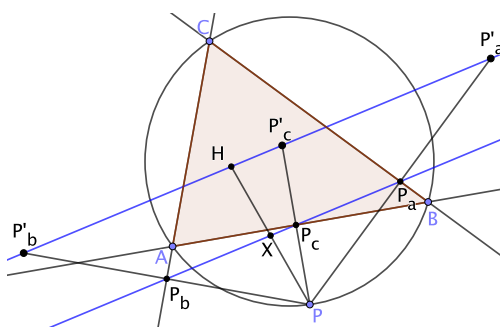
**Teorema 4.41** *Las rectas de Simson correspondientes a dos puntos diametralmente opuestos de la circunferencia circunscrita se cortan en la circunferencia de los nueve puntos.*



DEMOSTRACIÓN: Si  $P$  y  $Q$  son puntos opuestos en la circunferencia circunscrita, como la circunferencia de los nueve puntos es homotética a ésta, los puntos medios  $S$  y  $T$  de los segmentos  $\overline{HP}$  y  $\overline{HQ}$  forman un diámetro, y el teorema 4.40 afirma que las rectas de Simson pasan por dichos puntos. Como se cortan perpendicularmente, el punto de corte tiene que estar sobre la circunferencia de los nueve puntos. ■

El teorema 4.40 admite un enunciado equivalente mucho más simple:

**Teorema 4.42 (Steiner)** *Si  $P$  es un punto de la circunferencia circunscrita de un triángulo, los puntos simétricos de  $P$  respecto de los lados son colineales, y la recta que pasa por ellos contiene al ortocentro.*



DEMOSTRACIÓN: Si llamamos  $P_a, P_b, P_c$  a los pies de las perpendiculares desde  $P$  a los lados del triángulo, la recta que pasa por ellos es la recta de Simson de  $P$ , y los puntos  $P'_a, P'_b, P'_c$  de los que habla el enunciado son los homotéticos de los tres primeros respecto de la homotecia de centro  $P$  y razón  $r = 2$ , luego la imagen de la recta de Simson por dicha homotecia es precisamente la recta de la que habla el enunciado, y pasa por el ortocentro en virtud del teorema 4.40, pues la recta de Simson contiene al punto medio  $X$  del segmento  $\overline{PH}$  y  $H$  es el homotético de  $X$ . ■

## 4.5 El problema de Fermat

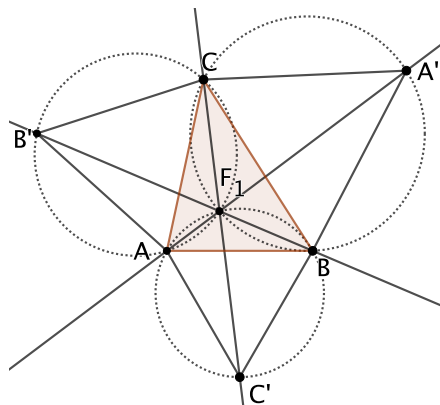
Hacia 1629 Fermat escribió una memoria titulada *Methodus ad disquirendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum*, si bien no fue publicada hasta 1679 —catorce años después de su muerte— por su hijo Samuel. Dicho trabajo es uno de los primeros antecedentes del cálculo infinitesimal, y termina diciendo:

*Quien no apruebe mi método, que trate de resolver el problema siguiente: Dados tres puntos en un plano, encontrar un cuarto punto tal que la suma de las distancias a los tres puntos dados sea mínima.*

Fermat también planteó el problema en una carta a Evangelista Torricelli, quien encontró una solución hacia 1640, si bien no fue publicada hasta 1919.

Probablemente Fermat usó técnicas protoinfinitesimales para resolver su problema, pero la solución de Torricelli era puramente geométrica. Torricelli probó una parte del teorema siguiente:

**Teorema 4.43** *Si sobre los lados de un triángulo construimos triángulos equiláteros en los semiplanos opuestos a los que contienen al triángulo, tal y como muestra la figura, entonces las rectas  $AA'$ ,  $BB'$  y  $CC'$  se cortan en un punto  $F_1$ , que es también la intersección de las circunferencias circunscritas a los tres triángulos equiláteros. Además, los segmentos  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$  y  $\overline{CC'}$  tienen la misma longitud.*

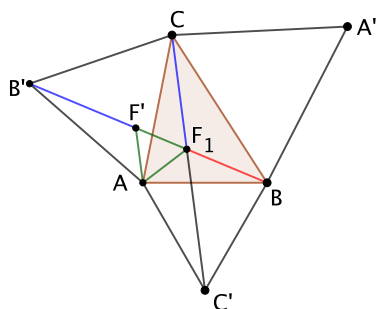


DEMOSTRACIÓN: Llamemos  $F_1$  a la intersección de las rectas  $BB'$  y  $CC'$ . Es fácil ver que no pueden ser paralelas. Más precisamente, si  $\hat{A} = 120^\circ$ , entonces

$$\widehat{CAC'} = \widehat{CAB} + \widehat{BAC} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ,$$

luego  $C, A, C'$  son colineales, al igual que  $B, A, B'$ , luego  $F_1 = A$ . Si el ángulo  $\hat{A}$  es distinto de  $120^\circ$ , entonces  $BB'$  y  $CC'$  se cortan en un punto que estará dentro del ángulo  $\hat{A}$  si la amplitud de éste es menor de  $120^\circ$  y estará fuera en caso contrario.

Vamos a suponer de momento que  $\hat{A} \neq 120^\circ$  y consideremos la figura siguiente:



La clave del argumento es que si efectuamos un giro de  $60^\circ$  alrededor del punto  $A$ , de modo que  $C'$  se transforme en  $B$ , a la vez  $C$  se transformará en  $B'$ , luego la recta  $CC'$  se transforma en  $BB'$  y, como el punto  $F_1$  está en  $CC'$ , se transformará en un punto  $F'$  situado en  $BB'$ . El triángulo  $\widehat{AF_1F'}$  tiene dos lados iguales  $\widehat{AF_1} = \widehat{AF'}$  y el ángulo que forman es de  $60^\circ$ , luego en realidad es un triángulo equilátero. Incidentalmente, tenemos también que  $\widehat{CC'}$  se transforma en  $\widehat{BB'}$ , por lo que ambos segmentos tienen la misma longitud.

La figura muestra entonces que  $\widehat{AF_1B} = 120^\circ$ , pero eso no es cierto en general, sino que depende de si el ángulo  $\hat{A}$  es mayor o menor de  $120^\circ$ . Vamos a hacer un cálculo con ángulos dirigidos para obtener un resultado válido en cualquier caso (en principio bajo el supuesto de que  $\hat{A} \neq 120^\circ$ ). Notemos que todo lo dicho hasta ahora es válido en general (no depende de la figura). Se cumple que

$$0 = \widehat{B'F_1B} = \widehat{B'F_1, F_1A} = \widehat{B'F_1, F_1A} + \widehat{F_1A, F_1B} = \widehat{F'F_1, F_1A} + \widehat{AF_1B},$$

luego  $\widehat{AF_1B} = \widehat{AF_1F'} = \widehat{F'AF_1}$ , donde la última igualdad es válida para cualquier triángulo equilátero. Ahora bien,  $AF'$  se transforma en  $AF_1$  con el mismo giro con que  $AB$  se transforma en  $AC'$ , luego

$$\widehat{AF_1B} = \widehat{F'AF_1} = \widehat{BAC'} = \widehat{AC'B},$$

donde, una vez más, la última igualdad vale para todo triángulo equilátero. Notemos que, en general, el ángulo  $\widehat{AC'B}$  puede ser de  $120^\circ$  (como en la figura) o de  $60^\circ$ . Pero, en cualquier caso, esto prueba que  $F_1$  está en la circunferencia circunscrita al triángulo  $\widehat{AC'B}$ .

Hemos definido  $F_1$  como la intersección de  $BB'$  y  $CC'$ . Como esto no cambia si intercambiamos  $B$  por  $C$ , intercambiando ambos puntos en todo el argumento obtenemos igualmente que  $\widehat{AF_1C} = \widehat{AB'C}$ , lo que a su vez significa que  $F_1$  está en la circunferencia circunscrita a  $\widehat{AC'B}$ . Además:

$$\begin{aligned} \widehat{BF_1C} &= \widehat{BF, AF} + \widehat{AF, FC} = \widehat{BFA} + \widehat{AFC} = \widehat{BC'A} + \widehat{AB'C} \\ &= \widehat{ABC'} + \widehat{B'CA} = \widehat{A'BC} + \widehat{BCA'} = \widehat{BA'C}, \end{aligned}$$

donde al principio de la segunda línea hemos usado que el mismo giro alrededor de  $B$  que transforma  $A$  en  $C'$  también transforma  $A'$  en  $C$ , e igualmente con el giro alrededor de  $C$  que transforma  $B'$  en  $A$ . Esto implica que  $F_1$  está también en la circunferencia circunscrita al triángulo  $\widehat{A'CB}$ .

Por consiguiente,  $F_1$  está en la intersección de las tres circunferencias circunscritas, y esto lo determina completamente. Dado un triángulo arbitrario, tendrá al menos dos ángulos distintos de  $120^\circ$  (por ejemplo,  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$ ), por lo que aplicando el razonamiento precedente a ambos, obtenemos que la intersección de  $BB'$  y  $CC'$  es la misma que la intersección de  $AA'$  y  $CC'$ , pues ambas tienen que ser el punto  $F_1$  en el que se cortan las tres circunferencias circunscritas. ■

**Definición 4.44** El punto  $F_1$  dado por el teorema anterior recibe el nombre de *primer centro isogónico* del triángulo dado o *primer punto de Fermat*.

Si el triángulo tiene un ángulo de  $120^\circ$ , entonces  $F_1$  es simplemente el vértice correspondiente a dicho ángulo. En caso contrario se cumplen las igualdades que justifican el nombre de “centro isogónico”:

$$\widehat{AF_1B} = \widehat{BF_1C} = \widehat{CF_1A}.$$

En efecto, por estar en las circunferencias circunscritas, cumple

$$\widehat{AF_1B} = \widehat{AC'B}, \quad \widehat{CF_1A} = \widehat{CB'A},$$

pero los segundos miembros son iguales, porque

$$\widehat{AC'B} = \widehat{BAC'} = \widehat{B'AC} = \widehat{CB'A},$$

donde hemos usado dos igualdades generales para triángulos equiláteros y el hecho de que el mismo giro alrededor de  $A$  que transforma  $B$  en  $C'$  lleva también  $B'$  en  $C$ .

Si los vértices están nombrados de modo que el giro  $A \rightarrow B \rightarrow C$  sea en sentido positivo, entonces el ángulo común es de  $120^\circ$ , y en caso contrario es de  $60^\circ$ .

Si todos los ángulos del triángulo son menores de  $120^\circ$ , el centro  $F_1$  está en el interior del triángulo y se cumple la igualdad de ángulos no dirigidos:

$$\widehat{AF_1B} = \widehat{AC'B}, \quad \widehat{CF_1A} = \widehat{CB'A} = 120^\circ.$$

En cambio, si algún ángulo es mayor de  $120^\circ$  (por ejemplo,  $\hat{A}$ ), se cumple

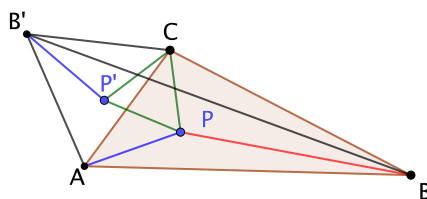
$$\widehat{BF_1C} = 120^\circ, \quad \widehat{AF_1B} = 60^\circ, \quad \widehat{AF_1C} = 60^\circ$$

(como ángulos no dirigidos).

La relación de este punto con el problema de Fermat es un hecho que resulta inmediato a partir de la figura que hemos usado en la demostración del teorema anterior, pero que sólo es cierta en el caso que ilustra la figura, es decir, cuando todos los ángulos del triángulo son menores de  $120^\circ$  (o también trivialmente cuando un ángulo es exactamente de  $120^\circ$ ), y es que la longitud  $\overline{BB'}$  es la suma de las distancias de  $F_1$  a los vértices del triángulo. Lo que probó Torricelli fue lo siguiente:

**Teorema 4.45** *En un triángulo que no tenga ningún ángulo de amplitud mayor de  $120^\circ$ , el primer centro isogónico es el punto que minimiza la suma de las distancias a los vértices.*

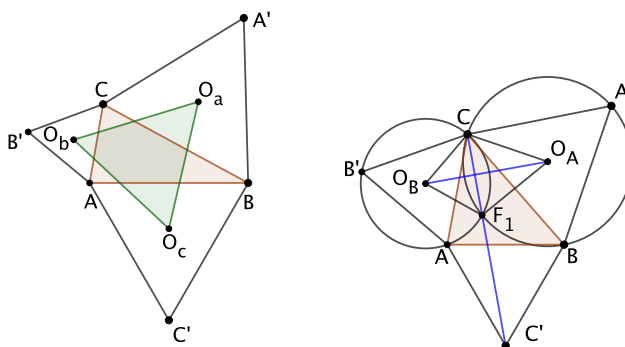
DEMOSTRACIÓN: Tomamos un punto arbitrario  $P$  y consideramos los puntos  $B'$  y  $C'$  que resultan de girar  $60^\circ$  los segmentos  $\overline{AC}$  y  $\overline{CP}$  alrededor de  $C$  en el sentido que hace que el triángulo equilátero  $\overline{AB'C}$  quede fuera del triángulo dado  $\overline{ABC}$ . Entonces la suma de las distancias de  $P$  a los tres vértices es también la longitud de la poligonal  $B'P'PB$ .



Dicha longitud será mayor o igual que  $\overline{B'B}$ , pero hemos probado que  $\overline{B'B}$  es precisamente la suma de las distancias a los vértices del punto  $F_1$ . Esto prueba que  $F_1$  minimiza la suma de las distancias a los vértices. Más precisamente, el argumento muestra que para que un punto  $P$  minimice la suma de las distancias a los vértices, tiene que estar en el segmento  $BB'$ , pero por simetría también tiene que estar en  $AA'$  y  $CC'$ , luego tiene que ser  $F_1$ , es decir, que  $F_1$  es el único punto que minimiza la suma de las distancias a los vértices. ■

Enseguida resolveremos el problema de Fermat para triángulos con un ángulo mayor de  $120^\circ$ , pero antes observemos que los razonamientos con los que hemos justificado la existencia del primer centro isogónico nos permiten probar un teorema del que se dice que le fue propuesto a Lagrange por Napoleón Bonaparte:

**Teorema 4.46 (Teorema de Napoleón)** *Si sobre cada lado de un triángulo arbitrario construimos (en la parte exterior) un triángulo equilátero, los centros de dichos triángulos forman también un triángulo equilátero.*



DEMOSTRACIÓN: Basta observar que  $O_A O_B$  es perpendicular a  $CC'$ , pues  $O_A$  y  $O_B$  equidistan de  $C$  y  $F_1$ , luego están en la mediatriz del segmento con dichos extremos. Por consiguiente,

$$\widehat{O_b O_a O_c} = \widehat{CC'}, \widehat{BB'} = \widehat{CF_1 B} = \widehat{CA' B},$$

e igualmente  $\widehat{O_a O_c O_b} = \widehat{BC' A}$  y, teniendo en cuenta las orientaciones, vemos que ambos ángulos son iguales, e igualmente llegamos a que

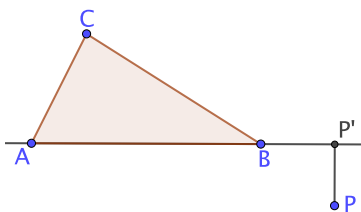
$$\widehat{O_b O_a O_c} = \widehat{O_a O_c O_b} = \widehat{O_c O_b O_a},$$

lo que prueba que el triángulo de los centros es equilátero. ■

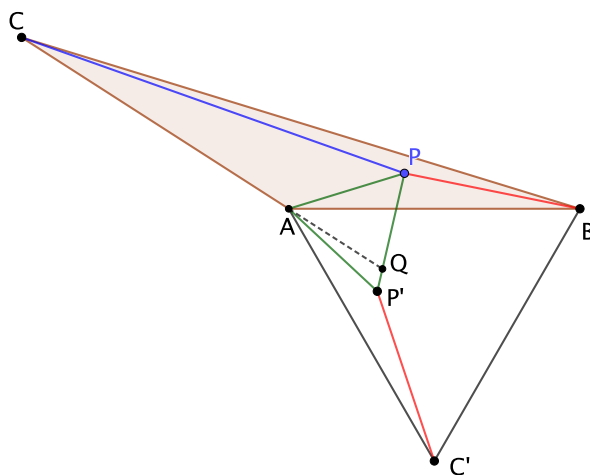
El problema de Fermat para triángulos con un ángulo mayor de  $120^\circ$  fue resuelto por Franz Heinen:

**Teorema 4.47** *Si un triángulo tiene un ángulo mayor de  $120^\circ$ , el punto que minimiza la suma de las distancias a los vértices es el vértice correspondiente a dicho ángulo.*

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar observamos que el punto que minimiza la suma de las distancias tiene que estar dentro del triángulo, pues si un punto  $P$  está fuera, entonces está en el semiplano opuesto al triángulo respecto de la recta que prolonga a alguno de sus lados, por ejemplo  $AB$ . Es fácil ver que al pasar de  $P$  al pie  $P'$  de la perpendicular a  $AB$  por  $P$  se reduce la distancia a todos los vértices, luego también la suma de las distancias, es decir, que  $P'$  es un punto mejor que  $P$ . Si  $P'$  está en el lado  $\overline{AB}$ , entonces ya tenemos un punto en el triángulo mejor que  $P$ , y en caso contrario consideramos el vértice  $A$  o  $B$  más próximo a  $P'$ , por ejemplo  $B$ , y también es claro que al pasar de  $P'$  a  $B$  se reduce de nuevo la distancia a todos los vértices, por lo que  $B$  es un punto del triángulo mejor que  $P$ .

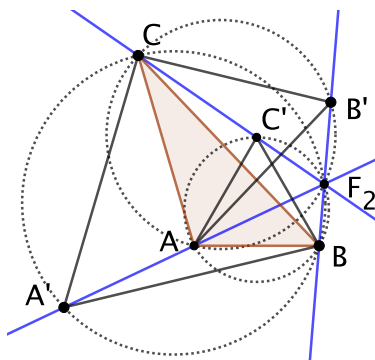


Tomemos, pues, un punto  $P$  arbitrario contenido en el triángulo. Si giramos  $60^\circ$  el triángulo  $\widehat{APB}$  alrededor de  $A$ , la suma de las distancias de  $P$  a los tres vértices es la longitud de la poligonal  $CAP'C'$ . Basta probar que esta longitud es mayor que la de la poligonal  $CAC'$ , que es la suma de las distancias de  $A$  a los tres vértices.



La forma de probarlo es un método general: prolongamos el segmento  $\overline{CA}$  hasta el último punto  $Q$  en el que corta a la poligonal alternativa. Entonces es claro que la longitud de  $CPP'C'$  es mayor o igual que la de  $CQP'C'$ , pues hemos sustituido una poligonal por un segmento que lleva al mismo punto. A su vez, la longitud de esta poligonal es mayor o igual que la de  $CAC'$ , pues hemos sustituido la poligonal  $AQP'C'$  por el segmento  $AC'$ . ■

**El segundo centro isogónico** Modificando ligeramente los argumentos dados, se prueba que si alteramos la construcción de  $F_1$  construyendo sobre cada lado un triángulo equilátero en el mismo semiplano que contiene al triángulo, se cumple igualmente que —salvo que el triángulo de partida sea equilátero— las circunferencias circunscritas se cortan en un mismo punto  $F_2$ , que es también la intersección de las rectas  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , y que recibe el nombre de *segundo punto de Fermat* o *segundo centro isogónico*:



Éste cumple también las relaciones

$$\widehat{AF_2B} = \widehat{BF_2C} = \widehat{CF_2A},$$

pero si los vértices del triángulo están nombrados en sentido positivo, el valor común de estos ángulos es de  $60^\circ$ , como se ve en la figura, en lugar de  $120^\circ$ , que es el valor correspondiente a  $F_1$ . También se cumple la versión análoga del teorema de Napoleón, por lo que se habla del *primer y el segundo triángulo de Napoleón* de un triángulo (no equilátero) dado.

Los dos centros isogónicos son los únicos puntos  $F$  que cumplen

$$\widehat{AFB} = \widehat{BFC} = \widehat{CFA},$$

pues si se da esta igualdad, el valor común de los tres ángulos tiene que ser necesariamente  $60^\circ$  o  $120^\circ$  (tiene que ser un valor  $0 < \alpha < 180^\circ$  tal que  $3\alpha$  sea múltiplo de  $180^\circ$ ), y estos ángulos determinan el punto, luego éste tiene que ser uno de los centros isogónicos. Notemos que si el triángulo es equilátero sólo hay un punto posible (el centro isogónico  $F_1$ ), ya que un punto que cumpla que los tres ángulos indicados valen  $60^\circ$  o  $120^\circ$  tiene que estar en la circunferencia



circunscrita de uno de los dos triángulos equiláteros con un lado igual a uno de los lados del triángulo, pero si el triángulo dado es equilátero tiene que ser necesariamente el triángulo construido hacia afuera, o de lo contrario  $P$  sería el vértice opuesto, y así la única posibilidad es la que da lugar al centro isogónico. ■

## 4.6 Los teoremas de Menelao y Ceva

Que las bisectrices, las alturas y las medianas de un triángulo sean concurrentes son casos particulares de un mismo teorema general, que a su vez es consecuencia de otro mucho más antiguo. Se desconoce quién lo descubrió, pero la primera referencia que se conoce está en un tratado sobre la geometría de la esfera de Menelao de Alejandría datado en finales del siglo I d.C. Ptolomeo lo usa también en su *Almagesto*.

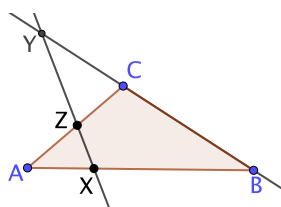
Para enunciar el teorema de Menelao necesitamos considerar el concepto de longitudes dirigidas introducido al principio de la sección 3.6. Esencialmente, el hecho es que consideraremos que una razón

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}}$$

entre puntos colineales es positiva si y sólo si  $X$  está entre  $A$  y  $B$ .

**Teorema 4.48 (Menelao)** *Si en un triángulo  $\widehat{ABC}$  elegimos puntos  $X, Y, Z$  uno en la prolongación de cada lado según la figura, de modo que ninguno coincide con un vértice, entonces  $X, Y, Z$  son colineales si y sólo si*

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = -1.$$

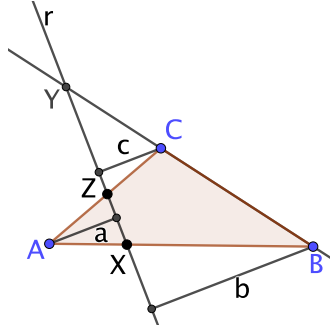


DEMOSTRACIÓN: Supongamos que  $X, Y, Z$  están sobre una misma recta  $r$ . Hay dos posibilidades: Si uno de los puntos  $X, Y, Z$  está en un lado del triángulo, entonces tiene que haber exactamente dos puntos así (una recta que corta a un lado de un triángulo sin pasar por un vértice corta a dos lados, pero nunca a los tres), con lo que exactamente dos de los factores de la expresión del enunciado son positivos, luego el producto de los tres es negativo. La segunda posibilidad es que  $r$  no corte a ningún lado del triángulo, en cuyo caso los tres factores son negativos y el producto es negativo también. Así pues, sólo hay que probar que el producto es 1 en valor absoluto.

Trazamos las perpendiculares a  $r$  por  $A, B, C$  y llamamos  $a, b, c$  a las longitudes de los segmentos que unen los vértices con los pies de dichas perpendiculares. Entonces basta aplicar la semejanza de los triángulos oportunos para concluir que

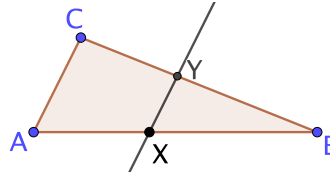
$$\left| \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \right| = \frac{a}{b}, \quad \left| \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \right| = \frac{b}{c}, \quad \left| \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} \right| = \frac{c}{a}.$$

Al multiplicar las tres igualdades llegamos a que el valor absoluto del producto del enunciado es 1.



Recíprocamente, si los puntos  $X, Y, Z$  cumplen la relación del enunciado, observemos que no puede ser que  $XY$  sea paralela a  $AC$ , pues en tal caso

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{CY}}{\overline{YB}} = \frac{\overline{YC}}{\overline{BY}},$$



luego

$$-1 = \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}},$$

y esto es imposible, pues significa que, por una parte,  $\overline{CZ} = \overline{ZA}$ , lo cual (para tres puntos colineales) sólo es posible si  $Z$  está entre  $A$  y  $C$ , pero el signo negativo de la proporción excluye esta posibilidad.

Por lo tanto, podemos considerar el punto  $Z'$  donde  $XY$  corta a  $AC$ . Notemos que  $Z'$  no puede ser  $A$  o  $C$ , pues en tal caso  $X$  estaría en  $BC$ , luego sería  $X = B$ . Por la parte ya probada, los puntos  $X, Y, Z'$  cumplen

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CZ'}}{\overline{Z'A}} = -1$$

y comparando con la hipótesis, concluimos que

$$\frac{\overline{CZ'}}{\overline{Z'A}} = \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}},$$

de donde se sigue que  $Z = Z'$ , luego  $X, Y, Z$  son colineales. ■

De aquí extraeremos más adelante varias consecuencias notables, pero las aplicaciones más sencillas las vamos a obtener a partir de una consecuencia que, sorprendentemente, los geómetras griegos no llegaron a descubrir, pues la primera referencia conocida se remonta al *Libro de la perfección*, un compendio de geometría escrito en el siglo XI por el rey Yúsuf al-Mutaman de Zaragoza, si bien fue redescubierto más tarde por el matemático italiano Giovanni Ceva, que lo incluyó en un tratado de 1678, y ahora se conoce como teorema de Ceva.

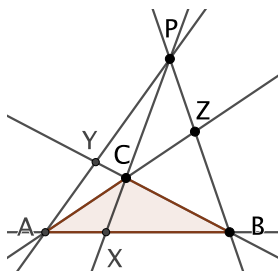
En su honor se llaman *cevianas* de un triángulo a tres rectas cualesquiera que unan un vértice con un punto del lado opuesto que no sea otro vértice.

**Teorema 4.49 (Ceva)** *En un triángulo arbitrario, tres cevianas  $AY$ ,  $BZ$ ,  $CX$  son paralelas o concurrentes si y sólo si*

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = 1.$$

DEMOSTRACIÓN: La figura muestra tres cevianas de un triángulo concurrentes en un punto  $P$ . Aplicamos el teorema de Menelao al triángulo  $\widehat{ABY}$ . Como los puntos  $P, C, X$  están alineados, podemos afirmar que

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{CY}} \cdot \frac{\overline{YP}}{\overline{PA}} = -1.$$

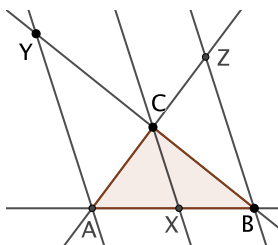


A continuación aplicamos el teorema de Menelao al triángulo  $\widehat{AYC}$ . Como los puntos  $P, Z, B$  están alineados, podemos afirmar que

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PY}} \cdot \frac{\overline{YB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = -1.$$

Multiplicando ambas relaciones obtenemos la del enunciado.

Supongamos ahora que las tres cevianas son paralelas:



Entonces, aplicando varias veces el teorema de Tales,

$$\left| \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} \right| = \left| \frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BA}}{\overline{AX}} \cdot \frac{\overline{XB}}{\overline{BA}} \right| = 1.$$

Si un factor es positivo, por ejemplo, el primero, esto significa que  $X$  está entre  $A$  y  $B$ . Así la recta  $CX$  pasa por un lado de  $\widehat{ABY}$ , pero no puede pasar por el lado  $\overline{AY}$ , luego tiene que pasar por  $\overline{YB}$ , y el punto de corte tiene que ser  $C$ , luego  $C$  está entre  $Y$  y  $B$ , luego el segundo factor es negativo, y lo mismo sucede con el tercero, luego el producto es positivo.

Por otro lado, si un factor es negativo, por ejemplo el segundo, eso significa que  $Y$  no está entre  $B$  y  $C$ . No perdemos generalidad si suponemos que es  $C$  el que está entre  $Y$  y  $B$ , en cuyo caso la recta  $CX$  pasa por un lado del triángulo  $\widehat{YBA}$ , luego tiene que pasar por otro, que no puede ser  $\overline{AY}$ , luego será  $\overline{AB}$ , y el punto de corte tiene que ser  $X$ , luego  $X$  está entre  $A$  y  $B$ , lo que implica que el primer factor es positivo y, por el caso precedente, el tercero también es negativo.

Ahora probamos el recíproco, es decir, suponemos que se cumple la relación del enunciado y vamos a probar que las cevianas son concurrentes o paralelas. Si no son paralelas, dos de ellas se cortan. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $AY$  corta a  $CX$  en un punto  $P$ . Sea  $BZ'$  la ceviana que pasa por  $P$ . Notemos que  $Z'$  tiene que ser distinto de  $A$  y  $C$ , pues en caso contrario  $P$  estaría en uno de los lados y  $X$  o  $Y$  coincidiría con un vértice. Aplicando la parte ya probada a las cevianas  $AY, CX, BZ'$  obtenemos la relación

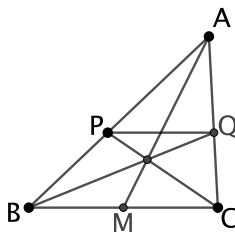
$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CZ'}}{\overline{Z'A}} = 1.$$

Comparando con la hipótesis concluimos que

$$\frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{CZ'}}{\overline{Z'A}},$$

lo cual sólo es posible si  $Z = Z'$ , luego la ceviana  $BZ$  también pasa por  $P$ . ■

**Ejemplo** En la figura siguiente, la recta  $PQ$  es paralela a  $BC$ . Probar que  $M$  es el punto medio de  $BC$ :



En lugar de probar directamente el enunciado, vamos a definir  $M$  como el punto medio de  $\overline{BC}$  y vamos a probar que las rectas  $\overline{AM}$ ,  $\overline{PC}$  y  $\overline{BQ}$  son concurrentes aplicando el teorema de Ceva al triángulo  $\widehat{ABC}$ . Tenemos que probar que

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} = 1.$$

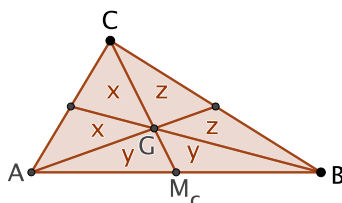
Todos los factores son positivos, así que no tenemos que preocuparnos por los signos. Por la semejanza de triángulos tenemos que

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}}$$

mientras que el hecho de que  $M$  sea el punto medio de  $\overline{BC}$  se traduce en que el factor central vale 1, lo que nos da la conclusión. ■

Todos los centros que hemos estudiado en la sección anterior excepto el circuncentro son intersecciones de cevianas, y su existencia puede probarse a partir del teorema de Ceva. Veamos algunos casos:

**Baricentro** En el caso de las medianas, los tres cocientes que aparecen en el teorema de Ceva son trivialmente iguales a 1, lo que prueba la existencia del baricentro. Sabiendo esto, el resto del teorema 4.7 admite una prueba muy simple:

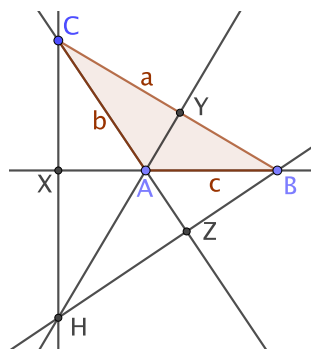


Los triángulos marcados con la misma letra tienen la misma área, pues tienen una base igual, así como la altura correspondiente. Lo mismo sucede con  $\widehat{ACM}_c$  y  $\widehat{BCM}_c$ , luego, entendiendo que las letras representan las áreas,  $x+2y = x+2z$ , luego  $y = z$  y del mismo modo concluimos que las seis áreas son iguales. Por lo tanto  $\widehat{ACM}_c$  tiene el triple de área que  $\widehat{AGM}_c$ , y como la altura del vértice A es la misma para ambos, la base del primero  $\overline{CM}_c$  tiene que ser el triple de la del segundo,  $\overline{GM}_c$ .

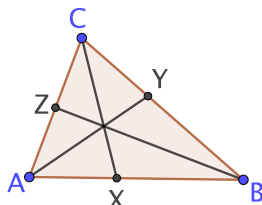
**Ortocentro** Para probar mediante el teorema de Ceva que las alturas de un triángulo son concurrentes podemos descartar el caso de un triángulo rectángulo, que es trivial. En los demás casos, sólo tenemos que observar (véase la figura siguiente) que

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = \frac{b \cos \hat{A}}{a \cos \hat{B}}, \quad \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} = \frac{c \cos \hat{B}}{b \cos \hat{C}}, \quad \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = \frac{a \cos \hat{C}}{c \cos \hat{A}},$$

donde los signos de los cosenos cuadran con los signos de las razones (notemos que a lo sumo uno de los ángulos es obtuso). Es claro que el producto es 1.



**Incentro** En el caso de las bisectrices basta aplicar el teorema 4.3:



En efecto, tenemos que

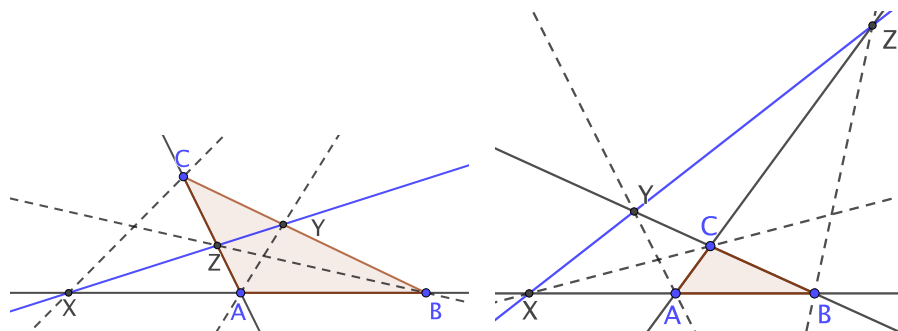
$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = 1.$$

(Notemos que los tres factores del primer término son todos positivos y los segundos son positivos por definición, pues son razones entre segmentos no alineados.)

Análogamente, puesto que el teorema 4.3 también vale para bisectrices exteriores, el cálculo anterior vale también para probar la existencia de los excentros. La única variante es que ahora los factores correspondientes a los puntos de corte de las dos bisectrices exteriores son claramente negativos, mientras que el de la bisectriz interior es positivo, por lo que el producto completo sigue valiendo 1 y no  $-1$ . (Notemos que una bisectriz exterior no puede ser paralela al lado opuesto, ya que entonces la bisectriz interior sería perpendicular al lado opuesto, luego el triángulo sería isósceles, y la mitad del ángulo exterior tendría que ser  $\pi/2$ , lo cual es imposible.)

Por otra parte, es obvio que si en lugar de tomar dos bisectrices exteriores y una interior tomamos dos interiores y una exterior, no podemos obtener rectas concurrentes, pues las bisectrices interiores se cortan dentro del triángulo y la exterior no pasa por dentro del triángulo. Sin embargo, el teorema de Menelao nos da una consecuencia no trivial:

**Teorema 4.50** *Los puntos donde dos bisectrices interiores de un triángulo y una exterior (o tres exteriores) cortan a los lados opuestos son colineales.*

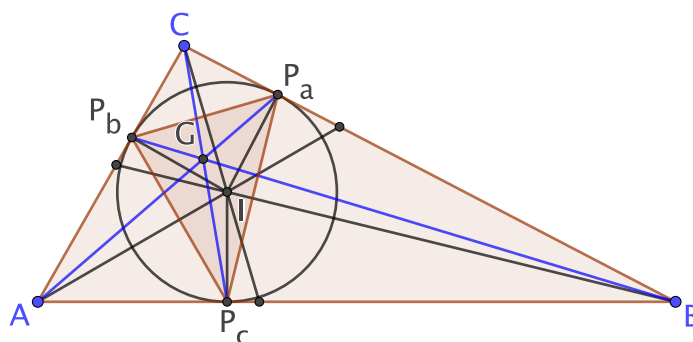


DEMOSTRACIÓN: Por el teorema de Menelao, basta probar que

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = -1.$$

Que el valor absoluto da 1 se debe exactamente al mismo cálculo que hemos hecho en la nota precedente a partir del teorema 4.3. Sólo hay que probar que el signo ahora es  $-1$ , pero esto es consecuencia de que los factores correspondientes a bisectrices exteriores son negativos y los correspondientes a bisectrices interiores son positivos. ■

**El punto de Gergonne** Para probar la existencia del punto de Gergonne aplicamos el teorema de Ceva al triángulo  $\overline{ABC}$ .

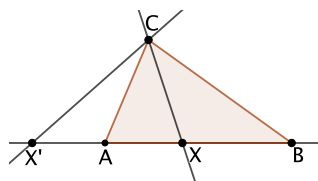


Tenemos que probar que

$$\frac{\overline{AP_c}}{\overline{P_cB}} \cdot \frac{\overline{BP_a}}{\overline{P_aC}} \cdot \frac{\overline{CP_b}}{\overline{P_bA}} = 1,$$

donde todos los factores son positivos. Basta observar que  $\overline{AP_c} = \overline{AP_b}$ , pues son los segmentos que unen  $A$  con los dos puntos de tangencia, e igualmente con los otros dos vértices, de modo que cada numerador se cancela con un denominador. ■

**Formulación trigonométrica** Los teoremas de Ceva y Menelao admiten una formulación trigonométrica equivalente. Para obtenerla consideramos las cevianas que muestra la figura siguiente:



Por el teorema de los senos,

$$\frac{\overline{AX}}{\widehat{\text{sen } ACX}} = \frac{\overline{AC}}{\widehat{\text{sen } AXC}}, \quad \frac{\overline{XB}}{\widehat{\text{sen } XCB}} = \frac{\overline{BC}}{\widehat{\text{sen } CXB}}.$$

Pero los ángulos suplementarios  $\widehat{AXC}$  y  $\widehat{CXB}$  tienen el mismo seno (o, si estuviéramos considerando la ceviana  $CX'$ , tendríamos directamente que  $\widehat{AX'C} = \widehat{CX'B}$ ), luego despejando este seno e igualando las expresiones obtenidas llegamos a que

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}} \frac{\widehat{\text{sen } ACX}}{\widehat{\text{sen } XCB}}.$$

El primer factor del miembro derecho lo consideramos positivo, pero podemos considerar que el miembro derecho tiene el mismo signo que el izquierdo si convenimos en considerar que un ángulo  $\widehat{ABC}$  es positivo si para girar la semirrecta  $\overrightarrow{BA}$  hasta  $\overrightarrow{BC}$  recorriendo el ángulo hay que hacerlo en el sentido contrario a las agujas del reloj, y es negativo en caso contrario.

De este modo  $\widehat{ABC} = -\widehat{CBA}$  (y para calcular los cocientes es irrelevante considerar como positivo el sentido antihorario o el opuesto, pues si cambiamos de sentido tanto el numerador como el denominador cambian de signo, luego el cociente no varía). El lector puede comprobar que, en efecto, con este convenio, si  $X$  está entre  $A$  y  $B$  el miembro derecho es positivo y en caso contrario es negativo.

Notemos que la fórmula anterior generaliza al teorema 4.3, pues si  $\overrightarrow{AX}$  es la bisectriz de  $\widehat{AXB}$ , entonces los senos se cancelan y queda la relación dada por dicho teorema.

Ahora es inmediato que la condición del teorema de Ceva para que tres cevianas sean concurrentes equivale a

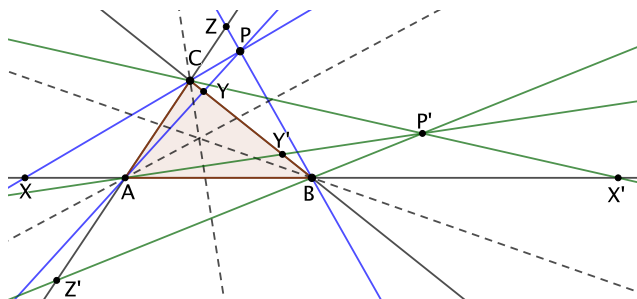
$$\frac{\widehat{\text{sen } ACX}}{\widehat{\text{sen } XCB}} \frac{\widehat{\text{sen } BAY}}{\widehat{\text{sen } YAC}} \frac{\widehat{\text{sen } CBZ}}{\widehat{\text{sen } ZBA}} = 1,$$

y para el teorema de Menelao la condición es la misma, pero igualada a  $-1$ .



**Conjugados isogonales** Veamos una aplicación:

**Teorema 4.51** *Si tres cevianas de un triángulo son concurrentes y sustituimos cada una de ellas por su simétrica respecto de la bisectriz de su ángulo correspondiente, las cevianas resultantes son paralelas o concurrentes.*



DEMOSTRACIÓN: La figura muestra un triángulo con tres cevianas concurrentes en  $P$  y sus simétricas respecto de las bisectrices. Para probar que son paralelas concurrentes, por la versión trigonométrica del teorema de Ceva, basta probar que

$$\frac{\widehat{\text{sen } ACX'}}{\widehat{\text{sen } X'CB}} \frac{\widehat{\text{sen } BAY'}}{\widehat{\text{sen } Y'AC}} \frac{\widehat{\text{sen } CBZ'}}{\widehat{\text{sen } Z'BA}} = 1.$$

Ahora bien, como la simetría respecto a una bisectriz (por ejemplo la del vértice  $C$ ) hace que  $CA$  se transforme en  $CB$ , vemos que  $\widehat{ACX'}$  se transforma en  $\widehat{X'CB}$  (el orden de las letras es importante), y lo mismo para los demás ángulos de la fórmula anterior, luego el miembro izquierdo es igual a

$$\frac{\widehat{\text{sen } X'CB}}{\widehat{\text{sen } ACX}} \frac{\widehat{\text{sen } Y'AC}}{\widehat{\text{sen } BAY}} \frac{\widehat{\text{sen } Z'BA}}{\widehat{\text{sen } CBZ}},$$

y el teorema de Ceva aplicado a las cevianas originales implica que este producto vale 1 (la expresión es la inversa de la que aparece en el teorema, pero  $1/1 = 1$ ). ■

Más precisamente:

**Teorema 4.52** *En las condiciones del teorema anterior, las cevianas resultantes son paralelas si y sólo si el punto de concurrencia de las cevianas dadas está en la circunferencia circunscrita del triángulo.*

DEMOSTRACIÓN: El teorema 4.39 prueba que si el punto de concurrencia  $P$  está en la circunferencia circunscrita, entonces las cevianas resultantes son perpendiculares a la recta de Simson de  $P$ , luego son paralelas entre sí. Por otra parte, si  $P$  no está en la circunferencia circunscrita, el teorema 4.37 prueba que cada ceviana resultante es perpendicular a uno de los lados del triángulo pedal de  $P$ , luego puede haber dos que sean paralelas. ■

**Definición 4.53** Si un punto  $P$  no está en la circunferencia circunscrita de un triángulo, el punto  $P'$  donde confluyen las simétricas de las cevianas que pasan por  $P$  se llama *conjugado isogonal* de  $P$ .

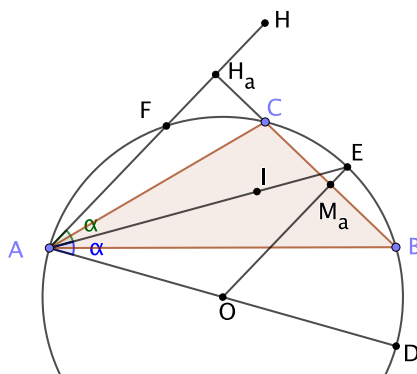
Es inmediato que el conjugado isogonal de los puntos de (la prolongación de) un lado del triángulo es el vértice opuesto, pues, por ejemplo, si el punto  $P$  está en la recta  $BC$ , las cevianas  $PB$  y  $PC$  son la recta  $BC$ , y sus simétricas son las rectas  $BA$  y  $CA$ , luego se cortan en  $A$ .

Recíprocamente, si  $P$  no está sobre ninguno de los lados del triángulo (ni sobre la circunferencia circunscrita), entonces las cevianas por  $P$  no son los lados, y sus simétricas no pasan más que por un vértice del triángulo, luego su intersección no puede ser ninguno de los vértices, con lo que el proceso del paso de  $P$  a  $P'$  es reversible: el conjugado isogonal del conjugado isogonal de  $P$  es  $P$  (en particular,  $P'$  no puede estar en la circunferencia circunscrita).

Por definición el punto simediano es el conjugado isogonal del baricentro, y es claro que el incentro es su propio conjugado isogonal. Por otra parte:

**Teorema 4.54** *El conjugado isogonal del circuncentro es el ortocentro.*

DEMOSTRACIÓN: Si el triángulo es rectángulo, entonces el circuncentro  $O$  está sobre la hipotenusa, luego su conjugado isogonal es el vértice donde está el ángulo recto, que coincide con el ortocentro. Supongamos, pues, que tenemos un triángulo no rectángulo  $\widehat{ABC}$ .

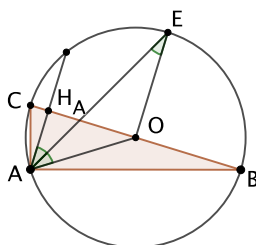


Sea  $M_a$  el punto medio del lado  $BC$ , de modo que  $OM_a$  es la mediatriz de dicho lado. Sea  $E$  el punto donde corta a la circunferencia circunscrita. Como  $\widehat{AOE}$  es isósceles, tenemos que  $\widehat{OAE} = \widehat{AEO}$ . Por otro lado,  $AH$  es la altura del triángulo que pasa por  $A$ , luego es perpendicular a  $BC$ , al igual que  $OE$ , luego  $AH$  es paralela a  $OE$ , luego

$$\widehat{IAH} = \widehat{EAH} = \widehat{AEO} = \widehat{OAE} = \widehat{OAI}.$$

Esto significa que las rectas  $AO$  y  $AH$  son simétricas respecto de la bisectriz  $AI$ . Como vale para los tres vértices,  $O$  y  $H$  son conjugados isogomales. ■

**Nota** En la prueba anterior hemos usado que el ángulo  $\hat{A}$  no es recto, pero si lo es podemos calcular igualmente la recta simétrica de  $AO$  respecto de la bisectriz, y conviene observar que es precisamente la altura que pasa por  $A$ .

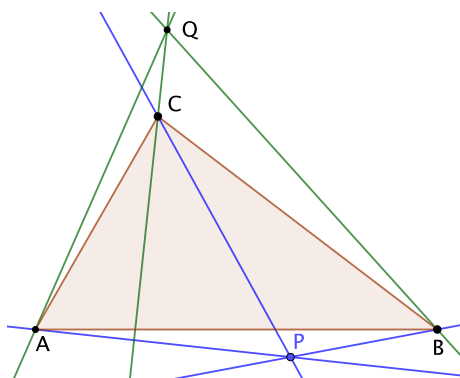


En efecto, la bisectriz de  $\hat{A}$  corta a la circunferencia circunscrita en un punto  $E$  que divide en partes iguales al arco abarcado de extremos  $B$  y  $C$ , luego es el mismo punto donde corta a la circunferencia la mediatriz de  $\overline{BC}$ . Por lo tanto,  $OE$  es paralela a la altura  $AH_A$ . Ahora basta observar en la figura que los tres ángulos señalados son iguales. ■

Vamos a dar una caracterización del conjugado isogonal de un punto en términos de los ángulos dirigidos que forma con los vértices del triángulo, análoga a la dada en 4.30 para el punto de Miquel de una terna de puntos. Para ello observamos que si  $P$  y  $Q$  son conjugados isogonales, eso significa por definición que se cumple

$$\widehat{QAB} = \widehat{CAP}$$

y todas las relaciones análogas que resultan de sustituir unos vértices por otros o  $P$  por  $Q$ . (El lector puede comprobar que estas igualdades son válidas —teniendo en cuenta la orientación— para todas las posiciones posibles de  $P$ , con lo que podremos usarlas sin necesidad de distinguir casos.)



**Teorema 4.55** Si  $P$  y  $Q$  son conjugados isogonales respecto de un triángulo, entonces

$$\widehat{BPC} + \widehat{BQC} = \widehat{BAC}.$$

DEMOSTRACIÓN: Se cumple que

$$\widehat{BPC} = \widehat{BP, BC} + \widehat{BC, PC},$$

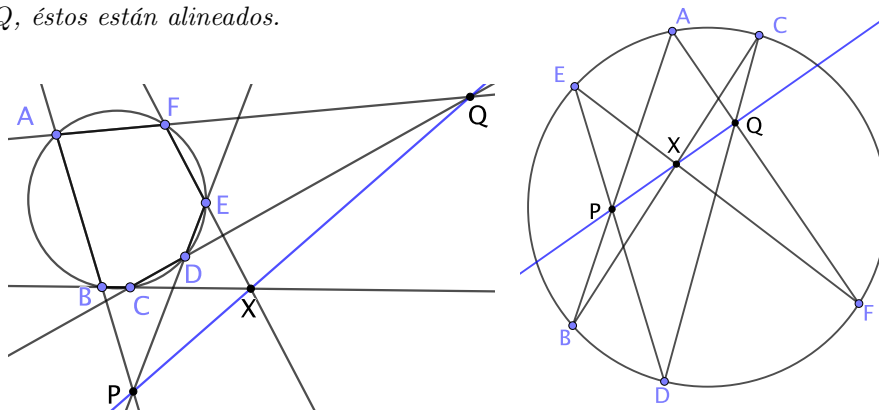
$$\widehat{BQC} = \widehat{BQ, BC} + \widehat{BC, QC} = \widehat{QBC} + \widehat{BCQ} = \widehat{ABP} + \widehat{PCA},$$

y al sumar queda:

$$\widehat{BPC} + \widehat{BQC} = \widehat{AB, BP} + \widehat{BP, BC} + \widehat{BC, PC} + \widehat{PC, CA} = \widehat{BAC}. \quad \blacksquare$$

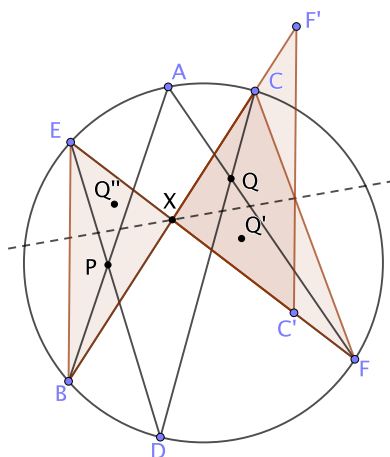
En cierta ocasión llegó a manos de Descartes una demostración del teorema siguiente. Descartes no podía creer que el autor fuera un muchacho de 16 años:

**Teorema 4.56 (Pascal)** *Dado un hexágono inscrito en una circunferencia, si las prolongaciones de cada par de lados opuestos se cortan en tres puntos P, X, Q, éstos están alineados.*



Como muestra la figura de la derecha, no es necesario que el hexágono sea simple, es decir, que sus lados pueden cortarse unos a otros.

DEMOSTRACIÓN: Consideramos los triángulos  $\widehat{BXE}$  y  $\widehat{FXC}$ :



Observamos que

$$\widehat{XCF} = \widehat{BCF} = \widehat{BEF} = \widehat{BEX}, \quad \widehat{XBE} = \widehat{CBE} = \widehat{CFE} = \widehat{CFX},$$

y, por otra parte,  $\widehat{EXB} = \widehat{EX}, \widehat{XB} = \widehat{FX}, \widehat{XC} = \widehat{FXC}$ . Esto se traduce en que los dos triángulos indicados son semejantes, pero inversamente. Por consiguiente, si llamamos  $\widehat{F'XC'}$  al triángulo simétrico respecto a la bisectriz  $s$  del ángulo en  $X$ , los triángulos  $\widehat{BXE}$  y  $\widehat{F'XC'}$  son directamente semejantes, luego la homotecia de centro  $X$  que transforma  $C'$  en  $E$ , transforma también  $F'$  en  $B$  y ambos triángulos son homotéticos.

Sea  $Q'$  el punto simétrico de  $Q$  respecto de la bisectriz y sea  $Q''$  la imagen de  $Q'$  por la homotecia. Entonces

$$\widehat{BEP} = \widehat{BED} = \widehat{BCD} = \widehat{XCQ} = \widehat{Q'C'X} = \widehat{Q''EX}.$$

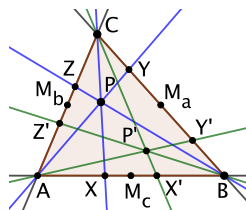
Igualmente se prueba que  $\widehat{PBE} = \widehat{XBQ''}$ . Pero esto significa que  $Q''$  está sobre las rectas simétricas a  $EP$  y  $BP$  respecto de las bisectrices correspondientes, es decir, que  $Q''$  es el conjugado isogonal de  $P$  respecto del triángulo  $\widehat{BXE}$ . Por consiguiente,  $Q''$  también tiene que estar en la recta simétrica de  $PX$  respecto de la bisectriz  $s$  de  $X$  (el eje de la simetría que estamos considerando). Por lo tanto:

$$\widehat{PX, s} = \widehat{s, XQ''} = \widehat{s, XQ'} = \widehat{XQ, s},$$

luego  $XP = XQ$ , luego  $P, X, Q$  están alineados. ■

Exactamente igual que 4.51 se demuestra:

**Teorema 4.57** *Si tres cevianas de un triángulo son concurrentes y cortan a los lados en puntos  $X, Y, Z$  y sustituimos  $AX$  por la ceviana  $AX'$  que pasa por el punto simétrico de  $X$  respecto del punto medio  $M_c$  de  $\overline{AB}$ , e igualmente con las otras dos, las cevianas resultantes también son concurrentes.*

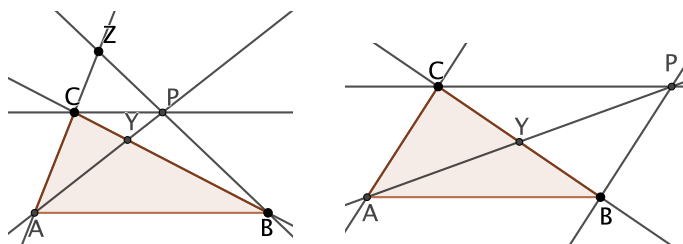


(En este caso es fácil ver que si las rectas simétricas fueran paralelas, las cevianas iniciales también tendrían que serlo, luego nunca se da el caso.)

El punto en el que confluyen las nuevas cevianas se llama *conjugado isotómico* del punto  $P$  en el que confluyen las cevianas dadas.

**Generalizaciones** Las figuras siguientes muestran un caso de tres rectas concurrentes que pasan por cada uno de los vértices de un triángulo, pero en el que no se puede aplicar el teorema de Ceva porque una de ellas es paralela al lado opuesto, así como otro caso en el que dos de las rectas son paralelas a los lados opuestos.

Vamos a probar que el teorema de Ceva sigue siendo válido en estos casos si convenimos en que los cocientes correspondientes a los puntos que faltan toman el valor  $-1$ .



**Nota** Esto tiene una interpretación geométrica si entendemos que  $X$  es un punto “infinitamente lejano”. Si  $X$  es un punto lejano (pero no infinitamente lejano), no estará entre  $A$  y  $B$ , por lo que la razón anterior tiene que ser negativa, y si está muy lejos, las longitudes  $\overline{AX}$  y  $\overline{XB}$  serán casi iguales (la diferencia será insignificante en relación a ambas), por lo que el cociente será casi  $-1$ . El convenio es, pues, que si entendemos que dos rectas paralelas se cortan en un punto  $X$  infinitamente lejano, entonces el cociente es exactamente igual a  $-1$ .

El desarrollo riguroso y sistemático de esta idea de considerar que cada recta tiene un (único) “punto infinito”, de modo que dos rectas son paralelas si y sólo si comparten su punto infinito es lo que se conoce como “geometría proyectiva”. El plano proyectivo contiene los puntos finitos “usuales” y una “recta infinita” adicional, que tiene un punto en común con cada recta “usual”.

Por ejemplo, en estos términos, los puntos infinitos son los conjugados isogonales de los puntos de la circunferencia circunscrita de un triángulo. ■

Así, en el segundo caso, que es el más simple, la expresión del teorema de Ceva se reduce a

$$\frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} = 1,$$

lo cual se cumple porque las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio. Recíprocamente, si se cumple esta relación, entonces  $AY$  tiene que pasar por el punto  $P$  donde se cortan las paralelas, ya que, llamando  $Y'$  a la intersección de  $BC$  y  $AP$ , se tiene que cumplir que

$$\frac{\overline{BY'}}{\overline{Y'C}} = 1,$$

lo que implica que  $Y = Y'$ .

El primer caso es similar. Ahora (en el supuesto de que la “ceviana”  $r$  que pasa por  $C$  sea paralela a  $AB$ ) la fórmula del teorema de Ceva se reduce a

$$\frac{\overline{BY} \overline{CZ}}{\overline{YC} \overline{ZA}} = -1.$$

Observemos que el cociente tiene que ser negativo. Por ejemplo, si  $C$  está entre  $A$  y  $Z$ , entonces  $Z$  está en el semiplano opuesto a  $A$  respecto de  $r$  y  $B$  también (porque  $AB$  no corta a  $r$ ), luego  $P$  está entre  $B$  y  $Z$ , con lo que la recta  $AP$  pasa por un lado de  $\widehat{ZCB}$  y no puede pasar por  $\overline{CZ}$ , luego necesariamente pasa por  $\overline{CB}$  y el punto de corte tiene que ser  $Y$ , luego  $Y$  está entre  $B$  y  $C$ , con lo que el primer factor es positivo y el segundo es negativo.

Similarmente, si es  $A$  el que está entre  $C$  y  $Z$ , entonces  $Z$  está en el semiplano opuesto a  $C$  respecto de  $AB$ , luego  $P$  también, luego  $B$  está entre  $Z$  y  $P$ , luego la recta  $AY$  pasa por un lado de  $\widehat{ZBC}$  y no puede pasar por  $\overline{ZB}$ , luego pasa por  $\overline{BC}$  y el punto de corte tiene que ser  $Y$ , luego  $Y$  está entre  $B$  y  $C$ , con lo que de nuevo el primer factor es positivo y el segundo negativo.

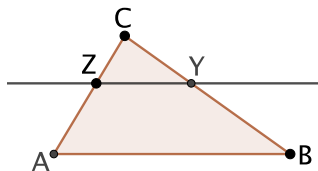
Por último, veamos que no puede ser que  $Z$  esté entre  $A$  y  $C$  y que la vez  $Y$  esté entre  $B$  y  $C$ . En tal caso  $Y$  está entre las dos paralelas  $r$  y  $AB$ , luego también está entre  $A$  y  $P$ . Consideramos el triángulo  $\widehat{AYC}$ , y vemos que  $ZB$  no pasa ni por  $\overline{CY}$  (porque  $B$  no está entre  $Y$  y  $C$ ) ni por  $\overline{AY}$  (porque  $P$  no está entre  $A$  e  $Y$ ), luego tampoco puede pasar por  $\overline{AC}$ , lo que significa que  $Z$  no está entre  $A$  y  $C$ .

Esto prueba que el signo de la expresión del teorema de Ceva es el correcto. En cuanto a su valor absoluto, en cualquier caso se cumple que  $\widehat{PYC}$  es semejante a  $\widehat{AYB}$  y que  $\widehat{CZP}$  es semejante a  $\widehat{AZB}$ , por lo que

$$\left| \frac{\overline{BY} \overline{CZ}}{\overline{YC} \overline{ZA}} \right| = \frac{\overline{AB} \overline{PC}}{\overline{PC} \overline{AB}} = 1.$$

El recíproco se prueba exactamente igual que en el caso “usual” del teorema de Ceva: si el producto da  $-1$ , consideramos el punto de corte  $P$  entre  $AY$  y la paralela por  $C$  y llamamos  $Z'$  al punto donde  $PB$  corta a  $AC$ . El hecho de que se cumpla la relación tanto con  $Z$  como con  $Z'$  implica que  $Z = Z'$ . ■

Similarmente, la figura siguiente muestra un triángulo en el que hemos elegido dos puntos  $Y, Z$  en dos de sus lados de modo que la recta que pasa por ellos es paralela al tercero:



Así es imposible elegir un tercer punto en la recta  $AB$  de modo que se cumpla el teorema de Menelao. Sin embargo, el teorema se sigue cumpliendo si entendemos, como antes, que el cociente que falta vale  $-1$ .

Explícitamente, lo que afirma la versión extendida es que la recta  $YZ$  es paralela a  $AB$  (lo que se interpreta como que la recta  $YZ$  contiene el punto infinito  $X$  de la recta  $AB$  o, en otros términos, que  $X, Y, Z$  están alineados) si y sólo si

$$\frac{\overline{BY} \overline{CZ}}{\overline{YC} \overline{ZA}} = 1.$$

En efecto, es obvio que un factor es positivo si y sólo si lo es el otro, es decir, que  $Y$  está entre  $B$  y  $C$  si y sólo si  $Z$  está entre  $A$  y  $C$ , y la semejanza entre  $\widehat{YCZ}$  y  $\widehat{BCA}$  implica inmediatamente que el producto es igual a 1. El recíproco se prueba mediante la técnica habitual de tomar un punto  $Z'$  tal que  $YZ'$  sea paralela a  $AB$  y probar que  $Z' = Z$ .

**Nota** Observemos que el teorema de Menelao con dos puntos infinitos no se cumple nunca (porque la fórmula se reduce a  $\overline{CZ}/\overline{ZA} = -1$  que no puede cumplirse si  $Z$  es finito) y con tres puntos infinitos es trivial (pues se reduce a  $(-1)^3 = -1$ ).

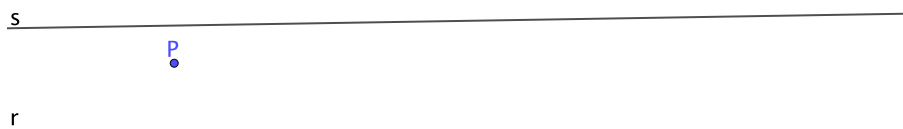
En términos del plano proyectivo el último caso se interpreta como que tomamos los tres puntos infinitos de los tres lados y, ciertamente, están alineados, pues los tres están en la recta infinita, y el caso anterior es imposible porque para que dos puntos infinitos estén alineados con un tercero, éste también tiene que ser infinito, ya que una recta finita sólo contiene un punto infinito y no dos. ■

## 4.7 El teorema de Desargues

Consideremos el problema siguiente:

**Problema 4.2** *Dadas dos rectas  $r$  y  $s$  que no sean paralelas y un punto  $P$  exterior a ambas, trazar la recta que pasa por  $P$  y por su punto de intersección.*

En principio se trata de un problema trivial, pero imaginemos que la situación es la que muestra la figura siguiente:

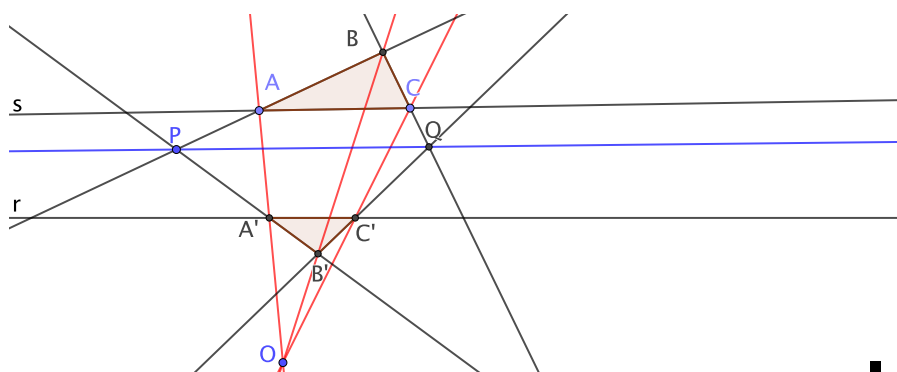


¿Podría el lector calcular la recta requerida mediante una construcción que no se salga de la página de este libro? Una forma de conseguirlo es la siguiente:

1. Tomamos un punto arbitrario  $O$  exterior a las rectas y trazamos tres rectas cualesquiera que pasen por  $O$  y que corten a las dos rectas dadas.
2. Trazamos rectas que pasen por  $P$  y por los puntos  $A$  y  $A'$  donde una de las rectas trazadas corta a  $r$  y  $s$ .



3. Llamamos  $B$  y  $B'$  a los puntos donde las rectas  $PA$  y  $PA'$  cortan a otra de las rectas trazadas en el primer paso. Llamamos  $C$  y  $C'$  a los puntos donde la tercera de estas rectas corta a  $r$  y a  $s$ . Así se forman dos triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{A'B'C'}$ .
4. Llamamos  $Q$  al punto de corte entre  $BC$  y  $B'C'$ .
5. La recta  $PQ$  es la recta buscada.

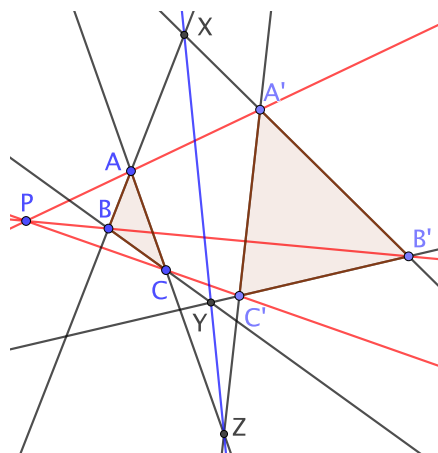


No es evidente en absoluto que la construcción que acabamos de dar resuelva el problema planteado, pero sí que lo es para cualquiera que conozca el teorema que vamos a exponer en este apartado.

Girard Desargues fue un matemático e ingeniero francés del siglo XVII, contemporáneo de Descartes, Fermat, Pascal o Mersenne. Sus trabajos no tuvieron repercusión alguna en su tiempo, pues sus escritos eran muy densos, con una terminología propia muy peculiar, estaban escritos con letra muy pequeña y fueron publicados en tiradas tan reducidas que si han sobrevivido es principalmente gracias al cuidado que tuvo un amigo y discípulo suyo llamado Abraham Bosse, el cual también redactó versiones más legibles de los tratados de su maestro. De hecho, el teorema que vamos a demostrar aquí sólo se conserva en un tratado de Bosse titulado *Maniere universelle de M. Desargues pour pratiquer la perspective*. Hoy se considera a Desargues el fundador de lo que se conoce como “geometría proyectiva”, y el teorema que lleva su nombre es uno de sus pilares fundamentales.

**Definición 4.58** Se dice que dos triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{A'B'C'}$  son *copolares* si las rectas  $AA'$ ,  $BB'$  y  $CC'$  concurren en un mismo punto  $P$ , llamado *polo* de ambos triángulos. Se dice que son *coaxiales* si los puntos de corte de las prolongaciones de sus lados (es decir, de  $AB$  con  $A'B'$ , de  $AC$  con  $A'C'$  y de  $BC$  con  $B'C'$ ) son colineales. La recta que los contiene es un *eje* de ambos triángulos.

**Teorema 4.59 (Teorema de Desargues)** *Dos triángulos son copolares si y sólo si son coaxiales.*



Admitiendo este resultado ya es evidente que la construcción precedente resuelve el problema que habíamos planteado, pues lo que se hace en ella es construir dos triángulos copolares que tengan un lado sobre cada una de las rectas dadas y de modo que su eje pase por  $P$  y  $Q$ . Por el teorema de Desargues, la recta  $PQ$  también tiene que pasar por el punto de corte de las rectas dadas.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos en primer lugar que los triángulos son copolares y vamos a probar que los puntos  $X, Y, Z$  que muestra la figura anterior son colineales. Por el teorema de Menelao basta probar que

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = -1.$$

Para ello aplicamos el teorema de Menelao al triángulo  $\widehat{ABP}$  y los puntos colineales  $X, B', A'$ , de modo que

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BB'}}{\overline{B'P}} \cdot \frac{\overline{PA'}}{\overline{A'A}} = -1.$$

Ahora lo aplicamos a  $\widehat{BCP}$  y los puntos  $Y, C', B'$ , de modo que

$$\frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CC'}}{\overline{C'P}} \cdot \frac{\overline{PB'}}{\overline{B'B}} = -1.$$

Por último lo aplicamos a  $\widehat{CAP}$  con los puntos  $Z, A', C'$ , y concluimos que

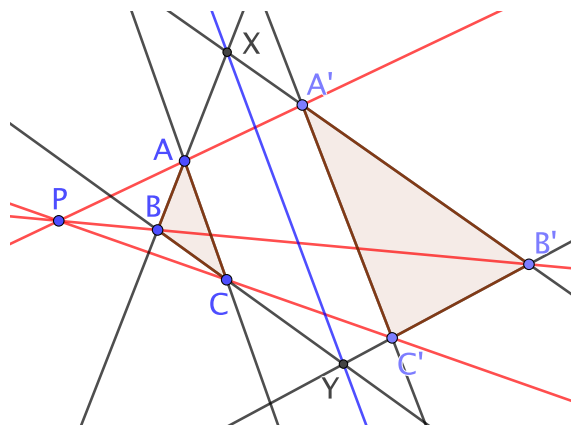
$$\frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} \cdot \frac{\overline{AA'}}{\overline{A'P}} \cdot \frac{\overline{PC'}}{\overline{C'C}} = -1.$$

Multiplicando las tres igualdades anteriores y cancelando factores mutuamente inversos queda

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = -1,$$

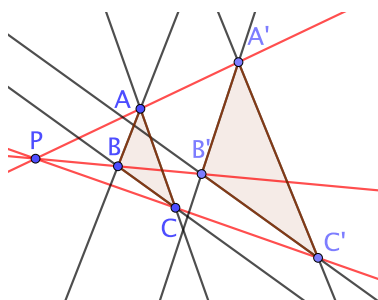
como queríamos probar.

**Nota** El argumento anterior presupone que existen los puntos  $X, Y, Z$ , es decir, que las rectas que prolongan los lados correspondientes se cortan, lo cual no tiene por qué ser cierto. Por ejemplo, la figura siguiente muestra el caso en que  $Z$  no existe, porque las rectas  $AC$  y  $A'C'$  son paralelas:



Sin embargo, todavía podemos afirmar que los triángulos son coaxiales si convenimos<sup>1</sup> en entender esto como que la recta  $XY$  es paralela tanto a  $AC$  como a  $A'C'$ . La prueba precedente vale en este caso sin cambio alguno, sin más que entender que los cocientes que contienen a  $Z$  valen  $-1$ .

Similarmente, la figura siguiente muestra el caso en el que no existen  $Y, Z$ , es decir, que  $AC$  es paralela a  $A'C'$  y  $BC$  es paralela a  $B'C'$ , y lo que sucede en tal caso es que, necesariamente,  $AB$  también es paralela<sup>2</sup> a  $A'B'$ :

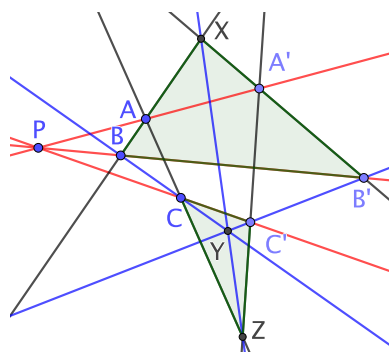


De nuevo el argumento que hemos dado vale sin cambio alguno o, equivalentemente, podemos suponer por reducción al absurdo que  $AB$  y  $A'B'$  se cortan en un punto (finito)  $X$  para concluir que  $\overline{AX}/\overline{XB} = -1$ , lo cual es imposible.

<sup>1</sup>Notemos que este convenio tiene una interpretación natural si pensamos que  $Z$  es ahora el punto infinito en el que se cortan las rectas  $AC$  y  $A'C'$ , por lo que la colinealidad de  $X, Y, Z$  significa en este caso que la recta  $XY$  tiene el mismo punto infinito que las otras dos, es decir, que es paralela a ambas.

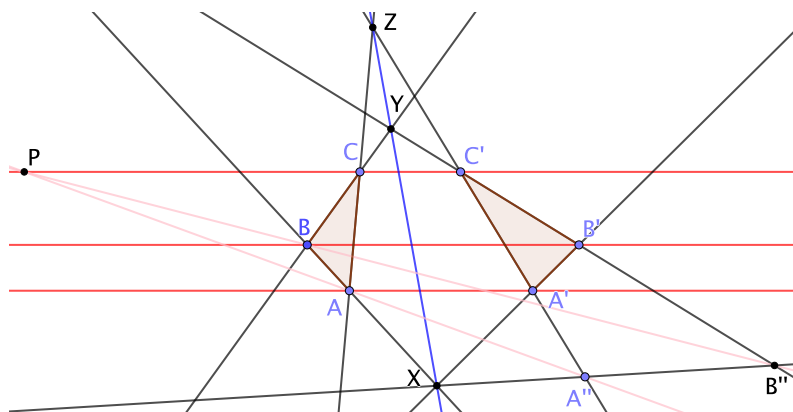
<sup>2</sup>Esto se interpreta como que si  $Y, Z$  son dos puntos infinitos, entonces el punto  $X$ , para ser colineal con ellos, tiene que ser también infinito.

Supongamos ahora que los triángulos son coaxiales. En tal caso no podemos descartar que las rectas  $AA'$ ,  $BB'$  y  $CC'$  sean paralelas (lo que se interpreta como que se cortan en tres puntos alineados en la recta del infinito, así que consideraremos que en este caso los triángulos también son copolares por definición, con polo infinito), pero, si no es así, si, por ejemplo,  $BB'$  corta a  $CC'$  en un punto  $P$ , queremos probar que  $AA'$  también pasa por  $P$ .



Los triángulos  $\widehat{XBB'}$  y  $\widehat{ZCC'}$  son copolares con polo  $Y$ , luego por la parte ya probada son coaxiales, lo cual significa que el punto  $A$  en que se cortan  $XB$ ,  $ZC$ , el punto  $P$  en que se cortan  $BB'$  y  $CC'$  y el punto  $A'$  en que se cortan  $XB'$  y  $ZC'$  tienen que estar alineados, tal y como queríamos probar.

**Nota** En el transcurso de la demostración hemos extendido la definición de triángulos copolares para admitir la posibilidad de que el polo sea infinito, es decir, que las rectas que unen sus vértices sean paralelas. Pero entonces falta demostrar que si dos triángulos son copolares con polo infinito también son coaxiales, ya que sólo lo hemos probado en el caso de que el polo sea finito. La figura siguiente ilustra esta posibilidad:



Tomamos cualquier punto  $A''$  en la recta  $A'C'$  distinto de  $A'$ ,  $C'$  o  $Z$ . Como la recta  $AA'$  es paralela a  $CC'$ , la recta  $AA''$  no puede serlo, y cortará a  $CC'$  en un punto  $P$ . A su vez, llamamos  $B''$  a la intersección de la recta  $PB$  con  $C'B'$ .

(Estas rectas podrían ser paralelas, pero basta cambiar la elección de  $A''$  por otra cualquiera y ya no lo serán.) Se forma así un triángulo  $\widehat{A''B''C''}$  copolar con  $\widehat{ABC}$  (con polo finito) respecto al cual los puntos  $Y, Z$  son los mismos (incluyendo la posibilidad de que sean infinitos, es decir, de que los lados correspondientes de los triángulos sean paralelos). Por la versión que hemos demostrado del teorema de Desargues, la recta  $A''B''$  pasa por el punto  $X$  (finito o infinito) donde  $AB$  corta a  $YZ$ .

En el caso en que los tres puntos  $X, Y, Z$  son finitos, el teorema de Menelao nos da que

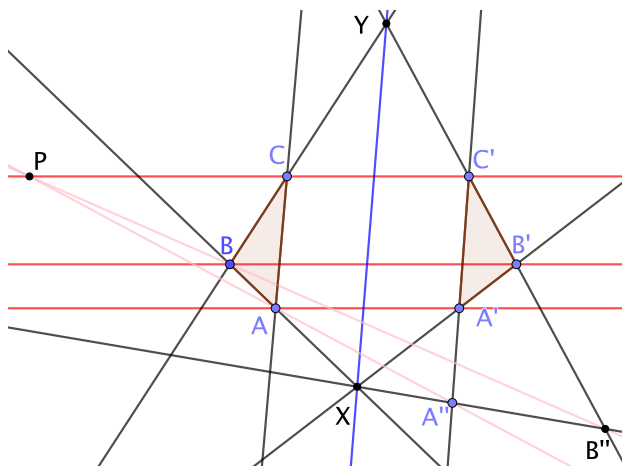
$$\frac{\overline{A''X}}{\overline{XB''}} \cdot \frac{\overline{B''Y}}{\overline{YC'}} \cdot \frac{\overline{C'Z}}{\overline{ZA''}} = -1,$$

y queremos probar que

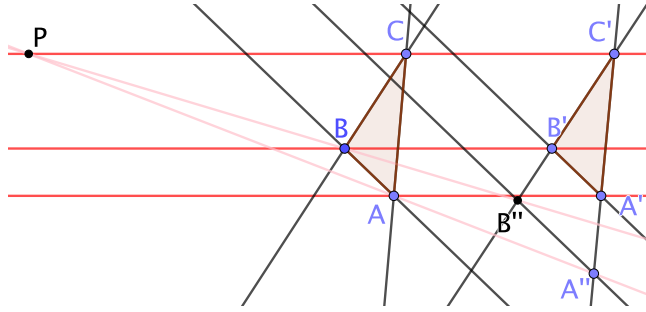
$$\frac{\overline{A'X}}{\overline{XB'}} \cdot \frac{\overline{B'Y}}{\overline{YC'}} \cdot \frac{\overline{C'Z}}{\overline{ZA'}} = -1.$$

Ahora bien, cuanto más próximo tomemos  $A''$  al punto  $A'$ , la recta  $AA''$  se parecerá más a  $AA'$  y el punto  $P$  estará más alejado. Esto hará a su vez que el ángulo  $\widehat{B'BB''}$  sea cada vez menor, y lo mismo le sucederá a la longitud de  $\overline{B'B''}$ . En otras palabras, que tomando  $A''$  suficientemente próximo a  $A'$  podemos hacer que  $B''$  esté arbitrariamente próximo a  $B'$ . A su vez, esto hace que los tres cocientes de la primera de las dos igualdades anteriores (que vale  $-1$  independientemente de la elección de  $A''$ ) tiendan a cada uno de los cocientes de la segunda igualdad. Por lo tanto se cumplirá esta segunda igualdad, pero, por el teorema de Menelao dicha igualdad tiene que cumplirse también si sustituimos  $X$  por la intersección de  $AB$  con  $A'B'$ , luego  $X$  tiene que ser dicha intersección, y esto es lo que teníamos que probar.

Si los triángulos dados tienen un par de lados paralelos, como muestra la figura siguiente, no perdemos generalidad si suponemos que son  $AC$  y  $A'C'$ , con lo que  $Z$  es infinito, y todo el razonamiento vale igualmente entendiendo que los cocientes en los que aparece  $Z$  valen  $-1$ .



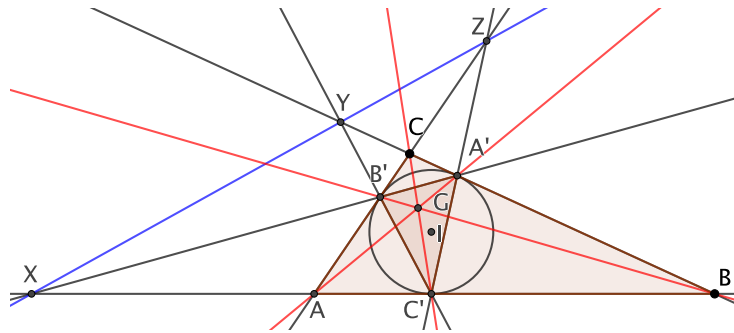
Por último, si los triángulos tienen dos pares de lados paralelos, podemos suponer que son  $BC$  con  $B'C'$  y  $AC$  con  $A'C'$ . Entonces el teorema de Desargues para polos finitos nos da que los tres lados de  $A''B''C''$  son paralelos a los lados correspondientes de  $\widehat{ABC}$ , es decir, que  $A''B''$  es paralela a  $BA$  cualquiera que sea la elección de  $A''$ :



El teorema de Tales nos da que  $\overline{C'A''}/\overline{C'B''}$  es constante, independientemente de  $A''$ , luego al pasar al límite tendremos que  $\overline{C'A'}/\overline{C'B'}$  toma el mismo valor, y esto implica que  $A'B'$  tiene que ser paralela a cualquier  $A''B''$  y, por consiguiente, a  $AB$ , luego los dos triángulos de partida tienen sus lados paralelos dos a dos, lo que se interpreta como que los puntos de corte de cada par de lados están alineados en la recta del infinito. ■

Veamos una aplicación:

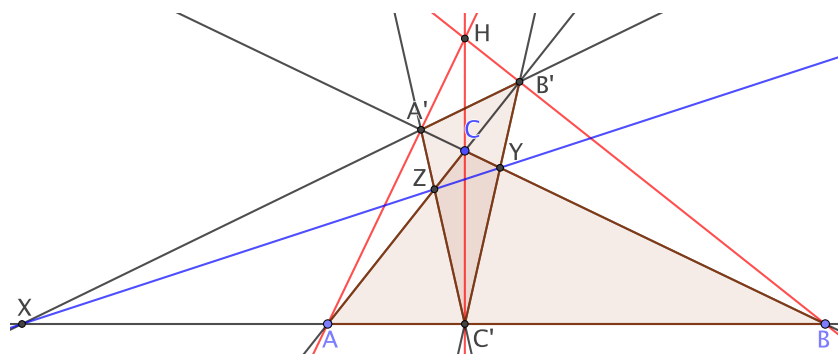
**Teorema 4.60** *Los puntos donde se cortan cada lado de un triángulo y el lado opuesto de su triángulo de Gergonne están alineados.*



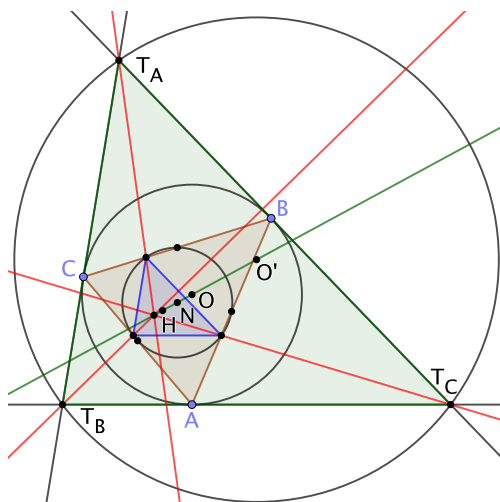
DEMOSTRACIÓN: El teorema 4.27 afirma que todo triángulo es copolar con su triángulo de Gergonne, y el polo es el punto de Gergonne. Por el teorema de Desargues, ambos triángulos son coaxiales, y eso es precisamente lo que afirma el teorema. ■

Igualmente se prueba:

**Teorema 4.61** *Los puntos donde se cortan cada lado de un triángulo y el lado opuesto de su triángulo órtico están alineados.*

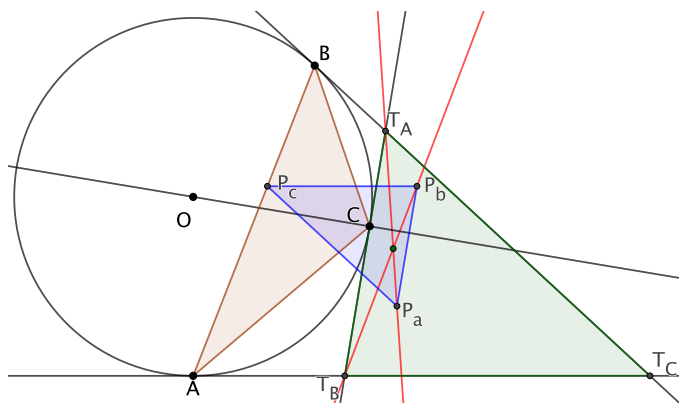


**Teorema 4.62** *En un triángulo no rectángulo, el triángulo tangencial y el triángulo órtico son homotéticos y, si el triángulo no es equilátero, el centro de la homotecia está sobre la recta de Euler, al igual que el circuncentro del triángulo tangencial.*



DEMOSTRACIÓN: Por 4.15 sabemos que ambos triángulos tienen sus lados paralelos, luego son coaxiales con eje infinito. El teorema de Desargues nos asegura que son copolares, pero en principio no podemos asegurar que el polo no sea infinito. Para ver que no es así basta probar que las rectas que unen dos pares de vértices son secantes. En el caso de un triángulo acutángulo es fácil convencerse de que es así, ya que el triángulo órtico está dentro del tangencial. Si el triángulo es obtusángulo (por ejemplo con ángulo obtuso en  $C$ ) es menos obvio, pero también es cierto. La situación es la que muestra la figura siguiente.

Sabemos que  $T_A T_B$  es paralela a  $P_a P_b$ , y además es fácil ver que  $T_A$  y  $P_b$  tienen que estar en el mismo semiplano respecto de  $OC$ , mientras que  $T_B$  y  $P_a$  están en el semiplano opuesto. Esto garantiza que las rectas  $T_A P_a$  y  $T_B P_b$  tienen que cortarse.



Así pues, por el teorema de Desargues, las tres rectas que unen los vértices correspondientes de los dos triángulos se cortan en un mismo punto  $X$ . La homotecia con centro en dicho punto y que transforma  $P_a$  en  $T_A$  transforma  $P_a P_b$  en la recta paralela que pasa por  $T_A$ , luego tiene que ser  $T_A T_B$  y el homotético de  $P_b$  tiene que estar en  $T_A T_B$  y también en la recta  $X P_b$ , luego tiene que ser  $T_B$ . Igualmente se concluye que el homotético de  $P_c$  tiene que ser  $T_C$ , luego los triángulos son homotéticos.

Si el triángulo de partida es acutángulo, entonces, según 4.5, el incentro del triángulo órtico es el ortocentro  $H$ , y el del triángulo tangencial es el circuncentro  $O$ , luego tienen que ser homotéticos, luego  $X$  está en la recta que pasa por ellos, que es la recta de Euler.

Si el triángulo de partida es obtusángulo, por ejemplo, con ángulo obtuso en  $C$ , entonces  $H$  es el excentro del triángulo órtico correspondiente al vértice  $P_c$  y  $O$  es el excentro del triángulo tangencial correspondiente a  $T_C$ , por lo que llegamos a la misma conclusión.

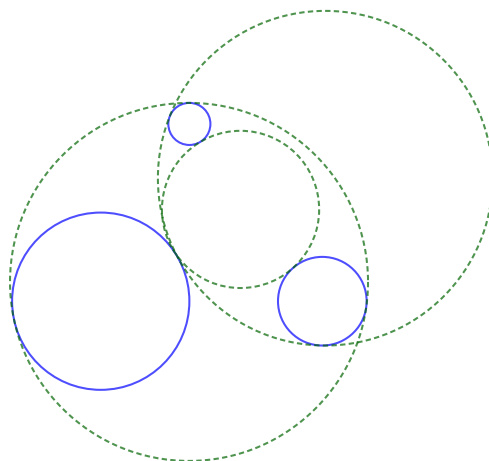
Finalmente, la homotecia entre el triángulo órtico y el tangencial transforma el circuncentro del primero (que es el centro  $N$  de la circunferencia de los nueve puntos) en el circuncentro del segundo, luego ambos están alineados con el centro de la homotecia. Como éste y  $N$  están sobre la recta de Euler, el circuncentro del triángulo tangencial también lo está. ■



## Capítulo V

# Circunferencias

Consideremos tres circunferencias cualesquiera, como las que muestra la figura, en la que se ven también tres ejemplos de circunferencias que son a la vez tangentes a las tres dadas:



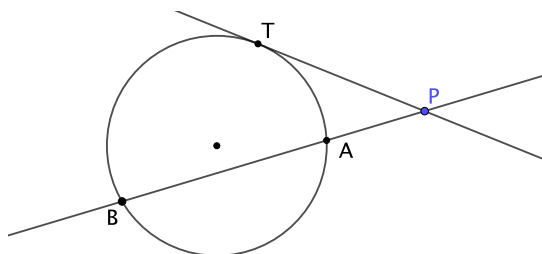
No es evidente cómo encontrarlas, ni cuántas se pueden construir en total. Este problema (encontrar todas las circunferencias tangentes a tres circunferencias dadas) fue planteado y resuelto en el siglo III a.C. por Apolonio de Perga en su tratado *Επαφαί* (Tangencias). No se conserva esta obra, pero se conoce por una referencia a ella en un tratado de Papo de Alejandría, en el que da algunas indicaciones sobre el método empleado por Apolonio. En el siglo XVI varios matemáticos se interesaron por resolver el problema de Apolonio, y la primera solución conocida se debe a Adriaan van Roomen, que usaba intersecciones de hipérbolas. Poco después François Viète obtuvo una solución que sólo requería de regla y compás, y que probablemente iba en la línea de la solución de Apolonio. Posteriormente se han encontrado muchas otras con técnicas muy diversas. Una discusión exhaustiva de todos los casos que pueden darse no se publicó hasta 1983.

El problema de Apolonio es un ejemplo de los problemas no triviales que pueden plantearse sobre circunferencias. Nosotros lo resolveremos usando el concepto de inversión respecto de una circunferencia, pero antes conviene introducir otros conceptos previos.

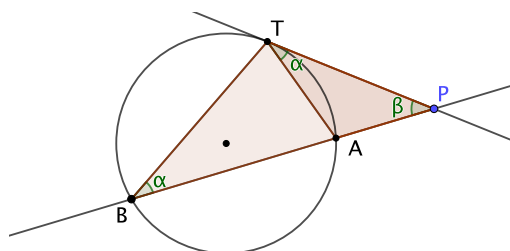
## 5.1 El teorema de la potencia

El teorema 3.8 muestra un hecho sencillo sobre circunferencias que resulta ser un caso particular de un hecho más profundo. Antes de mostrarlo en toda su generalidad veamos otros casos particulares:

**Teorema 5.1** *Si  $P$  es un punto exterior a una circunferencia por el que pasan una recta tangente en  $T$  y otra secante en  $A, B$ , entonces  $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2$ .*



DEMOSTRACIÓN: Basta considerar la figura siguiente:



Los ángulos marcados como  $\alpha$  son iguales, por los teoremas 1.26 y 1.41, ya que ambos abarcan el mismo arco. Por lo tanto, los triángulos  $\widehat{PBT}$  y  $\widehat{PTA}$  son semejantes, ya que tienen dos ángulos iguales. Esto implica que

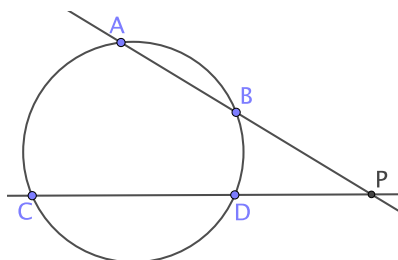
$$\frac{\overline{PT}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PT}},$$

de donde se sigue la relación del enunciado. ■

El teorema siguiente afirma que 3.8 vale igualmente si las cuerdas se cortan fuera del círculo:

**Teorema 5.2** *Si  $P$  es un punto exterior a una circunferencia por el que pasan dos rectas que la cortan en los puntos  $A, B$  y  $C, D$ , respectivamente, entonces*

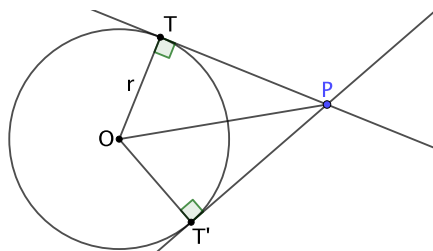
$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP} \cdot \overline{DP}.$$



Es fácil dar una prueba directa de este resultado, pero no lo vamos a hacer porque es una consecuencia trivial del teorema siguiente que vamos a demostrar, para lo cual tenemos que introducir el concepto central de esta sección:

**Definición 5.3** La *potencia* de un punto  $P$  respecto de una circunferencia de centro  $O$  y radio  $r$  se define como  $\Pi(P) = \overline{OP}^2 - r^2$ .

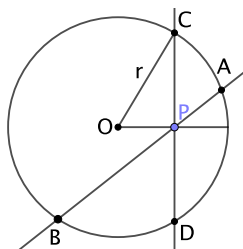
Es claro entonces que  $\Pi(P) = 0$  equivale a que el punto  $P$  esté en la circunferencia. Si  $P$  es exterior, la situación es la siguiente:



Por el teorema de Pitágoras concluimos que  $\Pi(P) = \overline{PT}^2$ , y el teorema 5.1 se traduce en que si una recta que pasa por  $P$  corta a la circunferencia en dos puntos  $A$  y  $B$ , entonces

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \Pi(P).$$

Si el punto  $P$  es interior a la circunferencia, entonces  $\Pi(P) < 0$  y, por el teorema 3.8, vemos que  $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{PC}^2 = r^2 - \overline{OP}^2 = -\Pi(P)$ .



Por lo tanto:

**Teorema 5.4 (de la potencia)** *Si un punto  $P$  no está en una circunferencia  $c$  y una recta que pasa por  $P$  corta a la circunferencia en dos puntos  $A$  y  $B$  (admitiendo  $A = B$  si la recta es tangente), entonces*

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \pm \Pi(P),$$

donde el signo es positivo si  $P$  es exterior a la circunferencia y negativo si es interior.

En realidad el teorema vale también si  $P$  está en la circunferencia entendiéndose que entonces es al menos uno de los puntos  $A$  o  $B$ . Así los dos miembros de la igualdad valen 0.

Observemos también que si consideramos longitudes dirigidas, como las definimos en la sección 3.6, entonces el teorema de la potencia puede enunciarse con la fórmula

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \Pi(P),$$

pues, ciertamente, si  $P$  es interior a la circunferencia, los segmentos  $\overline{AP}$  y  $\overline{BP}$  tienen signos opuestos, luego su producto es negativo, mientras que si  $P$  es exterior ambos factores tienen el mismo signo y el producto es positivo.

Ahora es inmediato el teorema 5.2, pues los dos miembros de la igualdad son iguales a  $\Pi(P)$ . Más aún, la versión con longitudes dirigidas admite un teorema recíproco:

**Teorema 5.5** *Sean  $A, B, C, D$  cuatro puntos distintos tales que las rectas  $AB$  y  $CD$  se corten en un punto  $P$  y, considerando longitudes dirigidas, se cumpla*

$$\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP} \cdot \overline{DP}.$$

*Entonces, los cuatro puntos están sobre una misma circunferencia.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos que  $P$  tiene que ser distinto de los cuatro puntos dados, pues si coincidiera con uno, por ejemplo, con  $A$ , habría que entender que  $\overline{AP} = 0$ , luego también tendría que ser nulo uno de los segmentos del segundo miembro de la igualdad, luego  $P$  también sería igual a  $C$  o  $D$  y los cuatro puntos dados no serían distintos.

Consideremos la circunferencia que pasa por  $A, B$  y  $C$ , de manera que  $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \Pi(P)$ . La recta  $CD$  no puede ser tangente a la circunferencia, pues entonces tendríamos que  $\Pi(P) = \overline{CP}^2 = \overline{CP} \cdot \overline{DP}$ , luego  $\overline{CP} = \overline{DP}$  como longitudes orientadas, luego  $C = D$ , en contra de lo supuesto.

Por lo tanto,  $CD$  es secante a la circunferencia. Sea  $D'$  el otro punto de corte. Por el teorema de la potencia tenemos que

$$\overline{CP} \cdot \overline{DP} = \overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{CP} \cdot \overline{D'P},$$

de donde se sigue que  $\overline{D'P} = \overline{DP}$  como longitudes orientadas, lo cual equivale a que  $D = D'$ . ■

De la propia definición se sigue que la potencia de un punto respecto de una circunferencia prefijada depende únicamente del valor de  $\overline{OP}$ , por lo que el lugar geométrico de los puntos cuya potencia es igual a la de un punto  $P$  es la circunferencia de centro  $O$  que pasa por  $P$ .

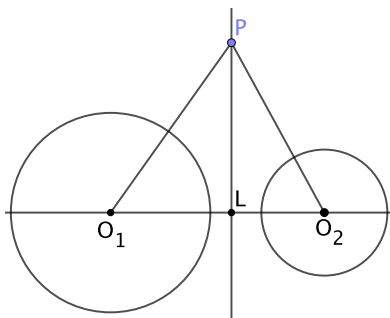
Es obvio que un punto no puede tener la misma potencia respecto de dos circunferencias concéntricas. En cambio, si no son concéntricas, la situación es la siguiente:

**Teorema 5.6** *El lugar geométrico de los puntos que tienen la misma potencia respecto de dos circunferencias no concéntricas es una recta perpendicular a la recta que une sus centros.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos dos circunferencias de centros  $O_1$  y  $O_2$  y radios respectivos  $r_1$  y  $r_2$ . Un punto  $P$  tendrá la misma potencia respecto de ambas si y sólo si

$$\overline{PO_1}^2 - r_1^2 = \overline{PO_2}^2 - r_2^2.$$

Sea  $L$  el pie de la perpendicular a  $\overline{O_1O_2}$  que pasa por  $P$  y llamemos  $d_1 = \overline{LO_1}$ ,  $d_2 = \overline{LO_2}$ ,  $d = \overline{O_1O_2}$ .



Entonces, la igualdad anterior equivale a

$$\overline{PL}^2 + d_1^2 - r_1^2 = \overline{PL}^2 + d_2^2 - r_2^2,$$

o también a  $(d_1 + d_2)(d_1 - d_2) = r_1^2 - r_2^2$ . Ante todo, esta expresión no depende de  $P$ , luego hemos demostrado que el lugar geométrico del enunciado es la unión de todas las perpendiculares a  $O_1O_2$  cuyo pie  $L$  cumple la relación a la que hemos llegado. Sólo falta probar que, para cada número real  $R = r_1^2 - r_2^2$ , existe un único punto  $L$  en  $O_1O_2$  que cumple  $(d_1 + d_2)(d_1 - d_2) = R$ .

Intercambiando si es preciso los puntos  $O_1$  y  $O_2$ , no perdemos generalidad si suponemos  $R \geq 0$ , lo cual equivale a que  $d_1 \geq d_2$ .

Los puntos  $L$  situados entre  $O_1$  y  $O_2$  (incluyendo la posibilidad  $L = O_2$ ) cumplen  $d = d_1 + d_2$ ,  $d_1 - d_2 = d_1 - (d - d_1) = 2d_1 - d$ , luego

$$0 \leq R = d(d_1 - d_2) \leq d^2$$

y, concretamente,  $d(2d_1 - d) = R$ , luego

$$d_1 = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}.$$

Por otra parte, si  $O_2$  está entre  $O_1$  y  $L$ , es decir,  $O_1 - O_2 - L$ , entonces  $d_1 - d_2 = d$ ,  $d_1 + d_2 = d_1 + (d_1 - d) = 2d_1 - d$ , luego

$$R = d(d_1 + d_2) > d^2$$

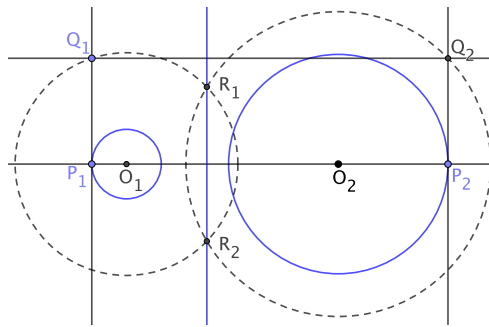
y  $d(2d_1 - d) = R$  y llegamos a la misma fórmula que antes. Si fuera  $O_2 - O_1 - L$  entonces  $d_1 < d_2$ , en contra de lo que estamos suponiendo. Por lo tanto, la posición de  $L$  respecto de  $O_1$  y  $O_2$  viene determinada según si  $R \leq d^2$  o si  $R > d^2$  y en ambos casos hay un único valor posible para  $d_1$ , luego también para  $d_2$ , lo que significa que  $L$  es único. ■

**Definición 5.7** La recta formada por los puntos cuya potencia respecto a dos circunferencias dadas no concéntricas es la misma se llama *eje radical* de las circunferencias.

Por ejemplo, si dos circunferencias son secantes, los puntos de corte están en el eje radical, pues ambos tienen potencia nula respecto de ambas circunferencias, luego el eje radical es simplemente la recta que pasa por dichos puntos de corte.

Similarmente concluimos que si las circunferencias son tangentes entonces el eje radical es su tangente común, pues el punto de tangencia tiene que estar en el eje y la tangente es perpendicular a la recta que une los dos centros. Otro caso obvio se da cuando las dos circunferencias tienen el mismo radio. La fórmula para  $d_1$  que hemos obtenido en la prueba del teorema anterior se reduce a  $d_1 = d/2$ , de donde se sigue que el eje radical es la mediatriz de  $O_1O_2$  (notemos que  $R = 0$ , por lo que en este caso  $L$  tiene que estar entre los dos centros).

**Problema 5.1** Construir el eje radical de dos circunferencias dadas no concéntricas.



1. Dadas dos circunferencias de centros  $O_1$  y  $O_2$ , trazamos un rectángulo  $P_1P_2Q_2Q_1$ , donde  $P_1$  y  $P_2$  son puntos donde las circunferencias cortan a la recta  $O_1O_2$ .

2. Trazamos la circunferencia de centro  $O_i$  que pasa por  $Q_i$ .
3. Hay que elegir  $Q_i$  lo suficientemente alejado de  $P_i$  para que las circunferencias anteriores se corten en dos puntos  $R_1$  y  $R_2$ .
4. La recta  $R_1R_2$  es el eje radical de las circunferencias, pues si representamos por  $\Pi_i$  la potencia respecto a la circunferencia  $i$ , entonces tenemos que  $\Pi_i(R_1) = \Pi_i(Q_i) = \overline{P_iQ_i}^2$ , que vale lo mismo para  $i = 1, 2$ . ■

**Potencia respecto de un punto** Observemos que si llamamos *circunferencia de centro  $O$  y radio 0* al punto  $O$ , la definición de potencia de un punto  $P$  respecto de una circunferencia se particulariza a una definición de potencia de un punto  $P$  respecto de otro punto  $O$ , que no es sino

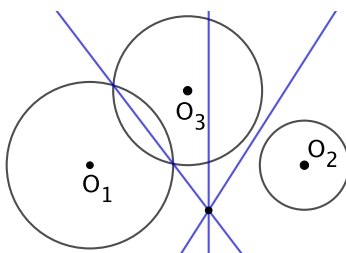
$$\Pi_O(P) = \overline{OP}^2.$$

El teorema 5.6 vale exactamente con la misma prueba si una o las dos circunferencias dadas son puntos. No obstante, el caso de dos puntos es inmediato, pues los puntos que tienen la misma potencia respecto de dos puntos son los que equidistan de ellos. Por lo tanto, el eje radical de dos puntos es la mediatriz del segmento que determinan.

La prueba del teorema 5.6 muestra que los puntos con la misma potencia respecto de un punto y una circunferencia forman igualmente una recta perpendicular a la recta que une los centros, por lo que tenemos definido el eje radical de un punto y una circunferencia, y puede construirse con el procedimiento explicado en el problema 5.1 (tomando  $P_i = O_i$  en el caso de la circunferencia de radio 0). ■

Por ejemplo, los dos teoremas siguientes valen sin cambio alguno incluso si todas o algunas de las circunferencias son puntos:

**Teorema 5.8** *Dadas tres circunferencias cuyos centros no estén alineados, los ejes radicales de cada par de ellas son concurrentes.*



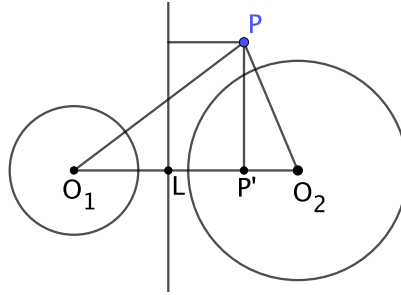
DEMOSTRACIÓN: Es claro que dos ejes cualesquiera no son paralelos, luego se cortan en un punto  $P$ , que cumple  $\Pi_1(P) = \Pi_2(P)$  y  $\Pi_2(P) = \Pi_3(P)$ , luego también se cumple  $\Pi_1(P) = \Pi_3(P)$ , y esto significa que  $P$  está en el eje radical del tercer par. ■

**Definición 5.9** Dadas tres circunferencias con centros no alineados, el punto de corte de los ejes radicales de cada par de ellas se llama *centro radical* de las tres circunferencias.

Terminamos con un resultado técnico al que le sacaremos partido más adelante:

**Teorema 5.10 (Casey)** Dadas dos circunferencias de centros  $O_1 \neq O_2$  y un punto cualquiera  $P$ , sea  $L$  la intersección con  $O_1O_2$  del eje radical y sea  $P'$  el pie de la perpendicular a  $O_1O_2$  que pasa por  $P$ . Entonces, considerando longitudes orientadas:

$$\Pi_1(P) - \Pi_2(P) = 2\overline{O_1O_2} \cdot \overline{LP'}.$$



DEMOSTRACIÓN: En efecto, si las circunferencias tienen radios  $r_1$  y  $r_2$ ,

$$\Pi_1(P) - \Pi_2(P) = \overline{O_1P}^2 - r_1^2 - \overline{PO_2}^2 + r_2^2.$$

Por una parte:

$$\overline{O_1P}^2 = \overline{PP'}^2 + \overline{O_1P'}^2, \quad \overline{PO_2}^2 = \overline{PP'}^2 + \overline{P'O_2}^2,$$

luego  $\overline{PO_1}^2 - \overline{PO_2}^2 = \overline{O_1P'}^2 - \overline{P'O_2}^2$ . Por otra parte, como  $L$  tiene la misma potencia respecto a ambas circunferencias:

$$\overline{O_1L}^2 - r_1^2 = \overline{LO_2}^2 - r_2^2,$$

luego  $r_1^2 - r_2^2 = \overline{O_1L}^2 - \overline{LO_2}^2$  y en total

$$\begin{aligned} \Pi_1(P) - \Pi_2(P) &= \overline{O_1P'}^2 - \overline{P'O_2}^2 - (\overline{O_1L}^2 - \overline{LO_2}^2) = \\ &= (\overline{O_1P'} + \overline{P'O_2})(\overline{O_1P'} - \overline{P'O_2}) - (\overline{O_1L} + \overline{LO_2})(\overline{O_1L} - \overline{LO_2}). \end{aligned}$$

Ahora observamos que, al considerar las longitudes orientadas, sea cual sea la posición de los puntos considerados en  $O_1O_2$ , se cumple que

$$\overline{O_1P'} + \overline{P'O_2} = \overline{O_1O_2}, \quad \overline{O_1L} + \overline{LO_2} = \overline{O_1O_2}.$$

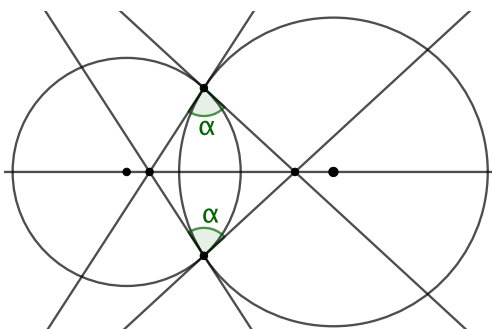
Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \Pi_1(P) - \Pi_2(P) &= \overline{O_1O_2}(\overline{O_1P'} - \overline{P'O_2} - \overline{O_1L} + \overline{LO_2}) \\ &= \overline{O_1O_2}(\overline{O_1L} + \overline{LP'} - (\overline{P'L} + \overline{LO_2}) - \overline{O_1L} + \overline{LO_2}) \\ &= \overline{O_1O_2}(\overline{LP'} - \overline{P'L}) = 2\overline{O_1O_2} \cdot \overline{LP'}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$



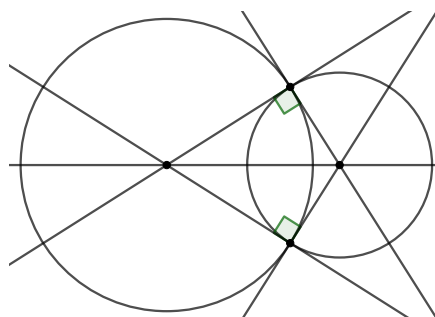
## 5.2 Circunferencias ortogonales

El ángulo que forman dos circunferencias secantes en un punto de corte se define como el ángulo (orientado) que forman las rectas tangentes en dicho punto. Ahora bien, si consideramos la figura siguiente, vemos que los ángulos marcados son iguales:



pero eso no significa que los ángulos que forman las dos circunferencias en sus dos puntos de corte sean iguales, sino que claramente son suplementarios.

Diremos que dos circunferencias secantes son *ortogonales* si forman ángulos rectos en sus puntos de corte (en este caso en particular, es indiferente el punto considerado). Claramente, esto equivale a que la tangente a cada una por cada punto de corte pase por el centro de la otra, y también a que los radios que pasan por los puntos de corte sean ortogonales:



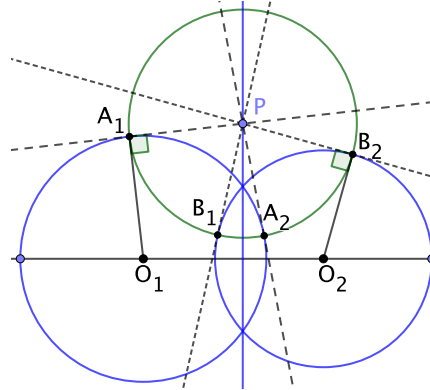
Si dos circunferencias tienen radios  $r_1$  y  $r_2$  y la distancia entre sus centros es  $d$ , serán ortogonales si y sólo si  $d^2 = r_1^2 + r_2^2$ .

En efecto, una implicación es obvia por el teorema de Pitágoras, y si se cumple esta relación, podemos formar dos triángulos rectángulos cuya hipotenusa sea el segmento que une los centros y cuyos catetos midan  $r_1$  y  $r_2$ , y entonces los otros dos vértices tienen que estar en ambas circunferencias, luego son secantes, y es fácil concluir que son ortogonales.

Observemos que cada punto exterior de una circunferencia es el centro de una única circunferencia ortogonal a la dada, pues por dicho punto podemos

trazar dos tangentes a la circunferencia dada (véase el problema 1.15) y la circunferencia requerida es necesariamente la que pasa por los puntos de tangencia.

Ahora supongamos que tenemos dos circunferencias dadas y un punto  $P$  exterior a ambas. Si la circunferencia de centro  $P$  ortogonal a cada una de ellas es la misma, eso significa que, con la notación de la figura siguiente,  $\overline{PA_1} = \overline{PB_1}$ , lo cual a su vez es lo mismo que  $\Pi_1(P) = \Pi_2(P)$ , luego  $P$  está en el eje radical de las dos circunferencias.



Recíprocamente, si  $P$  está en el eje radical (y es exterior a ambas circunferencias), se cumple que  $\Pi_1(P) = \Pi_2(P)$ , lo que significa que la distancia de  $P$  a los puntos de tangencia a ambas circunferencias es la misma, y por lo tanto los cuatro puntos de tangencia están sobre una misma circunferencia de centro  $P$ , que será ortogonal a las dos circunferencias dadas. Así pues:

**Teorema 5.11** *El lugar geométrico de los centros de las circunferencias ortogonales a dos circunferencias dadas es el conjunto de los puntos del eje radical que son exteriores a ambas circunferencias.*

**Nota** Observemos que el teorema vale igualmente si una o las dos circunferencias dadas son puntos, entendiendo que una circunferencia es ortogonal a un punto si pasa por él.

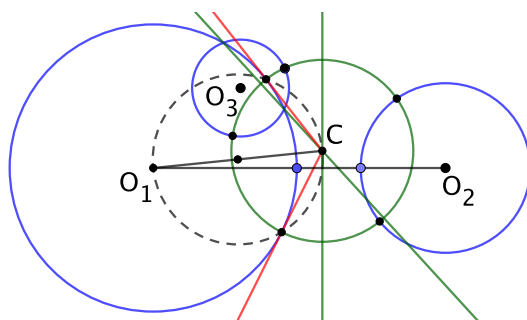
En efecto, en el caso de dos puntos es trivial, pues lo que afirma el teorema es que el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por dos puntos dados es la mediatriz del segmento que determinan.

En el caso de un punto  $O_1$  y una circunferencia de centro  $O_2$  el razonamiento que hemos dado vale sin cambio alguno: un punto  $P$  es el centro de una circunferencia que pasa por  $O_1$  y es ortogonal a la circunferencia de centro  $O_2$  si y sólo si  $P$  es exterior a la circunferencia y  $\overline{PO_1} = \overline{PB_1}$ , donde  $B_1$  es uno de los puntos donde tocan a la circunferencia sus tangentes por  $P$ , y esto equivale a que  $\Pi_1(P) = \Pi_2(P)$ , es decir, a que  $P$  esté en el eje radical del punto y la circunferencia (y sea exterior a ésta). ■

Esto nos permite resolver algunos problemas no triviales:

**Problema 5.2** *Construir una circunferencia ortogonal a tres circunferencias dadas.*

El centro de la circunferencia requerida tiene que estar en los ejes radicales de cada par de circunferencias, es decir, tiene que estar en su centro radical. En particular, si los centros de las circunferencias están alineados el problema no tiene solución. En caso contrario, basta construir el centro radical y luego trazar una tangente a una de las circunferencias por dicho punto. La circunferencia requerida es la circunferencia cuyo centro es el centro radical y que pasa por el punto de tangencia:

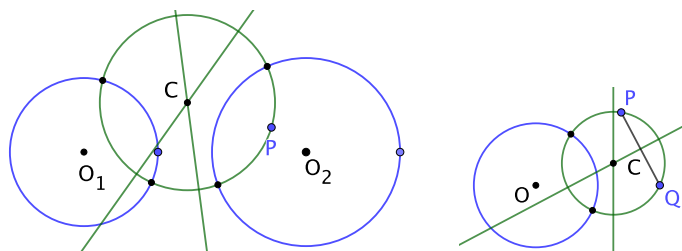


En la figura hemos calculado el eje radical de las circunferencias de centro  $O_1$  y  $O_2$  y el de las circunferencias de centro  $O_1$  y  $O_3$  (que es simplemente la recta que pasa por los puntos de corte). Su intersección es el centro radical  $C$  de las tres circunferencias, luego hemos calculado los puntos de tangencia desde  $C$  a la circunferencia de centro  $O_1$ , que nos dan el radio de la circunferencia requerida. ■

Exactamente la misma construcción resuelve los dos problemas siguientes:

**Problema 5.3** *Construir una circunferencia ortogonal a dos circunferencias dadas que pase por un punto dado.*

**Problema 5.4** *Construir una circunferencia ortogonal a una circunferencia dada que pase por dos puntos dados.*



En el caso en que hay dos puntos dados, uno de los ejes radicales es simplemente la mediatriz del segmento que determinan. En todos los casos es necesario que los centros de las circunferencias (o los puntos) no estén alineados.

### 5.3 Inversión

Finalmente estamos en condiciones de estudiar uno de los conceptos más potentes para el estudio de las circunferencias:

**Definición 5.12** Dada una circunferencia  $c$  de centro  $O$  y radio  $r$ , llamaremos *inverso* de  $P$  respecto de  $c$  al único punto  $P'$  situado sobre la semirrecta de origen  $O$  que pasa por  $P$  y que cumple

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2.$$

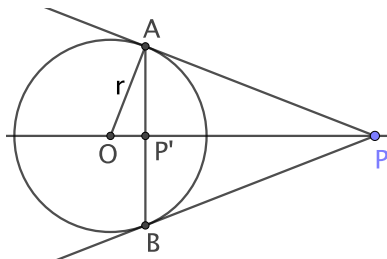
A partir de esta definición es evidente que si  $P$  es un punto exterior a la circunferencia, es decir, si  $\overline{OP} > r$ , entonces su inverso es interior, pues cumple

$$\overline{OP'} = \frac{r^2}{\overline{OP}} < \frac{r^2}{r} = r,$$

y viceversa. También es claro que los puntos de la circunferencia son los únicos que coinciden con sus inversos. Además, el inverso del inverso es el propio punto, por lo que en realidad tenemos una relación de inversión que empareja cada punto interior de la circunferencia distinto de  $O$  con un punto exterior, y viceversa.

Veamos una forma práctica de calcular el inverso de un punto:

**Teorema 5.13** *En inverso respecto a una circunferencia de un punto exterior  $P$  es la intersección con  $OP$  del segmento que une los puntos de tangencia de las rectas tangentes a la circunferencia que pasan por  $P$ . Recíprocamente, el inverso de un punto interior  $P'$  (distinto de  $O$ ) puede calcularse trazando la perpendicular a  $OP$  por  $P'$  y luego las tangentes a la circunferencia por los puntos  $A$  y  $B$ . El inverso es el punto donde se cortan las tangentes.*



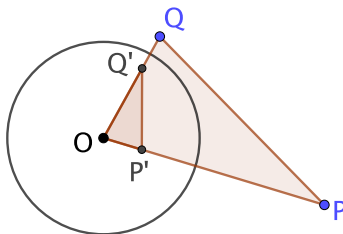
DEMOSTRACIÓN: Basta tener en cuenta que los triángulos  $\widehat{OAP}$  y  $\widehat{OP'A}$  son semejantes, pues tienen dos ángulos iguales, por lo que

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}},$$

luego  $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$ . ■

Las propiedades más relevantes de la inversión se deducen del teorema siguiente:

**Teorema 5.14** Si  $P, P'$  y  $Q, Q'$  son dos pares de puntos inversos respecto de una circunferencia que no sean colineales con su centro, los triángulos  $\widehat{OPQ}$  y  $\widehat{OQ'P}$  son inversamente semejantes.



DEMOSTRACIÓN: Se cumple que

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2 = \overline{OQ} \cdot \overline{OQ'},$$

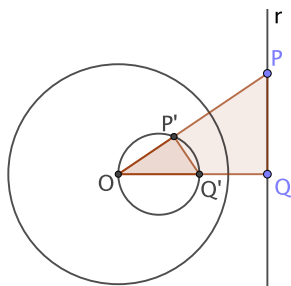
luego

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OP'}}$$

luego los triángulos tienen dos lados proporcionales que forman el mismo ángulo. Es claro que la semejanza es inversa. ■

Notemos que en realidad podemos calcular la figura inversa a cualquier figura dada, entendida como la figura formada por los inversos de los puntos de la figura dada (menos el centro  $O$  de la circunferencia, si es que está en la figura). El teorema anterior nos permite calcular las inversas de las rectas y las circunferencias:

**Teorema 5.15** Fijada una circunferencia de centro  $O$ , la inversa de una recta que pasa por  $O$  es ella misma y la inversa de una recta que no pasa por  $O$  es una circunferencia que pasa por  $O$  y viceversa.



DEMOSTRACIÓN: La primera parte es inmediata a partir de la definición de inversión. Si la recta  $r$  no pasa por  $O$ , sea  $Q$  el pie de la perpendicular a  $r$  que pasa por  $O$ . Entonces, si  $P$  es cualquier punto de  $r$  distinto de  $Q$ , el triángulo  $\widehat{OPQ}$  es rectángulo en  $Q$ , luego, por 5.14, el triángulo  $\widehat{OQ'P}$  es rectángulo en  $P'$ . Por lo tanto, cuando  $P$  varía en  $r$ , su inverso  $P'$  es siempre

el vértice de un triángulo rectángulo con los otros dos vértices en  $O$  y  $Q'$ , luego está en la circunferencia de diámetro  $\overline{OQ'}$ . Recíprocamente, todo punto  $P'$  de esta circunferencia distinto de  $O$  y de  $Q'$  forma un triángulo rectángulo, luego su inverso  $P$  formará un triángulo  $\widehat{OPQ}$  rectángulo en  $Q$ , luego estará en la recta  $r$ .

Ahora consideremos una circunferencia que pasa por  $O$  y sea  $Q'$  el punto diametralmente opuesto a  $O$ . Cada punto  $P'$  de la circunferencia distinto de estos dos forma un triángulo  $\widehat{OP'Q'}$  rectángulo en  $P'$ , luego el triángulo  $\widehat{OQP}$  es rectángulo en  $Q$ , luego  $P$  está en la recta perpendicular a  $OQ$  que pasa por  $Q$ . La inversa de esta recta tiene que ser una circunferencia que contenga a la dada, luego tiene que ser la circunferencia dada. ■

Falta determinar la inversa de una circunferencia que no pase por  $O$ :

**Teorema 5.16** *Fijada una circunferencia de centro  $O$ , la inversa de una circunferencia que no pase por  $O$  es otra circunferencia que tampoco pasa por  $O$ , y ambas circunferencias son homotéticas respecto de una homotecia de centro  $O$ .*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $c$  una circunferencia que no pase por  $O$ . Consideramos una recta cualquiera que pase por  $O$  y corte a  $c$  en dos puntos  $P$  y  $Q$ . Entonces, la potencia de  $O$  respecto de  $c$  es

$$\Pi_c(O) = \overline{OP} \cdot \overline{OQ}.$$

Por otro lado, si la circunferencia de inversión tiene radio  $r$ , tenemos que

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2,$$

luego

$$\frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}} = \frac{r^2}{\Pi_c(O)}.$$

Esto significa que  $P'$  es la imagen de  $Q$  por la homotecia de centro  $O$  y razón  $r^2/\Pi_c(O)$ . Por lo tanto, una forma de calcular el inverso  $P'$  de un punto  $P$  de  $c$  es calcular el otro punto  $Q$  donde la recta  $OP$  corta a  $c$  y aplicarle la homotecia de centro  $O$  y razón  $r^2/\Pi_c(O)$ . Una ligera modificación del cálculo muestra que esto vale igual si  $OP$  es tangente a  $c$ , y la conclusión es que la inversa de  $c$  está contenida en la circunferencia homotética  $c'$ . Pero aplicando lo que hemos probado a  $c'$  obtenemos que su inversa tiene que estar contenida en una circunferencia homotética que contiene a  $c$ , luego tiene que ser  $c$ , y así resulta que todos los puntos de  $c'$  son inversos de puntos de  $c$ . ■

**Nota** En el capítulo anterior hemos visto que las variantes de los teoremas de Ceva, Menelao o Desargues pueden verse, respectivamente, como casos particulares de un mismo teorema si pensamos que cada recta contiene un punto infinito, de modo que dos rectas pasan por el mismo punto infinito si y sólo si son paralelas.

En este contexto, todos los casos considerados en los dos teoremas precedentes pueden verse como casos particulares de un mismo teorema si pensamos que todas las rectas pasan por un mismo punto infinito, así como que una recta es una circunferencia que pasa por el (único) punto infinito, y que el inverso del centro de una circunferencia es el punto infinito y viceversa.

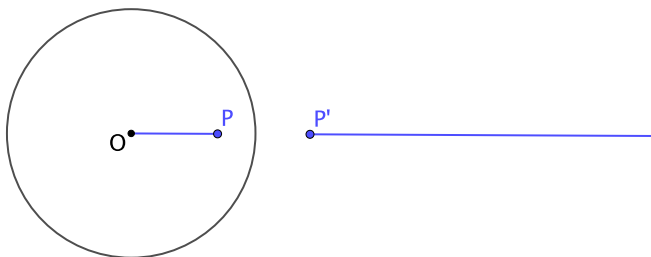
Con estos convenios, lo que dicen los dos teoremas precedentes es simplemente que la inversa de una circunferencia es otra circunferencia. Si la circunferencia dada pasa por el centro  $O$  de la inversión, entonces la figura inversa es una circunferencia que pasa por el punto infinito, es decir, una recta que no pasa por  $O$ , ya que la circunferencia dada no pasa por el punto infinito. En cambio, si la circunferencia dada no pasa por  $O$  (teniendo en cuenta que tampoco pasa por el punto infinito), entonces la inversa tampoco lo hace, luego es otra circunferencia que no pasa por  $O$ .

Similarmente, la imagen de una recta que pasa por  $O$  (y por el punto infinito) es una circunferencia que también pasa por  $O$  y por el punto infinito, es decir, una recta que pasa por  $O$ , y la imagen de una recta que no pasa por  $O$  (pero sí por el punto infinito) es una circunferencia que pasa por  $O$ , pero no por el punto infinito, luego es una auténtica circunferencia que pasa por  $O$ .

Los teoremas sobre la inversión respecto de una circunferencia valen también para rectas si definimos entonces la inversión como la simetría usual respecto de la recta.

Otro ejemplo de la utilidad de considerar a las rectas como circunferencias que pasan por el punto infinito lo tenemos en el problema 5.2. Allí hemos observado que, dadas tres circunferencias, existe una única circunferencia ortogonal a todas ellas salvo en el caso de que tengan los centros alineados. Con este convenio la excepción desaparece, pues si los centros están alineados la “circunferencia” ortogonal es la recta que pasa por sus centros (aunque si las tres tienen el mismo centro se pierde la unicidad, pues toda recta que pase por él es ortogonal a las tres circunferencias). ■

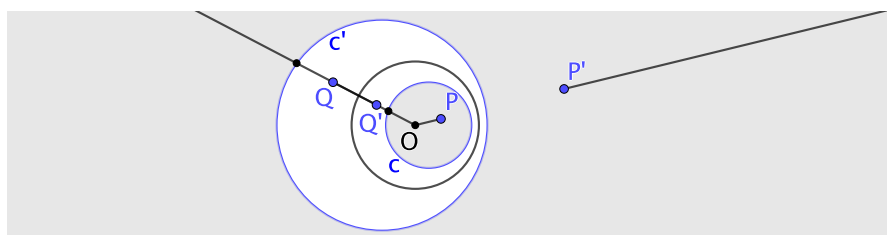
Según hemos observado, la inversa de una recta  $OP$  respecto de una circunferencia de centro  $O$  es la propia recta  $OP$ , pero, más precisamente, es fácil deducir de la definición de inversión que el inverso del segmento  $\overline{OP}$  es la semirecta de  $OP$  con origen en el inverso  $P'$  que no contiene a  $O$ :



A su vez, de aquí se deduce lo siguiente:

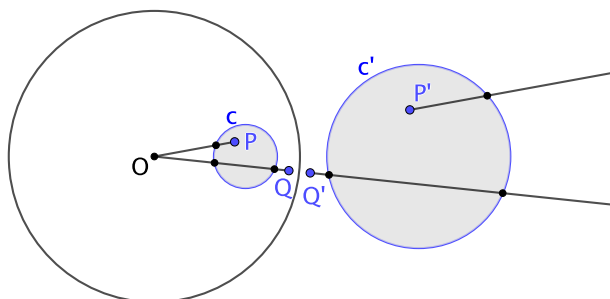
**Teorema 5.17** *Fijada una circunferencia  $C$  de centro  $O$ , si una circunferencia  $c$  contiene el punto  $O$  en su interior, entonces los inversos de los puntos interiores de  $c$  respecto de  $C$  son los puntos exteriores de  $c'$  y viceversa. En cambio, si  $O$  está en el exterior de  $c$ , los inversos de los puntos interiores de  $c$  son los puntos interiores de  $c'$ , y viceversa.*

DEMOSTRACIÓN: Si  $O$  está en el interior de  $c$  y  $P$  es un punto interior arbitrario, entonces la situación es la que muestra la figura siguiente:



El segmento  $\overline{OP}$  no corta a  $c$  luego su inverso, que es una semirrecta de origen en  $P'$ , no corta a  $c'$ , lo cual se traduce en que  $P'$  es exterior a  $c'$ . Por el contrario, si un punto  $Q$  es exterior a  $c$ , el segmento  $\overline{OQ}$  corta a  $c$  una vez, luego su inverso es una semirrecta de origen en  $Q'$  que corta a  $c'$  una vez, lo cual sólo es posible si  $Q'$  es interior a  $c'$ .

En cambio, si  $O$  está en el exterior de  $c$ , la situación es la que muestra la figura siguiente:



Si  $P$  es un punto interior de  $c$ , el segmento  $\overline{OP}$  corta a  $c$  una vez, luego su inverso, que es una semirrecta de origen  $P'$ , corta a  $c'$  una vez, lo que se traduce en que  $P'$  es interior a  $c'$ . En cambio, si  $Q$  es un punto exterior, el segmento  $\overline{OQ}$  tiene que cortar a  $c'$  dos veces o ninguna, y lo mismo vale para la semirrecta inversa, de origen  $Q'$ , lo que significa que  $Q'$  es exterior a  $c'$ . ■

El teorema 5.16 afirma que la inversa de una circunferencia que no pasa por el centro de la circunferencia respecto a la que se calcula la inversión es otra circunferencia. Ahora vamos a probar que dos circunferencias dadas son inversas respecto de una circunferencia elegida adecuadamente.



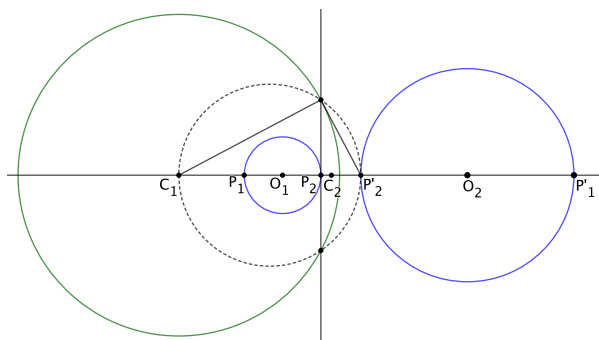
**Definición 5.18** Una *circunferencia de antisimilitud* de dos circunferencias dadas es una circunferencia respecto a la cual sean inversas.

Según el teorema 5.16, la inversa de una circunferencia  $c_1$  respecto una circunferencia de centro  $O$  es una circunferencia  $c_2$  homotética a  $c_1$  por una homotecia de centro  $O$  cuya razón tiene el signo de  $\Pi_{c_1}(O)$ , es decir, positivo si  $O$  es exterior a  $c_1$  y negativo en caso contrario. En particular, el centro  $O$  de una circunferencia de antisimilitud de dos circunferencias tiene que ser uno de sus centros de similitud (definición 3.26).

Si una de las circunferencias es exterior a la otra, es fácil ver que ambos centros de similitud son exteriores (se sigue fácilmente del procedimiento que hemos visto para calcularlos tras la definición 3.26), por lo que la semejanza tiene que tener razón de signo positivo, y esto descarta el centro de similitud  $C_2$  correspondiente a la homotecia de razón negativa.

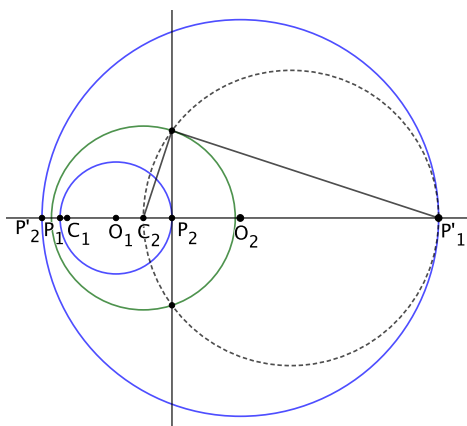
Si las dos circunferencias tienen el mismo radio, entonces no hay otro centro de similitud y las circunferencias dadas no son mutuamente inversas respecto de ninguna circunferencia. (Pero podemos considerar que son inversas respecto de la mediatriz del segmento determinado por sus centros, si entendemos que la inversión respecto de una recta es la simetría respecto a ella).

Si los radios son distintos hay una única circunferencia de antisimilitud, pues ya sabemos que su centro tiene que ser el centro  $C_1$  correspondiente a la homotecia de razón positiva y la circunferencia de antisimilitud está determinada por la construcción que muestra la figura siguiente:

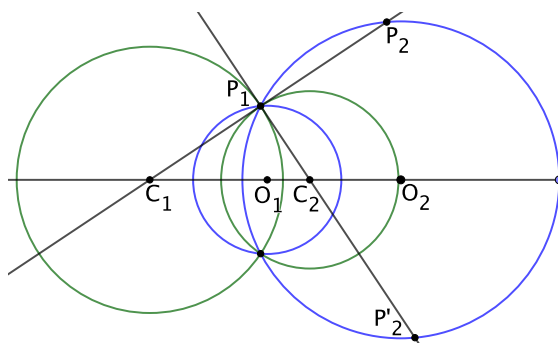


Como el inverso del punto  $P_2$  tiene que ser  $P_2'$ , el triángulo indicado en la figura tiene que ser rectángulo, lo que obliga a que la circunferencia de antisimilitud sea necesariamente la que pasa por las intersecciones entre la circunferencia de diámetro  $\overline{C_1P_2}$  y la perpendicular a  $O_1O_2$  por  $P_2$ . Esta condición necesaria también es suficiente, pues la inversa de  $c_1$  por dicha circunferencia tiene que ser una circunferencia homotética a  $c_1$  por una homotecia de centro  $C_1$  y razón positiva que hace corresponder  $P_2$  con  $P_1'$  (notemos que no es lo mismo la imagen de  $P_2$  por la inversión que por la homotecia), pero  $c_2$  cumple esto mismo y no hay más que una homotecia de razón positiva con un centro dado y que transforme un punto dado en otro. Así pues, la inversa de  $c_1$  tiene que ser  $c_2$ .

Supongamos ahora que una de las circunferencias está contenida en la otra (sin tocarse), por ejemplo,  $c_1$  dentro de  $c_2$ . Entonces la situación es la que muestra la figura siguiente. Los dos centros de similitud están contenidos en  $c_1$ , luego la semejanza tiene que tener razón negativa, y esto descarta el centro de similitud  $C_1$ . La circunferencia de antisimilitud de centro  $C_2$  está determinada por la misma condición necesaria que en el caso anterior (exigiendo ahora que el inverso de  $P_2$  sea  $P'_1$ ), que es también suficiente por el mismo motivo: la inversa de  $c_1$  será también su imagen por una homotecia de centro  $C_2$ , de razón negativa que transforma  $P_2$  en  $P'_1$ , y esto lo cumple también  $c_2$ , luego tiene que ser  $c_2$ .



Si las circunferencias son tangentes la situación es muy similar. Si son mutuamente exteriores, el punto de tangencia es  $C_2$  y hay que descartarlo, porque una inversión respecto a una circunferencia de centro  $C_2$  transformaría las circunferencias en rectas. Y con centro  $C_1$  la única circunferencia de antisimilitud es la que pasa por el punto de tangencia. Si son tangentes interiores el punto de tangencia es  $C_1$  y se descarta por el mismo motivo, y la única circunferencia de antisimilitud es la que tiene centro  $C_2$  y pasa por el punto de tangencia.

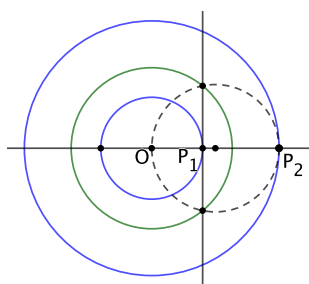


Si las circunferencias son secantes, el centro de similitud de razón positiva (cuando los radios no son iguales) es exterior a ambas y el de razón negativa

es interior a ambas, luego los dos centros son válidos y ahora tenemos dos circunferencias de antisimilitud, que están determinadas por que tienen que pasar por el centro correspondiente  $C$  y por los dos puntos de corte. En este caso la unicidad se debe a que tanto la homotecia asociada a la inversión como la asociada al centro de similitud correspondiente tienen que tener la razón del mismo signo y transforman  $P_1$  en el punto  $P_2$  o  $P'_2$ .

Así pues, en este caso hay dos circunferencias de antisimilitud (si cuando los radios son iguales entendemos que una de ellas es la recta que pasa por los puntos de corte, pues en ese caso ambas circunferencias son simétricas respecto de dicha recta).

Por último, si las circunferencias son concéntricas es fácil ver que tienen una única circunferencia de antisimilitud concéntrica con ellas.



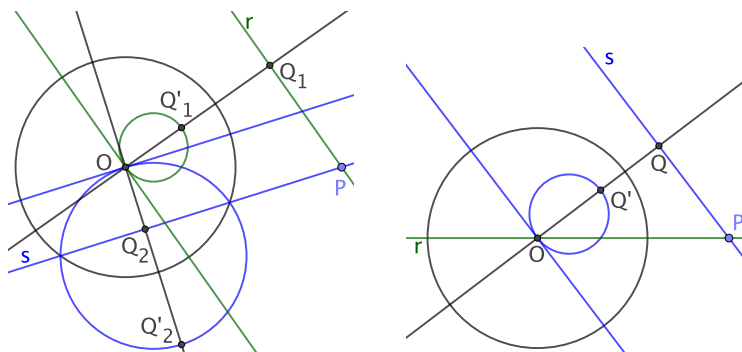
El teorema siguiente resume lo que hemos obtenido:

**Teorema 5.19** *Dadas dos circunferencias distintas, si son tangentes o no tienen puntos en común, entonces tienen una única circunferencia de antisimilitud, cuyo centro es el centro de similitud correspondiente a una homotecia de razón positiva si son mutuamente exteriores o de razón negativa si una es interior a la otra (entendiendo que la circunferencia es la mediatriz del segmento que une sus centros si tienen el mismo radio), mientras que si son secantes tienen dos circunferencias de antisimilitud, con centros en los centros de similitud y que pasan por los puntos de corte (entendiendo que una de ellas es una recta si los radios son iguales).*

Vamos a probar ahora que el ángulo que forman dos circunferencias en un punto en común es el mismo que forman sus inversas en el punto inverso, pero recorrido en sentido opuesto o, equivalentemente, que los ángulos son suplementarios. En esta afirmación incluimos a las rectas como caso particular, entendiendo que el ángulo que forman una recta y una circunferencia en un punto de corte (o tangencia) es el ángulo que forma la recta con la tangente a la circunferencia en dicho punto:

**Teorema 5.20** *Si  $c_1$  y  $c_2$  son dos circunferencias cualesquiera (incluyendo la posibilidad de que sean rectas) con un punto  $P$  en común, entonces el ángulo (dirigido) que forman en  $P'$  sus inversas respecto de una circunferencia prefijada es el suplementario del que forman ellas en  $P$ .*

DEMOSTRACIÓN: Vamos a considerar en primer lugar el caso en que tenemos dos rectas  $r$  y  $s$ . Si  $r'$  y  $s'$  también son rectas, entonces  $r' = r$  y  $s' = s$ , con lo que la conclusión es trivial (notemos que, considerando ángulos dirigidos, el suplementario del ángulo nulo es él mismo).



Supongamos ahora que  $r$  y  $s$  se transforman en circunferencias (figura de la izquierda). De acuerdo con la prueba de 5.15, estas circunferencias inversas se calculan tomando los pies  $Q_1$  y  $Q_2$  de las perpendiculares por  $O$  a  $r$  y  $s$  y calculando los inversos  $Q'_1$  y  $Q'_2$ , de modo que las circunferencias inversas son las que tienen diámetro  $OQ'_1$  y  $OQ'_2$ . Vemos entonces que las tangentes a las inversas por  $O$  son paralelas a  $r$  y  $s$ , por lo que el ángulo que forman es el mismo que el que forman  $r$  y  $s$ , pero entonces el ángulo que forman en  $P'$  (que es el otro punto de corte entre las circunferencias) será el ángulo suplementario.

El caso en que una de las rectas (por ejemplo  $r$ ) se queda invariante y la otra se transforma en una circunferencia (figura de la derecha) se razona análogamente, aunque es más simple.

Ahora consideramos el caso general en el que  $c_1$  y  $c_2$  son rectas o circunferencias. Sean  $t_1$  y  $t_2$  sus tangentes por el punto común  $P$  (entendiendo que  $c_i = t_i$  si  $c_i$  es una recta). El ángulo que forman  $c_1$  y  $c_2$  en  $P$  es por definición el mismo que forman  $t_1$  y  $t_2$ . Por otra parte, como  $c_i$  y  $t_i$  tienen un único punto en común, lo mismo vale para  $c'_i$  y  $t'_i$  (salvo en el caso de que ambas sean rectas, pues entonces tienen en común los puntos  $P'$  y  $O$ , pero este caso lo podemos descartar porque ya lo hemos tratado). Por lo tanto,  $c'_i$  y  $t'_i$  (sean rectas o circunferencias) son tangentes en  $P'$ , y el ángulo que forman  $c'_1$  y  $c'_2$  en  $P'$  es el mismo que forman  $t'_1$  y  $t'_2$ , que ya hemos probado que es el suplementario del que forman  $t_1$  y  $t_2$  en  $P$ , luego también es el mismo que forman  $c_1$  y  $c_2$  en  $P$ . ■

En particular, las inversas de dos circunferencias ortogonales son circunferencias ortogonales (sin descartar que sean rectas).

Veamos ahora otra consecuencia notable de 5.14:

**Teorema 5.21** *Fijada una circunferencia de centro  $O$ , si  $P$  y  $Q$  son dos puntos no colineales con  $O$ , entonces los cuatro puntos  $P, Q, P', Q'$  pasan por una circunferencia ortogonal a la dada.*

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2 = \overline{OQ} \cdot \overline{OQ'},$$

y  $O$  no está entre ninguno de los pares de puntos, luego el teorema 5.5 nos da que los cuatro puntos están sobre una misma circunferencia  $c$  tal que  $\Pi_c(O) = r^2$ , pero esto equivale claramente a que las circunferencias sean ortogonales. ■

De aquí deducimos otro hecho también muy útil:

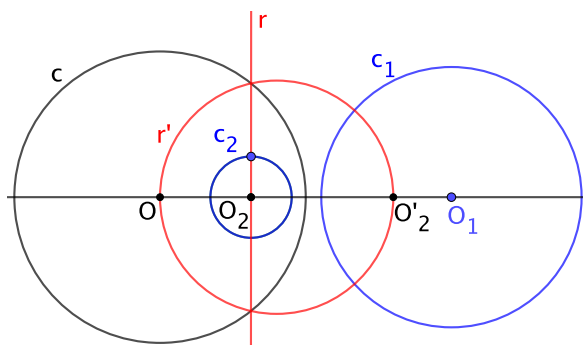
**Teorema 5.22** *Si dos circunferencias son ortogonales, los puntos de una son inversos respecto de la otra, y la inversa de una circunferencia respecto de la otra es ella misma.*

DEMOSTRACIÓN: Fijados dos puntos  $P$  y  $Q$  de una circunferencia  $c$  no alineados con el centro de la otra, el teorema anterior nos da que  $P, Q, P', Q'$  están sobre una misma circunferencia ortogonal a la otra, pero hay una única circunferencia ortogonal a una dada que pasa por dos puntos dados, luego la circunferencia que contiene a estos cuatro puntos tiene que ser la propia  $c$ . Así pues, cada inverso de un punto de  $c$  está en  $c$ , por lo que  $c$  es su propia circunferencia inversa. ■

Hemos probado que la inversa de una circunferencia que no pase por el centro de la inversión es otra circunferencia, pero no es cierto que su centro sea el inverso del centro de la circunferencia de partida. Usando el teorema anterior podemos localizar fácilmente dicho centro:

**Teorema 5.23** *Sea  $c$  una circunferencia de centro  $O$  y  $c_1$  otra circunferencia de centro  $O_1$  que no pase por  $O$ . Entonces, el centro  $O_2$  de la inversa  $c_2$  de  $c_1$  respecto de  $c$  es el inverso respecto de  $c$  del inverso de  $O$  respecto de  $c_1$ .*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos cualquier recta  $r$  que pase por  $O_2$ , pero no por  $O$  y su inversa  $r'$  respecto de  $c$ , que es una circunferencia que pasa por  $O$  y por  $O_2$ , que, según la prueba de 5.15, son puntos diametralmente opuestos.



Pero  $r$  es obviamente ortogonal a  $c_2$ , luego  $r'$  es ortogonal a  $c_1$ . Según el teorema 5.22, el inverso de  $O_2$  respecto de  $c_1$  tiene que estar en  $r'$ , y claramente tiene que ser el punto diametralmente opuesto, es decir,  $O$ . Por lo tanto, el inverso de  $O$  respecto de  $c_1$  es  $O_2'$ , y su inverso respecto de  $c$  es  $O_2$ . ■

Así pues, para calcular el centro de la circunferencia inversa es necesario calcular dos inversiones, luego para calcular la circunferencia inversa calculando su centro y uno de sus puntos necesitamos tres inversiones, igual que si calculamos la inversa invirtiendo tres puntos de la circunferencia de partida.

Conviene tener presente que el teorema 5.20 no nos da ninguna relación entre el ángulo  $\widehat{PQR}$  determinado por tres puntos no colineales y el ángulo  $\widehat{P'Q'R'}$  determinado por sus inversos respecto de una circunferencia dada. Ahora bien, esto no significa que no exista una relación sencilla entre ellos:

**Teorema 5.24** *Fijada una circunferencia y tres puntos arbitrarios  $P, Q, R$  distintos de su centro  $O$ , se cumple que*

$$\widehat{PQR} + \widehat{P'Q'R'} = \widehat{POR}.$$

DEMOSTRACIÓN: Por 5.14 (o trivialmente si  $P$  y  $Q$  están alineados con  $O$ ), tenemos que  $\widehat{PQO} = \widehat{OP'Q'}$  (nótese que la orientación es correcta). Teniendo en cuenta que los ángulos de un triángulo (con la orientación correcta) suman 0, o trivialmente si  $O, P, Q$  están alineados:

$$\widehat{PQO} = \widehat{OP'Q'} = \widehat{P'OQ'} + \widehat{OQ'P'}.$$

Igualmente:

$$\widehat{OQR} = \widehat{Q'R'O} = \widehat{R'Q'O} + \widehat{Q'OR'}.$$

Sumando:

$$\widehat{PQO} + \widehat{OQR} = \widehat{R'Q'O} + \widehat{OQ'P'} + \widehat{P'OQ'} + \widehat{Q'OR'},$$

y sumando los ángulos:

$$\widehat{PQR} = \widehat{R'Q'P'} + \widehat{P'OR'}.$$

Despejando llegamos a la fórmula del enunciado. ■

**Polos y polares** A la hora de calcular inversos de puntos son útiles los conceptos siguientes:

**Definición 5.25** Fijada una circunferencia de centro  $O$ , para cada  $P \neq O$ , la recta perpendicular a  $OP$  por el punto inverso  $P'$  se llama *recta polar* del punto  $P$ , que es una recta que no pasa por  $O$ .

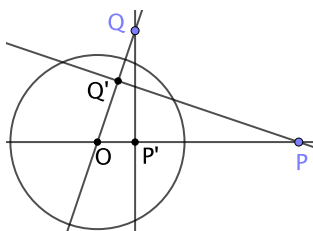
Recíprocamente, cada recta que no pasa por  $O$  es la recta polar de un único punto  $P$  (el inverso del pie de la perpendicular a la recta por  $O$ ), que recibe el nombre de *polo* de la recta.

Si  $P$  es un punto exterior a la circunferencia, su recta polar es la que pasa por los puntos de tangencia de las tangentes a la circunferencia que pasan por  $P$ , pues esta recta es perpendicular a  $OP$  y su intersección con  $OP$  es precisamente el inverso  $P'$ .

Si  $P$  está en la circunferencia, su inverso es él mismo, luego su recta polar es la tangente por  $P$  y, recíprocamente, el polo de una tangente es el punto de tangencia. Es el único caso en el que una recta pasa por su polo.

La utilidad de estos conceptos radica en gran parte en el teorema siguiente:

**Teorema 5.26** *Si un punto  $Q$  está en la recta polar de otro punto  $P$ , entonces  $P$  está en la recta polar de  $Q$ .*



DEMOSTRACIÓN: La polar de  $P$  es la perpendicular a  $OP$  que pasa por  $P'$ , luego el triángulo  $\widehat{OP'Q}$  es rectángulo (si  $Q = P'$  la conclusión es trivial, pues la polar de  $Q$  es por definición la perpendicular a  $OQ$  que pasa por  $P$ ). Por el teorema 5.21 tenemos que los puntos  $P, Q, P', Q'$  están sobre una circunferencia, luego  $\widehat{P'Q'Q} = \widehat{P'PQ'}$ . Así pues:

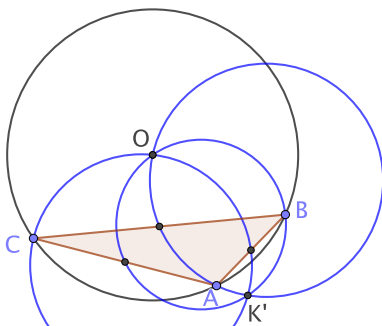
$$\widehat{P'QO} = \widehat{OPQ'}, \quad \widehat{Q'OP} = \widehat{QOP'},$$

luego los triángulos  $\widehat{OP'Q}$  y  $\widehat{OQ'P}$  son (inversamente) semejantes, luego el segundo también es rectángulo (en  $Q'$ ), lo que significa que  $Q'P$  es perpendicular a  $OQ' = OQ$ , luego  $Q'P$  es la recta polar de  $Q$ . ■

Esto hace que, por ejemplo, si varios puntos son colineales y la recta que los contiene no pasa por un punto  $O$ , sus polares respecto a cualquier circunferencia de centro  $O$  son concurrentes, pues todas ellas pasan por el polo de dicha recta. Recíprocamente, si unas rectas (que no pasen por  $O$ ) son concurrentes, sus polos son colineales, pues están todos en la polar del punto de concurrencia.

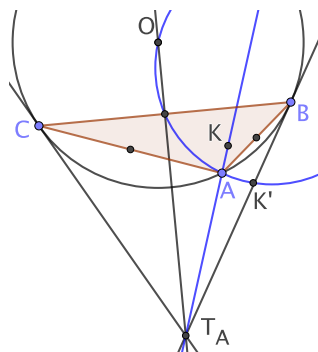
**Ejemplo** Terminamos con un ejemplo de cómo la inversión permite reducir un problema a otro más simple o ya resuelto:

**Teorema 5.27** *Dado un triángulo no rectángulo, las circunferencias que pasan por un vértice, el punto medio del lado opuesto y el circuncentro  $O$ , se cortan en un segundo punto  $K'$ .*



DEMOSTRACIÓN: Vamos a considerar la inversión respecto de la circunferencia circunscrita. Como las circunferencias pasan por el centro  $O$ , sus inversas son rectas que no pasan por  $O$ .

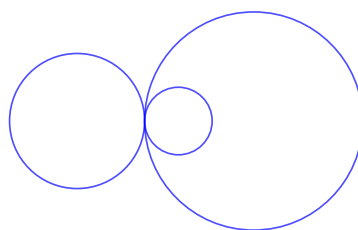
Consideremos, por ejemplo, la que pasa por  $A$ . Su inversa pasa por  $A' = A$  y por el inverso del punto medio del lado opuesto, que es el punto de corte  $T_A$  de las tangentes a la circunferencia por  $B$  y  $C$ . Por el teorema 4.26 la inversa es la simediana de  $A$ , que pasa por el punto simediano  $K$ , luego la circunferencia pasa por su inverso  $K'$ .



## 5.4 El problema de Apolonio

Ya estamos en condiciones de resolver fácilmente el problema de Apolonio planteado al comienzo de este capítulo, es decir, el problema de encontrar las circunferencias tangentes a tres circunferencias (distintas) dadas.

Un caso excepcional se da cuando las tres circunferencias son tangentes entre sí por un mismo punto:

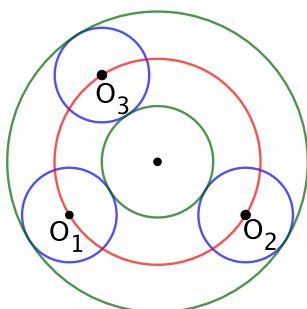


Es claro que en este caso el problema de Apolonio tiene infinitas soluciones, que son exactamente las circunferencias que pasan por el punto de tangencia con centro en la recta que pasa por los tres centros.

Vamos a ver que, excluyendo este caso, el problema de Apolonio tiene a lo sumo ocho soluciones, aunque pueden ser menos, según la disposición de las circunferencias dadas.

Para ilustrar una de las ideas en las que nos apoyaremos consideramos primero el caso en el que las tres circunferencias tienen el mismo radio:

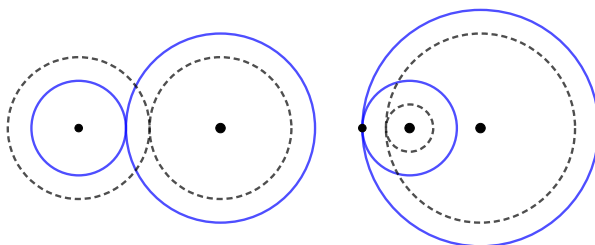




Si trazamos la circunferencia que pasa por los centros y luego trazamos las circunferencias con el mismo centro que la que hemos obtenido, pero con radios aumentados o disminuidos en el radio de las circunferencias dadas, obtenemos dos circunferencias tangentes, una es tangente exterior a las tres circunferencias dadas y otra es tangente interior.

Esto es consecuencia de un principio más general:

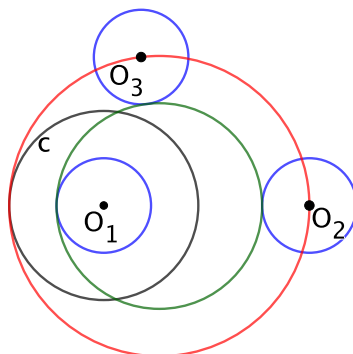
*Si dos circunferencias son tangentes exteriores y construimos circunferencias concéntricas aumentando el radio de una en cierta longitud y disminuyendo el de la otra en la misma longitud, las circunferencias resultantes siguen siendo tangentes exteriores. Si, en cambio, las circunferencias dadas son tangentes interiores y construimos circunferencias concéntricas aumentando o disminuyendo los radios de ambas en la misma longitud, las circunferencias resultantes también serán tangentes.*



Más aún, esto sigue siendo cierto si admitimos a los puntos como circunferencias de radio 0, entendiendo que una circunferencia es tangente a un punto si pasa por él.

La construcción anterior se basa en que si una circunferencia es tangente exterior a tres circunferencias de radio  $r$ , la circunferencia concéntrica cuyo radio es  $r$  unidades mayor será tangente a las circunferencias que resultan de reducir el radio de las otras tres en  $r$  unidades, es decir, será tangente a los tres centros de las circunferencias dadas o, lo que es lo mismo, será la circunferencia que pasa por los tres centros. Igualmente, una circunferencia tangente interior a las tres se convierte en la circunferencia que pasa por los centros si se reduce su radio en  $r$  unidades.

Pero las dos circunferencias que hemos encontrado no son las únicas posibles. Llamando  $c_i$  a la circunferencia dada de centro  $O_i$ , consideremos ahora el problema de encontrar una circunferencia que sea tangente interior a  $c_1$  y exterior a  $c_2$  y  $c_3$ .



La figura muestra la circunferencia que buscamos y, para encontrarla, observamos que, como es tangente interior a  $c_1$ , la tangencia se conserva si aumentamos a ambas el radio en una longitud igual al radio común  $r$  de las tres circunferencias dadas y, como la circunferencia tangente es tangente exterior a las otras dos, la circunferencia aumentada será tangente a las que resultan de reducir en  $r$  el radio de éstas, lo que las reduce a sus centros. En suma, el problema se reduce a encontrar una circunferencia que sea tangente interior a la circunferencia  $c$  que resulta de duplicar el radio de  $c_1$  y que pase por los centros  $O_2$  y  $O_3$ .

A continuación resolvemos este problema en general:

**Problema 5.5** *Encontrar las circunferencias que son tangentes a una dada y pasan por dos puntos dados que no estén en ella.*

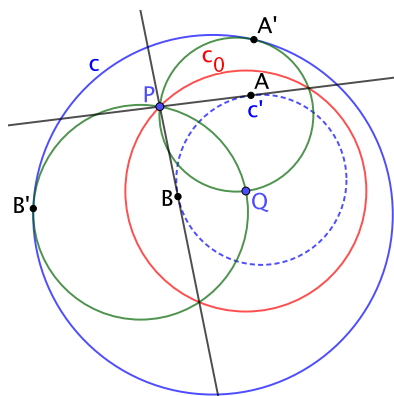
Notemos que una circunferencia tangente tiene todos sus puntos (menos el de tangencia) fuera de la circunferencia dada o todos dentro, luego el problema no tiene solución si los dos puntos dados son uno interior y otro exterior.

Llamamos  $P$  y  $Q$  a los puntos dados y  $c$  a la circunferencia dada.

1. Trazamos la circunferencia  $c_0$  de centro  $Q$  que pasa por  $P$ .
2. Calculamos la circunferencia inversa de  $c$  respecto de  $c_0$ .  
Como  $P$  y  $Q$  son ambos interiores o ambos exteriores a  $c$ , el teorema 5.17 implica que  $P$  es exterior a  $c'$ .
3. Trazamos las tangentes a  $c'$  desde  $P$ . Llamemos  $A$  y  $B$  a los puntos de tangencia.
4. Calculamos los inversos  $A'$  y  $B'$  de  $A$  y  $B$  respecto de  $c_0$ , que estarán sobre  $c$ .

5. Las circunferencias que pasan por  $P$ ,  $Q$  y uno de los puntos  $A'$  o  $B'$  son las circunferencias buscadas.

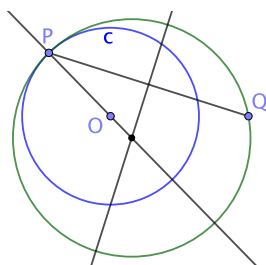
En efecto, como la recta  $PA$  es tangente a  $c'$  en  $A$ , la circunferencia inversa de  $PA$ , que pasa por  $P$ ,  $Q$  y  $A'$ , es tangente a  $c$  en  $A'$ , e igualmente con  $B'$ . (Si uno de los puntos  $A'$  o  $B'$  está en la recta  $PQ$ , entonces ésta es tangente a  $c$  y sólo hay una solución, a menos que admitamos la recta  $PQ$  como segunda “circunferencia”).



Notemos que las dos circunferencias (o rectas) que hemos obtenido son las únicas soluciones del problema, pues si  $C$  es una circunferencia (o recta) que pasa por  $P$  y  $Q$  tangente a  $c$ , entonces  $C'$  es una recta que pasa por  $P$  tangente a  $c'$ , luego tiene que ser una de las dos rectas que hemos construido y  $C$  tiene que ser una de las dos circunferencias (o rectas) que hemos construido. ■

Hay que contemplar también la posibilidad de que uno de los puntos dados esté en la circunferencia, de modo que se busca una circunferencia tangente a otra por un punto específico  $P$  y que pasa por un segundo punto  $Q$ :

**Problema 5.6** *Encontrar las circunferencias que son tangentes a una dada por un punto  $P$  y que pasan por otro punto  $Q$ .*



Este caso es muy simple y tiene solución única, pues el centro de la circunferencia buscada tiene que estar en la mediatriz del segmento  $\overline{PQ}$  y también en la recta  $OP$ . Si ambas fueran paralelas, eso significaría que  $PQ$  es perpendicular a  $OP$ , luego  $PQ$  es la recta tangente a  $c$  en  $P$ , y en este caso dicha recta es la “circunferencia” buscada. ■

Con esto estamos ya en condiciones de abordar el problema general. Consideramos tres circunferencias cualesquiera  $c_1, c_2, c_3$  de centros  $O_1, O_2, O_3$  y radios  $r_1 \geq r_2 \geq r_3$ .

Si una circunferencia  $c$  es tangente a las tres, consideramos la circunferencia  $c^*$  concéntrica con  $c$  que resulta de aumentar en  $r_3$  el radio de  $c$  si ésta es tangente exterior a  $c_3$  y de reducirlo en  $r_3$  si es tangente interior. Así  $c^*$  pasa por  $O_3$  y será tangente a las circunferencias  $c_1^*$  y  $c_2^*$  que resultan de aumentar o reducir los radios de  $c_1$  y  $c_2$  en la longitud  $r_3$  según el tipo de tangencia entre  $c$  y  $c_i$ .

Por lo tanto, obtendremos todas las circunferencias posibles  $c$  sin más que calcular todas las circunferencias que pasan por  $O_3$  y que son tangentes a las circunferencias  $c_1^*$  y  $c_2^*$  que resultan de aumentar o reducir los radios de  $c_1$  y  $c_2$  en la longitud  $r_3$ . Esto nos da cuatro casos posibles, según si aumentamos o reducimos los radios de  $c_1$  y  $c_2$ . Veremos que en cada caso hay a lo sumo dos circunferencias tangentes que, al sumar o restar  $r_3$  a su radio, dan lugar a circunferencias tangentes a las tres circunferencias dadas, luego el problema de Apolonio tiene un máximo de ocho soluciones en cada caso, como ya habíamos anticipado.

En general, el problema que tenemos que resolver es el de encontrar las circunferencias tangentes a dos circunferencias dadas  $c_1^*$  y  $c_2^*$  que pasan por un punto dado  $O_3$ , pero pueden darse casos excepcionales.

Por ejemplo, si reducimos  $c_1$  y  $c_2$  y los tres radios son iguales, el problema se reduce a encontrar la circunferencia que pasa por tres puntos, que tiene solución única (en este caso no puede haber dos centros iguales, o dos de las circunferencias dadas serían la misma) y a su vez puede dar lugar a un máximo de dos soluciones al aumentar y disminuir su radio (pero si el radio de la circunferencia obtenida es menor que  $r_3$  no se podrá reducir el radio y sólo habrá una solución).

Si se da el caso  $r_1 > r_2 = r_3$  y reducimos  $c_2$ , entonces el problema resulta ser el de encontrar las circunferencias tangentes a la circunferencia  $c_1^*$  que pasan por los puntos  $O_2$  y  $O_3$ .

Hemos visto que en el caso en que  $O_2$  y  $O_3$  sean ambos interiores o ambos exteriores a  $c_1^*$  hay dos soluciones, una tangente exterior y otra interior, que darán lugar a dos soluciones del problema de Apolonio (no a cuatro), porque la circunferencia tangente exterior deberá ampliarse (y no reducirse) para hacerse tangente a  $c_1$  si hemos reducido  $c_1$  (y al revés si lo hemos aumentado), mientras que con la interior sucederá justo lo contrario. Si uno de los dos centros resulta estar sobre  $c_1^*$ , hemos visto que hay a lo sumo una solución que dará lugar a lo sumo a una única solución del problema de Apolonio. Por último, si  $O_2$  y  $O_3$  están ambos sobre  $c_1^*$  no hay solución a menos que consideremos que una circunferencia es tangente a sí misma.

Pasamos ahora al caso genérico en el que tenemos dos circunferencias y un punto:

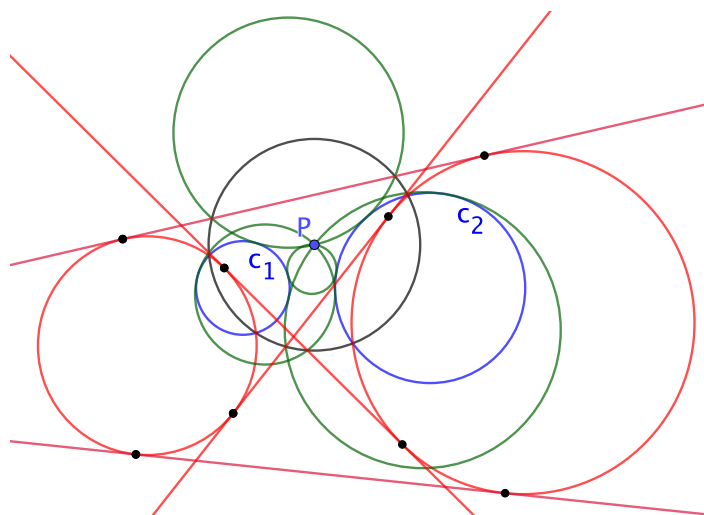
**Problema 5.7** *Construir las circunferencias tangentes a dos circunferencias dadas que pasan por un punto dado que no esté en ellas.*

1. Trazamos cualquier circunferencia de centro  $P$ .

2. Calculamos las circunferencias inversas de las dos circunferencias dadas.
3. Calculamos las tangentes comunes a estas dos circunferencias (véase el teorema 3.27).
4. Las inversas de las tangentes comunes son las circunferencias buscadas.

En efecto, la inversa de una recta es una circunferencia que pasa por el centro  $P$  de la inversión, y si la recta es tangente a las dos circunferencias inversas, su inversa será tangente a las dos circunferencias dadas.

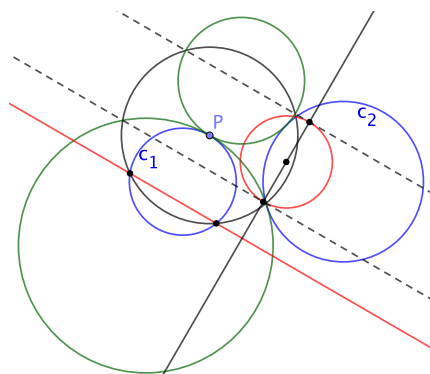
Recíprocamente, es claro que si una circunferencia es tangente a las dos circunferencias dadas y pasa por  $P$ , su inversa será una recta tangente a las inversas de las dos circunferencias dadas, luego la circunferencia inicial será una de las que hemos construido.



Vemos así que el máximo número posible de circunferencias es cuatro, pero pueden ser menos según el número de tangentes comunes que admitan las circunferencias inversas, que pueden variar entre 0 y 4. ■

**Nota** La construcción precedente vale esencialmente igual en el caso en que el punto  $P$  está en una de las circunferencias (pero no en la otra). Notemos que si las circunferencias son tangentes no hay solución, pues una circunferencia no puede ser tangente a otras dos y pasar por otro punto de una de ellas.

La diferencia ahora es que la inversa de una de las circunferencias es una recta, por lo que tenemos que calcular las “circunferencias tangentes a una recta y a una circunferencia que pasan por el punto infinito”. Esto se traduce en que necesitamos las rectas tangentes a la circunferencia que son paralelas a la recta. En efecto, es fácil ver que las inversas de estas paralelas resultan ser tangentes a  $c_1$  (y por supuesto a  $c_2$ ) y pasan por  $P$ . Notemos que no puede suceder que una de las paralelas sea la propia recta, porque entonces  $c_1$  y  $c_2$  serían tangentes. Así pues, en este caso hay dos soluciones.



Si  $P$  está en las dos circunferencias, pero no es un punto de tangencia, es claro que no hay solución, mientras que si ambas son tangentes en  $P$ , entonces hay infinitas soluciones. ■

Con esto ya tenemos resuelto el problema de Apolonio. Para probar que el número máximo posible de soluciones es ocho, sólo falta observar que, si en uno de los cuatro casos posibles (por ejemplo, aumentar  $c_1$  y reducir  $c_2$ ) estamos en el caso genérico en el que obtenemos cuatro circunferencias tangentes a las circunferencias auxiliares  $c_1^*$  y  $c_2^*$ , sólo dos de las cuatro proporcionarán soluciones al problema de Apolonio, por lo que el número máximo de soluciones será, en efecto, de ocho.

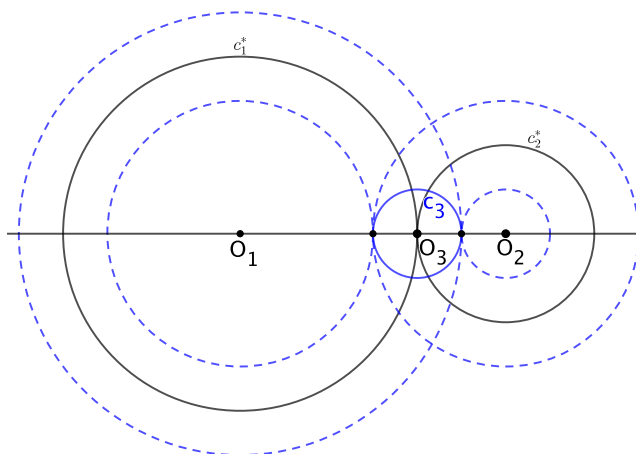
Esto se debe a que las cuatro rectas tangentes comunes a dos circunferencias son de dos tipos: hay dos que dejan a ambas circunferencias en el mismo semiplano y otras dos que dejan a cada circunferencia en un semiplano distinto. Esto se traduce en que las inversas de las dos primeras dan lugar a circunferencias que son tangentes interiores a  $c_1^*$  y  $c_2^*$  o bien tangentes exteriores a ambas. Puede ser que las dos rectas se inviertan en circunferencias tangentes interiores a ambas, las dos en tangentes exteriores a ambas, o una en tangentes interiores y otra en tangentes exteriores, pero el tipo de tangencia de cada circunferencia obtenida a partir de ellas será el mismo para  $c_1^*$  y  $c_2^*$ . En cambio, las otras dos rectas dan lugar a circunferencias cuya tangencia con  $c_1^*$  es del tipo opuesto a su tangencia con  $c_2^*$ .

Por otro lado, si, por ejemplo, hemos aumentado  $c_1$  y reducido  $c_2$  y  $C$  es una de las cuatro circunferencias tangentes a  $c_1^*$  y  $c_2^*$  que hemos obtenido, la circunferencia que se obtiene de  $C$  aumentando su radio sólo nos servirá si es tangente interior a  $c_1^*$  y tangente exterior a  $c_2^*$ , mientras que la circunferencia que resulta de reducir su radio sólo nos servirá si es tangente exterior a  $c_1^*$  y tangente interior a  $c_2^*$ , es decir, que necesitamos que  $C$  sea una de las dos circunferencias con tipo de tangencia desigual.

En general, en los casos en los que aumentamos o disminuimos las dos circunferencias  $c_1$  y  $c_2$ , sólo nos sirven las dos circunferencias con el mismo tipo de tangencia con  $c_1^*$  y  $c_2^*$ , mientras que si hemos aumentado una y disminuido la otra, sólo nos servirán las que tienen diferente tipo de tangencia con cada una. En cualquier caso, sólo sirven dos de las cuatro circunferencias tangentes que obtenemos.

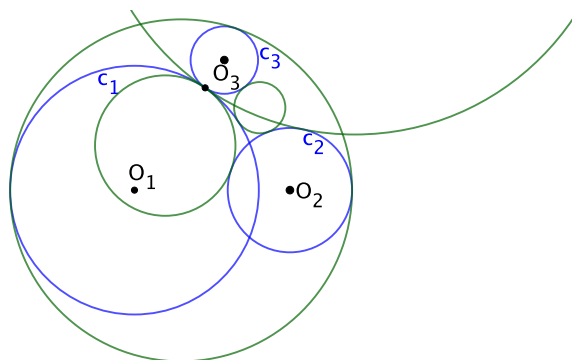
Lo último que falta por observar es que el sólo hay infinitas soluciones en el caso excepcional que hemos señalado al principio en el que las tres circunferencias dadas son tangentes por un mismo punto.

Ahora bien, según lo que hemos visto, para que haya infinitas soluciones es necesario que  $c_1^*$  y  $c_2^*$  son tangentes precisamente por el punto  $O_3$ . La figura muestra las posibilidades si la tangencia es exterior (si es interior se razona análogamente):

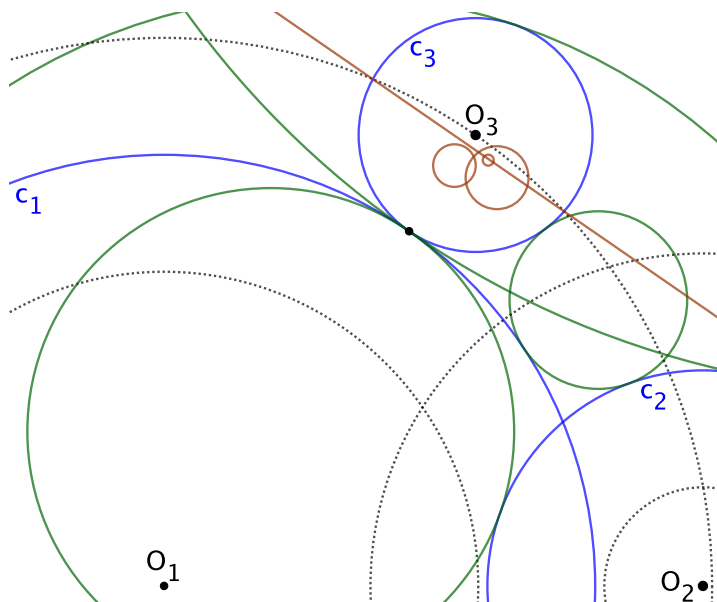


Vemos que si  $c_1^*$  y  $c_2^*$  se obtienen aumentando  $c_1$  y  $c_2$  o bien reduciendo ambos, entonces ninguna de las infinitas circunferencias tangentes a  $c_1^*$  y  $c_2^*$  proporciona una solución para el problema de Apolonio, pues para hacerla tangente a una de las circunferencias  $c_1$  o  $c_2$  habría que aumentar su radio y para hacerla tangente a la otra habría que disminuirlo. En cambio, si  $c_1^*$  y  $c_2^*$  se obtienen aumentando una de las circunferencias dadas y reduciendo la otra, estamos en el caso excepcional en el que las tres son tangentes por un mismo punto.

**Ejemplo** La figura siguiente muestra un problema de Apolonio en el que  $c_1$  y  $c_2$  son secantes,  $c_2$  y  $c_3$  son disjuntas y  $c_1$  y  $c_3$  son tangentes. El problema tiene exactamente cuatro soluciones, que están también representadas en la figura.



La figura siguiente resume el proceso con el que han sido obtenidas:



Vemos —en trazo discontinuo— las dos posibles  $c_1^*$  y  $c_2^*$  y sus inversas respecto de  $c_3$ . Las inversas de las dos posibles  $c_2^*$  son las dos circunferencias concéntricas situadas a la derecha, dentro de  $c_3$ , la inversa de la  $c_1^*$  que resulta de reducir el radio es la tercera circunferencia, a la izquierda, mientras que la  $c_1^*$  que resulta de aumentar el radio pasa por  $O_3$ , y su inversa es una recta.

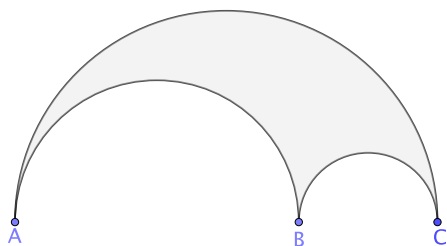
La recta tiene dos “rectas tangentes” con cada una de las circunferencias concéntricas, pero de cada par sólo una da lugar a una circunferencia inversa que se convierte en una solución cuando se le aumenta o reduce el radio. Las dos circunferencias así obtenidas son las que pasan por el punto de tangencia de  $c_1$  y  $c_3$ .

Cuando reducimos los dos radios, al invertir obtenemos dos circunferencias disjuntas, de las que nos aprovechan las dos tangentes comunes que las dejan en el mismo semiplano, y que dan lugar a las otras dos soluciones que muestra la figura. En cambio, cuando reducimos  $c_1$  y aumentamos  $c_2$  obtenemos circunferencias inversas secantes, por lo que carecen de tangentes de las que dejan cada circunferencia en un semiplano, que son las que nos aprovecharían, por lo que en ese caso no obtenemos ninguna solución. ■

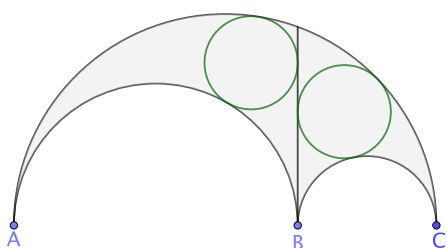
## 5.5 El arbelo

Arquímedes llamó *arbelo* (cuchillo de zapatero) a una figura limitada por tres semicircunferencias como muestra la figura siguiente (si tomamos  $B$  igual al punto medio de  $A$  y  $C$  y ponemos un mango en  $B$  obtenemos la forma aproximada del cuchillo de zapatero que da nombre a la figura):

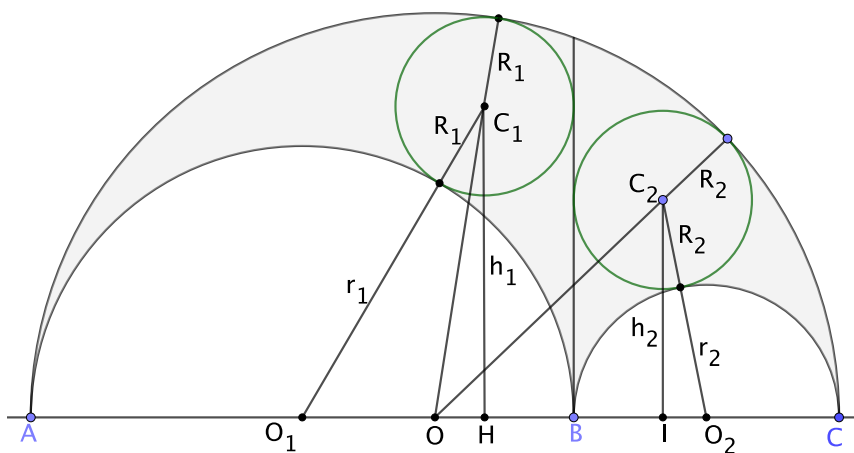




Arquímedes demostró, entre otras cosas, que las dos circunferencias inscritas en un arbelo como muestra la figura son iguales:



Para probarlo llamamos  $R_1$  y  $R_2$  a los radios de las circunferencias inscritas y  $r = r_1 + r_2$  al radio del semicírculo mayor, que es la suma de los radios de los dos menores.



Así  $\overline{BO_1} = r_1 + r_2 - 2r_2 = r_1 - r_2$ , y  $\overline{HO_1} = R_1 - (r_1 - r_2)$ . Por el teorema de Pitágoras:

$$\overline{O_2C_1}^2 - \overline{HO_2}^2 = h_1^2 = \overline{O_1C_1}^2 - \overline{HO_1}^2,$$

luego

$$(r_1 + R_1)^2 - (r_1 - R_1)^2 = (r_1 + r_2 - R_1)^2 - (R_1 - r_1 + r_2)^2.$$

Desarrollando:

$$r_1 R_1 = r_1 r_2 - r_2 R_1,$$

luego

$$R_1 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Para la segunda circunferencia la situación es similar. Ahora tenemos que

$$\overline{IO_1} = R_2 + r_1 - r_2,$$

e igualmente

$$\overline{O_3 C_2}^2 - \overline{IO_3}^2 = \overline{O_1 C_2}^2 - \overline{IO_1}^2,$$

lo que nos da

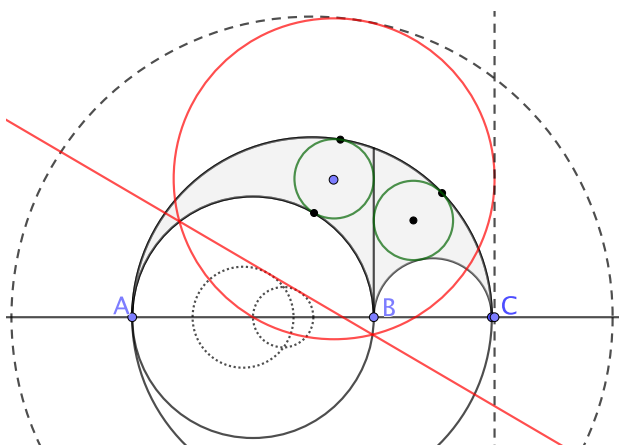
$$(r_2 + R_2)^2 - (r_2 - R_2)^2 = (r_1 + r_2 - R_2)^2 - (R_2 + r_1 - r_2)^2,$$

y al despejar se llega igualmente a que

$$R_2 = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

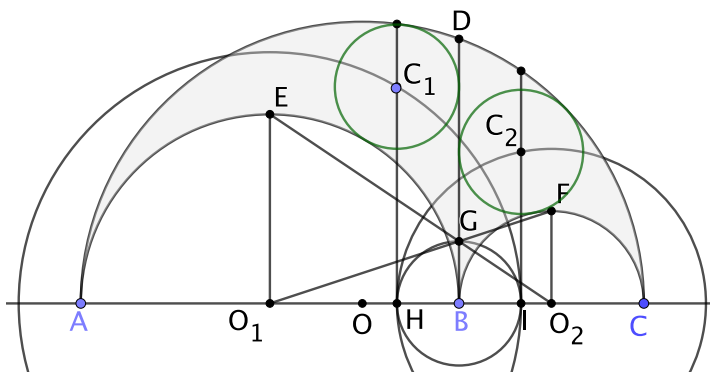
Las dos circunferencias cuyos radios acabamos de calcular se conocen como *circunferencias gemelas de Arquímedes*.

Pueden construirse adaptando ligeramente la solución que hemos dado al problema de Apolonio. La única diferencia es que ahora hemos de construir una circunferencia tangente a dos circunferencias y una recta, pero eso no supone ningún cambio esencial. Por ejemplo, para calcular la de la izquierda podemos reducir  $c_2$  a un punto, aumentar el radio de  $c_1$  en  $r_2$  y mover la recta vertical en  $B$  hacia la derecha  $r_2$  unidades. Así el problema se reduce a calcular una circunferencia tangente a una circunferencia y a una recta que pase por un punto.



Sin embargo, conociendo el radio de las circunferencias, podemos construirlas con un procedimiento específico más sencillo:

**Problema 5.8** Construir las circunferencias gemelas de un arbelo.



1. Trazamos los radios  $\overline{O_2E}$ ,  $\overline{O_3F}$  de los semicírculos menores perpendiculares a la recta base del arbelo.
2. Trazamos los segmentos  $\overline{EO_3}$  y  $\overline{FO_2}$ .

Estos segmentos cortan a  $BD$  en un mismo punto  $G$  que cumple

$$\overline{BG} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = R.$$

(basta aplicar el teorema de Tales a los triángulos  $\widehat{FO_2O_3}$  y  $\widehat{EO_3O_2}$ ).

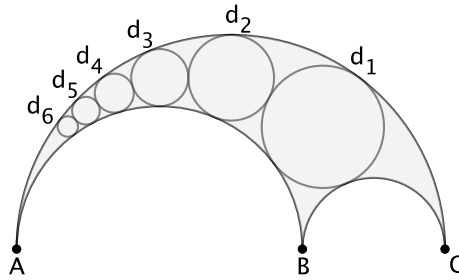
3. Trazamos la circunferencia de centro  $B$  que pasa por  $G$ .
4. Trazamos las perpendiculares a  $O_2O_3$  por  $H$  e  $I$ .  
En estas rectas tienen que estar los centros de las circunferencias gemelas.
5. Trazamos la circunferencia de centro  $O_2$  que pasa por  $I$  y la de centro  $O_3$  que pasa por  $H$ , que cortarán a las perpendiculares del paso precedente en puntos  $C_1$  y  $C_2$ .

Los radios de estas circunferencias son  $r_1 + R$  y  $r_2 + R$ , respectivamente, donde  $R$  es el radio de las circunferencias gemelas, luego sus centros estar en ellas, luego tienen que ser  $C_1$  y  $C_2$ .

6. Trazamos las circunferencias de centros  $C_1$  y  $C_2$  y radio  $R = \overline{BG}$ .

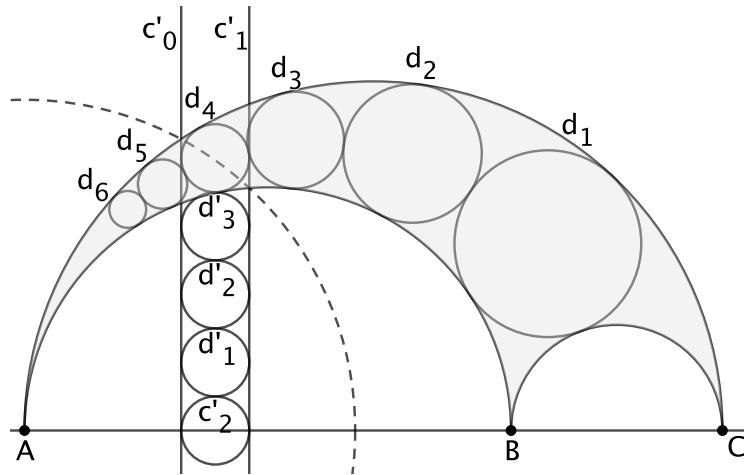
Éstas son las circunferencias gemelas. ■

Pappus de Alejandría estudió la cadena de circunferencias tangentes que se obtienen en un arbelo según muestra la figura siguiente:



Entre otras cosas, probó que si la circunferencia  $n$ -sima  $d_n$  tiene radio  $R_n$  y su centro está a una distancia  $h_n$  de la recta base  $AC$ , entonces  $h_n = 2nR_n$ .

Este hecho se vuelve trivial si consideramos una inversión, concretamente respecto de la circunferencia de centro  $A$  que es ortogonal a  $d_n$  (la que pasa por los puntos de tangencia de las tangentes a  $d_n$  por  $A$ ):



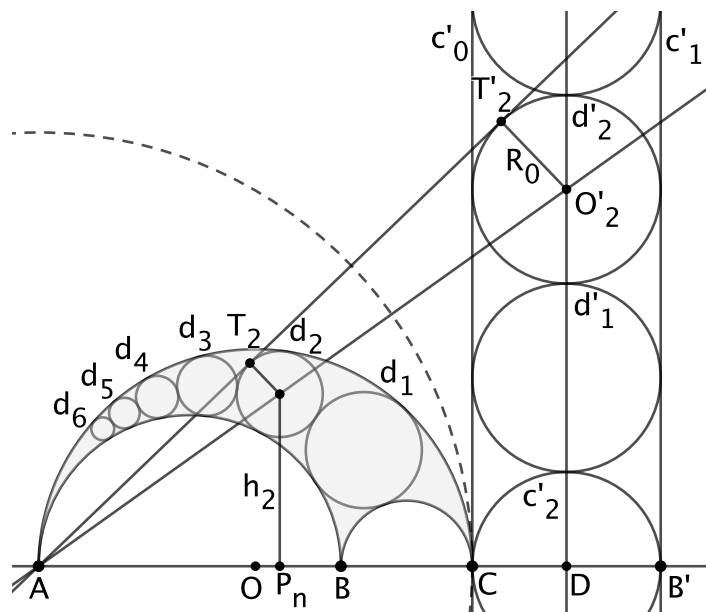
Así la inversa de  $d_n$  es ella misma, mientras que las circunferencias  $c_0$  y  $c_1$  que forman el arbelo se transforman en rectas perpendiculares a  $AC$ , y tienen que seguir siendo tangentes a  $d_n$ , lo cual las determina por completo. Ahora, la inversa de  $d_{n-1}$  tiene que ser una circunferencia tangente a  $d_4$  y a ambas rectas, luego tiene que ser la circunferencia que muestra la figura, e igualmente con las anteriores hasta llegar a  $d'_1$  y finalmente a la inversa de  $c_2$ . Como todas tienen radio  $R_n$ , ahora es inmediato que  $h_n = 2nR_n$ .

Si en lugar de partir de una circunferencia  $d_n$  partimos de  $c_2$ , obtenemos una forma de construir la cadena de Pappus por inversión de una cadena de circunferencias iguales. En realidad es un poco más cómodo invertir respecto de la circunferencia de centro  $A$  que pasa por  $C$ . La situación entonces es la que muestra la figura siguiente.

La circunferencia mayor del arbelo  $c_0$  pasa por el centro de inversión  $A$ , luego se transforma en una recta que pasa por  $C' = C$ , concretamente en la perpendicular a  $AC$  por  $C$ . Similarmente, la circunferencia menor del arbelo

que pasa por  $A$  y  $B$  se transforma en la recta perpendicular a  $AC$  que pasa por el punto inverso  $B'$ . En cambio, la circunferencia del arbelo que pasa por  $B$  y  $C$  no pasa por el centro de la inversión, luego se transforma en una circunferencia que pasa por  $C' = C$  y por  $B'$ . Como tiene que ser ortogonal a las inversas de las dos anteriores, tiene que ser concretamente la circunferencia de diámetro  $\overline{CB'}$ .

Ahora bien, si trasladamos esta circunferencia  $c'_2$  para obtener una sucesión de circunferencias  $c'_n$ , cada cual tangente a las dos rectas  $c'_0$  y  $c'_1$ , así como a la circunferencia anterior y a la siguiente (empezando por  $d'_0 = c'_2$ ) obtenemos una sucesión de circunferencias cuyas inversas forman precisamente la cadena de circunferencias de Pappus.



En particular, ahora es inmediato que los centros de las circunferencias de la cadena están sobre una misma circunferencia, la inversa de la recta perpendicular a  $AC$  por  $D$ .

Recordemos que el centro de  $d_n$  no es el inverso del de  $c'_n$ , pero sí que es cierto que están alineados con  $A$ . Por otra parte, una tangente a  $d_n$  por  $A$  es su propia inversa, y la inversa tiene que ser tangente a  $d'_n$ , luego se cumple, como muestra la figura, que ambas circunferencias comparten sus tangentes por  $A$ . Si observamos por último que  $\overline{DO'_n} = 2n\overline{CD} = 2nR_0$ , aplicando dos veces el teorema de Tales obtenemos que

$$\frac{h_n}{2nR_0} = \frac{R_n}{R_0},$$

con lo que tenemos otra prueba de que  $h_n = 2nR_n$ , pero podemos obtener más información. Por la definición de inversión,

$$\overline{AB'} = \frac{2\overline{AC}^2}{\overline{AB}} = \frac{4r^2}{2r_1},$$

luego

$$\overline{AD} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{AB'}) = r + \frac{r^2}{r_1} = r\left(1 + \frac{r_1 + r_2}{r_1}\right) = r(2 + r_2/r_1),$$

luego  $R_0 = \overline{AD} - \overline{AC} = rr_2/r_1$ . Conviene llamar  $k = r_2/r_1$ . Entonces

$$R_0 = rk.$$

Los puntos  $T_n$  y  $T'_n$  son mutuamente inversos, luego, por la definición de inversión:

$$\overline{AT_n} \cdot \overline{AT'_n} = (2r)^2$$

y por el teorema de Tales

$$\frac{\overline{AT'_n}}{\overline{AT_n}} = \frac{R_0}{R_n} = \frac{rk}{R_n},$$

luego

$$\overline{AT_n}^{-2} = \frac{4r^3k}{R_n}.$$

Por otro lado, por el teorema de Pitágoras,

$$\overline{AT'_n}^2 = \overline{AO'_n}^2 - R_0^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DO'_n}^2 - R_0^2 = (2r + kr)^2 + (2nr)^2 - (kr)^2.$$

Concluimos que

$$R_n = \frac{4rk}{(2 + k)^2 + 4n^2k^2 - k^2},$$

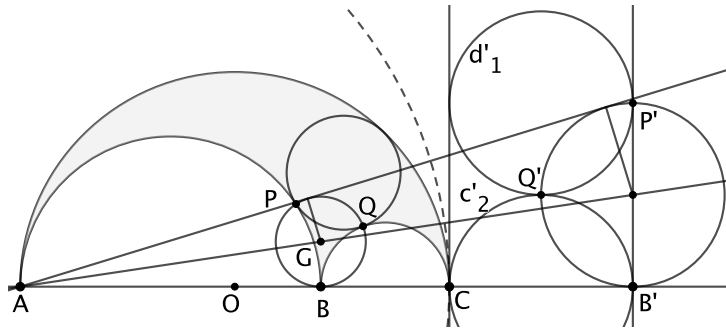
que se simplifica hasta la expresión siguiente para el radio enésimo:

$$R_n = \frac{rk}{n^2k^2 + k + 1}.$$

Arquímedes probó esta fórmula para  $n = 1$ , es decir:

$$R_1 = \frac{rr_1r_2}{r_2^2 + r_1r_2 + r_1^2}.$$

En 1954 un dentista, esperantista y matemático aficionado llamado Leon Bankoff se fijó en la circunferencia que pasa por los puntos de tangencia  $P$  y  $Q$  y por el punto  $B$ , y calculó su radio:



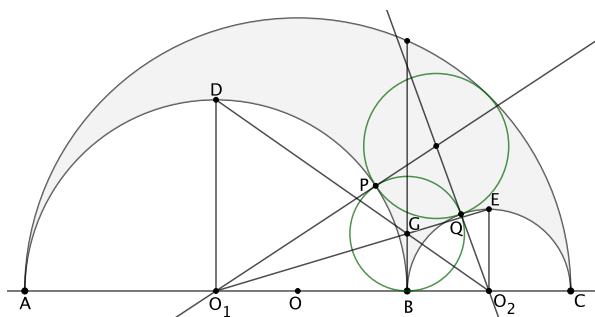
Una forma de hacerlo es observar que la circunferencia inversa tiene que pasar por  $B'$  y por los puntos de tangencia  $P'$  y  $Q'$  con la recta y la circunferencia inversas de  $c_1$  y  $c_2$ , de donde se sigue inmediatamente que la circunferencia inversa tiene radio  $R_0$ , como todas las inversas de las circunferencias de la cadena de Pappus. Si llamamos  $R$  al radio de la circunferencia de Bankoff, el teorema de Tales nos da que

$$\frac{R}{R_0} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{2r_1}{4r^2/(2r_1)} = \frac{r_1^2}{r^2}$$

Por lo tanto,

$$R = \frac{r_1^2}{r^2} r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Así pues, la circunferencia de Bankoff es igual a las circunferencias gemelas de Arquímedes. Notemos que esto implica que el centro  $G$  de la circunferencia de Bankoff es el mismo punto  $G$  que habíamos construido en el problema 5.8. Esto nos da una forma fácil de construirlo, sin necesidad de inversiones, y a su vez, a partir de los puntos  $P$  y  $Q$ , podemos construir la circunferencia tangente  $d_1$  también sin necesidad de inversiones, como muestra la figura siguiente:



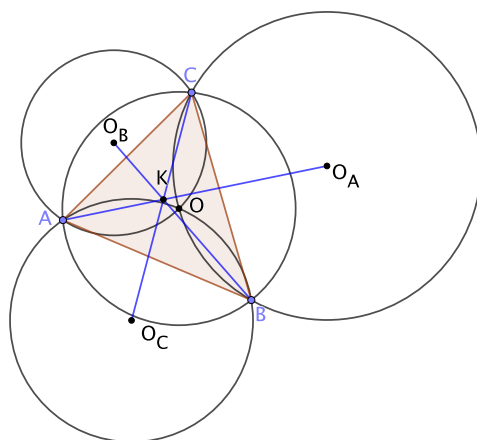
Bankoff creyó haber probado que las circunferencias gemelas de Arquímedes no eran dos, sino tres, sin embargo, él mismo y muchos otros descubrieron a partir de ahí decenas de circunferencias construidas de forma natural a partir de un arbelos que tienen el mismo radio que las circunferencias gemelas. Hoy se conocen como *circunferencias arquimedianas*.

Dejamos aquí el estudio del arbelo, si bien podríamos llenar páginas y más páginas con sus propiedades.

## 5.6 El teorema de Kosnita

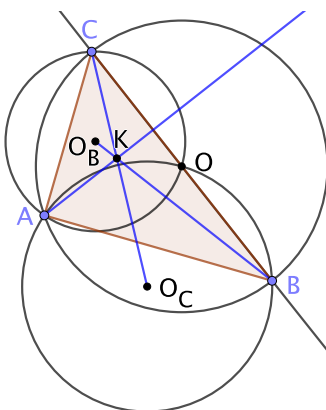
En esta sección usaremos la inversión para demostrar el teorema siguiente:

**Teorema 5.28 (Kosnita)** *En un triángulo no rectángulo de circuncentro  $O$ , las rectas que unen cada vértice con el centro de la circunferencia que pasa por  $O$  y los otros dos vértices concurren en un punto  $K$ .*



El punto  $K$  recibe el nombre de *punto de Kosnita* del triángulo dado.

Si el triángulo es rectángulo, por ejemplo con ángulo recto  $\hat{A}$ , el circuncentro  $O_A$  está sobre la recta  $BC$ , por lo que no está definida la circunferencia correspondiente, pero si entendemos que dicha circunferencia es la recta  $BC$  y que su centro es el punto infinito situado en la dirección perpendicular a ella, entonces el teorema de Kosnita sigue siendo cierto, en el sentido si definimos  $K$  como la intersección de  $BO_B$  y  $CO_C$  y entonces sucede que  $AK$  es perpendicular a  $BC$ .



En realidad vamos a demostrar una versión fuerte del teorema de Kosnita, pues probaremos que el punto de Kosnita  $K$  es precisamente el conjugado isogonal del centro  $N$  de la circunferencia de los nueve puntos.

Empezamos recordando que el circuncentro  $O$  de un triángulo  $\widehat{ABC}$  es el ortocentro de su triángulo medial  $M_A M_B M_C$ , y éste se transforma en  $\widehat{ABC}$  mediante una homotecia de razón  $-2$ , luego  $\overline{AH} = 2\overline{OM_A}$ .

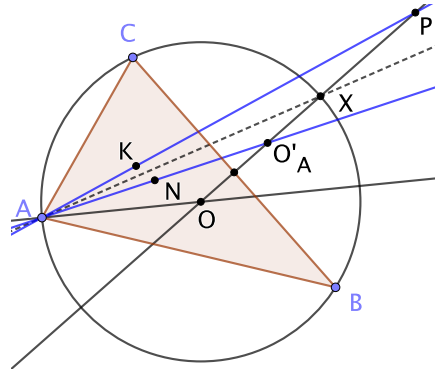
Notemos que  $O = M_A$  si y sólo si el ángulo  $\hat{A}$  es recto. En caso contrario, llamamos  $O'_A$  al simétrico de  $O$  respecto de  $BC$ , y así  $\overline{AH} = \overline{OO'_A}$ . Además, la recta  $OO'_A$  es paralela a  $AH$ , pues ambas son perpendiculares a  $BC$ . Si no son





pero como  $K$  y  $N$  son conjugados isogonales, se cumple que  $\widehat{NAX} = \widehat{XAP}$ , luego

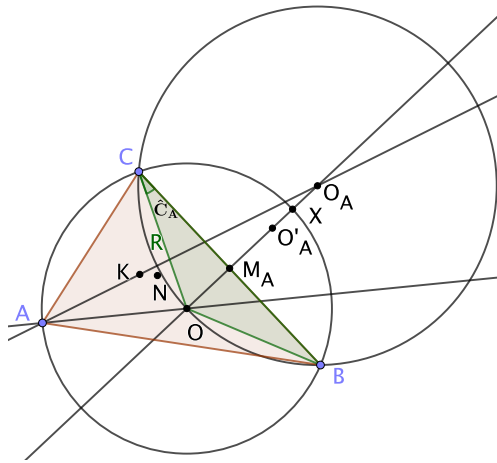
$$\widehat{OAO'_A} = \widehat{OAN} = \widehat{APX} = \widehat{APO}.$$



Como también, trivialmente,  $\widehat{AOO'_A} = \widehat{AOP}$ , concluimos que el triángulo  $\widehat{AOO'_A}$  es (inversamente) semejante a  $\widehat{POA}$ , y por consiguiente

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OO'_A}}{\overline{OA}},$$

luego, si  $R$  es el circunradio del triángulo,  $\overline{OP} \cdot \overline{OO'_A} = R^2$ , y vemos así que  $P$  es el inverso de  $O'_A$  respecto de la circunferencia circunscrita.



Ahora aplicamos el teorema de los senos al triángulo  $\widehat{OBC}$ , de modo que si  $R_A$  es su circunradio, se cumple que

$$\frac{R}{\text{sen } \hat{C}_A} = 2R_A$$

o, equivalentemente,

$$\overline{OO_A} = R_A = \frac{R}{2 \operatorname{sen} \hat{C}_A}.$$

Si  $Q$  es el inverso de  $O_A$  respecto de la circunferencia circunscrita del triángulo de partida, se cumple que

$$R^2 = \overline{OO_A} \cdot \overline{OQ} = \frac{R}{2 \operatorname{sen} \hat{C}_A} \overline{OQ}$$

luego

$$\overline{OQ} = 2R \operatorname{sen} \hat{C}_A = 2\overline{OM_A},$$

luego el inverso  $Q$  de  $O_A$  no es sino el punto  $O'_A$  simétrico de  $O$  respecto de  $BC$ , y hemos visto que su inverso es el punto  $P$  de intersección entre  $AK$  y la mediatriz  $OO_A$ . Por consiguiente,  $P = O_A$  y así hemos probado que  $AK$  pasa por  $O_A$ .

En resumen, hemos probado que  $AK$  pasa por  $O_A$  si  $O$  no está en  $BC$  (es decir, si  $\hat{A}$  no es un ángulo recto), y que  $AK$  es perpendicular a  $BC$  en caso contrario. Como esto vale para los tres vértices, podemos concluir que  $K$  es el punto de Kosnita del triángulo. ■

## 5.7 Sistemas coaxiales

El teorema 5.8 prueba que los ejes radicales de cada par de tres circunferencias con centros no colineales son coincidentes. Ahora vamos a estudiar el caso de tres o más circunferencias con centros colineales. En este caso, los ejes radicales de cada par de ellas son paralelos, pero también pueden ser coincidentes.

**Definición 5.29** Dadas dos circunferencias con centros distintos, el *sistema coaxial* definido por ellas es el conjunto de todas las circunferencias que determinan con cualquiera de las dos el mismo eje radical.

Puesto que el eje radical de dos circunferencias no concéntricas está en la recta que une sus centros, es claro que todas las circunferencias de un mismo sistema coaxial tienen que estar sobre la recta determinada por los centros de dos cualesquiera de ellas. Dicha recta se llama *recta de centros* del sistema.

Consideremos dos circunferencias  $c_1$  y  $c_2$  de centros distintos  $O_1$  y  $O_2$  y sea  $L$  la intersección de su eje radical  $e$  con la recta  $O_1O_2$ .

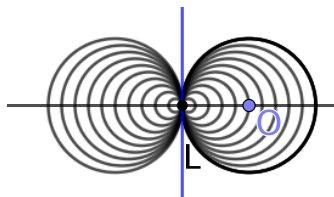
Observemos que, para que otra circunferencia  $c$  esté en el sistema coaxial definido por ellas, basta con que el eje radical de  $c$  y  $c_1$  sea  $e$ , pues esto ya implica que el eje radical de  $c$  y  $c_2$  también es  $e$ . En efecto, un punto  $P$  en  $e$  cumple  $\Pi_1(P) = \Pi_2(P)$  y también  $\Pi_c(P) = \Pi_1(P)$ , luego  $\Pi_2(P) = \Pi_c(P)$  y, por lo tanto, está en el eje radical de  $c_1$  y  $c$ .

Así pues, el sistema coaxial de dos circunferencias está completamente determinado por una de ellas  $c_1$  y el eje común  $e$ . Más aún, vamos a ver que está determinado por  $c_1$ , la recta de centros y el punto  $L$  en que ésta corta al eje.

En efecto, el centro  $O$  de una circunferencia  $c$  del sistema coaxial de  $c_1$  y  $c_2$  tiene que estar sobre la recta de centros  $s = O_1O_2$ . Además, tiene que ser  $\Pi_1(L) = \Pi_c(L)$  y, recíprocamente, si  $c$  es una circunferencia con centro  $O$  en  $s$  y se cumple  $\Pi_1(L) = \Pi_c(L)$ , en la prueba del teorema 5.6 hemos visto que todos los puntos de la recta perpendicular a  $O_1O_2$  por  $L$  cumplen lo mismo, luego dicha recta (que es  $e$ ) es el eje radical. En resumen:

*Dadas dos circunferencias con centros respectivos  $O_1$  y  $O_2$  y eje radical  $e$ , si  $L$  es la intersección de  $e$  con  $O_1O_2$ , las circunferencias de su sistema coaxial son las circunferencias  $c$  con centro  $O$  en la recta  $O_1O_2$  y radio  $r$  tales que  $\Pi_c(L) = \overline{OL}^2 - r^2 = \Pi_1(L)$ .*

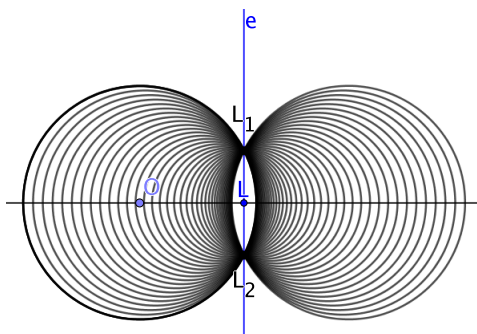
Consideremos en primer lugar el caso en que  $\Pi_1(L) = 0$ , de modo que todas las circunferencias del sistema cumplen  $\Pi_c(L) = 0$ . Esto se interpreta como que el eje común  $e$  es tangente por  $L$  a todas las circunferencias del sistema. Como, recíprocamente, cualquier par de circunferencias tangentes a  $e$  por  $L$  tienen eje radical  $e$ , concluimos que en este caso el sistema coaxial está formado por todas las circunferencias tangentes a  $e$  por el punto  $L$ :



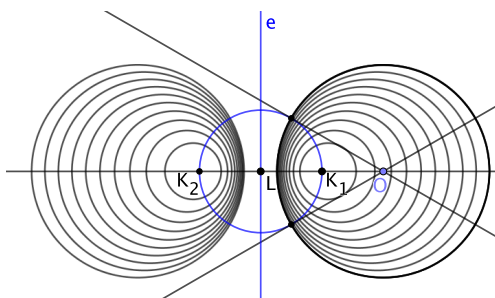
En particular vemos que el sistema contiene exactamente una circunferencia con centro en cada punto  $O$  de la recta de centros (la perpendicular a  $e$  por  $L$ ). La única circunferencia de radio 0 en el sistema es el propio punto  $L$ , que recibe el nombre de *punto límite* del sistema.

Ahora consideramos el caso en que  $\Pi_1(L) = -d^2 < 0$ , para cierto  $d > 0$ , de modo que  $\Pi_c(L) = -d^2$  para toda circunferencia  $c$  del sistema. Esto implica que el punto  $L$  es interior a todas ellas. Que  $e$  sea el eje radical de  $c_1$  y  $c_2$  significa que ambas circunferencias se cortan en dos puntos  $L_1$  y  $L_2$  y que  $e$  es la recta que pasa por ellos y que  $d = \overline{LL_1} = \overline{LL_2}$ . Que  $e$  sea el eje radical de  $c_1$  y otra circunferencia cualquiera  $c$  del sistema con  $\Pi_c(L) = -d^2$  significa que los puntos de corte entre  $c$  y  $c_1$  están a una distancia  $d$  de  $L$ , luego son  $L_1$  y  $L_2$ .

Recíprocamente, toda circunferencia que pasa por estos dos puntos cumple  $\Pi_c(L) = -d^2$ , luego está en el sistema. Concluimos que el sistema coaxial está formado por todas las circunferencias que pasan por  $L_1$  y  $L_2$  y hay una exactamente con centro en cada punto de la recta de centros.



Finalmente, consideramos el caso en que  $\Pi_1(L) = c^2 > 0$ . Una circunferencia  $c$  con centro  $O$  en la recta de centros y radio  $r$  está en el sistema coaxial si y sólo si  $c^2 = \Pi_c(L) = \overline{OL}^2 - r^2$  o, equivalentemente, si  $\overline{OL}^2 = c^2 + r^2$ . Para que esto suceda es necesario que  $\overline{OL} \geq c$ , y también es suficiente, pues en tal caso siempre podemos tomar un único radio  $r$  (tal vez nulo) que cumpla la ecuación:



Si llamamos  $K_1$  y  $K_2$  a los puntos de la recta de centros situados a una distancia  $c$  de  $L$ , tenemos que son las únicas circunferencias de radio 0 en el sistema coaxial, y reciben el nombre de *puntos límite* del sistema. Si  $\overline{OL} > c$ , entonces la ecuación anterior se interpreta como que cada circunferencia del sistema es ortogonal a la circunferencia  $c_0$  de centro  $L$  y radio  $c$ , por lo que también hay una única circunferencia para cada centro que cumpla  $\overline{OL} > c$ , ya que el radio puede determinarse trazando las tangentes a  $c_0$  por  $O$ .

Esto nos lleva a la definición siguiente:

**Definición 5.30** Un *sistema coaxial de tipo I* determinado por un punto  $L$  y una recta  $e$  y parámetro  $c$  está formado por todas las circunferencias con centro en la recta perpendicular a  $e$  por  $L$  que son ortogonales a la circunferencia de centro  $L$  y radio  $c$ . Los dos puntos  $K_1$  y  $K_2$  que pertenecen al sistema coaxial se llaman *puntos límite* del sistema.

Un *sistema coaxial de tipo II* determinado por un punto  $L$  y una recta  $e$  y parámetro  $d$  está formado por todas las circunferencias que pasan por los dos puntos de  $e$  situados a una distancia  $d$  de  $L$ .

Un *sistema coaxial de tipo III* determinado por un punto  $L$  y una recta  $e$  está formado por todas las circunferencias tangentes a  $e$  por el punto  $L$ .

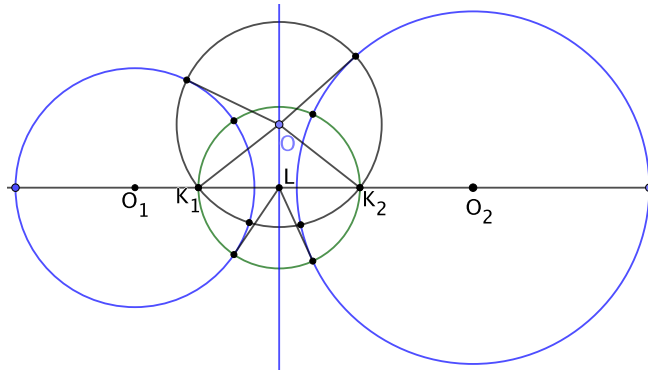
Hemos probado que todo sistema coaxial es de uno de estos tres tipos. Notemos que por cada punto  $P$  que no esté en  $e$  pasa una única circunferencia de un sistema coaxial dado. Esto es inmediato para los sistemas de tipo II y III. Para los sistemas de tipo I basta observar que el centro  $O$  de la circunferencia requerida es la intersección de la recta de centros del sistema con el eje radical de  $P$  y la circunferencia  $c_0$  de centro  $L$  y radio  $c$ , pues la pertenencia a dicho eje es la condición necesaria y suficiente para que la circunferencia de centro  $O$  que pasa por  $P$  sea ortogonal a  $c_0$  (por el teorema 5.11 y la nota posterior).

**Teorema 5.31** *Si una circunferencia es ortogonal a otras dos, entonces es ortogonal a todas las circunferencias del sistema coaxial que determinan.*

DEMOSTRACIÓN: Si llamamos  $c_1$  y  $c_2$  a las dos circunferencias dadas, por el teorema 5.11, el centro  $O$  de la circunferencia ortogonal  $c$  tiene que estar en el eje radical de las  $c_1$  y  $c_2$  (que, en particular, no pueden ser concéntricas), y además será un punto exterior a ambas. La ortogonalidad implica que  $O$  está en las tangentes a  $c_1$  por los puntos de corte, luego el radio de  $c$  es la distancia de su centro a los puntos de tangencia, cuyo cuadrado es  $\Pi_{c_1}(O)$ .

Si consideramos una tercera circunferencia  $c_3$  del sistema coaxial, entonces  $\Pi_3(O) = \Pi_1(O) > 0$ , luego  $O$  también está en el exterior de  $c_3$  y, como el radio de  $c$  es la raíz cuadrada de  $\Pi_{c_1}(O) = \Pi_{c_3}(O)$ , es decir, de la distancia de  $O$  a los puntos de tangencia con  $c_3$ , concluimos que  $c$  también es ortogonal a  $c_3$ . ■

Consideremos concretamente el caso del teorema anterior en el que las dos circunferencias dadas  $c_1$  y  $c_2$  son disjuntas y sean  $K_1$  y  $K_2$  los puntos límite del sistema coaxial que determinan, es decir, son los puntos tales que  $\overline{OK_i}^2 = \Pi_i(L)$ . Si consideramos una circunferencia  $c$  de centro  $O$  ortogonal a las dos dadas, tiene que cumplirse que  $\Pi_{c_i}(O) = \Pi_{K_i}(O)$ , lo cual significa que  $\overline{OK_i}$  coincide con la distancia de  $O$  a los puntos de tangencia de  $c_i$ , que es precisamente el radio de  $c$ , luego  $c$  pasa por  $K_1$  y  $K_2$ .



Recíprocamente, si una circunferencia  $c$  con centro  $O$  en el eje radical de  $c_1$  y  $c_2$  pasa por  $K_1$  y  $K_2$ , entonces su radio es la raíz cuadrada de  $\Pi_{K_i}(O) = \Pi_{c_i}(O)$ , luego es la distancia de  $O$  a los puntos de tangencia con  $c_i$ , lo que significa que  $c$  pasa por dichos puntos de tangencia, luego  $c$  es ortogonal a  $c_1$  y  $c_2$ .

Con esto hemos probado parte del teorema siguiente:

**Teorema 5.32** *Las circunferencias ortogonales a dos circunferencias que definen un sistema coaxial de tipo I son las circunferencias que pasan por los dos puntos límite de dicho sistema, por lo que forman un sistema coaxial de tipo II. Recíprocamente, las circunferencias ortogonales a dos circunferencias secantes forman un sistema coaxial de tipo I cuyos puntos límite son los puntos de corte de las circunferencias dadas. Las circunferencias ortogonales a dos circunferencias que definen un sistema coaxial de tipo III, es decir, tangentes, son las que tienen centro en la tangente común y pasan por el punto de tangencia, con lo que forman otro sistema coaxial de tipo III.*

DEMOSTRACIÓN: La primera parte ya está probada. Dadas dos circunferencias secantes, consideramos el sistema coaxial de tipo I que tiene a los puntos de corte  $K_1$  y  $K_2$  como puntos límite (es decir, el formado por todas las circunferencias  $c$  con centro  $O$  en la recta  $K_1K_2$  fuera del segmento  $\overline{K_1K_2}$  de modo que  $\Pi_c(L) = \overline{OK_i}^2$  o, equivalentemente, de radio  $\sqrt{OL^2 - \overline{OK_i}^2}$ ).

Por la parte ya probada sabemos que las circunferencias ortogonales a dos circunferencias cualesquiera de este haz son las que pasan por  $K_1$  y  $K_2$ . En particular esto vale para las dos circunferencias dadas, luego éstas son ortogonales a todas las del sistema de tipo I que hemos construido. Y no puede haber más, pues una circunferencia ortogonal a las dos circunferencias dadas tiene que tener su centro sobre su eje radical (por 5.11) y ser exterior a ambas, y el haz de tipo I ya contiene una circunferencia con centro en cada punto con estas características y no puede haber más de una circunferencia ortogonal a otra con centro en un punto dado.

El tercer caso es sencillo: si una circunferencia es ortogonal a dos circunferencias tangentes, su centro tiene que estar en el eje radical, es decir, en la tangente común, y claramente tiene que pasar por el punto de tangencia, y las circunferencias que cumplen esto forman un sistema de tipo III. ■

**Definición 5.33** Dos sistemas coaxiales cuyas circunferencias sean mutuamente ortogonales se dicen *conjugados*.

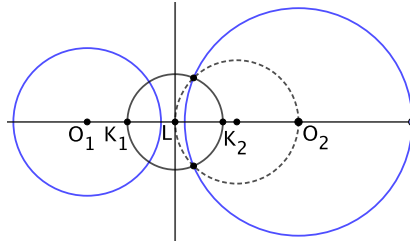
Hemos probado que cada sistema coaxial tiene un único sistema conjugado, de modo que el conjugado de un sistema de tipo I es de tipo II y viceversa, mientras que el conjugado de un sistema de tipo III es también de tipo III.

**Nota** Si consideramos que dos circunferencias concéntricas tienen como eje radical la recta del infinito, entonces tendríamos un cuarto tipo de sistemas coaxiales, formado por todas las circunferencias con centro en un mismo punto.

En principio, un sistema de tipo IV no tiene conjugado, pero si definimos una circunferencia de radio infinito como una recta (cuyo centro es el punto de la recta infinita en el que se cortan las perpendiculares a la recta dada), entonces las “circunferencias” ortogonales a un sistema de circunferencias concéntricas son todas las rectas que pasan por su centro común. Si a su vez consideramos

que un haz de rectas que pasan por un punto común es un sistema coaxial (de tipo V) cuyo eje radical es la recta infinita, entonces el conjugado de un sistema de tipo IV es un sistema de tipo V y viceversa. ■

**Problema 5.9** *Calcular los puntos límite del sistema coaxial determinado por dos circunferencias disjuntas.*

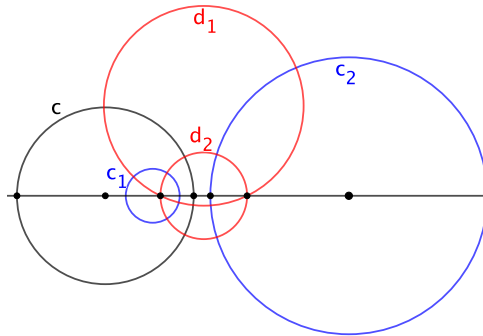


1. Trazamos la recta que une los centros de las circunferencias y su eje radical. Llamamos  $L$  a la intersección de ambas.
2. Trazamos la circunferencia que tiene a  $\overline{LO_2}$  por diámetro.
3. Trazamos la circunferencia de centro  $L$  que pasa por los puntos de corte entre la circunferencia del paso anterior y la circunferencia dada de centro  $O_2$ .

Esta circunferencia será ortogonal a la circunferencia de centro  $O_2$ , pues el triángulo que pasa por  $L$ ,  $O_2$  y uno de los puntos de corte es rectángulo, al estar inscrito en la circunferencia del paso 2. Al tener su centro en  $L$ , también tiene que ser ortogonal a la circunferencia dada de centro  $O_1$ .

4. Los puntos límite buscados son las intersecciones de la circunferencia anterior con la recta  $O_1O_2$ . ■

**Teorema 5.34** *Si dos circunferencias son inversas respecto de una tercera, las tres son coaxiales.*



**DEMOSTRACIÓN:** Sean  $c_1$  y  $c_2$  las circunferencias inversas respecto de  $c$ . Si  $c_1$  es secante a  $c$ , entonces  $c_2$  pasa por los mismos puntos de corte, luego las tres son coaxiales. Lo mismo sucede si  $c_1$  es tangente a  $c$ , considerando ahora el punto de tangencia en lugar de los puntos de corte.



Supongamos finalmente que  $c$  y  $c_1$  son disjuntas. Trazamos entonces dos circunferencias  $d_1$  y  $d_2$  que sean ortogonales a  $c$  y a  $c_1$ . Por 5.22, sus inversas son ellas mismas, luego también son ortogonales a la inversa de  $c_1$ , que es  $c_2$ . Así pues,  $c$ ,  $c_1$  y  $c_2$  pertenecen al sistema coaxial conjugado del determinado por  $d_1$  y  $d_2$ . Notemos que los puntos límite de este sistema son los puntos de corte de  $d_1$  y  $d_2$ , que son conjugados respecto de  $c$ . ■

En particular, dos circunferencias son coaxiales con sus circunferencias de antisimilitud.

Conviene observar que, dado un sistema coaxial de tipo I, el inverso de uno de sus puntos límite respecto de cualquier circunferencia  $c$  del sistema es el otro punto límite. En efecto, la circunferencia que tiene por diámetro el segmento comprendido por los dos puntos límite es ortogonal a  $c$  y, de acuerdo con el teorema 5.22 el inverso de uno respecto de  $c$  tiene que ser el otro. A su vez, de aquí se deduce:

**Teorema 5.35** *Dos circunferencias disjuntas se transforman en circunferencias concéntricas por una inversión respecto de cualquier circunferencia centrada en uno de los puntos límite del sistema coaxial que determinan.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $c$  una de las circunferencias del sistema coaxial con puntos límite  $K_1$  y  $K_2$  y sea  $c_0$  una circunferencia con centro, por ejemplo, en  $K_1$ . Según el teorema 5.23, el centro de la inversa  $c'$  respecto de  $c_0$  se calcula invirtiendo  $K_1$  respecto de  $c$ , lo cual, según la observación previa al teorema, da como resultado  $K_2$ , y luego invirtiendo  $K_2$  respecto de  $c_0$ . Por lo tanto, las inversas respecto de  $c_0$  de todas las circunferencias del sistema son circunferencias de centro en  $K_2'$ , son todas concéntricas. ■

El teorema siguiente lo usaremos a medio plazo para demostrar el teorema de Feuerbach sobre la circunferencia de los nueve puntos 5.56, si bien en la sección siguiente aprovecharemos a fondo un caso particular.

**Teorema 5.36** *Si  $c_1, c_2, c_3$  son tres circunferencias coaxiales de centros respectivos  $O_1, O_2, O_3$ , para cada punto  $P$  en  $c_3$ , las potencias de  $P$  respecto de las otras dos circunferencias cumplen*

$$\frac{\Pi_1(P)}{\Pi_2(P)} = \frac{\overline{O_1O_3}}{\overline{O_2O_3}}$$

(donde el cociente de segmentos hay que considerarlo orientado).

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema de Casey 5.10, si llamamos  $L$  a la intersección con el eje de centros del eje radical y  $P'$  al pie de la perpendicular por  $P$  al eje de centros, puesto que  $\Pi_3(P) = 0$ , tenemos que

$$\Pi_1(P) = 2\overline{O_1O_3} \cdot \overline{LP'}, \quad \Pi_2(P) = 2\overline{O_2O_3} \cdot \overline{LP'},$$

de donde se sigue la conclusión. ■

Y también se cumple el recíproco:

**Teorema 5.37** *Dadas dos circunferencias  $c_1$  y  $c_2$  y un número real  $r$ , el lugar geométrico de los puntos  $P$  tales que  $\Pi_1(P)/\Pi_2(P) = r$  es una circunferencia coaxial con las dadas salvo si  $r = 1$ , en cuyo caso es el eje radical.*

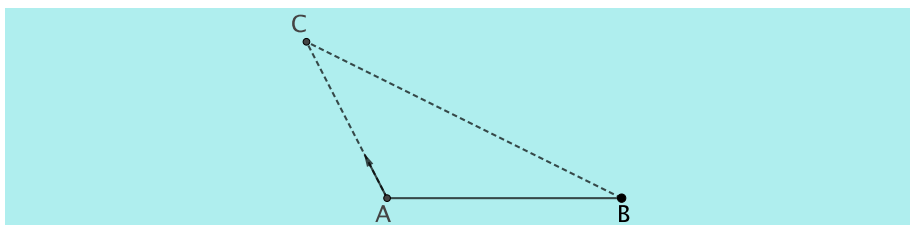
DEMOSTRACIÓN: Si  $P$  cumple la relación del enunciado con  $r \neq 1$  (el caso  $r = 1$  es trivial), entonces  $P$  no está en el eje radical, luego existe una única circunferencia  $c_3$  en el sistema coaxial definido por  $c_1$  y  $c_2$  que pasa por  $P$  (véase la observación tras la definición 5.30). Si  $O_3$  es el centro de  $c_3$ , el teorema anterior nos da que  $\overline{O_1O_3}/\overline{O_2O_3} = r$ , pero (teniendo en cuenta que longitudes están orientadas) hay un único punto  $O_3$  en la recta  $O_1O_2$  que cumple esto, y hay una única circunferencia en el sistema coaxial con centro en  $O_3$ , luego los puntos  $P$  son precisamente los de esta circunferencia determinada por  $r$ . ■

Así pues, una circunferencia está en el sistema coaxial definido por dos circunferencias si el cociente de las potencias de sus puntos respecto de ambas toma un valor fijo  $r$ .

## 5.8 Circunferencias de Apolonio

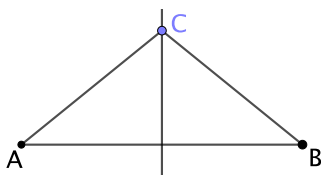
Los dos últimos teoremas de la sección precedente son generalizaciones de un teorema conocido ya por los griegos que vamos a introducir analizando un problema clásico:

**El problema de la persecución de Apolonio** *Un barco se encuentra en un punto  $A$  navegando en línea recta a velocidad  $v$ . Otro barco se encuentra en otro punto  $B$  y quiere alcanzar al anterior. ¿En qué dirección debe navegar en línea recta para encontrarse con él si puede hacerlo a una velocidad  $w$ ?*



La figura muestra un ejemplo con la solución: Si el barco situado en  $A$  se mueve en la dirección señalada a una velocidad  $v$  y el barco situado en  $B$  es capaz de navegar al doble de velocidad, debe hacerlo en la dirección que se indica, pues  $\overline{BC} = 2\overline{AC}$ , de modo que ambos barcos llegarán a  $C$  al mismo tiempo. ¿Pero cómo encontrar en general el punto  $C$ ?

Si ambos barcos se mueven a la misma velocidad, la respuesta es simple: el segundo barco debe fijar el rumbo que hace que su trayectoria forme con  $AB$  el mismo ángulo que la del otro barco. Así ambos llegarán a la vez al punto  $C$ :



Equivalentemente, en función de cuál sea el rumbo del primer barco, ambos se encontrarán en un punto de la mediatriz del segmento  $\overline{AB}$  si el barco situado en  $A$  navega en dirección de dicha recta, o no se encontrarán nunca en caso contrario. ¿Pero qué sucede si los barcos se mueven con velocidades diferentes?

Si  $C$  es el punto de encuentro, el primer barco llegará hasta él en un tiempo  $t = \overline{AC}/v$ , mientras que el segundo lo hará en un tiempo  $t = \overline{BC}/w$ . Puesto que queremos que ambos lleguen a  $C$  al mismo tiempo, tendrá que cumplirse que

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{v}{w} = r > 0.$$

Hemos resuelto el problema cuando  $r = 1$ . En tal caso, los puntos  $C$  que cumplen esta relación son los de la mediatriz del segmento  $\overline{AB}$ . En el siglo III a.C., el matemático griego Apolonio de Perga demostró que los puntos  $C$  que cumplen esta relación para un  $r \neq 1$  fijo forman una circunferencia, conocida hoy como la *circunferencia de Apolonio*:

**Teorema 5.38** *Dados dos puntos distintos  $A$  y  $B$  y un número real  $r > 0$ ,  $r \neq 1$ , el lugar geométrico formado por los puntos  $P$  tales que*

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = r$$

*es una circunferencia con centro en la recta  $AB$ .*

En realidad este teorema es un caso particular de un teorema que ya hemos demostrado, pues la relación puede escribirse equivalentemente como

$$\frac{\overline{AP}^2}{\overline{BP}^2} = r^2,$$

y así el miembro izquierdo se interpreta como el cociente de las potencias de  $P$  respecto de los puntos  $A$  y  $B$  (vistos como circunferencias de radio 0), y la conclusión nos la da el teorema 5.37.

**Problema 5.10** *Construir la circunferencia de Apolonio correspondiente a dos puntos  $A$  y  $B$  y a una razón  $r > 0$ ,  $r \neq 1$ .*

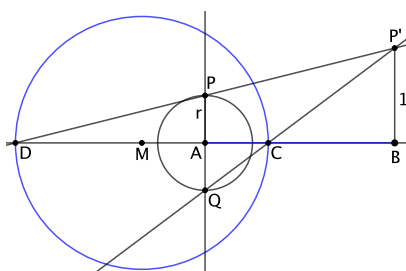
1. Trazamos la circunferencia de centro  $A$  y radio  $r$ , y llamamos  $P$  y  $Q$  a los puntos donde corta a la perpendicular a  $AB$  por  $A$ .
2. Trazamos la perpendicular a  $AB$  por  $B$  y trazamos en ella un punto  $P'$  que diste de  $B$  una unidad. (Alternativamente, si  $r = a/b$ , podemos tomar  $\overline{AP} = a$ ,  $\overline{BP'} = b$ .)

3. Llamamos  $C$  y  $D$  a los puntos donde las rectas  $P'P$  y  $P'Q$  cortan a  $AB$ . (Notemos que si fuera  $r = 1$  la recta  $PP'$  sería paralela a  $AB$ .)

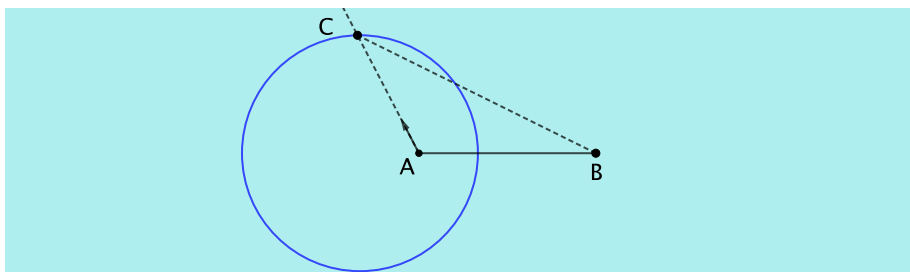
Notemos que  $C$  y  $D$  están en la circunferencia de Apolonio, pues

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP'}} = r, \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{BP'}} = r.$$

4. Trazamos el punto medio  $M$  de  $\overline{CD}$ .
5. Trazamos la circunferencia de centro  $M$  y radio  $\overline{MC}$ , que es la circunferencia de Apolonio.



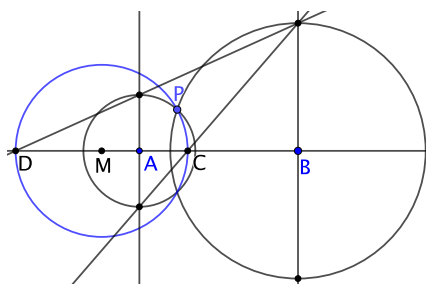
Así pues, para resolver el problema de la persecución de Apolonio basta trazar la circunferencia de Apolonio correspondiente a los puntos  $A$  y  $B$  y al cociente de las velocidades de los barcos, trazar la semirrecta de origen  $A$  que corresponde a la ruta del barco y considerar el punto donde ésta corta a la circunferencia de Apolonio. Es a dicho punto hacia el que debe navegar el barco que se encuentra en  $B$ .



Notemos que si la velocidad del barco perseguidor es mayor que la del barco perseguido, entonces la circunferencia rodea a éste, por lo que el problema siempre tiene una única solución. En el caso contrario la circunferencia rodea al perseguidor, por lo que si el rumbo del barco perseguido no la corta el problema no tiene solución, y en caso contrario puede tener una o dos soluciones.

**Problema 5.11** *Construir la circunferencia de Apolonio correspondiente a dos puntos  $A$  y  $B$  que pasa por un punto  $P$  distinto de  $A$  y  $B$ .*

El problema tendrá solución si y sólo si  $\overline{AP} \neq \overline{BP}$ . En tal caso basta modificar la construcción del problema precedente levantando sobre  $A$  y  $B$  segmentos perpendiculares de longitud  $\overline{AP}$  y  $\overline{BP}$ , respectivamente:



La construcción muestra que la circunferencia de Apolonio rodea a  $A$  si  $\overline{AP} < \overline{BP}$  y rodea a  $B$  si  $\overline{BP} < \overline{AP}$ .

En realidad el teorema 5.37 nos da más información que la que hemos usado hasta ahora, pues nos asegura que toda circunferencia de Apolonio correspondiente a dos puntos  $A$  y  $B$  es coaxial con ambos puntos. Por lo tanto:

**Teorema 5.39** *Un sistema coaxial de tipo I está formado por todas las circunferencias de Apolonio respecto de sus puntos límite.*

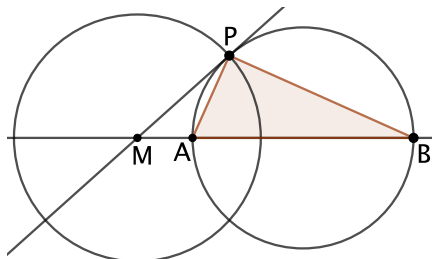
DEMOSTRACIÓN: Según acabamos de señalar, toda circunferencia de Apolonio respecto de dos puntos pertenece al sistema coaxial de tipo I que los tiene por puntos límite y, para cada punto  $P$  que no esté en su eje radical (es decir, en la mediatriz del segmento determinado por ambos puntos) existe una única circunferencia de Apolonio que pasa por  $P$  y una única circunferencia en el sistema coaxial, luego ambos contienen las mismas circunferencias. ■

En particular:

**Teorema 5.40** *Toda circunferencia de Apolonio respecto de dos puntos  $A$  y  $B$  es ortogonal a todas las circunferencias que pasan por  $A$  y  $B$ .*

DEMOSTRACIÓN: Las circunferencias que pasan por  $A$  y  $B$  forman el sistema coaxial conjugado del sistema de tipo I que tiene los puntos  $A$  y  $B$  como puntos límite, es decir, con el formado por las circunferencias de Apolonio respecto de  $A$  y  $B$ , luego unas son ortogonales a las otras. ■

En particular, la circunferencia de Apolonio respecto a dos puntos  $A$  y  $B$  que pasa por un punto  $P$  que no esté en  $AB$  es ortogonal a la circunferencia circunscrita al triángulo  $\widehat{ABP}$  o, equivalentemente, tiene su centro en la intersección de  $AB$  con la tangente por  $P$  a dicha circunferencia. Esto nos proporciona un método para calcular dicho centro:



Ahora probamos un hecho que habíamos anunciado en el capítulo precedente:

**Teorema 5.41** *El incentro de un triángulo no equilátero está sobre su recta de Euler si y sólo si el triángulo es isósceles, en cuyo caso la recta de Euler es la bisectriz y la mediana correspondiente al el vértice de ángulo desigual.*

DEMOSTRACIÓN: Dejamos al lector la comprobación de que en los triángulos isósceles la situación es la descrita. Supongamos que el incentro  $I$  de un triángulo  $\widehat{ABC}$  está en la recta de Euler. Por el teorema 4.54 sabemos que la bisectriz  $AI$  es también la bisectriz de  $\widehat{OAH}$ , donde  $O$  es el circuncentro y  $H$  el ortocentro. Este ángulo es nulo si  $A$  está en la recta de Euler. En caso contrario el teorema 4.3 aplicado al triángulo  $\widehat{AOH}$  nos da que

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{HI}}{\overline{IO}}.$$

Igualmente, si  $B$  y  $C$  tampoco están en la recta de Euler, tenemos que

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{BO}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{CO}} = \frac{\overline{HI}}{\overline{IO}} = r.$$

Pero esto significa que los cuatro puntos  $A, B, C, I$  están en la circunferencia de Apolonio determinada por  $H, O$  y la razón  $r$  (no puede ser  $r = 1$ , pues entonces los cuatro puntos estarían sobre una misma recta), pero esto es imposible, pues entonces  $I$  estaría fuera del triángulo.

Concluimos que uno de los vértices del triángulo está en la recta de Euler, y eso se traduce en que dicha recta es la mediana y la altura del lado opuesto, luego también es su mediatriz, y esto a su vez implica que el vértice equidista de los otros dos, luego el triángulo es isósceles. ■

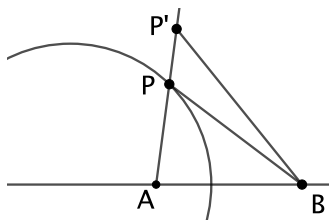
El teorema 5.38 admite una precisión:

**Teorema 5.42** *Si  $r > 1$ , el interior de la circunferencia de Apolonio determinada por dos puntos  $A$  y  $B$  con razón  $r$  está formada por los puntos  $P$  que cumplen*

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} > r.$$

(Y si  $0 < r < 1$ , el interior está formado por los puntos que cumplen la desigualdad opuesta.)

DEMOSTRACIÓN: Tomemos un punto  $P$  situado sobre la circunferencia de Apolonio y sea  $P'$  otro punto situado en la semirrecta  $\overrightarrow{AP}$ :



El teorema del coseno nos da que

$$\overline{BP'}^2 = \overline{AP'}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AP'}\overline{AB}\cos\beta,$$

bajo el supuesto de que  $P$  no esté en la recta  $AB$ , pero la fórmula también es cierta en este caso tomando  $\beta = 0$  o  $\beta = \pi$ . Equivalentemente,

$$\frac{\overline{BP'}^2}{\overline{AP'}^2} = 1 + \frac{\overline{AB}}{\overline{AP'}} \left( \frac{\overline{AB}}{\overline{AP'}} - 2\cos\beta \right).$$

En particular esto vale cuando  $P' = P$ , en cuyo caso se cumple que

$$1 < r^2 = 1 + \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} \left( \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} - 2\cos\beta \right),$$

lo que implica que  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AP'}} - 2\cos\beta > 0$ . Ahora, si  $\overline{AP'} > \overline{AP}$ , tenemos que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP'}} - 2\cos\beta < \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} - 2\cos\beta,$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{\overline{BP'}^2}{\overline{AP'}^2} &= 1 + \frac{\overline{AB}}{\overline{AP'}} \left( \frac{\overline{AB}}{\overline{AP'}} - 2\cos\beta \right) < 1 + \frac{\overline{AB}}{\overline{AP'}} \left( \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} - 2\cos\beta \right) \\ &< 1 + \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} \left( \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} - 2\cos\beta \right) = r^2, \end{aligned}$$

luego

$$\frac{\overline{BP'}}{\overline{AP'}} < r.$$

Igualmente se razona que si  $\overline{AP'} < \overline{AP}$  tenemos la desigualdad opuesta.

Si  $0 < r < 1$  basta tener en cuenta que

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = r$$

es equivalente a

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} = \frac{1}{r},$$

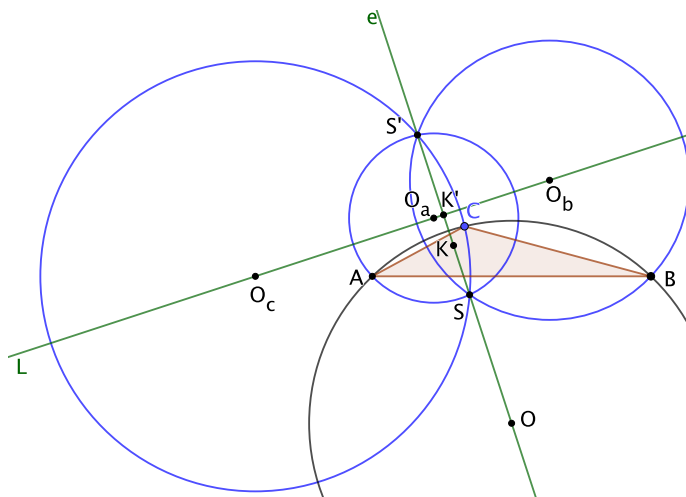
de modo que la circunferencia de Apolonio correspondiente a  $A$  y  $B$  con razón  $r$  es la misma que la correspondiente a  $B$  y  $A$  con razón  $1/r$ , y basta aplicar la parte ya probada. ■

**Circunferencias de Apolonio de un triángulo** Cada triángulo determina tres circunferencias de Apolonio de forma natural:

**Definición 5.43** Si  $\overline{ABC}$  es un triángulo escaleno, sus *circunferencias de Apolonio* son las circunferencias de Apolonio respecto de dos de sus vértices que pasan por el tercero.

Esta definición puede extenderse a triángulos arbitrarios si convenimos en que la “circunferencia de Apolonio” respecto de dos puntos que pasa por un punto de su mediatriz es dicha mediatriz. Así todo triángulo tiene tres circunferencias de Apolonio, si bien algunas de ellas (o todas) pueden ser líneas rectas.

La figura muestra las tres circunferencias de Apolonio de un triángulo escaleno, y vemos en ella varios hechos que no son casuales. Por ejemplo, vemos que las tres pasan por un mismo par de puntos  $S$  y  $S'$ .



En efecto, renombrando los vértices, podemos suponer que  $\overline{AC} < \overline{BC} < \overline{AB}$ , tal y como muestra la figura. Entonces, la circunferencia de Apolonio respecto de  $A$  y  $C$  que pasa por  $B$  rodea a  $C$ , y lo mismo sucede con la circunferencia de Apolonio respecto de  $B$  y  $C$  que pasa por  $A$ , luego ambas tienen a  $C$  en su interior, lo que obliga a que se corten en dos puntos distintos  $S$  y  $S'$ . Así, el punto  $S$  cumple

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{CS}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}, \quad \frac{\overline{BS}}{\overline{CS}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}},$$

y despejando  $\overline{AS}$  y  $\overline{BS}$  y calculando el cociente llegamos a:

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{BS}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

lo que significa que  $S$  también está en la circunferencia de Apolonio respecto de  $A$  y  $B$  que pasa por  $C$ , es decir, que está en las tres circunferencias de Apolonio, y lo mismo vale para  $S'$ .



Notemos que el razonamiento vale igualmente para triángulos isósceles no equiláteros (con el convenio de que la tercera circunferencia de Apolonio es la mediatriz del lado desigual), mientras que para triángulos equiláteros las tres “circunferencias” de Apolonio son las tres mediatrices, que se cortan en un punto.

**Definición 5.44** Los *puntos isodinámicos* de un triángulo no equilátero son los puntos  $S$  y  $S'$  en los que se cortan sus tres circunferencias de Apolonio.

La propia construcción de las circunferencias de Apolonio implica que sus centros  $O_a$ ,  $O_b$  y  $O_c$  están sobre las prolongaciones de los lados  $BC$ ,  $AC$  y  $AB$ , respectivamente, y  $\overline{SS'}$  es una cuerda común a las tres circunferencias. Como el centro de una circunferencia está siempre sobre la mediatriz de cualquiera de sus cuerdas, ahora es inmediato que los tres centros están alineados, y que, más concretamente, la recta que los contiene es la mediatriz de  $\overline{SS'}$ .

La recta  $SS'$  se llama *eje de Brocard* del triángulo, mientras que la recta que pasa por los tres centros de las circunferencias de Apolonio es el *eje de Lemoine*.

En la figura se observan también los hechos siguientes:

**Teorema 5.45** *El circuncentro y el punto simediano de un triángulo no equilátero están sobre su eje de Brocard, es decir, son colineales con los puntos isodinámicos. Más aún, el eje de Lemoine es la recta polar del punto simediano respecto de la circunferencia circunscrita.*

DEMOSTRACIÓN: El resultado es trivial para los triángulos isósceles, pues los puntos isodinámicos, al igual que el circuncentro y el punto simediano, están sobre la mediatriz del lado desigual.

Para triángulos escalenos tenemos que las tres circunferencias de Apolonio forman parte de un sistema coaxial de tipo II, y por 5.40 sabemos que la circunferencia circunscrita es ortogonal a las tres, luego forma parte del haz conjugado de tipo I que tiene por puntos límite a los puntos isodinámicos, luego su centro es colineal con ellos.

Por otra parte, sabemos (véase la observación tras 5.40) que el centro  $O_a$  es la intersección de  $BC$  y la tangente a la circunferencia circunscrita por  $A$ . La tangente es la recta polar de  $A$  mientras que  $BC$  es la recta polar del punto  $T_A$  donde se cortan las tangentes por  $B$  y por  $C$ . Por lo tanto, la recta polar de  $O_a$  es la recta  $AT_A$ , que por 4.26 es la simediana que pasa por  $A$ , luego contiene al punto simediano  $K$ . Por consiguiente,  $O_a$  está en la polar de  $K$ , y lo mismo vale para los otros dos centros, luego el eje de Lemoine no es sino la recta polar de  $K$ .

Por consiguiente, el eje de Lemoine es perpendicular a  $OK$  y corta a esta recta en el inverso  $K'$ , pero ya hemos probado que el eje de Brocard también pasa por  $O$  (y es perpendicular al eje de Lemoine), luego el eje de Brocard es la recta  $OK$ . ■

Observemos también que los puntos isodinámicos son inversos respecto de la circunferencia circunscrita, pues las circunferencias de Apolonio son ortogonales a ella, luego por 5.22 sabemos que el inverso de  $S$  tiene que estar en las tres, luego tiene que ser  $S'$ .

## 5.9 Triángulos pedales

Ahora estamos en condiciones de estudiar más a fondo el triángulo pedal de un punto respecto de un triángulo. Empezamos con una caracterización interesante de las circunferencias de Apolonio de un triángulo:

**Teorema 5.46** *Un punto  $P$  está en la circunferencia de Apolonio de un triángulo  $\widehat{ABC}$  correspondiente a los vértices  $B$  y  $C$  si y sólo si su triángulo pedal  $\widehat{P_a P_b P_c}$  cumple  $\overline{P_a P_b} = \overline{P_a P_c}$ .*

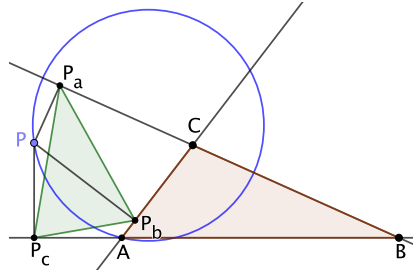
DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 4.36 sabemos que

$$\overline{P_a P_b} = \overline{PC} \operatorname{sen} \hat{C}, \quad \overline{P_a P_c} = \overline{PB} \operatorname{sen} \hat{B}.$$

Por lo tanto,  $\overline{P_a P_b} = \overline{P_a P_c}$  es equivalente a que

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{\operatorname{sen} \hat{B}}{\operatorname{sen} \hat{C}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}},$$

donde la última igualdad es el teorema de los senos. A su vez, esto es equivalente a que  $P$  esté en el círculo de Apolonio determinado por  $B$  y  $C$  con razón  $\overline{AB}/\overline{AC}$ , que es precisamente el círculo de Apolonio correspondiente al triángulo (ya que pasa obviamente por  $A$ ).



En particular:

**Teorema 5.47** *Los puntos isodinámicos de un triángulo son los puntos cuyo triángulo pedal es equilátero.*

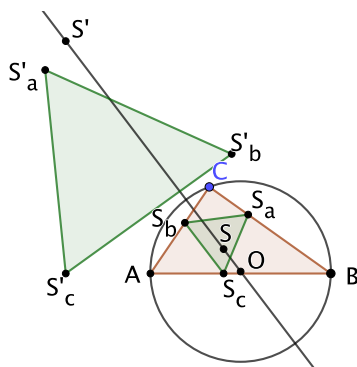
Ahora bien, por el teorema 4.32, los triángulos pedales  $\widehat{S_a S_b S_c}$  y  $\widehat{S'_a S'_b S'_c}$  no pueden ser directamente semejantes con esta correspondencia entre los vértices, es decir, que tienen que estar orientados de forma opuesta, lo que se traduce en que uno de ellos cumplirá

$$\widehat{S_b S_a S_c} = \widehat{S_c S_b S_a} = \widehat{S_a S_c S_b} = 60^\circ$$

y el otro

$$\widehat{S'_b S'_a S'_c} = \widehat{S'_c S'_b S'_a} = \widehat{S'_a S'_c S'_b} = 120^\circ,$$

como se observa en la figura:



De aquí extraemos una consecuencia notable:

**Teorema 5.48** *Los puntos isodinámicos de un triángulo no equilátero son los conjugados isogonales de los centros isogónicos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $S$  uno de los puntos isodinámicos y sea  $T$  su conjugado isogonal. Por el teorema 4.30 aplicado al triángulo pedal de  $S$ , tenemos que

$$\widehat{BSC} = \widehat{BAC} + \widehat{S_b S_a S_c}.$$

Por otro lado, el teorema 4.55 nos da que

$$\widehat{BSC} + \widehat{BTC} = \widehat{BAC},$$

luego en total tenemos que

$$\widehat{BAC} + \widehat{S_b S_a S_c} + \widehat{BTC} = \widehat{BAC},$$

luego  $\widehat{BTC} = \widehat{S_c S_a S_b}$  y, similarmente,

$$\widehat{BTC} = \widehat{S_c S_a S_b}, \quad \widehat{CTA} = \widehat{S_a S_b S_c}, \quad \widehat{ATB} = \widehat{S_b S_c S_a}.$$

Ahora bien, las observaciones previas al enunciado nos dan que estos tres ángulos son iguales a  $60^\circ$  o a  $120^\circ$ , luego  $T$  es uno de los centros isogónicos del triángulo. ■

El teorema 5.46 admite una generalización. Según el teorema 4.32, dos puntos distintos no pueden tener triángulos pedales directamente semejantes con la correspondencia natural entre sus vértices, pero deja abierta la posibilidad de que haya dos puntos distintos cuyos triángulos pedales sean inversamente semejantes. Es el caso de los puntos isodinámicos, pero la situación general es la siguiente:

**Teorema 5.49** *Dos puntos  $P$  y  $Q$  son mutuamente inversos respecto a la circunferencia de Apolonio de un triángulo que pasa por su vértice  $A$ , si y sólo si sus triángulos pedales  $\widehat{P_a P_b P_c}$  y  $\widehat{Q_a Q_b Q_c}$  son inversamente semejantes con esta correspondencia en concreto entre sus vértices.*

DEMOSTRACIÓN: Llamemos  $C_A$  a la circunferencia de Apolonio que pasa por el vértice  $A$ . Como la circunferencia circunscrita es ortogonal a ella, el teorema 5.22 nos da que el inverso de  $B$  respecto de  $C_A$  tiene que estar en  $B$  y, a la vez, en la recta  $O_A B = BC$ , luego tiene que ser  $C$ . Por 5.21 tenemos que  $B, C, P, Q$  están sobre una misma circunferencia, luego  $\widehat{BPC} = \widehat{BQC}$ . El teorema 4.30 nos da entonces que

$$\widehat{BAC} + \widehat{P_b P_a P_c} = \widehat{BPC} = \widehat{BQC} = \widehat{BAC} + \widehat{Q_b Q_a Q_c},$$

luego  $\widehat{P_b P_a P_c} = \widehat{Q_b Q_a Q_c}$ . Si probamos además que  $\widehat{P_a P_c P_b} = \widehat{Q_c Q_b Q_a}$  tendremos la semejanza requerida de los triángulos pedales. Aplicamos de nuevo el teorema 4.30:

$$\widehat{APB} = \widehat{ACB} + \widehat{P_a P_c P_b}, \quad \widehat{CQA} = \widehat{CBA} + \widehat{Q_c Q_b Q_a}.$$

Así, para probar que  $\widehat{P_a P_c P_b} = \widehat{Q_c Q_b Q_a}$  basta ver que

$$\widehat{APB} + \widehat{BCA} = \widehat{CAQ} + \widehat{ABC},$$

o también,  $\widehat{APB} + \widehat{AQC} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC}$ . Pero 5.24 aplicado a los puntos  $A, Q, C$  nos da que

$$\widehat{AO_a C} = \widehat{APB} + \widehat{AQC},$$

luego lo que tenemos que probar es

$$\widehat{AO_a C} = \widehat{ACB} + \widehat{ABC}.$$

Ahora bien:

$$\widehat{ACB} + \widehat{ABC} = \widehat{AAB} + \widehat{ABC} = \widehat{O_a AB} + \widehat{ABO_a} = \widehat{AO_a C}.$$

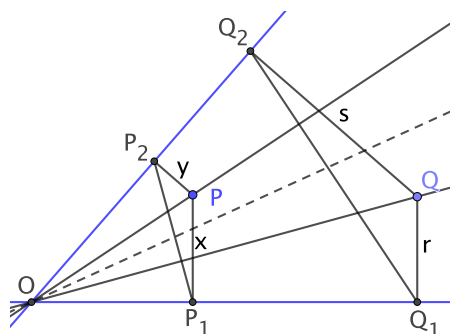
Como  $B$  y  $C$  aparecen de forma simétrica en las hipótesis, intercambiando sus papeles obtenemos que  $\widehat{P_a P_b P_c} = \widehat{Q_b Q_c Q_a}$ , y así tenemos la semejanza que queríamos probar.

Recíprocamente, si se da la semejanza inversa entre los triángulos pedales de  $P$  y  $Q$ , por la parte ya probada, el triángulo pedal del inverso  $Q'$  será inversamente semejante al de  $Q$ , luego directamente semejante al de  $P$  y, por el teorema 4.32 tiene que ser  $P = Q'$ . ■

Ahora vamos a relacionar los triángulos pedales de los puntos conjugados isogonales. Primero demostramos un hecho general:

**Teorema 5.50** *Dos puntos  $P$  y  $Q$  se encuentran sobre rectas simétricas respecto de la bisectriz de un ángulo si y sólo si sus distancias a los lados son inversamente proporcionales, es decir, con la notación de la figura, si*

$$\frac{x}{y} = \frac{s}{r}.$$



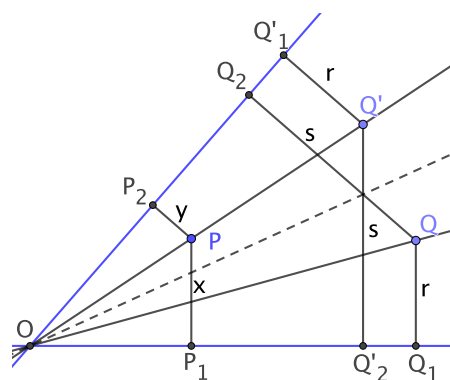
DEMOSTRACIÓN: Observemos que los cuatro puntos  $O, P, P_1, P_2$  están sobre la circunferencia de diámetro  $\overline{OP}$ , luego  $\widehat{POP_2} = \widehat{PP_1P_2}$  y  $\widehat{P_1PP_2} = \widehat{P_1OP_2}$ . Igualmente,  $O, Q, Q_1, Q_2$  están sobre una circunferencia y así  $\widehat{Q_1OQ_2} = \widehat{Q_1Q_2Q}$  y

$$\widehat{Q_1QQ_2} = \widehat{Q_1OQ_2} = \widehat{P_1OP_2} = \widehat{P_1PP_2}.$$

Ahora, esta igualdad junto con  $x/y = s/r$  nos da que los triángulos  $\widehat{P_1PP_2}$  y  $\widehat{Q_2QQ_1}$  son semejantes, luego

$$\widehat{POP_2} = \widehat{PP_1P_2} = \widehat{Q_1Q_2Q} = \widehat{Q_1OQ_2},$$

y esto significa que las rectas  $OP$  y  $OQ$  son simétricas respecto de la bisectriz. Todos los pasos son reversibles y prueban la implicación opuesta, pero hay un argumento más simple: Si las rectas son simétricas, al calcular el punto simétrico de  $Q'$  obtenemos la situación que muestra la figura, y el teorema de Tales nos da la conclusión.



■

**Teorema 5.51** *En las condiciones del teorema anterior, si  $P$  y  $Q$  están sobre rectas simétricas, entonces los puntos  $P_1, P_2, Q_1, Q_2$  están sobre una misma circunferencia cuyo centro es el punto medio de  $\overline{PQ}$ .*

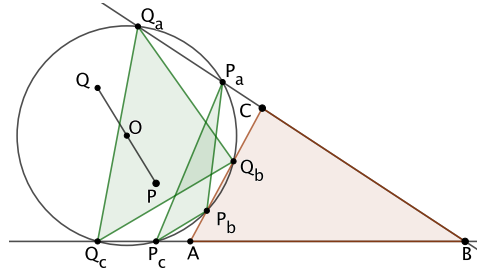
DEMOSTRACIÓN: Usando la semejanza entre los triángulos  $\widehat{OQ_1Q_2}$  y  $\widehat{OPP_1}$ , por una parte, y  $\widehat{OQ_2Q_1}$  y  $\widehat{OPP_2}$  por otra, obtenemos que

$$\frac{\overline{OQ_1}}{\overline{OP_2}} = \frac{\overline{OQ_2}}{\overline{OP_1}} = \frac{\overline{OQ_1}}{\overline{OP_1}},$$

es decir,  $\overline{OQ_1} \cdot \overline{OP_1} = \overline{OP_2} \cdot \overline{OQ_2}$ . Además,  $O$  está entre  $P_1$  y  $Q_1$  si y sólo si está entre  $P_2$  y  $Q_2$ , luego el teorema 5.5 nos da que los cuatro puntos están sobre una misma circunferencia, cuyo centro está en las mediatrices de las cuerdas  $\overline{P_1Q_1}$  y  $\overline{P_2Q_2}$ , pero es claro que el punto medio de  $\overline{PQ}$  se proyecta en los puntos medios de las proyecciones de sus extremos, luego está en ambas mediatrices. ■

Como consecuencia:

**Teorema 5.52** *Si dos puntos son conjugados isogonales respecto de un triángulo, sus triángulos pedales están inscritos en la misma circunferencia, cuyo centro es el punto medio de los puntos dados.*



DEMOSTRACIÓN: Sean  $P$  y  $Q$  los puntos conjugados y sea  $M$  su punto medio. Por el teorema anterior, los pies de las perpendiculares  $P_a, P_b, Q_a, Q_c$  están en una circunferencia con centro en  $M$ , pero también  $P_a, P_c, Q_a, Q_c$  están en una circunferencia con centro en  $M$ , y dos circunferencias con el mismo centro y un punto en común son iguales, luego los seis puntos están sobre una misma circunferencia. ■

**Nota** Más precisamente, si la circunferencia circunscrita al triángulo pedal de  $P$  corta a las prolongaciones de los lados del triángulo en otros tres puntos  $Q_a, Q_b, Q_c$ , éstos tienen que ser los pies de las perpendiculares del punto conjugado  $Q$ , es decir, no puede ser que sea, por ejemplo,  $P_a = Q_a$  a menos que la circunferencia sea tangente al lado  $BC$ .

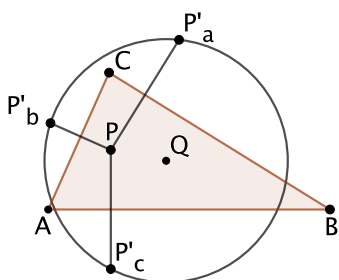
En efecto, si  $P_a = Q_a$ , entonces el centro  $O$  de la circunferencia pedal está en  $PP_a = QQ_a = OP_a$ , por lo que la recta  $OP_a$  es perpendicular a  $BC$ , y esto significa que la circunferencia es tangente a  $BC$ . ■

**Definición 5.53** La circunferencia circunscrita al triángulo pedal de un punto respecto de un triángulo se llama *circunferencia pedal* del punto.

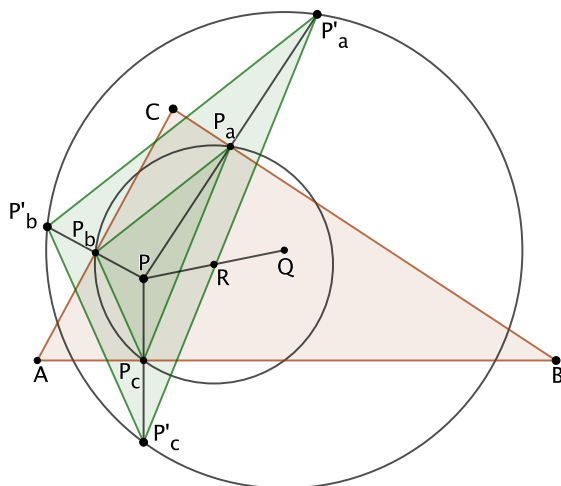
En estos términos hemos demostrado que dos puntos son conjugados isogonales si y sólo si tienen la misma circunferencia pedal.

Observemos que el teorema anterior nos da un procedimiento para calcular el conjugado isogonal de un punto: calculamos su triángulo pedal, trazamos su circunferencia circunscrita y calculamos el simétrico del punto respecto al centro de ésta. He aquí otra posibilidad:

**Teorema 5.54** *El conjugado isogonal de un punto respecto de un triángulo es el centro de la circunferencia que pasa por sus puntos simétricos respecto de los lados.*

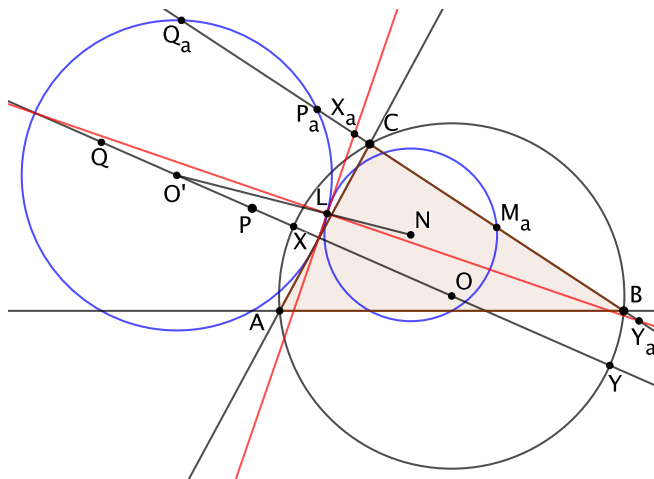


DEMOSTRACIÓN: Sean  $P'_a, P'_b, P'_c$  los puntos simétricos de  $P$  respecto de los lados y  $P_a, P_b, P_c$  los pies de las perpendiculares. Entonces  $\widehat{P'_a P'_b P'_c}$  es la imagen de  $\widehat{P_a P_b P_c}$  por la homotecia de centro  $P$  y razón 2, luego el centro  $Q$  de la circunferencia circunscrita de  $\widehat{P'_a P'_b P'_c}$  es también la imagen por dicha homotecia del centro  $R$  de la circunferencia circunscrita de  $\widehat{P_a P_b P_c}$ . Esto significa que  $R$  es el punto medio de  $P$  y  $Q$ , luego por el teorema 5.52 concluimos que  $Q$  es el conjugado isogonal de  $P$ .



■

**Teorema 5.55** Si dos puntos  $P$  y  $Q$  son conjugados isogonales respecto de un triángulo y son colineales con el circuncentro, entonces su circunferencia pedal es tangente a la circunferencia de los nueve puntos.



DEMOSTRACIÓN: Sean  $X$  e  $Y$  las intersecciones de  $OP = OQ$  con la circunferencia circunscrita. Sus rectas de Simson  $S_X$  y  $S_Y$  son perpendiculares (teorema 4.39) y se cortan en un punto  $L$  de la circunferencia de los nueve puntos (teorema 4.41). Los pies  $X_a$  e  $Y_a$  de las perpendiculares por  $X, Y$  a  $BC$  están sobre  $S_X$  y  $S_Y$ , respectivamente y, como  $O$  es el punto medio de  $\overline{XY}$ , el punto medio  $M_a$  del lado  $BC$ , que es el pie de la perpendicular a  $BC$  por  $O$ , es también el punto medio de  $\overline{XY}$ . Como  $S_X$  y  $S_Y$  son perpendiculares, la circunferencia que pasa por  $L, X_a, Y_a$  tiene por diámetro a  $\overline{X_a Y_a}$ , luego su centro es  $M_a$ .

Si  $R = \overline{OX} = \overline{OY}$  es el circunradio de  $\widehat{ABC}$ , por el teorema de Tales tenemos que

$$\frac{\overline{M_a P_a}}{\overline{M_a X_a}} = \frac{\overline{OP}}{R}, \quad \frac{\overline{M_a Q_a}}{\overline{M_a Y_a}} = \frac{\overline{OQ}}{R},$$

y, teniendo en cuenta que  $\overline{M_a X_a} = \overline{M_a Y_a} = \overline{M_a L}$ ,

$$\frac{\overline{M_a P_a} \cdot \overline{M_a Q_a}}{\overline{M_a L}^2} = \frac{\overline{OP} \cdot \overline{OQ}}{R^2}.$$

Como el miembro derecho no depende del lado  $BC$  que estamos considerando, podemos concluir que

$$\frac{\overline{M_a P_a} \cdot \overline{M_a Q_a}}{\overline{M_a L}^2} = \frac{\overline{M_b P_b} \cdot \overline{M_b Q_b}}{\overline{M_b L}^2} = \frac{\overline{M_c P_c} \cdot \overline{M_c Q_c}}{\overline{M_c L}^2} = \frac{\overline{OP} \cdot \overline{OQ}}{R^2}.$$

Como  $P$  y  $Q$  son conjugados isogonales, el teorema 5.52 nos da que las seis proyecciones están sobre una misma circunferencia de centro  $O'$ , de modo que los productos de los numeradores son las potencias de los puntos  $M_a, M_b, M_c$ ,



y los denominadores pueden verse como las potencias de estos mismos puntos respecto de la circunferencia de centro  $L$  y radio  $0$ . El teorema 5.37 nos da que el lugar geométrico de los puntos  $D$  que cumplen

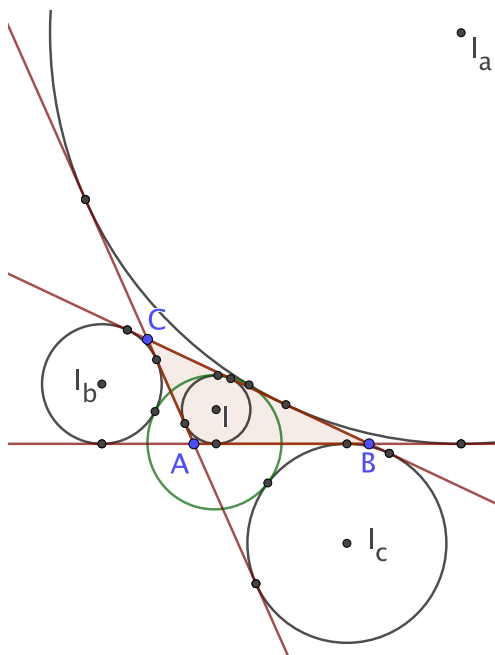
$$\frac{\overline{DP_c} \cdot \overline{M_c Q_c}}{\overline{DL}^2} = \frac{\overline{OP} \cdot \overline{OQ}}{R^2}.$$

es una circunferencia coaxial con  $L$  y con la circunferencia pedal de  $P$  y  $Q$  y contiene a los puntos  $M_a, M_b, M_c$  luego tiene que ser la circunferencia de los nueve puntos. En particular, su centro  $N$  es colineal con  $L$  y con el centro  $O'$

Pero  $L$  está en la circunferencia de los nueve puntos, luego el eje radical de ambas es la tangente a ésta por el punto  $L$  y el sistema coaxial que determinan es el formado por las circunferencias tangentes a la circunferencia de los nueve puntos por el punto  $L$ , y vemos que la circunferencia pedal es una de ellas. ■

En particular, si aplicamos el teorema anterior cuando  $P$  y  $Q$  son el incentro o uno de los excentros de un triángulo (que son sus propios conjugados isogonales), entonces la circunferencia pedal es la circunferencia inscrita o una de las circunferencias excritas, luego tenemos demostrado el teorema más famoso sobre la circunferencia de los nueve puntos:

**Teorema 5.56 (Feuerbach)** *La circunferencia de los nueve puntos de un triángulo es tangente a sus cuatro circunferencias tritangentes.*



La figura muestra las circunferencias tritangentes de un triángulo, su circunferencia de los nueve puntos y todos los puntos de tangencia entre ellas y con los lados del triángulo.

Los puntos de tangencia entre la circunferencia de los nueve puntos y las circunferencias tritangentes se llaman *puntos de Feuerbach* del triángulo. Hemos demostrado que el punto de Feuerbach  $L$  correspondiente a uno de los centros  $I$  (el incentro o un excentro) es la intersección de las rectas de Simson correspondientes a los puntos  $X, Y$  donde la recta  $OI$  corta a la circunferencia circunscrita. Obviamente, también está en la recta  $NI$ .

Una consecuencia del teorema de Feuerbach es la relación siguiente entre el circunradio  $R$ , el inradio  $r$  y la distancia de  $N$  a  $I$ :

$$\overline{NI} = \frac{1}{2}R - r.$$

En efecto,  $R/2$  es el radio de la circunferencia de los nueve puntos, y basta tener en cuenta que  $\overline{NI} = \overline{LN} - \overline{LI} = R/2 - r$ . Combinando esta fórmula con la fórmula de Euler 4.2, vemos que

$$\overline{OI}^2 = R(R - 2r) = 2R\overline{NI}.$$

Pero el incentro  $I$  está dentro de la circunferencia circunscrita, de manera que  $\overline{OI} < R$ . Si el triángulo no es equilátero, entonces  $\overline{OI} \neq 0$  (teorema 4.1), y así

$$\overline{OI} = 2\overline{NI} \frac{R}{\overline{OI}} > 2\overline{NI}.$$

A su vez, según el teorema 5.42, esto significa que  $I$  se encuentra en el interior de la circunferencia de Apolonio determinada por  $O$  y  $N$  con razón 2. Ahora bien, el ortocentro  $H$  y el baricentro  $G$  cumplen

$$\frac{\overline{OH}}{\overline{NH}} = 2 = \frac{\overline{OG}}{\overline{NG}}.$$

En efecto, la primera igualdad se sigue del teorema 4.10 y por el teorema 4.8 tenemos que  $\overline{OG} = (1/3)\overline{OH}$ , luego

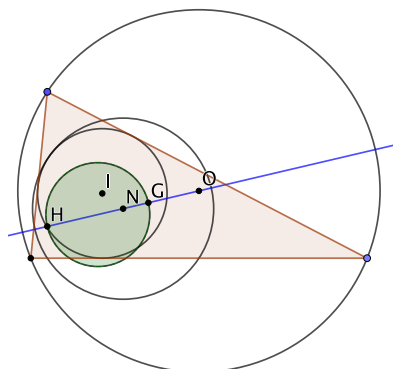
$$\overline{NG} = \overline{ON} - \overline{OG} = \frac{1}{2}\overline{OH} - \frac{1}{3}\overline{OH} = \frac{1}{6}\overline{OH},$$

luego

$$\frac{\overline{OG}}{\overline{NG}} = \frac{1/3}{1/2 - 1/3} = 2.$$

Esto significa que  $H$  y  $G$  están en la circunferencia de Apolonio, pero el centro de ésta se encuentra sobre la recta  $ON = HG$  (la recta de Euler), por lo que  $\overline{HG}$  es un diámetro de la circunferencia de Apolonio considerada.

**Definición 5.57** El *círculo ortocentroidal* de un triángulo no equilátero es el círculo que tiene por diámetro el segmento  $\overline{HG}$ , donde  $H$  es el ortocentro y  $G$  el baricentro (también llamado centroide).



Según acabamos de ver, el círculo ortocentroidal es el círculo limitado por la circunferencia de Apolonio determinada por  $O$  y  $N$  con razón 2, de modo que tiene a  $N$  en su interior y a  $O$  en su exterior. Casi hemos demostrado el teorema siguiente:

**Teorema 5.58** *El incentro de un triángulo no equilátero se encuentra en el círculo ortocentroidal (pero no en su frontera) y es distinto del centro de la circunferencia de los nueve puntos.*

DEMOSTRACIÓN: Sólo falta probar que el incentro  $I$  de un triángulo no equilátero no puede coincidir con el centro  $N$  de la circunferencia de los nueve puntos. En efecto, si se diera la coincidencia, la fórmula que hemos deducido del teorema de Feuerbach nos daría que  $R/2 - r = 0$ , es decir, que  $R = 2r$ , lo que por la fórmula de Euler equivale a que  $I = O$ , y esto sólo lo cumplen los triángulos equiláteros (teorema 4.1). ■



## Capítulo VI

# Números complejos

En este capítulo estudiaremos la geometría de los números complejos. Recordemos (véase el final de la sección 1.1 de [ITAn]) que el cuerpo  $\mathbb{C}$  de los números complejos está formado por todos los números de la forma  $z = x + yi$ , donde  $x, y$  son números reales (llamados “parte real” y “parte imaginaria” del número complejo  $z$ ) e  $i$  es la unidad imaginaria, que cumple  $i^2 = -1$ . Dos números complejos son iguales si y sólo si lo son sus partes real e imaginaria, lo que permite identificar a los números complejos con los pares de  $\mathbb{R}^2$  y, por lo tanto —fijado un sistema de referencia— con los puntos del plano (véase el apéndice A). Recordemos también que el conjugado de un número complejo  $z = x + yi$  se define como  $\bar{z} = x - yi$  y el módulo como  $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

### 6.1 Isometrías y semejanzas

Cuando identificamos  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ , la suma de números complejos se convierte en la suma de vectores, cuya interpretación geométrica es elemental y la hemos discutido en la sección A.1. Veamos ahora la interpretación del producto de números complejos. Más precisamente, consideremos un número complejo fijo  $a = a_1 + a_2i$  y la aplicación  $z' = az$  que define. Explícitamente, si  $z = x + yi$  y  $z' = x' + y'i$ , entonces

$$x' + y'i = (a_1 + a_2i)(x + yi) = a_1x - a_2y + (a_2x + a_1y)i.$$

Si identificamos  $z$  con el par  $(x, y)$  y  $z'$  con el par  $(x', y')$ , entonces

$$(x', y') = (a_1x - a_2y, a_2x + a_1y) = (x, y) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Si exigimos además que  $|a| = a_1^2 + a_2^2 = 1$ , entonces la expresión anterior corresponde a un giro alrededor del punto 0. (Véase el apartado correspondiente a los giros en la sección A.3.)

En cambio, si consideramos la aplicación  $z' = a\bar{z}$ , el mismo desarrollo (cambiando  $y$  por  $-y$ ) nos da que

$$(x', y') = (x, y) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix},$$

por lo que, siempre suponiendo que  $|a| = 1$ , lo que tenemos es una simetría axial. En estos términos, el teorema A.7 afirma lo siguiente:

**Teorema 6.1** *Las isometrías del plano complejo son las transformaciones de la forma  $z' = az + b$  o  $z' = a\bar{z} + b$ , donde  $a, b$  son números complejos con  $|a| = 1$ .*

Para eliminar la restricción sobre el módulo de  $a$  tenemos que introducir el concepto siguiente:

**Definición 6.2** Una semejanza del plano de razón  $r > 0$  es una transformación  $z \mapsto f(z)$  con la propiedad de que

$$|f(z_1) - f(z_2)| = r|z_1 - z_2|.$$

Así, las isometrías son las semejanzas de razón  $r = 1$ . En otros términos, si las isometrías son las transformaciones que conservan las distancias, las semejanzas son las transformaciones que alteran las distancias en una proporción fija (las duplican, las triplican, las reducen a la mitad, etc.).

**Teorema 6.3** *La semejanzas del plano complejo son las transformaciones de la forma  $z' = az + b$  o  $z' = a\bar{z} + b$ , donde  $a, b$  son números complejos con  $a \neq 0$ .*

DEMOSTRACIÓN: Si  $z' = f(z)$  es una semejanza de razón  $r > 0$ , es claro que  $z'' = f(z)/r$  es una isometría, pues

$$|z''_1 - z''_2| = |f(z_1)/r - f(z_2)/r| = |f(z_1) - f(z_2)|/r = |z_1 - z_2|.$$

Por el teorema anterior,  $f(z)/r = a_0z + b_0$  o bien  $f(z)/r = a_0\bar{z} + b_0$ , para ciertos números complejos  $a_0, b_0$  con  $|a_0| = 1$ . Por lo tanto  $f(z) = ra_0z + rb_0$  o bien  $f(z) = ra_0\bar{z} + rb_0$ , luego  $f(z)$  es de la forma requerida. El recíproco se prueba de forma similar, tomando  $r = |a|$ . ■

La prueba del teorema anterior muestra que una semejanza de razón  $r$  se descompone en una isometría  $f(z)/r$  seguida de una homotecia de razón  $r$  (la dada por  $z \mapsto rz$ ).

Dos figuras se dicen *semejantes* si una se puede transformar en la otra mediante una semejanza.

Ahora tenemos dos nociones distintas de semejanza de triángulos, pero vamos a probar que son la misma:

**Teorema 6.4** *Dados dos triángulos  $\widehat{ABC}$  y  $\widehat{A'B'C'}$ , las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. Existe una semejanza directa (es decir, de la forma  $z' = az + b$ ) que transforma un triángulo en otro.
2. Los dos triángulos son directamente semejantes, es decir, sus ángulos dirigidos correspondientes son iguales.
3. Se cumple la relación

$$\frac{B - A}{C - A} = \frac{B' - A'}{C' - A'}.$$

DEMOSTRACIÓN: 1)  $\Rightarrow$  2) es inmediato, pues una semejanza directa es una isometría directa (un giro seguido de una traslación) seguida de una homotecia, luego el triángulo  $\widehat{ABC}$  se transforma primero en otro igual (es decir, congruente, con ángulos dirigidos iguales) y éste a su vez, a través de la homotecia, se transforma en un triángulo directamente semejante.

2)  $\Rightarrow$  3) Los triángulos son directamente similares si y sólo si tienen iguales dos pares de lados:

$$|B - A| = |B' - A'|, \quad |C - A| = |C' - A'|$$

y también el ángulo dirigido que forman:  $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ . Sean

$$w = \frac{B - A}{C - A}, \quad w' = \frac{B' - A'}{C' - A'},$$

que cumplen  $|z| = |z'| = 1$ . Por lo tanto,  $z \mapsto wz$  es un giro que transforma el vector  $\overrightarrow{AC} = C - A$  en  $\overrightarrow{AB} = B - A$ , e igualmente con  $w'$ . Ahora bien, la igualdad  $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$  implica que el mismo giro que transforma  $\overrightarrow{AC}$  en  $\overrightarrow{AB}$  debe transformar  $\overrightarrow{A'C'}$  en  $\overrightarrow{A'B'}$ , lo que significa que  $w = w'$ .

3)  $\Rightarrow$  1) Basta considerar la semejanza

$$z' = f(z) = \frac{C' - A'}{C - A}(z - A) + A'.$$

Así  $f(A) = A'$ ,  $f(C) = C'$  y

$$f(B) = \frac{C' - A'}{C - A}(B - A) + A' = \frac{B' - A'}{C' - A'}(C' - A') + A' = B'. \quad \blacksquare$$

## 6.2 Transformaciones circulares

En la sección anterior hemos interpretado geoméricamente el producto de números complejos (y la conjugación compleja). Ahora vamos a interpretar el cociente. El caso más simple es el siguiente:

**Teorema 6.5** *La transformación  $z' = R^2/\bar{z}$  es la inversión respecto a la circunferencia de centro 0 y radio  $R$ .*

DEMOSTRACIÓN: En efecto, si  $z \neq 0$ , entonces

$$z' = \frac{R^2}{\bar{z}} = \frac{R^2}{|z|^2} z,$$

luego  $z'$  es un múltiplo de  $z$  por un factor positivo, lo que se interpreta como que  $z$  y  $z'$  están sobre la misma semirrecta de origen  $0$ , y además  $|z||z'| = R^2$ , lo que significa que  $z'$  es el inverso de  $z$  respecto de la circunferencia de centro  $0$  y radio  $r$ . ■

Es claro que para calcular el inverso de un punto  $z$  respecto de una circunferencia de centro un punto  $O$  y radio  $R$  podemos trasladar  $z$  y la circunferencia de modo que  $O$  pase a ser  $0$ , calcular el inverso del trasladado  $z - O$  y trasladar de vuelta el resultado, es decir, que

$$z' = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{O}} + O = \frac{O\bar{z} + R^2 - |O|^2}{\bar{z} - \bar{O}}.$$

Por lo tanto, las inversiones son transformaciones circulares en el sentido siguiente:

**Definición 6.6** Una *transformación de Möbius* es una transformación de la forma

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Una *transformación circular* es una transformación de Möbius o bien una transformación de la forma

$$z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Las transformaciones de Möbius se llaman *transformaciones circulares directas*, mientras que las que incluyen la conjugación son las *transformaciones circulares inversas*.

Notemos que si  $c \neq 0$ , entonces la transformación circular no está definida para  $z = -d/c$  si es directa o para  $z = -\bar{d}/\bar{c}$  si es inversa.

La razón para exigir  $ad - bc \neq 0$  es que, en caso contrario, o bien  $c = d = 0$ , en cuyo caso la expresión no tiene sentido, o si, por ejemplo,  $c \neq 0$  en el caso directo, tenemos que

$$z' = \frac{acz + bc}{c^2z + cd} = \frac{acz + ad}{c^2z + cd} = \frac{a}{c} \frac{cz + d}{cz + d} = \frac{a}{c},$$

con lo que todos los puntos tienen la misma imagen. Si  $d \neq 0$  se llega a la misma conclusión, al igual que si la transformación es inversa.

Por el contrario, con la condición  $ad - bc \neq 0$  podemos despejar:

$$az + b = z'(cz + d) = czz' + dz',$$



de donde

$$(a - cz')z = dz' - b,$$

luego

$$z = \frac{dz' - b}{-cz' + a}, \quad \text{con} \quad da - (-b)(-c) = ad - bc \neq 0.$$

Esto significa que cada punto  $z'$  es la imagen de un único punto  $z$  por cualquier transformación de Möbius dada, salvo si  $c \neq 0$ , en cuyo caso  $z' = a/c$  no tiene antiimagen.

**El punto infinito** Es útil adoptar el convenio de que si

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

es una transformación de Möbius con  $c \neq 0$ , entonces<sup>1</sup>

$$f(-d/c) = \infty, \quad f(\infty) = a/c,$$

mientras que si  $c = 0$  convenimos que  $f(\infty) = \infty$ . Para una transformación circular inversa el convenio adecuado es

$$f(-\bar{d}/\bar{c}) = \infty, \quad f(\infty) = \bar{a}/\bar{c},$$

e igualmente  $f(\infty) = \infty$  si  $c = 0$ .

Así, si llamamos  $\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , tenemos que cada punto de  $\mathbb{C}^\infty$  tiene una única imagen y una única antiimagen respecto de cada transformación circular. ■

Hemos probado que las inversiones son transformaciones circulares inversas, pero las transformaciones circulares incluyen también las semejanzas (cuando  $c = 0$  y  $d = 1$ ), y en particular las isometrías (cuando además  $|a| = 1$ ). Una de las ventajas de estudiar las transformaciones circulares en general en lugar de las inversiones en particular es que al aplicar dos inversiones sucesivamente el resultado no es una inversión, pero sí que es una transformación circular:

**Teorema 6.7** *La composición de transformaciones de Möbius (circulares) es una transformación de Möbius (circular).*

DEMOSTRACIÓN: Sean

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \quad z'' = \frac{a'z' + b'}{c'z' + d'}.$$

<sup>1</sup>Expresando

$$f(z) = \frac{acz + bc}{cz + d} = \frac{a + b/z}{c + d/z},$$

la primera forma muestra que  $\lim_{z \rightarrow -d/c} f(z) = \infty$ , y la segunda muestra que  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a/c$ .

Si aplicamos una transformación a continuación de la otra obtenemos<sup>2</sup>

$$z'' = \frac{a' \frac{az+b}{cz+d} + b'}{c' \frac{az+b}{cz+d} + d'} = \frac{\frac{a'az+a'b+b'cz+b'd}{cz+d}}{\frac{c'az+c'b+d'cz+d'd}{cz+d}} = \frac{(aa' + cb')z + ba' + db'}{(ac' + cd')z + bc' + dd'}$$

Esta fórmula es fácil de recordar si asociamos a las transformaciones las matrices

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix},$$

(véase la sección 11.2 de [ITA1]) pues entonces la matriz asociada a la composición es el producto de las matrices, y la condición que requiere la definición de transformación de Möbius es que el determinante de la matriz correspondiente no se anule y, como el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes, éste no se anula.

El caso de transformaciones circulares arbitrarias se reduce fácilmente al anterior. Por ejemplo, si aplicamos una transformación directa seguida de una inversa, el cálculo sólo difiere en que hay que cambiar  $z$  por  $\bar{z}$ ; si aplicamos una transformación inversa seguida de una directa, hemos de cambiar  $z, a', b', c', d'$  por sus conjugados, y si las dos son inversas sólo hay que cambiar  $a', b', c', d'$  por sus conjugados. ■

De la prueba anterior se desprende que la composición de dos transformaciones circulares directas (inversas) es directa, mientras que la composición de una transformación directa con una inversa es inversa.

Muchas de las propiedades que conocemos de las inversiones son válidas en general para transformaciones circulares. Por ejemplo, vamos a probar que transforman rectas/circunferencias en rectas/circunferencias, pero antes conviene adoptar unos convenios:

*Vamos a convenir que el punto  $\infty$  está en todas las rectas, pero no está en ninguna circunferencia. A partir de este momento, como en el capítulo anterior, llamaremos circunferencias tanto a las circunferencias propiamente dichas como a las rectas, de modo que las rectas serán las circunferencias (generalizadas) que pasan por  $\infty$ .*

En el enunciado del teorema siguiente hay que interpretar “circunferencia” en este sentido amplio, de modo que no se excluye que una transformación circular transforme una circunferencia propiamente dicha en una recta o viceversa:

**Teorema 6.8** *Las transformaciones circulares transforman circunferencias en circunferencias.*

<sup>2</sup>El cálculo supone que  $z'$  y  $z''$  pueden calcularse, es decir, que ni  $z$  es el punto donde  $z'$  toma el valor  $\infty$  (si lo hay) ni  $z'$  es el punto donde  $z''$  toma el valor  $\infty$  (si lo hay), con lo que probamos la identidad salvo a lo sumo para dos valores de  $z$ . Estos valores pueden ser estudiados aparte o, más fácilmente, podemos usar que las transformaciones de Möbius son continuas en  $\mathbb{C}$ , por lo que si la igualdad se cumple salvo a lo sumo en dos puntos, tomando sucesiones que converjan a dichos puntos, concluimos que también se cumple en ellos.

DEMOSTRACIÓN: Vamos a usar que toda circunferencia y toda recta se puede expresar en la forma

$$|z - A| = r|z - B|, \quad (6.1)$$

donde  $A, B \in \mathbb{C}$  son puntos distintos y  $r > 0$ .

En efecto, los puntos  $z$  que cumplen esta ecuación recorren la circunferencia de Apolonio respecto de  $A$  y  $B$  de razón  $r$  si  $r \neq 1$  (teorema 5.38) o a la mediatriz del segmento  $\overline{AB}$  si  $r = 1$ . Recíprocamente, es claro que toda recta es de esta forma (toda recta es la mediatriz de un segmento) y toda circunferencia es la circunferencia de Apolonio respecto de unos puntos y una razón adecuados (por el teorema 5.39, basta considerar otra circunferencia disjunta y considerar los puntos límite del sistema coaxial que determinan).

Basta probar el teorema para transformaciones de Möbius, pues una transformación circular inversa se obtiene aplicando la conjugación compleja y a continuación una transformación de Möbius, y es claro que la conjugación transforma rectas en rectas y circunferencias en circunferencias, luego transforma circunferencias generalizadas en circunferencias generalizadas.

Consideramos, pues, una transformación de Möbius y su inversa:

$$z' = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad z = f^{-1}(z') = \frac{dz' - b}{-cz' + a}.$$

La imagen de la circunferencia determinada por la ecuación (6.1) está formada por los puntos  $z'$  que cumplen la ecuación

$$\left| \frac{dz' - b}{-cz' + a} - A \right| = r \left| \frac{dz' - b}{-cz' + a} - B \right|.$$

Más precisamente, esta ecuación la cumplirán los puntos finitos  $z'$  de la imagen que sean imágenes de puntos finitos  $z$ . Operando:

$$\left| \frac{(dz' - b) - A(-cz' + a)}{-cz' + a} \right| = r \left| \frac{(dz' - b) - B(-cz' + a)}{-cz' + a} \right|,$$

$$|(dz' - b) - A(-cz' + a)| = r |(dz' - b) - B(-cz' + a)|, \quad (6.2)$$

$$|(d + cA)z' - (b + aA)| = r |(d + cB)z' - (b + aB)|, \quad (6.3)$$

$$|d + cA| \left| z' - \frac{b + aA}{d + cA} \right| = r |d + cB| \left| z' - \frac{b + aB}{d + cB} \right|,$$

$$\left| z' - \frac{b + aA}{d + cA} \right| = r \left| \frac{d + cB}{d + cA} \right| \left| z' - \frac{b + aB}{d + cB} \right|.$$

Aquí hemos supuesto que  $d + cA \neq 0 \neq d + cB$ . En tal caso, la ecuación resultante corresponde a una recta o a una circunferencia, según si

$$r \left| \frac{d + cB}{d + cA} \right|$$

es o no igual a 1.

Ahora distinguimos dos casos: si  $c = 0$ , entonces  $f(\infty) = \infty$ , y la expresión anterior vale 1 si y sólo si  $r = 1$ , luego tenemos que la recta/circunferencia de partida es una recta si y sólo si lo es su imagen o, en otros términos, la circunferencia generalizada de partida contiene a  $\infty$  si y sólo si su imagen contiene a  $f(\infty) = \infty$ .

Si, por el contrario,  $c \neq 0$ , entonces el punto  $f(\infty) = a/c$  está en la imagen de la circunferencia generalizada de partida si y sólo si cumple la ecuación (6.2), lo que equivale a que  $r = 1$ , es decir, a que la circunferencia generalizada de partida sea una recta, o a que pase por  $\infty$ .

Por otra parte,  $\infty$  está en la imagen si y sólo si

$$r \left| \frac{d + cB}{d + cA} \right| = 1,$$

lo que equivale a que  $|d + cA| = r|d + cB|$ , o también a que

$$|-d/c - A| = r|-d/c - B|,$$

es decir, a que  $f^{-1}(\infty) = -d/c$  esté en la circunferencia de partida.

Nos falta considerar el caso en que  $d + cA = 0$  o bien  $d + cB = 0$ . Ambos se tratan igualmente, así que vamos a suponer que  $d + cB = 0$ . Entonces  $c \neq 0$ , o sería  $c = d = 0$ , luego  $ad - bc = 0$ . Por lo tanto,  $d + cA \neq 0$  (pues  $A \neq B$ ) y la ecuación (6.3) se reduce a

$$|(d + cA)z' - (b + aA)| = r|(b + aB)|,$$

donde  $b + aB \neq 0$ , o de lo contrario  $-d/c = B = -b/a$  y sería  $ad - bc = 0$ , luego

$$\left| z' - \frac{b + aA}{d + cA} \right| = r \left| \frac{b + aB}{d + cA} \right|,$$

que corresponde a una circunferencia.

En particular, el punto  $\infty$  no está en la imagen y, correspondientemente,  $f^{-1}(\infty) = -d/c$  no está en la circunferencia generalizada de partida, pues esto significaría que  $|-d/c - A| = r|-d/c - B|$ , o también  $|d + cA| = r|d + cB| = 0$ , contradicción.

Por último,  $\infty$  está en la circunferencia de partida si y sólo si  $r = 1$ , lo que equivale a que  $a/c$  cumpla la ecuación (6.2), luego también a que  $f(\infty) = a/c$  esté en la imagen. ■

Toda circunferencia generalizada divide a  $\mathbb{C}^\infty$  en dos "semiplanos", que son semiplanos propiamente dichos si se trata de una recta o el interior y el exterior de la circunferencia si se trata de una circunferencia. En el segundo caso entendemos que  $\infty$  está en el exterior.

**Nota** De la prueba del teorema anterior se deduce que si una transformación circular transforma una circunferencia  $c_1$  en otra  $c_2$ , entonces transforma uno de los semiplanos determinados por  $c_1$  en uno de los determinados por  $c_2$  y el otro en el otro.

En efecto, basta tener en cuenta que, al expresar la circunferencia  $c_1$  mediante la ecuación (6.1), uno de sus semiplanos está formado por los puntos que cumplen la desigualdad

$$|z - A| < r|z - B|,$$

y el otro por los puntos que cumplen la desigualdad opuesta, pero intercambiando  $A$  con  $B$  y  $r$  con  $1/r$  si es preciso, no perdemos generalidad si consideramos únicamente esta desigualdad. Los mismos cálculos prueban que las imágenes de los puntos que cumplen esta desigualdad cumplen la ecuación de la circunferencia imagen con una misma desigualdad, luego son los puntos de uno de los semiplanos determinados por la imagen.

Los casos excepcionales se pueden razonar aparte o, más fácilmente, podemos considerar un argumento de continuidad: si  $c_1$  es una circunferencia propiamente dicha y todos los puntos del semiplano de  $c_1$  que contiene a  $\infty$  van a parar al mismo semiplano de  $c_2$ , tomando una sucesión que converja a  $\infty$  concluimos que  $f(\infty)$  está en el mismo semiplano e, igualmente, si todos los puntos del semiplano de  $c_1$  que contiene a  $f^{-1}(\infty)$  con imagen finita van a parar al mismo semiplano de  $c_2$ , tomando una sucesión que converja a dicho punto concluimos que  $\infty$  está en el mismo semiplano de  $c_2$ . ■

El teorema siguiente generaliza a 5.20:

**Teorema 6.9** *Si  $c_1$  y  $c_2$  son circunferencias cualesquiera con un punto  $P$  en común y consideremos una transformación circular que transforme  $P$  en un punto finito  $Q$ . Entonces el ángulo dirigido que forman en  $Q$  las imágenes de  $c_1$  y  $c_2$  es el mismo que forman ellas en  $P$  si la transformación es directa o su suplementario si es inversa.*

DEMOSTRACIÓN: Sean  $t_1$  y  $t_2$  las tangentes a  $c_1$  y  $c_2$  en  $P$  (entendiendo que si  $c_i$  es una recta entonces su tangente es ella misma). Fijemos cualquier circunferencia de centro  $P$ , de modo que las inversas de  $t_1$  y  $t_2$  son ellas mismas mientras que la inversa  $c'_1$  de  $c_1$  es una recta cuyo único punto en común con  $t_1$  es  $\infty$ , luego es una recta paralela a  $t_1$ . Igualmente  $c'_2$  es una recta paralela a  $t_2$ , lo que implica que  $\widehat{c_1, c_2} = \widehat{t_1, t_2} = \widehat{t'_1, t'_2}$  (la primera igualdad es por definición).

Sea  $f(z)$  la transformación circular que estamos considerando, sean  $f[c_1]$  y  $f[c_2]$  las imágenes de las circunferencias y sean  $s_1, s_2$  sus tangentes en  $Q$ . De nuevo tomamos una circunferencia de centro  $Q$  y consideramos las inversas  $f[c_1]'$  y  $f[c_2]'$ , que son rectas paralelas a  $s_1$  y  $s_2$ , luego  $\widehat{f[c_1], f[c_2]} = \widehat{s'_1, s'_2}$ .

Así pues, basta probar que  $\widehat{t'_1, t'_2} = \pm \widehat{s'_1, s'_2}$ , donde el signo depende de si  $f$  es una transformación directa o inversa.

Ahora bien,  $t'_1$  y  $t'_2$  se transforman en  $s'_1$  y  $s'_2$  aplicando primero la inversión respecto a la circunferencia de centro  $P$ , luego  $f$  y luego la inversión respecto de la circunferencia de centro  $Q$ , y esta composición es una transformación circular  $f'$  del mismo carácter (directo o inverso) que  $f$ , puesto que las dos inversiones son transformaciones inversas.

Por consiguiente, basta probar que si una transformación circular  $f$  transforma dos rectas secantes  $t_1, t_2$  en otras dos rectas secantes  $s_1, s_2$ , entonces se

cumple  $\widehat{t_1, t_2} = \pm \widehat{s_1, s_2}$ , donde el signo depende del carácter directo o inverso de la transformación  $f$ .

Si  $O$  es el punto de corte de las rectas, éstas tienen en común los puntos  $O$  e  $\infty$ , luego, o bien  $f(O) = O$  y  $f(\infty) = \infty$ , o bien  $f(O) = \infty$  y  $f(\infty) = O$ . En el segundo caso podemos componer  $f$  con una transformación directa que intercambie  $O$  con  $\infty$ , y el resultado es que un par de rectas se transforma en el otro por una transformación circular del mismo carácter que  $f$ , pero que además deja invariantes a  $O$  y a  $\infty$ . Equivalentemente, podemos suponer que  $f(O) = O$  y que  $f(\infty) = \infty$ .

Pero esto significa que  $f(z) = az + b$  o  $f(z) = a\bar{z} + b$  es una semejanza, y las semejanzas conservan o invierten los ángulos dirigidos según si son directas o inversas. ■

### 6.3 Los centros clásicos

Vamos a probar un teorema de Euler de 1765, en virtud del cual todo triángulo no equilátero está completamente determinado por su circuncentro  $O$ , su incentro  $I$  y su ortocentro  $H$ , así como que éstos pueden elegirse arbitrariamente salvo por dos relaciones que deben satisfacer. En el razonamiento de Euler, estas condiciones aparecían en una forma muy técnica:

$$\overline{OI}^2 < \overline{OH}^2 - 2\overline{HI}^2 < 2\overline{OI}^2,$$

y Euler no se dio cuenta de que en realidad son equivalentes a unas mucho más naturales, a saber, las que hemos demostrado en el teorema 5.58: el incentro  $I$  debe estar en el círculo ortocentroidal y ser distinto del centro  $N$  del círculo de los nueve puntos. Esto lo observó A. Guinand en 1984.

Vamos a probar que estas condiciones que necesariamente deben cumplir los centros  $O, H, I$  son también suficientes para que tres puntos dados sean el circuncentro, el ortocentro y el incentro de un triángulo, necesariamente único. En primer lugar caracterizaremos los centros clásicos de un triángulo en términos del álgebra de los números complejos:

**El baricentro** Consideremos un triángulo de vértices  $A, B, C$ . El punto medio de  $\overline{BC}$  es  $(B + C)/2$ , y la mediana del triángulo que pasa por  $A$  está formada por los puntos de la forma

$$(1 - t)A + t\frac{B + C}{2}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Haciendo  $t = 2/3$  obtenemos que un punto de dicha mediana es

$$G = \frac{A + B + C}{3}.$$

Puesto que la expresión es simétrica, es claro que  $G$  está en las tres medianas, luego es el baricentro del triángulo.

**El circuncentro** Mediante una traslación (o eligiendo adecuadamente el sistema de referencia), podemos suponer que  $O = 0$ , y entonces tenemos que

$$|A| = |B| = |C| = R$$

es el circunradio del triángulo.

**El ortocentro** El teorema 4.8 afirma que el circuncentro  $O$  y el ortocentro  $H$  cumplen

$$G = \frac{2}{3}O + \frac{1}{3}H,$$

pues el punto  $G$  definido así está entre  $O$  y  $H$  y cumple

$$\overline{GO} = |G - O| = \frac{1}{3}|H - O| = \frac{1}{3}\overline{OH}, \quad \overline{GH} = |G - H| = \frac{2}{3}|O - H| = \frac{2}{3}\overline{OH},$$

luego  $\overline{GH} = 2\overline{GO}$ . Si suponemos que  $O = 0$  entonces

$$H = 3G = A + B + C.$$

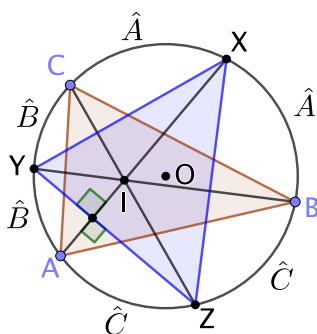
**El centro de la circunferencia de los nueve puntos** Según el teorema 4.10, el centro  $N$  de la circunferencia de los nueve puntos es el punto medio de  $O$  y  $H$ , luego es

$$N = \frac{1}{2}O + \frac{1}{2}H.$$

Si suponemos  $O = 0$  esta expresión se reduce a

$$N = \frac{1}{2}H = \frac{A + B + C}{2}.$$

**El incentro** Consideremos los puntos  $X, Y, Z$  donde las bisectrices del triángulo cortan a la circunferencia circunscrita. Con ellos se forma un triángulo  $\widehat{XYZ}$  cuyos lados son perpendiculares a las bisectrices correspondientes.

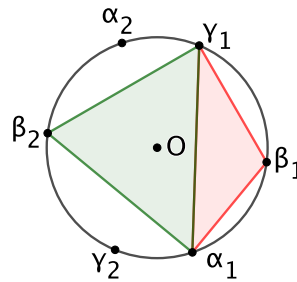


En efecto, consideremos por ejemplo los ángulos marcados en la figura y vamos a probar que son rectos. Por el teorema 1.26, los seis arcos en los que queda dividida la circunferencia tienen las amplitudes que se indica, y por el teorema 1.43 los ángulos marcados en la figura miden

$$\frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{2} = \frac{\pi}{2},$$

luego son rectos. Esto implica que las bisectrices de  $\widehat{ABC}$  son las alturas de  $\widehat{XYZ}$ , luego el ortocentro de  $\widehat{XYZ}$  es  $I$ . Como el circuncentro de  $\widehat{XYZ}$  también es  $O = 0$ , los cálculos precedentes nos dan que  $I = X + Y + Z$ .

Sean  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$  las raíces cuadradas de  $A, B, C$ , respectivamente, de modo que  $|\alpha_i| = |\beta_i| = |\gamma_i| = \sqrt{R}$ . Cambiando  $\gamma_1$  por  $\gamma_2$  si es preciso, podemos suponer que  $\beta_1$  y  $\gamma_1$  están en el mismo semiplano respecto de la recta  $\alpha_1\alpha_2$ . Esto hace que  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  estén contenidos en una de las semicircunferencias de extremos  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ . Intercambiando si es preciso  $\beta_1$  con  $\gamma_1$  (lo cual supone intercambiar  $B$  con  $C$  en el triángulo original) podemos suponer que  $\beta_1$  está entre  $\alpha_1$  y  $\gamma_1$ . En definitiva, nombrando adecuadamente las raíces, podemos suponer que se disponen cíclicamente en el orden  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ , como muestra la figura:



Es claro que un triángulo inscrito en una circunferencia es acutángulo si y sólo si dos cualesquiera de sus vértices están en semiplanos opuestos respecto del diámetro que pasa por el tercero, pues si están en el mismo semiplano, eso significa que los tres están contenidos en un arco menor de  $180^\circ$ , luego el vértice que está entre los otros dos en dicho arco abarca el arco complementario, luego es obtuso. Es lo que pasa en la figura con el triángulo  $\widehat{\alpha_1\beta_1\gamma_1}$ , y no es casual, sino que es consecuencia de que  $\beta_1$  y  $\gamma_1$  están en el mismo semiplano respecto de  $\alpha_1\alpha_2$ . En cambio,  $\widehat{\alpha_1\beta_2\gamma_2}$  es acutángulo pues, ciertamente,  $\alpha_1\alpha_2$  separa a  $\beta_2$  y  $\gamma_2$ , e igualmente  $\beta_1\beta_2$  separa a  $\alpha_1$  de  $\gamma_2$  y también  $\gamma_1\gamma_2$  separa a  $\alpha_1$  de  $\beta_2$ .

Razonando de este modo, podemos concluir que de los ocho triángulos posibles  $\widehat{\alpha_i\beta_i\gamma_i}$  sólo hay dos que son acutángulos, a saber,  $\widehat{\alpha_1\beta_2\gamma_2}$  y el que resulta de girarlo  $180^\circ$ , es decir,  $\widehat{\alpha_2\beta_1\gamma_1}$  (agrupando los pares de triángulos cuyos vértices difieren en signo sólo hay cuatro casos que tratar, y ya hemos considerado dos de ellos).



Elegimos raíces  $\alpha, \beta, \gamma$  de modo que el triángulo  $\widehat{\alpha\beta\gamma}$  sea acutángulo. Según acabamos de ver sólo hay dos elecciones posibles y la alternativa es  $-\alpha, -\beta, -\gamma$ .

Observemos que el argumento (por ejemplo en  $]-\pi, \pi]$ ) de  $\beta$  es

$$\arg \beta = \frac{1}{2} \arg B, \quad \text{o bien} \quad \arg \beta = \frac{1}{2} \arg B + \pi,$$

e igualmente con  $\gamma$  y  $C$ , luego

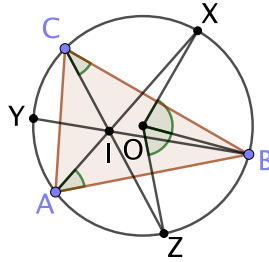
$$\arg \beta\gamma = \frac{1}{2} \arg B + \frac{1}{2} \arg C, \quad \text{o bien} \quad \arg \beta\gamma = \frac{1}{2} \arg B + \frac{1}{2} \arg C + \pi.$$

Como  $|\beta\gamma| = R$ , esto significa que  $\pm\beta\gamma$  son los puntos medios de los dos arcos de extremos  $B$  y  $C$ , es decir, que son  $\pm X$ . Similarmente, los puntos  $\pm\alpha\gamma$  son  $\pm Y$  y  $\pm\alpha\beta$  son  $\pm Z$ . Vamos a ver que, concretamente,  $X = -\beta\gamma, Y = -\alpha\gamma, Z = -\alpha\beta$ .

La aplicación  $z \mapsto \beta z$  es un giro compuesto con una homotecia que transforma el diámetro de extremos  $\pm\alpha$  de la circunferencia  $|z| = \sqrt{R}$  en el diámetro de extremos  $\pm\alpha\beta$ , es decir,  $\pm Z$ . El diámetro de extremos  $\pm\alpha$  deja a  $\beta$  y  $\gamma$  en semiplanos opuestos, luego el diámetro de extremos  $\pm\alpha\beta = \pm Z$  deja a  $\beta^2 = B$  y a  $\beta\gamma$  en semiplanos opuestos. Por lo tanto, para concluir que  $X = -\beta\gamma$  basta probar que  $X$  y  $B$  están en el mismo semiplano respecto de  $\pm Z$ . Esto equivale a que el arco de extremos  $X$  y  $Z$  que pasa por  $B$  tiene amplitud menor que  $\pi$ , pero dicha amplitud es

$$\widehat{ZOB} + \widehat{BOX} = 2\widehat{ZCB} + 2\widehat{BAX} = \hat{C} + \hat{A} < \pi.$$

Así pues,  $X = -\beta\gamma$ , e igualmente se razona con  $Y, Z$ .



En resumen, el incentro del triángulo dado  $\widehat{ABC}$  es

$$I = -(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta),$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma$  son raíces cuadradas de  $A, B, C$  elegidas de modo que el triángulo  $\widehat{\alpha\beta\gamma}$  sea acutángulo. Notemos que las dos elecciones posibles dan lugar al mismo valor de  $I$ , pues suponen cambiar de signo todas las raíces, con lo que los productos no se alteran.

**Teorema 6.10 (Euler)** Sean  $O, H, I$  números complejos distintos con la condición de que si

$$G = \frac{2}{3}O + \frac{1}{3}H,$$

entonces  $I$  está en el círculo de diámetro  $\overline{GH}$  (pero no en su frontera) y es distinto de

$$N = \frac{1}{2}O + \frac{1}{2}H.$$

Entonces existe un único triángulo  $\widehat{ABC}$  cuyo circuncentro, cuyo ortocentro y cuyo incentro son precisamente  $O, H, I$ .

DEMOSTRACIÓN: No perdemos generalidad si suponemos que  $O = 0$ , con lo que  $G = H/3$  y  $N = H/2$ . Entonces  $K = H - 2I = 2(N - I) \neq 0$ , puesto que estamos suponiendo que  $I \neq N$ . Llamamos  $H' = H/K$  e  $I' = I/K$  (y claramente  $O/K=0$ ). Observemos que  $H' - 2I' = K/K = 1$ . Basta encontrar un triángulo  $\widehat{A'B'C'}$  con centros  $O, H', I'$ , pues entonces, llamando  $A = KA'$ ,  $B = KB'$ ,  $C = KC'$ , el triángulo  $\widehat{ABC}$  tendrá centros  $O, H, I$  (pues se obtiene a partir de  $\widehat{A'B'C'}$  por una semejanza que transforma  $O', H', I'$  en  $O, H, I$ ). Equivalentemente, podemos suponer que  $H - 2I = 1$ .

Ahora consideramos la transformación de Möbius

$$f(z) = \frac{z}{H - 2z},$$

que cumple que  $f(H) = -1$  y  $f(H/3) = 1$ ,  $f(N) = \infty$ ,  $f(I) = I$ . La circunferencia de diámetro  $\overline{GH}$  es ortogonal a la recta  $GH$  y se transforma en una circunferencia que pasa por  $\pm 1$  ortogonal a la recta que pasa por  $\pm 1$ , luego se transforma concretamente en la circunferencia de centro 0 y radio 1.

Más aún, como el punto  $N$ , que está en el interior de la circunferencia de partida, se transforma en  $\infty$ , concluimos que los puntos interiores de la circunferencia de diámetro  $\overline{GH}$  se transforman en los puntos exteriores de la circunferencia de centro 0 y radio 1. En particular, esto se aplica al punto  $I$ , por lo que concluimos que  $|I| > 1$ .

Consideremos ahora el polinomio:

$$z^3 - z^2 - Iz + |I|^2I.$$

Por el teorema fundamental del álgebra [ITAn 3.33], factoriza en la forma

$$z^3 - z^2 - Iz + |I|^2I = (z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma).$$

Efectuando el producto e igualando coeficientes (o, equivalentemente, por las fórmulas de Vieta [ITAl 8.4]), se cumplen las relaciones:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1, \quad \beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta = -I, \quad \alpha\beta\gamma = -|I|^2I.$$

Si  $z$  es cualquiera de las tres raíces, tenemos que

$$z^2(z - 1) = I(z - |I|^2).$$

Por lo tanto:

$$|z|^2|z-1| = |I||z-|I|^2|.$$

Elevamos al cuadrado y usamos que  $w\bar{w} = |w|^2$ :

$$|z|^4(z-1)(\bar{z}-1) = |I|^2(z-|I|^2)(\bar{z}-|I|^2).$$

Operando:

$$\begin{aligned} |z|^4(|z|^2 - z - \bar{z} + 1) &= |I|^2(|z|^2 - |I|^2(z + \bar{z}) + |I|^4), \\ |z|^6 - |z|^4(z + \bar{z}) + |z|^4 &= |I|^2|z|^2 - |I|^4(z + \bar{z}) + |I|^6, \\ |z|^6 - |I|^6 - (|z|^4 - |I|^4)(z + \bar{z}) + |z|^2(|z|^2 - |I|^2) &= 0, \\ (|z|^2 - |I|^2)(|z|^4 + |z|^2|I|^2 + |I|^4 - (|z|^2 + |I|^2)(z + \bar{z}) + |z|^2) &= 0. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que  $|z| \neq |I|$ . Entonces podríamos dividir entre el primer factor y quedaría

$$|z|^4 + |z|^2|I|^2 + |I|^4 - (|z|^2 + |I|^2)(z + \bar{z}) + |z|^2 = 0.$$

Equivalentemente:

$$(|z|^2 + |I|^2)(|z|^2 - (z + \bar{z})) + |I|^4 + |z|^2 = 0.$$

Pero se cumple<sup>3</sup> que  $-1 \leq |z|^2 - (z + \bar{z})$ , luego

$$(|z|^2 + |I|^2)(-1) + |I|^4 + |z|^2 \leq 0,$$

que se simplifica hasta  $|I|^4 \leq |I|^2$ , que contradice al hecho de que  $|I| > 1$ .

Por lo tanto, las tres raíces del polinomio considerado cumplen

$$|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = |I|.$$

Definimos  $A = \alpha^2$ ,  $B = \beta^2$ ,  $C = \gamma^2$ , de modo que

$$|A| = |B| = |C| = |I|^2.$$

Vamos a probar que estos tres puntos son distintos dos a dos, con lo que definirán un triángulo (pues al estar en una misma circunferencia no pueden ser colineales).

Supongamos, por ejemplo, que  $A = B$ , con lo que  $\alpha = \pm\beta$ . Si fuera  $\alpha = -\beta$ , entonces  $1 = \alpha + \beta + \gamma = \gamma$ , luego  $|\gamma| = 1$ , luego  $|I| = 1$ , contradicción.

Supongamos ahora que  $\alpha = \beta$ . Entonces las relaciones entre las tres raíces se reducen a

$$2\alpha + \gamma = 1, \quad \alpha(2\gamma + \alpha) = -I, \quad \alpha^2\gamma = -|I|^2I.$$

<sup>3</sup>Si  $z = x + yi$ , esto equivale a que  $x^2 + y^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 + y^2 \geq 0$ .

Tomando módulos en la segunda resulta  $|2\gamma + \alpha| = 1$ . Multiplicando por 2 la primera obtenemos que  $2 - 3\alpha = 2\gamma + \alpha$ , luego

$$|2 - 3\alpha| = |2\gamma + \alpha| = 1.$$

Elevando al cuadrado:

$$\begin{aligned}(2 - 3\alpha)(2 - 3\bar{\alpha}) &= 1, \\ 4 - 6(\alpha + \bar{\alpha}) + 9|\alpha|^2 &= 1, \\ 2(\alpha + \bar{\alpha}) &= 3|I|^2 + 1.\end{aligned}$$

Tomando módulos

$$3|I|^2 + 1 = 2|\alpha + \bar{\alpha}| = 4|\operatorname{Re} \alpha| \leq 4|\alpha| \leq 4|I|,$$

luego

$$3|I|^2 - 4|I| + 1 = (3|I| - 1)(|I| - 1) \leq 0.$$

Esto implica que  $|I| \leq 1$  y de nuevo tenemos una contradicción.

Así pues, tenemos un triángulo de circuncentro  $O$  y ortocentro

$$A + B + C = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta) = 1 + 2I = H.$$

Para probar que el incentro es  $I$  basta probar que el triángulo  $\widehat{\alpha\beta\gamma}$  es acutángulo. El teorema del coseno afirma que

$$|\beta - \gamma|^2 = |\alpha - \beta|^2 + |\alpha - \gamma|^2 - 2|\alpha - \beta||\alpha - \gamma| \cos \hat{\alpha}.$$

El ángulo  $\hat{\alpha}$  es agudo si y sólo si su coseno es positivo, es decir, si y sólo si

$$|\beta - \gamma|^2 < |\alpha - \beta|^2 + |\alpha - \gamma|^2.$$

Esto equivale a

$$(\beta - \gamma)(\bar{\beta} - \bar{\gamma}) < (\alpha - \beta)(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) + (\alpha - \gamma)(\bar{\alpha} - \bar{\gamma}),$$

o también a

$$\begin{aligned}2|I|^2 - \beta\bar{\gamma} - \bar{\beta}\gamma &< 4|I|^2 - (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\gamma), \\ \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + \alpha\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\gamma + \beta\bar{\gamma} + \bar{\beta}\gamma &< 2(|I|^2 + \beta\bar{\gamma} + \bar{\beta}\gamma).\end{aligned}$$

El miembro izquierdo es

$$(\alpha + \beta + \gamma)(\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma}) - |\alpha|^2 - |\beta|^2 - |\gamma|^2 = 1 - 3|I|^2.$$

El miembro derecho es

$$\begin{aligned}2|I|^2 + 2(\beta + \gamma)(\bar{\beta} + \bar{\gamma}) - 2|\beta|^2 - 2|\gamma|^2 &= 2(1 - \alpha)(1 - \bar{\alpha}) - 2|I|^2 \\ &= 2(1 - \alpha - \bar{\alpha} + |\alpha|^2 - |u|^2) = 2 - 2(\alpha + \bar{\alpha}).\end{aligned}$$

Por lo tanto, basta probar que

$$1 - 3|I|^2 < 2 - 2(\alpha + \bar{\alpha})$$

o equivalentemente:

$$2(\alpha + \bar{\alpha}) < 1 + 3|I|^2.$$

Ahora bien,  $2(\alpha + \bar{\alpha}) \leq 4|\alpha| = 4|I|$ , luego hay que probar que

$$3|I|^2 - 4|I| + 1 = (3|I| - 1)(|I| - 1) > 0,$$

lo cual es cierto, pues  $|I| > 1$ .

Con esto ya hemos probado la existencia de un triángulo  $\widehat{ABC}$  cuyos circuncentro, ortocentro e incentro son los puntos dados  $O, H, I$ . Veamos ahora que es único. Para ello suponemos otro triángulo  $\widehat{A'B'C'}$  con los mismos centros.

Las fórmulas

$$\overline{OI}^2 = R(R - 2r) = 2R\overline{NI}.$$

(véase la discusión tras el teorema 5.56) implican que el circunradio  $R$  y el inradio  $r$  de un triángulo vienen dados por

$$R = \frac{\overline{OI}^2}{2\overline{NI}}, \quad r = \frac{R}{2} - \overline{NI},$$

por lo que si dos triángulos tienen los mismos centros  $O, H, I$  (luego también el mismo  $N$ ), tienen también el mismo circunradio y el mismo inradio, es decir, tienen las mismas circunferencias circunscrita e inscrita. En particular tenemos que  $|A| = |B| = |C| = |A'| = |B'| = |C'| = R$ . Por otra parte, sabemos que

$$H = A + B + C = A' + B' + C'.$$

Sean  $\alpha', \beta', \gamma'$  raíces cuadradas de  $A', B', C'$  tales que el triángulo  $\widehat{\alpha'\beta'\gamma'}$  sea acutángulo, lo cual implica que

$$I = -(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = -(\alpha'\beta' + \alpha'\gamma' + \beta'\gamma').$$

Entonces

$$\begin{aligned} (\alpha' + \beta' + \gamma')^2 &= \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + 2(\alpha'\beta' + \alpha'\gamma' + \beta'\gamma') \\ &= A' + B' + C' - 2I = H - 2I = 1. \end{aligned}$$

Recordemos que hay dos ternas de raíces  $\alpha', \beta', \gamma'$  válidas, y que la otra es  $-\alpha', -\beta', -\gamma'$ . Realizando esta sustitución si es preciso, podemos suponer que  $\alpha' + \beta' + \gamma' = 1$ .

Por otra parte, hemos visto que  $\sqrt{R} = |\alpha| = |I|$ , luego de hecho

$$|\alpha'| = |\beta'| = |\gamma'| = |I|.$$

En particular  $|\alpha'\beta'\gamma'| = |I|^3$ , luego podemos expresar

$$\alpha'\beta'\gamma' = -\theta|I|^2I,$$

con  $|\theta| = 1$ . En resumen:

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 1, \quad \alpha'\beta' + \alpha'\gamma' + \beta'\gamma' = -I, \quad \alpha'\beta'\gamma' = -\theta|I|^2I.$$

Por consiguiente,  $\alpha', \beta', \gamma'$  son las raíces del polinomio

$$z^3 - z^2 - Iz + \theta|I|^2I.$$

Si probamos que  $\theta = 1$ , tendremos que  $\alpha', \beta', \gamma'$  son las raíces del mismo polinomio que tiene por raíces a  $\alpha, \beta, \gamma$ , luego, reordenando los vértices si es preciso, se cumplirá que  $\alpha = \alpha', \beta = \beta'$  y  $\gamma = \gamma'$ , lo que a su vez implica que  $A = A', B = B'$  y  $C = C'$ , y la unicidad del triángulo quedará probada.

Exactamente las mismas cuentas que hemos hecho en el caso  $\theta = 1$  nos dan ahora que

$$|z|^4(|z|^2 - z - \bar{z} + 1) = |I|^2(|z|^2 - |I|^2z\bar{\theta} - |I|^2\bar{z}\theta + |I|^4).$$

Esto se cumple cuando  $z$  es cualquiera de las tres raíces  $\alpha', \beta', \gamma'$  y, como las tres tienen módulo  $|I|$ , podemos sustituir  $|z|^2 = |I|^2$ , con lo que resulta

$$|I|^4(|I|^2 - z - \bar{z} + 1) = |I|^2(|I|^2 - |I|^2z\bar{\theta} - |I|^2\bar{z}\theta + |I|^4),$$

que se simplifica hasta

$$z + \bar{z} = z\bar{\theta} + \bar{z}\theta.$$

Si sumamos las tres ecuaciones que resultan de sustituir  $z$  por  $\alpha', \beta', \gamma'$  resulta

$$2 = \bar{\theta} + \theta.$$

Pero esto es  $2 \operatorname{Re} \theta = 2$ , luego  $\operatorname{Re} \theta = 1$  y, como  $|\theta| = 1$ , tiene que ser  $\theta = 1$ . ■

## 6.4 Números constructibles con regla y compás

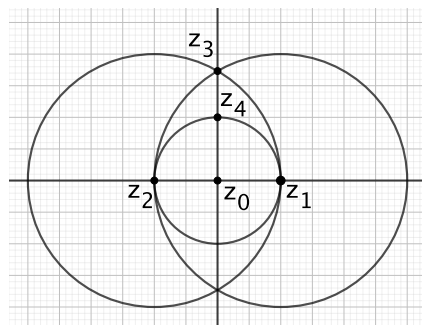
Una relación importante entre la geometría y el álgebra de los números complejos aparece en el estudio de qué figuras pueden construirse usando únicamente una regla y un compás. No disponemos del álgebra necesaria para probar resultados relevantes, pero sí que podemos probar fácilmente que las operaciones algebraicas básicas son constructibles. La definición básica es la siguiente:

**Definición 6.11** Un número complejo  $z$  es *constructible con regla y compás* si existe una sucesión  $z_0, \dots, z_n$  de números complejos tal que  $z_0 = 0$ ,  $z_1 = 1$ ,  $z_n = z$  y, para cada índice  $2 \leq i \leq n$ , se cumple uno de los casos siguientes:

1.  $z_i$  es la intersección de dos rectas que pasan por dos pares de puntos distintos anteriores en la sucesión.
2.  $z_i$  es uno de los puntos de intersección de una recta que pasa por dos pares de puntos distintos anteriores en la sucesión con una circunferencia cuyo centro es un punto anterior de la sucesión y cuyo radio es la distancia entre dos puntos anteriores de la sucesión.
3.  $z_i$  es uno de los puntos de intersección entre dos circunferencias distintas cuyos centros son puntos anteriores de la sucesión y cuyos radios son las distancias entre dos pares de puntos anteriores de la sucesión.

**Ejemplo** Para ilustrar la definición anterior vamos a aplicarla para comprobar que el número complejo  $i$  es constructible.

Para ello construiremos una sucesión de puntos  $z_0 = 0, z_1 = 1, z_2, z_3, z_4 = i$ .



En realidad, los puntos  $z_0 = 0$  y  $z_1 = 1$  no los “construimos”, sino que elegimos un punto arbitrario del plano al que asignarle el número complejo 0 y otro al que asignarle el número complejo 1.

El apartado 2) de la definición de constructibilidad nos permite añadir a la sucesión el punto  $z_2 = -1$ , pues está en la intersección de la recta que pasa por los puntos anteriores  $z_0, z_1$  con la circunferencia de centro un punto anterior  $z_0$  y radio la distancia entre dos puntos anteriores  $|z_0 - z_1| = 1$ .

El apartado 3) nos permite añadir a la lista uno de los puntos  $z_3$  donde se cortan la circunferencia de centro  $z_1$  y radio  $|z_1 - z_2| = 2$  con la circunferencia de centro  $z_2$  y radio  $|z_1 - z_2| = 2$ . Aunque no es relevante, de hecho  $z_3 = \pm\sqrt{3}i$ , donde el doble signo indica que podemos tomar como  $z_3$  cualquiera de los dos puntos.

Finalmente, el apartado 2) nos dice que podemos añadir a la lista  $z_4 = i$ , pues está en la intersección de la recta que pasa por  $z_0, z_3$  con la circunferencia de centro  $z_0$  y radio  $|z_1 - z_0| = 1$ . ■

Notemos que si una sucesión  $z_0, z_1, \dots, z_n$  cumple la definición de constructibilidad, cualquier sucesión  $z_0, \dots, z_i$  la cumple también, por lo que no sólo  $z_n$  es constructible, sino que, de hecho, todos los números  $z_i$  lo son.

Más aún, si definimos una *recta constructible* como una recta que pasa por dos puntos constructibles y una *circunferencia constructible* como una circunferencia cuyo centro es un punto constructible y cuyo radio es la distancia entre dos puntos constructibles, la definición de constructibilidad implica trivialmente los hechos siguientes:

0. *Los puntos  $0, 1$  son constructibles.*
1. *La intersección de dos rectas constructibles distintas es un punto constructible.*
2. *Los puntos de intersección de una recta y una circunferencia constructibles son constructibles.*
3. *Los puntos de intersección de dos circunferencias constructibles distintas son constructibles.*

Por ejemplo, si tenemos dos rectas secantes constructibles,  $PQ$  y  $RS$ , podemos construir sucesiones de números complejos según la definición de constructibilidad que terminen en  $P, Q, R, S$ . Poniendo una tras otra (eliminando los  $0, 1$  iniciales de todas menos la primera) obtenemos una sucesión según la definición de constructibilidad que contiene a los cuatro puntos, luego el punto 1) de la definición nos permite añadir a continuación el punto de la intersección.

En suma, lo que afirma la definición de constructibilidad es que los puntos constructibles son los que pueden ir construyéndose como intersecciones de rectas y circunferencias, con la condición de que sólo podemos trazar una recta si previamente hemos construido dos de sus puntos y que sólo podemos trazar una circunferencia si previamente hemos construido su centro y su radio se puede obtener poniendo las puntas del compás en dos puntos ya construidos.

Es claro que estas construcciones agotan los usos posibles de una regla (no marcada) y un compás, por lo que cualquier punto que sepamos construir en la práctica con regla y compás —al identificarlo con un número complejo— satisface la definición de constructibilidad y, recíprocamente, si conocemos una sucesión de puntos según la definición de constructibilidad, de ella obtenemos un procedimiento para construir el punto correspondiente en la práctica.

Así, por ejemplo, los problemas 1.8 y 1.9 nos aseguran que toda recta perpendicular a una recta constructible que pasa por un punto constructible es constructible, y el problema 1.11 nos asegura que la paralela a una recta constructible por un punto constructible es una recta constructible.

De aquí a su vez deducimos:

**Teorema 6.12** *Un número complejo es constructible si y sólo si lo son su parte real y su parte imaginaria.*

DEMOSTRACIÓN: Como  $0, 1, i$  son constructibles, el eje real y el eje imaginario son rectas constructibles. Si  $z = x + yi$  es constructible, la paralela al eje



imaginario que pasa por  $z$  es constructible, y ésta corta al real en  $x$ , luego  $x$  es un punto constructible. Similarmente, la paralela al eje real que pasa por  $z$  y corta al eje imaginario en el punto  $yi$ , luego éste es constructible. A su vez, la circunferencia de centro 0 y radio  $|yi - 0| = |y|$  es constructible, y corta al eje real en  $\pm y$ , luego  $y$  es constructible.

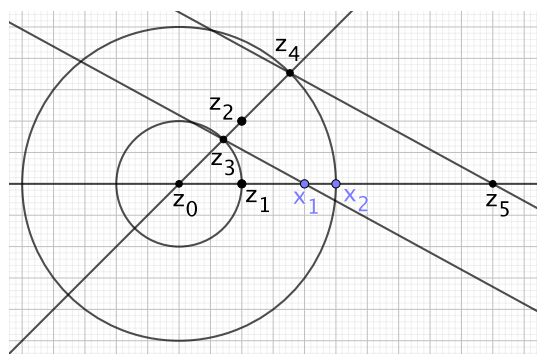
Recíprocamente, si  $x, y$  son constructibles, la circunferencia de centro 0 y radio  $|y|$  es constructible, y corta al eje imaginario en  $yi$ , luego éste es constructible, y también lo son la paralela al eje real que pasa por  $yi$  y la paralela al eje imaginario que pasa por  $x$ , así como su intersección, que es  $z$ . ■

**Teorema 6.13** *La suma, el producto y el cociente de números complejos constructibles es constructible.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos en primer lugar dos números reales constructibles,  $x_1, x_2$ . La circunferencia de centro  $x_1$  y radio  $|x_2|$  es constructible, y corta al eje real en los puntos  $x_1 \pm x_2$ , luego ambos son constructibles.

En general, si  $z_1 = x_1 + y_1i$  y  $z_2 = x_2 + y_2i$  son constructibles, por el teorema anterior también lo son  $x_1, x_2, y_1, y_2$ , luego también lo son  $x_1 + x_2, y_1 + y_2$  y, de nuevo por el teorema anterior, también lo es  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$ .

Supongamos ahora que  $x_1, x_2 > 0$  son dos números reales constructibles.



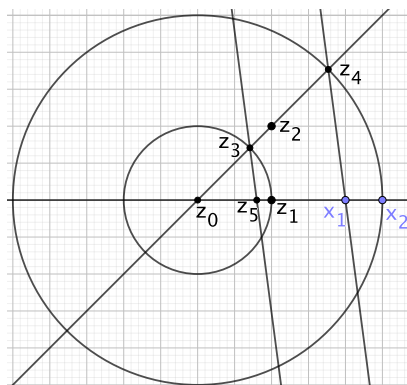
También son constructibles  $z_0 = 0, z_1 = 1, z_2 = 1 + i$  y la intersección  $z_3$  de la recta  $z_0z_3$  con la circunferencia de centro  $z_0$  y radio 1. Es claro entonces que los puntos  $z_4$  y  $z_5$  que muestra la figura son constructibles, pero  $|z_4| = x_2$  y, por el teorema de Tales,  $z_5 = x_1x_2$ .

Claramente, un número real  $x$  es constructible si y sólo si lo es  $-x$ , luego podemos concluir que el producto de números reales constructibles arbitrarios es constructible. En general, si  $z_1 = x_1 + y_1i$  y  $z_2 = x_2 + y_2i$  son constructibles, tenemos que

$$z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i,$$

que es constructible porque lo son sus partes real e imaginaria.

La construcción del cociente  $z_5 = x_1/x_2$  de dos números reales positivos es una ligera variación de la construcción del producto, como muestra la figura siguiente:



Es claro entonces que podemos construir el cociente de cualquier par de números reales (con tal de no dividir entre 0). Si  $z = x + yi \neq 0$ , entonces

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i$$

es constructible, pues lo son sus partes real e imaginaria, y si  $z_1, z_2$  son números complejos, el segundo no nulo, entonces  $z_1/z_2 = z_1(1/z_2)$  es constructible por ser producto de dos números constructibles. ■

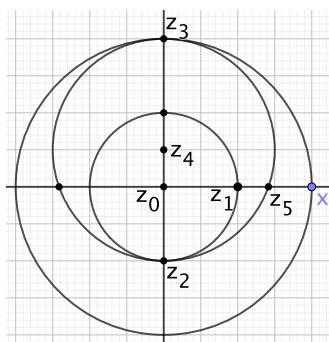
Así pues, si sumamos, restamos, multiplicamos o dividimos números constructibles, obtenemos números constructibles. Equivalentemente:

**Teorema 6.14** *El conjunto de los números complejos constructibles con regla y compás es un subcuerpo del cuerpo  $\mathbb{C}$  de todos los números complejos.*

En particular, todo número racional (y todo número complejo con partes real e imaginaria racionales) es constructible. Hay otra importante operación algebraica constructible:

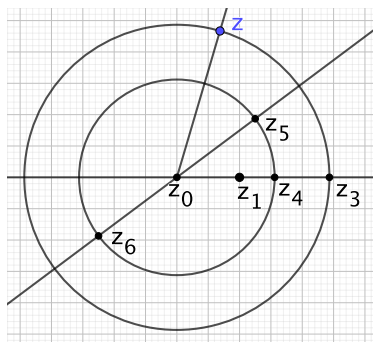
**Teorema 6.15** *Las raíces cuadradas de un número complejo constructible son constructibles.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos primero el caso de un número real  $x > 0$ .



Construimos  $z_2 = -1$ ,  $z_3 = xi$ ,  $z_4 = \frac{1}{2}(z_2 + z_3)$  y trazamos la circunferencia de centro  $z_4$  que pasa por  $z_3$ , que corta al eje real en  $\pm z_5$ . Entonces, la potencia de 0 respecto de dicha circunferencia es  $\Pi = z_5^2 = x \cdot 1 = x$ , luego  $z_5 = \sqrt{x}$ .

Si  $z = re^{i\theta} \neq 0$  es un número complejo arbitrario, construimos  $z_3 = |z| = r$  y  $z_4 = \sqrt{r}$ , bisecamos el ángulo  $\theta$  que  $z$  forma con el semieje real positivo y las intersecciones  $z_5$  y  $z_6$  de las bisectrices con la circunferencia de centro  $z_0$  y radio  $z_4$  son las raíces cuadradas de  $z$ , pues  $z_5 = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ .



Quizá el lector se pregunte qué necesidad había de dar la definición 6.11 de número complejo constructible con regla y compás. Al fin y al cabo, hemos construido muchas figuras sin necesidad de definir algebraicamente los números constructibles. La razón es que la definición algebraica nos permite dar condiciones *necesarias* para que un número complejo sea constructible, lo cual a su vez nos permite probar que determinadas figuras —aquellas cuyos puntos no cumplen tales condiciones necesarias— NO son constructibles con regla y compás. Como hemos señalado en la introducción, Wantzel dio una caracterización puramente algebraica de la constructibilidad con regla y compás, pero no estamos en condiciones de probarla, así que nos limitaremos a dar una condición necesaria, pero no suficiente:

**Teorema 6.16** *Todos los números complejos constructibles con regla y compás son algebraicos.*

DEMOSTRACIÓN: Remitimos a la sección 8.3 [ITAl] para las definiciones y hechos básicos sobre números algebraicos que vamos a necesitar. En particular [ITAl 8.9] al sumar, multiplicar o dividir números algebraicos obtenemos números algebraicos. Más aún (véanse las observaciones previas al teorema [ITAl 8.12]), un número complejo  $z = x + yi$  es algebraico si y sólo si lo son  $x, y$ .

Si un número complejo es constructible, entonces aparece en una sucesión de números  $z_0, z_1, \dots, z_n$  en las condiciones de la definición 6.11. Basta probar que cada  $z_i$  es algebraico, para lo cual podemos razonar por inducción. Ciertamente  $z_0 = 0, z_1 = 1$  son algebraicos. Podemos suponer que son algebraicos todos los  $z_j$  para  $j < i$  y tenemos que probar que  $z_i$  es algebraico. Distinguimos tres casos según la definición.

1) Supongamos que  $z_i$  es la intersección de dos rectas que pasan por dos pares de puntos anteriores. Si  $a + bi$  y  $c + di$  es uno de estos pares, la recta que pasa por estos puntos tiene ecuación

$$(c - a)(y - b) = (d - b)(x - a),$$

pues, ciertamente, esta ecuación corresponde a una recta, y la cumplen ambos puntos. Operando llegamos a una ecuación de la forma  $Ax + By = C$  en la que  $A, B, C$  son sumas y productos de  $a, b, c, d$  y, como éstos son algebraicos por hipótesis de inducción, concluimos que  $A, B, C$  también lo son.

Así pues, si  $z_i = x + yi$ , el par  $(x, y)$  es la solución de un sistema de dos ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} Ax + By = C \\ A'x + B'y = C' \end{array} \right\} \quad \text{o} \quad (x, y) \begin{pmatrix} A & A' \\ B & B' \end{pmatrix} = (C, C')$$

con coeficientes algebraicos. Por lo tanto,

$$(x, y) = (C, C') \begin{pmatrix} A & A' \\ B & B' \end{pmatrix}^{-1}$$

y de aquí se sigue que  $x, y$  se obtienen mediante sumas, productos y cocientes a partir de los coeficientes de la ecuación, luego son algebraicos.

2) Supongamos que  $z_i = x + yi$  está en la intersección de una recta que pasa por dos puntos anteriores de la sucesión (luego algebraicos) y una circunferencia con centro en un punto de la sucesión (luego algebraico) y radio igual a la distancia entre dos puntos anteriores de la sucesión (que será algebraico, porque las raíces cuadradas de los números algebraicos son algebraicas).

Como en el caso anterior, tenemos que la ecuación de la recta será de la forma  $Ax + By = C$ , donde  $A, B, C$  son algebraicos. Si la circunferencia tiene centro  $(a, b)$  y radio  $r$ , su ecuación es

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

que se desarrolla en la forma

$$x^2 + y^2 + A'x + B'y + C' = 0,$$

donde todos los coeficientes se obtienen mediante sumas y productos a partir de  $a, b, r$ , luego son algebraicos. Uno de los coeficientes  $A$  o  $B$  tiene que ser no nulo. Pongamos que  $B \neq 0$ , y entonces

$$y = C/B - (A/B)x,$$

luego

$$x^2 + (C/B - (A/B)x)^2 + A'x + B'(C/B - (A/B)x) + C' = 0.$$

Esta ecuación sólo puede tener dos soluciones, que son las primeras coordenadas de los dos puntos de corte entre la recta y la circunferencia (que podría ser una

solución doble si la recta es tangente). Se trata de una ecuación de segundo grado con coeficientes algebraicos, luego sus raíces son algebraicas [ITAl 8.10]. Una vez sabemos que  $x$  es algebraico, la ecuación de la recta nos da que  $y$  también lo es.

3) Supongamos, por último, que  $z_i = x + yi$  es la intersección de dos circunferencias obtenidas a partir de puntos anteriores de la sucesión según la definición de constructibilidad. Según hemos visto en el apartado anterior,  $(x, y)$  es una de las (a lo sumo) dos soluciones de un sistema de ecuaciones de la forma

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + Ax + By + C &= 0 \\ x^2 + y^2 + A'x + B'y + C' &= 0 \end{aligned} \right\}$$

donde todos los coeficientes son algebraicos. Restándolas obtenemos la ecuación

$$(A - A')x + (B - B')y + C - C' = 0,$$

que es también satisfecha por las coordenadas de  $z_i$  y no puede tener todos los coeficientes nulos, pues entonces las dos circunferencias serían la misma. Por lo tanto, se trata de la ecuación de una recta y  $z_i$  es también uno de los puntos de intersección de dicha recta con una de las circunferencias. Esto nos pone en la situación del caso anterior (pues los coeficientes de la recta son claramente algebraicos) y concluimos de nuevo que  $z_i$  es algebraico. ■

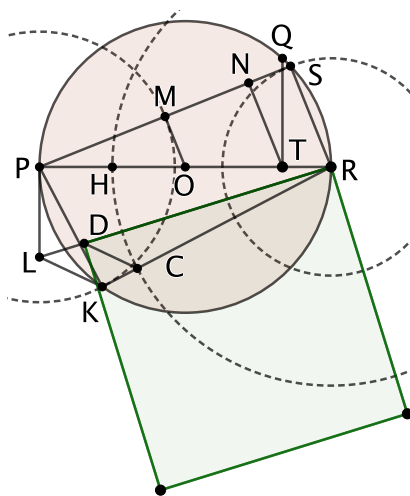
Combinando este teorema con el hecho de que  $\pi$  es trascendente [ITAn 10.9], tenemos probado que ni la cuadratura del círculo ni la rectificación de la circunferencia pueden conseguirse con regla y compás.

**La aproximación de Ramanujan** Naturalmente, esto no impide que existan buenas construcciones aproximadas. En principio, complicando la construcción podemos conseguir aproximaciones tan buenas como queramos, por lo que el interés de una construcción aproximada está en el equilibrio entre su sencillez y su grado de precisión. Un ejemplo notable de cuadratura aproximada del círculo se debe a Ramanujan:

**Problema 6.1** *Construir un cuadrado de área aproximadamente igual a la de un círculo dado.*

1. Trazamos el punto medio  $H$  del radio  $\overline{PO}$ .
2. Dividimos en tres partes iguales el radio  $\overline{OR}$  y trazamos el punto  $T$  más cercano a  $R$ .
3. Levantamos la perpendicular  $\overline{QT}$ .
4. Trazamos la cuerda  $\overline{RS} = \overline{QT}$ .
5. Trazamos los puntos  $M$  y  $N$  donde las paralelas a  $\overline{RS}$  por  $O$  y  $T$  cortan a  $\overline{PS}$ .

6. Trazamos la cuerda  $\overline{PK} = \overline{PM}$ .
7. Trazamos la perpendicular  $\overline{PL} = \overline{MN}$ .
8. Trazamos el punto  $C$  donde la circunferencia de centro  $R$  y radio  $\overline{RH}$  corta a  $\overline{RK}$ .
9. Trazamos el punto  $D$  donde la paralela a  $\overline{LK}$  por  $C$  corta a  $\overline{RL}$ .
10. Construimos el cuadrado de lado  $\overline{DR}$ .



Si suponemos, por simplicidad, que  $\overline{OR} = 1$ , entonces  $\overline{OT} = 2/3$ , luego  $\overline{RS}^2 = \overline{QT}^2 = 5/9$  y  $\overline{PS}^2 = 31/9$ , luego

$$\overline{PK}^2 = \overline{PM}^2 = 31/36, \quad \overline{PL}^2 = \overline{MN}^2 = 31/81,$$

luego  $\overline{RK}^2 = \overline{PR}^2 - \overline{PK}^2 = 113/36$  y  $\overline{RL}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{PL}^2 = 355/81$ . Por el teorema de Tales

$$\frac{\overline{RD}}{\overline{RC}} = \frac{\overline{RL}}{\overline{RK}} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{355}{113}},$$

y  $\overline{RC} = 3/2$ , luego

$$\overline{RD} = \sqrt{\frac{355}{113}} \approx 1.77245392,$$

mientras que  $\sqrt{\pi} = 1.77245385\dots$ , lo que supone un error del 0.0000042%. Por ejemplo, si el círculo de partida tiene un radio de 10 cm, el error en el lado del cuadrado construido es de 0.0075 micras, inferior al tamaño de un virus.

Vemos que la aproximación se basa en que  $355/113$  es un convergente de la fracción continua de  $\pi$  (véase la sección 10.1 de [ITA1]). ■



1. Dada una circunferencia, trazamos dos diámetros perpendiculares.
2. Trazamos la tangente por  $C$ .
3. Trazamos el punto  $Y$  donde la circunferencia de centro  $B$  y el mismo radio corta a la circunferencia dada.
4. Trazamos la intersección  $X$  de la recta  $OY$  con la tangente en  $C$ .
5. Sumamos a  $X$  tres veces el radio de la circunferencia, hasta obtener  $Z$ .
6. El segmento  $\overline{AZ}$  es una aproximación a la rectificación de media circunferencia. Si queremos la rectificación de la circunferencia entera, lo duplicamos.

En efecto, si suponemos el radio unitario, el triángulo  $\widehat{OBY}$  es equilátero, luego la distancia de  $Y$  a  $\overline{OB}$  es  $\sqrt{3}/2$ , luego

$$\frac{\overline{XC}}{1/2} = \frac{\overline{OC}}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

luego  $\overline{XC} = \sqrt{3}/3$  y  $\overline{CZ} = 3 - \sqrt{3}/3$ . Finalmente:

$$\overline{AZ}^2 = 4 + 9 + 1/3 - 2\sqrt{3} = \frac{40}{3} - 2\sqrt{3}$$

y

$$\overline{AZ} = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} = \mathbf{3.141533338705\dots}$$

que aproxima a  $\pi$  con un error del 0.0019%. Para un círculo de 10 cm de radio, el error es de 6 micras. ■

**La trisección del ángulo** Es fácil dividir un segmento en cualquier número de partes iguales con regla y compás, por lo que podría pensarse que tampoco debería ser difícil dividir un ángulo dado en cualquier número de partes iguales. Los griegos encontraron muchos medios de trisecar ángulos (por ejemplo, hemos visto el método de Arquímedes mediante *neusis*, que requiere una regla marcada), pero ninguno de ellos satisfacía el requisito ideal de usar únicamente la regla y el compás. Pappus de Alejandría estaba convencido de que la trisección del ángulo con regla y compás era imposible, pero no es obvio en absoluto cómo se puede probar que una construcción no puede realizarse.

Como ya hemos señalado, este tipo de resultados negativos se obtienen con relativa facilidad a partir de la caracterización de Wantzel puramente algebraica de los números constructibles que no estamos en condiciones de demostrar aquí, pero vamos a enunciar sin prueba una condición necesaria más fina que el mero carácter algebraico:

**Teorema (Wantzel)** *Los números complejos constructibles con regla y compás son algebraicos con polinomio mínimo de grado potencia de 2.*



Vamos a ver que esta condición no la cumple, por ejemplo,  $\cos 20^\circ$ , por lo que no es posible construir el número complejo

$$\omega = \cos 20^\circ + i \operatorname{sen} 20^\circ,$$

lo cual es claramente equivalente a que no se puede construir con regla y compás un ángulo de  $20^\circ$ . Como, por otra parte, el ángulo de  $60^\circ$  es fácilmente constructible, éste es un ejemplo de ángulo constructible no trisecable.

Consideremos la fórmula  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ , que se deduce de la fórmula para el coseno de una suma.<sup>4</sup> Haciendo  $x = 20^\circ$  obtenemos que

$$4 \cos^3 20^\circ - 3 \cos 10^\circ = \frac{1}{2},$$

luego  $\cos 20^\circ$  es una de las raíces del polinomio

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8},$$

Si probamos que este polinomio es irreducible en  $\mathbb{Q}[x]$ , entonces [ITAl 8.7] será el polinomio mínimo de  $\cos 20^\circ$  y, como tiene grado 3, el teorema anterior nos permite concluir que  $\cos 20^\circ$  no es constructible.

Ahora bien, para que un polinomio de grado 3 sea irreducible en  $\mathbb{Q}[x]$  basta con que no tenga raíces en  $\mathbb{Q}$ . Si  $r$  fuera una raíz racional del polinomio, o también de  $8x^3 - 2x - 1$ , entonces  $2r$  sería una raíz racional del polinomio  $x^3 - x - 1$  y, por el teorema [ITAl 2.29], tendría que ser un número entero divisor del término independiente, es decir, de  $-1$ . Pero  $\pm 1$  no son raíces del polinomio, así que concluimos que no tiene raíces enteras. ■

**Ejercicio:** Usando el teorema que hemos enunciado sin demostración en el apartado anterior, demostrar que no es posible construir con regla y compás un heptágono regular. AYUDA [ITAl 17.1], [ITAl 3.34].

## 6.5 Construcciones con regla marcada y compás

En la introducción hemos discutido el problema de la duplicación del cubo. Admitiendo el teorema de Wantzel que no hemos demostrado, ya sabemos que no es resoluble con regla y compás, pues el polinomio mínimo de  $\sqrt[3]{2}$  es  $x^3 - 2$  y, como su grado no es potencia de 2, podemos afirmar que  $\sqrt[3]{2}$  no es constructible con regla y compás. En la introducción hemos hablado de la solución “sólida” de Menecmo, basada en el trazado de una parábola. Ahora vamos a ver que también es posible construir  $\sqrt[3]{2}$  mediante *neusis*, usando una regla con dos marcas que determinan un segmento de longitud unitaria.

En los problemas 3.5 y 3.6 vimos cómo emplear la *neusis* para construir un heptágono regular y para trisecar un ángulo dado. Ahora veremos que la *neusis* también nos permite calcular raíces cúbicas de números complejos.

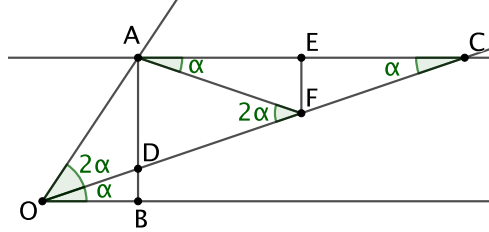
<sup>4</sup>[ITAn], fórmulas (5.13).

La definición de *número complejo constructible con regla marcada y compás* se obtiene modificando de forma obvia la definición 6.11 para incorporar el principio siguiente:

*Si  $z$  es un punto constructible,  $r_1, r_2$  son rectas o circunferencias constructibles,  $z_1 \neq z_2$  son puntos de  $r_1, r_2$ , respectivamente alineados con  $z$  y tales que  $|z_1 - z_2| = 1$ , entonces  $z_1$  y  $z_2$  también son constructibles.*

Estamos considerando aquí tres tipos de *neusis*: recta-recta, recta-circunferencia o circunferencia-circunferencia. La construcción del heptágono regular y la trisección del ángulo que hemos visto usan una *neusis* recta-circunferencia. Es interesante observar que también pueden llevarse a cabo con una *neusis* recta-recta. Por ejemplo:

**Problema 6.3** *Trisecar un ángulo dado.*



Podemos suponer que el ángulo dado es agudo, pues si es obtuso podemos bisecarlo, trisecar el ángulo bisecado y multiplicar por dos el resultado.

1. Trazamos el punto  $A$  sobre un lado del ángulo dado tal que  $\overline{OA} = 1/2$ .
2. Trazamos la perpendicular al otro lado por  $A$ , que cortará a éste en un punto  $B$ .
3. Trazamos la paralela al lado  $OB$  por  $A$ .
4. Mediante *neusis*, trazamos los puntos  $C$  y  $D$  sobre la recta paralela trazada en el paso anterior y sobre la perpendicular  $AB$  de modo que estén alineados con  $O$  y  $|\overline{CD}| = 1$ .
5. El ángulo  $\alpha = \widehat{BOD}$  es la trisección del ángulo dado.

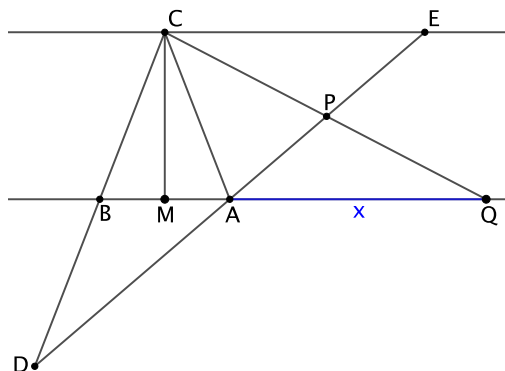
Para probarlo consideramos el punto medio  $E$  del segmento  $\overline{AC}$  y el punto medio  $F$  de  $\overline{DC}$ . Tenemos que  $\widehat{FCE} = \alpha$ , por ser alterno interno a  $\widehat{BOD}$ . Como los triángulos  $\widehat{AEF}$  y  $\widehat{CEF}$  son semejantes (son rectángulos con catetos iguales), también  $\widehat{FAE} = \alpha$ , luego  $\widehat{EFO} = 2\alpha$ .

Pero  $\widehat{OAF}$  es isósceles, pues  $\overline{AF} = \overline{CF} = 1/2\overline{CD} = 1/2 = \overline{OA}$ , luego  $\widehat{DOA} = 2\alpha$ , luego el ángulo dado es  $3\alpha$ . ■

Es obvio que los números complejos constructibles con regla marcada y compás forman también un cuerpo,<sup>5</sup> y que las raíces cuadradas de los números constructibles con regla marcada y compás son constructibles con regla marcada y compás. Pero ahora podemos probar:

**Teorema 6.17** *Las raíces cúbicas de un número complejo constructible con regla marcada y compás son constructibles con regla marcada y compás.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos en primer lugar un número real  $a$  constructible con regla marcada y compás, y veamos que  $\sqrt[3]{a}$  también es constructible. No perdemos generalidad si suponemos que  $a > 0$  y, si  $a > 1$ , lo cambiamos por  $1/a$ , pues  $\sqrt[3]{a} = 1/\sqrt[3]{1/a}$ , luego si  $\sqrt[3]{1/a}$  es constructible, lo mismo le sucede a  $\sqrt[3]{a}$ . Así pues, podemos suponer que  $0 < a < 1$ . En realidad la construcción que vamos a dar funciona si  $0 < a < 8$ .



Construimos un triángulo isósceles  $\widehat{ABC}$  con dos lados unitarios y  $\overline{AB}$  de longitud  $a/4$ . Prolongamos el lado  $\overline{BC}$  de modo que  $B$  sea el punto medio de  $\overline{CD}$ . Trazamos la paralela a  $\overline{AB}$  por  $C$  y llamamos  $E$  al punto de corte entre ésta y  $\overline{AD}$ . Ahora usamos la regla marcada para construir los puntos  $P$  y  $Q$  que disten una unidad y sean colineales con  $C$ .

Tenemos que  $\widehat{ADB}$  y  $\widehat{EDC}$  están en posición de Tales, luego son semejantes, y es claro que la razón de semejanza es 2, por lo que  $\overline{CE}$  tiene longitud  $a/2$  (el doble que  $\overline{AB}$ ). También es claro que  $\widehat{PEC}$  es semejante a  $\widehat{PAQ}$ , luego

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{PQ}} = \frac{x}{1},$$

donde llamamos  $x$  a la longitud de  $\overline{AQ}$ . Así,  $\overline{CP}$  mide  $a/2x$ .

Llamamos  $M$  al punto medio de  $\overline{AB}$ , con lo que el teorema de Pitágoras nos da que

$$\overline{CQ}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{MQ}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BM}^2 + \overline{MQ}^2,$$

<sup>5</sup>Puede probarse que los números constructibles con regla marcada y compás también son algebraicos, luego la regla marcada no resuelve los problemas de la cuadratura del círculo o la rectificación de la circunferencia.

luego

$$\left(1 + \frac{a}{2x}\right)^2 = 1 - \left(\frac{a}{8}\right)^2 + \left(x + \frac{a}{8}\right)^2.$$

Operando llegamos a  $4x^4 + ax^3 - 4ax - a^2 = 0$ , que factoriza como

$$(4x + a)(x^3 - a) = 0.$$

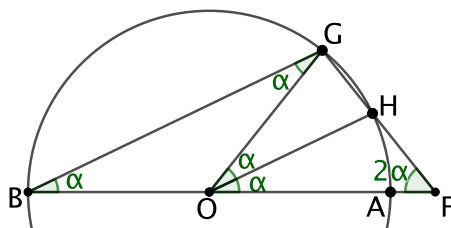
Como el primer factor es positivo, resulta que  $x = \sqrt[3]{a}$ .

En general, si  $z = re^{i\theta}$  es constructible, una raíz cúbica es  $w = \sqrt[3]{r}e^{i\theta/3}$ , que puede construirse igual que hemos construido su raíz cuadrada en la prueba de 6.15, sólo que ahora construimos la raíz cúbica del módulo en lugar de la raíz cuadrada y trisecamos el argumento en vez de bisecarlo. Las tres raíces cúbicas son  $w\zeta^j$ , para  $j = 0, 1, 2$ , donde  $\zeta$  es una raíz cúbica primitiva de la unidad en  $\mathbb{C}$ , que es, de hecho, constructible con regla y compás. ■

Terminamos mostrando una construcción debida a Viète del heptágono regular que se diferencia de la que vimos en el problema 3.5 en que usa una *neusis* respecto de dos rectas, en lugar de respecto de una recta y una circunferencia.

Para ello vamos a dar una caracterización geométrica del ángulo  $2\pi/7$ :

Consideremos la figura siguiente, en la que  $\overline{FG} = \overline{OG} = \overline{OB} = 1$ . Vamos a probar que si  $\overline{FA} \cdot \overline{FB}^2 = \overline{OF}$ , entonces  $\widehat{AOG} = 2\pi/7$ .



Llamamos  $H$  al otro punto donde la recta  $FG$  corta a la circunferencia de centro  $O$  y radio 1 y vamos a probar que  $OH$  es paralela a  $BG$ . Para ello basta con que

$$\frac{\overline{FH}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{OF}}{\overline{OB}},$$

pues entonces los triángulos son semejantes y están en posición de Tales. A su vez, esto resulta de combinar la hipótesis con el teorema de la potencia, según el cual  $\overline{FH} = \overline{FH} \cdot \overline{FG} = \overline{FA} \cdot \overline{FB}$ .

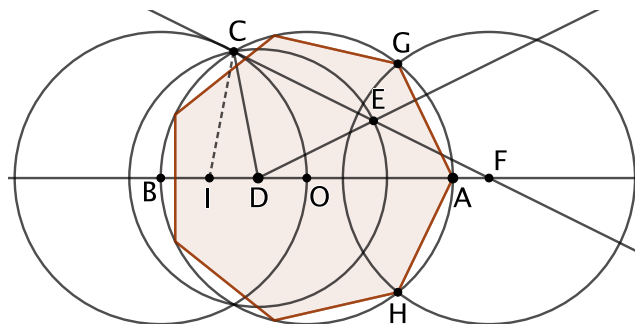
Usando el paralelismo de  $OH$  y  $BG$  junto con el hecho de que los triángulos son isósceles se concluye inmediatamente que todos los ángulos marcados con  $\alpha$  en la figura son iguales y que el ángulo en  $F$  es  $2\alpha$ , como se indica. Ahora usamos que este ángulo debe ser la semidiferencia de los arcos que abarca en la circunferencia (teorema 1.42), lo que nos da que

$$\frac{\pi - 3\alpha}{2} = 2\alpha,$$

luego  $\alpha = \pi/7$  y  $\widehat{GOA} = 2\pi/7$ .

Con esto estamos en condiciones de justificar la construcción de Viète del heptágono regular:

**Problema 6.4** *Construir un heptágono regular.*



1. Trazamos la circunferencia de centro  $O$  y radio  $1$ , en la que marcamos los puntos  $A = 1$  y  $B = -1$ .
2. Trazamos la circunferencia de centro  $B$  y radio  $1$ , que nos determina el punto  $C$ .
3. Trazamos  $D = -1/3$ .
4. Trazamos la circunferencia de centro  $D$  y radio  $\overline{DC}$ .
5. Trisecamos el ángulo  $\widehat{BDC}$ , para formar  $\widehat{ODE}$ .
6. La recta  $CE$  determina el punto  $F$ .
7. La circunferencia de centro  $F$  y radio  $1$  determina los puntos  $G, H$ , que son dos de los vértices del heptágono regular.

Para probar que el método es correcto añadimos a la figura el punto medio  $I$  del segmento  $\overline{BD}$ , de modo que  $D = -1/3$  e  $I = -2/3$ . El ángulo en  $F$  es la semidiferencia de los arcos que abarca en la circunferencia de centro  $D$ . Si llamamos  $\alpha$  al menor, el mayor es  $3\alpha$ , luego el ángulo en  $F$  es también  $\alpha$ . Esto significa que el triángulo  $\widehat{DEF}$  es isósceles, al igual que  $\widehat{ICD}$ , pues la perpendicular al eje real horizontal por  $C$  pasa por  $-1/2$ , que es el punto medio de  $\overline{ID}$ . La altura de este triángulo mide  $\sqrt{3}/2$ , y su base mide  $1/3$ , de donde se sigue que sus lados iguales miden

$$r = \frac{\sqrt{7}}{3} = \overline{IC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF}.$$

Si llamamos  $\alpha$  al ángulo en  $F$ , tenemos que el ángulo en  $I$  es  $3\alpha$ , luego

$$\cos 3\alpha = \frac{1}{6r}, \quad \cos \alpha = \frac{d}{2r},$$

donde  $d = \overline{DF}$ . Ahora usamos la relación  $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$ . Al sustituir las relaciones anteriores y simplificar, queda

$$d^3 - \frac{7}{3}d - \frac{7}{27} = 0.$$

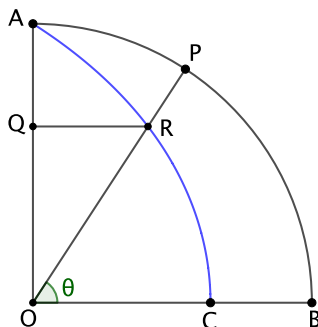
Ahora basta probar que  $\overline{FA} \cdot \overline{FB}^2 = \overline{OF}$ , es decir, que

$$\left(d - \frac{4}{3}\right) \left(d + \frac{2}{3}\right)^2 = d - \frac{1}{3},$$

pero al desarrollar esta ecuación obtenemos precisamente la anterior. ■

## 6.6 La trisectriz de Hipias

Consideremos un cuarto de circunferencia de extremos  $A$  y  $B$ , y supongamos que un punto  $P$  se mueve a través de él desde  $A$  hasta  $B$  a velocidad constante. Al mismo tiempo, otro punto  $Q$  se mueve desde  $A$  hasta  $O$  también a velocidad constante, y de modo que  $Q$  llega a  $O$  al mismo tiempo que  $P$  llega a  $B$ . La *trisectriz de Hipias* es la curva que describe el punto  $R$  en el que el radio  $\overline{OP}$  corta a la paralela a  $\overline{OB}$  por  $Q$ .



Vamos a caracterizar la trisectriz “estáticamente”, es decir, sin hacer referencia a movimientos y velocidades. Por simplicidad vamos a suponer que el arco tiene radio 1. Observamos que  $P$  tiene que recorrer una longitud de  $\pi/2$  al mismo tiempo que  $Q$  recorre una longitud de 1, luego si elegimos la unidad de tiempo de modo que la velocidad de  $P$  sea 1 (con lo que tardará  $\pi/2$  unidades de tiempo en hacer su recorrido), la velocidad de  $Q$  tiene que ser  $2/\pi$  para recorrer una unidad en el mismo tiempo.

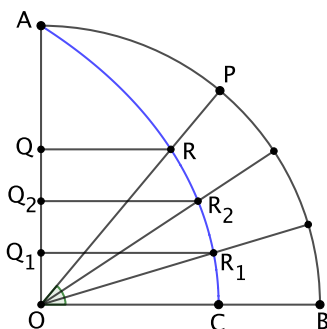
Si tomamos  $O$  como origen de coordenadas y llamamos  $\theta$  al ángulo que cumple  $P = (\cos \theta, \sin \theta)$ , en cada instante, el espacio recorrido por  $P$  es  $\pi/2 - \theta$ , luego el espacio recorrido por  $Q$  tiene que ser

$$\overline{AQ} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = 1 - \frac{2\theta}{\pi},$$

luego  $\overline{OQ} = 2\theta/\pi$ . Entonces  $R = \lambda(\cos \theta, \sin \theta)$  y, como  $\lambda \sin \theta = \overline{OQ} = 2\theta/\pi$ , despejando  $\lambda$  y sustituyendo queda que los puntos de la trisectriz son los de la forma

$$(x, y) = \left( \frac{2\theta \cos \theta}{\pi \sin \theta}, \frac{2\theta}{\pi} \right), \quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Hipias observó que si tenemos una trisectriz dibujada en un papel entonces podemos trisecar cualquier ángulo con regla y compás. Más aún, podemos dividirlo en cualquier número de partes iguales.



En efecto, como un punto  $R$  de la trisectriz tiene la propiedad de que su segunda coordenada es proporcional a su argumento, si consideramos cualquier ángulo agudo  $\theta = \widehat{BOP}$ , calculamos la intersección  $R$  de  $\overline{OP}$  con la trisectriz y a su vez el punto  $Q$  donde la paralela a  $OB$  corta al eje vertical  $OA$ , entonces  $\overline{OQ} = 2\theta/\pi$ , luego si dividimos  $\overline{OQ}$  en tres partes iguales (o las que se quiera), los puntos  $R_1$  y  $R_2$  de la trisectriz situados en la horizontal de las divisiones tendrán argumento  $\theta/3$  y  $2\theta/3$ , respectivamente, luego  $\widehat{BOR_1}$  es la trisección del ángulo dado.

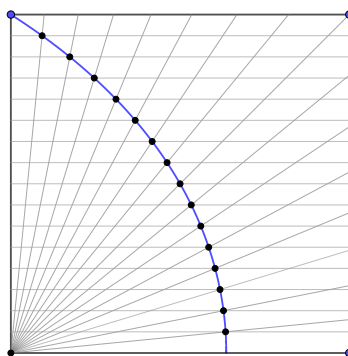
Esto lleva a la pregunta: ¿cómo podemos dibujar una trisectriz? Si llamamos  $t = 2\theta/\pi$ , entonces las coordenadas de la trisectriz son

$$(x, y) = \left( t \cot \frac{\pi t}{2}, t \right), \quad 0 < t \leq 1,$$

luego la trisectriz no es sino la gráfica de la función

$$f(t) = t \cot \frac{\pi t}{2}$$

y la trisectriz que muestran las figuras precedentes las ha calculado un ordenador con las técnicas usuales para representar funciones gráficamente, es decir, evaluándola en un número finito de puntos suficientemente grande, aproximando la función cotangente con la precisión suficiente. Ahora bien, es interesante observar que en teoría podemos obtener una representación aceptable de la trisectriz sin más ayuda que una regla y un compás, como muestra la figura siguiente:

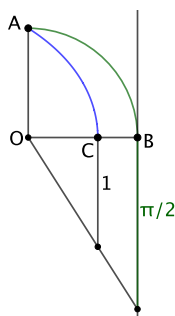


En ella hemos dividido el ángulo recto en  $2^4 = 16$  ángulos iguales mediante bisecciones sucesivas, y también hemos dividido un lado vertical del cuadrado en otros tantos segmentos iguales, y hemos trazado una recta paralela por cada división. Así, la intersección de cada paralela con su bisectriz correspondiente es un punto de la trisectriz, y de este modo hemos trazado 16 puntos de la trisectriz que nos permiten perfilar la curva. Si queremos más precisión sólo tenemos que volver a bisecar cada ángulo para obtener 32 puntos, o 64 o cualquier potencia de 2 que queramos.

La trisectriz de Hipias también se conoce como *cuadratriz de Dinóstrato*, pues, tal y como hemos apuntado en la introducción, hacia 350 a.C., un alumno de Platón llamado Dinóstrato (hermano de Menecmo) descubrió que el punto final de la curva cumple  $\overline{OC} = 2/\pi$ , luego una simple manipulación nos permite construir un segmento de longitud  $\pi/2$ , es decir, la rectificación del cuadrante, y a partir de ahí es fácil rectificar la circunferencia completa o cuadrar el círculo.

En efecto, a partir de la expresión analítica de la trisectriz es inmediato que

$$\overline{OC} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2\theta \cos \theta}{\pi \sin \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \frac{\cos \theta}{\frac{\sin \theta}{\theta}} = \frac{2}{\pi}.$$



Notemos que la construcción precedente mediante bisecciones sucesivas no nos permite calcular directamente el punto  $C$ , pero sí aproximaciones arbitrariamente buenas. Precisamente el hecho de que  $\overline{OC} = \pi/2$  implica que  $C$  no es constructible con regla y compás.



## Capítulo VII

# Cónicas

En la introducción hemos explicado cómo Menecmo definió las secciones cónicas como las curvas que resultan de cortar la superficie de un cono mediante un plano que no pase por el vértice. Aunque sería más natural estudiar las secciones cónicas a partir de la definición clásica, ello requeriría trabajar con figuras tridimensionales, cuando en este libro sólo hemos estudiado la geometría plana. Por ello vamos a introducir las cónicas mediante una definición equivalente que no involucra conceptos tridimensionales y en la sección 7.5 mostraremos que efectivamente coincide con la definición clásica.

### 7.1 Definición y propiedades generales

Fue Pappos de Alejandría quien descubrió que las secciones cónicas pueden caracterizarse en términos de la definición siguiente, a pesar de que aparentemente no guarde relación alguna con la definición clásica:

**Definición 7.1** Dada una recta  $d$  y un punto  $F$  exterior a ella, la *cónica de foco  $F$ , directriz  $d$  y excentricidad  $e > 0$*  es el lugar geométrico formado por los puntos  $P$  tales que el cociente de su distancia a  $F$  sobre su distancia a  $d$  vale  $e$ .

Más precisamente, si  $X$  es el pie de la perpendicular a  $d$  por  $P$ , la condición para que  $P$  esté en la cónica es

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PX}} = e.$$

Las cónicas de excentricidad  $0 < e < 1$ ,  $e = 1$  y  $e > 1$  se llaman, respectivamente, *elipses*, *parábolas* e *hipérbolas*.

**Nota** En realidad esta definición no es exactamente equivalente a la definición de las cónicas como secciones de un cono en cuanto a que ésta incluye a las circunferencias entre las cónicas, mientras que la que acabamos de dar no lo hace.

Más adelante corregiremos esta discrepancia considerando a las circunferencias como las cónicas de excentricidad  $e = 0$ , pero de momento consideraremos sólo excentricidades  $e > 0$ . ■

La excentricidad determina una cónica salvo semejanza:

**Teorema 7.2** *Dos cónicas son semejantes si y sólo si tienen la misma excentricidad.*

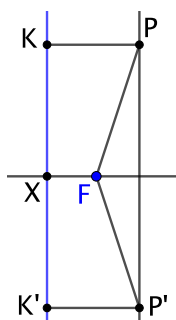
**DEMOSTRACIÓN:** De acuerdo con la definición 6.2 y las observaciones posteriores, las semejanzas son las composiciones de isometrías con homotecias. Como las semejanzas conservan la perpendicularidad y las proporciones entre segmentos, es obvio que la imagen de una cónica por una semejanza es la cónica que tiene por foco y directriz las imágenes del foco y de la directriz de la cónica dada y la misma excentricidad. En particular, cónicas semejantes tienen la misma excentricidad.

Recíprocamente, dadas dos cónicas de la misma excentricidad, es claro que con una homotecia podemos transformar la primera en en otra (de la misma excentricidad) cuya distancia entre el foco y la directriz sea la misma que hay entre el foco y la directriz de la segunda, y entonces con una isometría podemos transformar esta tercera cónica en otra (de la misma excentricidad) que tenga exactamente el mismo foco y la misma directriz que la segunda de las cónicas dadas, pero entonces ambas cónicas coinciden, luego las dos cónicas dadas son semejantes. ■

La recta perpendicular a  $d$  por  $F$  se llama *eje* de la cónica.

Como la simetría respecto del eje deja invariantes tanto a  $F$  como a  $d$ , es claro que también deja invariante a la cónica, es decir, que toda cónica es simétrica respecto de su eje.

**Puntos interiores y exteriores** Consideremos una recta perpendicular al eje de una cónica y supongamos que contiene al menos un punto  $P$  situado sobre ella. Entonces, su simétrico  $P'$  respecto del eje también tiene que estar en ella. Si  $P$  no está en el eje, la situación que muestra la figura siguiente:



Los puntos  $P$  y  $P'$  cumplen

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PK}} = \frac{\overline{P'F}}{\overline{P'K'}} = e,$$

y es claro entonces que los demás puntos  $Q$  de la recta  $PP'$  cumplen

$$\frac{\overline{QF}}{\overline{QK''}} < e \quad \text{o} \quad \frac{\overline{QF}}{\overline{QK''}} > e$$

(donde  $K''$  es el pie de la perpendicular a la directriz por  $Q$ ) según si  $Q$  está entre  $P$  y  $P'$  o está fuera del segmento. En particular,  $P$  y  $P'$  son los únicos puntos de la recta dada que están sobre la cónica. Si la recta dada contiene un punto  $P$  de la cónica situado sobre su eje, entonces razonamos similarmente que todos los demás puntos de la recta cumplen

$$\frac{\overline{QF}}{\overline{QK''}} > e.$$

Esto nos lleva a la definición siguiente:

**Definición 7.3** Llamaremos *puntos interiores* (resp. *exteriores*) de una cónica a los puntos  $Q$  tales que, si  $K$  es el pie de la perpendicular a la directriz por  $Q$ , se cumple que

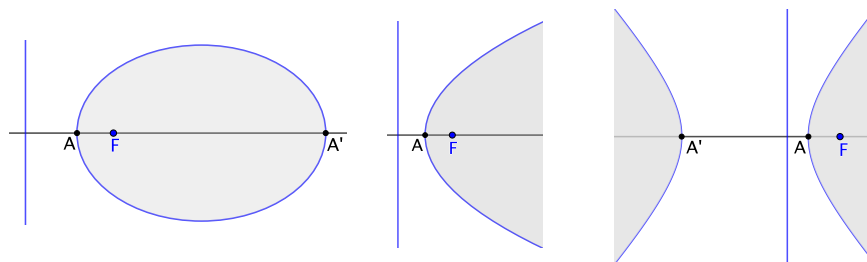
$$\frac{\overline{QF}}{\overline{QK}} < e \quad (\text{resp. } \frac{\overline{QF}}{\overline{QK}} > e),$$

entendiendo que los puntos de la directriz (en los que  $\overline{QK} = 0$ ) son exteriores.

Hemos probado que si una recta perpendicular al eje de una cónica la corta al menos en un punto  $P$ , entonces todos los puntos situados entre  $P$  y el simétrico de  $P$  respecto del eje son interiores, mientras que los puntos restantes de la recta son exteriores.

Si una recta no tiene puntos en común con la cónica, entonces todos sus puntos son exteriores, pues si contuviera alguno interior  $Q$ , llamamos  $d$  a la distancia de la recta a la directriz y  $Q_0$  a la intersección de la recta con el eje, con lo que  $\overline{FQ_0} \leq \overline{FQ} < ed$  y sólo tendríamos que tomar un punto  $P$  en la recta tal que  $\overline{PQ_0} = \sqrt{(ed)^2 - \overline{FQ_0}^2}$  para que fuera  $\overline{FP} = ed$ , de modo que  $P$  estaría en la recta y en la cónica.

Con estas consideraciones es inmediato distinguir a simple vista los puntos interiores de los exteriores en una gráfica. En la figura siguiente hemos sombreado el interior de una elipse, una parábola y una hipérbola. De momento mostramos figuras a efectos puramente ilustrativos, pues no tenemos ninguna justificación de que se correspondan realmente con lo que estamos razonando.



**Vértices** Los puntos de la cónica situados sobre su eje se llaman *vértices*.

Vamos a probar que, tal y como muestra la figura siguiente, todas las cónicas tienen un vértice  $A$  situado entre el foco y la directriz, que en el caso de las parábolas es el único, mientras que las elipses y las hipérbolas tienen un segundo vértice  $A'$ .

Para estudiar la existencia de vértices en una cónica podemos graduar el eje asignando el 0 al punto de corte con la directriz, de modo que el foco tenga coordenada  $f > 0$ . Notemos que ni el foco ni ningún punto de la directriz pueden estar en la cónica (no cumplen la definición), por lo que en particular un vértice situado entre el foco y la directriz tendrá una coordenada  $0 < a < f$ . La ecuación de la cónica se traduce en que  $(f - a)/a = e$ , lo cual equivale a

$$a = \frac{f}{e + 1}$$

Por lo tanto, toda cónica tiene un único vértice situado entre su foco y su directriz. Nos referiremos a este vértice como el *vértice asociado al foco y a la directriz* y lo representaremos por  $A$ .

Notemos que a cada excentricidad  $e$  le corresponde un valor distinto de  $a$ , y viceversa, por lo que una cónica está igualmente determinada por su foco, su directriz y su vértice asociado. En particular, el vértice asociado al foco de una parábola tiene coordenada  $a = f/2$ , por lo que es el punto medio entre la directriz y el foco.

Un vértice  $A'$  situado en el mismo lado que el foco respecto de la directriz, pero más allá de éste, tiene que tener coordenada  $0 < f < a'$ , y la condición que debe cumplir es  $(a' - f)/a' = e$ , que equivale a  $(1 - e)a' = f$ . Esto sólo es posible si  $e < 1$ , en cuyo caso el vértice es  $a' = f/(1 - e)$ .

Por último, un vértice  $A'$  situado en el lado opuesto al foco respecto de la directriz tiene que tener una coordenada  $a' < 0$  tal que  $(f - a')/(-a') = e$ , lo que equivale a  $(e - 1)a' = -f$ , lo cual sólo es posible si  $e > 1$ , en cuyo caso  $a' = -f/(e - 1)$ . Por lo tanto:

- Cada parábola tiene un único vértice, situado en el punto medio entre la directriz y el foco.

- Cada elipse y cada hipérbola tiene dos vértices. En el caso de la elipse los vértices están situados en el orden  $X - F - A - A'$ , donde  $X$  representa la intersección de la directriz con el eje, mientras que en el caso de la hipérbola el orden es  $A' - X - A - F$ .

Observemos que esto se corresponde con lo que muestran las figuras precedentes, pero en ellas se aprecia algo más que todavía no podemos justificar, y es que las elipses y las hipérbolas —a diferencia de las parábolas— presentan un segundo eje de simetría, concretamente la recta perpendicular al eje por el punto medio entre los vértices. Más aún, este punto medio es en sí mismo un centro de simetría de ambas curvas, en el sentido de que el opuesto a un punto de la curva respecto a dicho centro está también en la curva.

**Elementos de una cónica** Aunque todavía no podemos justificar estos hechos, sí que podemos introducir algunas definiciones y aprovechar los cálculos que acabamos de hacer para extraer algunas consecuencias.

Se llama *centro*  $O$  de una elipse o hipérbola al punto medio de sus vértices. La perpendicular al eje por  $O$  se llama *eje menor* de la elipse o hipérbola (y, por contraposición, el eje al que veníamos llamando simplemente “eje” se le llama *eje mayor*).

En el caso de una elipse, hemos visto que, respecto de la graduación que hemos considerado en el eje, los vértices están situados en las posiciones  $f/(1+e)$  y  $f/(1-e)$ . Por lo tanto, el centro está en la posición

$$d = \frac{\frac{f}{1+e} + \frac{f}{1-e}}{2} = \frac{f}{1-e^2}.$$

Ahora bien, dada la simetría que aún no hemos demostrado que tienen las elipses, resulta aconsejable considerar una graduación del eje en la que sea el centro  $O$  el que tenga coordenada nula. Las coordenadas respecto de este nuevo sistema de referencia se obtienen restando a las antiguas el valor  $d$ , de modo que los vértices pasan a tener coordenadas  $\pm a$ , con

$$a = \frac{f}{1-e} - \frac{f}{1-e^2} = \frac{ef}{1-e^2},$$

la intersección de la directriz con el eje tiene coordenada  $-d$ , y el foco tiene coordenada  $-c$ , donde

$$c = \frac{f}{1-e^2} - f = \frac{e^2 f}{1-e^2}.$$

Ahora bien,  $f$  es la distancia entre el foco y la directriz, que en este contexto resulta artificial. Es más natural tomar  $c$  como referencia, de modo que tenemos las relaciones  $d = c/e^2$  y  $a = c/e$ .

La situación para una hipérbola es muy similar. Ahora los vértices están en las posiciones  $-f/(e-1)$  y  $f/(e+1)$ , luego la posición del centro es

$$-d = \frac{\frac{-f}{e-1} + \frac{f}{e+1}}{2} = \frac{-f}{e^2-1},$$

pero si tomamos el centro como origen de coordenadas los vértices pasan a tener coordenadas  $\pm a$ , donde

$$a = \frac{f}{e+1} - \frac{-f}{e^2-1} = \frac{ef}{e^2-1},$$

la intersección de la directriz con el eje tiene coordenada  $-d$ , donde

$$d = \frac{f}{e^2-1},$$

y el foco tiene coordenada

$$c = f - \frac{-f}{e^2-1} = \frac{e^2 f}{e^2-1},$$

y de aquí llegamos a las mismas relaciones  $d = c/e^2$ ,  $a = c/e$ .

Esto nos lleva a algunas definiciones adicionales:

En una elipse o una hipérbola, llamaremos *distancia focal*  $c$  a la distancia entre el centro y el foco. Llamaremos *semiejes mayores* a los segmentos que unen el centro  $O$  y cada uno de los vértices, cuya longitud es  $a = c/e$ . En estos términos, la distancia del centro a la directriz es  $d = c/e^2 = a/e$ .

Veamos ahora que una elipse corta a su eje menor en dos puntos. Un punto en el eje menor situado a una distancia  $b > 0$  del centro estará en la elipse si y sólo si

$$\frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{d} = e,$$

pues el numerador es ciertamente la distancia al foco. Esto equivale a que

$$b^2 + c^2 = \frac{c^2}{a^2} = a^2.$$

En realidad, este cálculo vale igualmente para hipérbolas, pero la diferencia es que en una elipse  $a = c/e > c$ , por lo que obtenemos dos valores posibles para  $b = \pm\sqrt{a^2 - c^2}$ , mientras que en una hipérbola es  $a = c/e < c$ , con lo que no hay solución. Así pues:

Una elipse corta a su eje menor en dos puntos  $B$  y  $B'$  situados a una distancia  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$  del centro, que también reciben el nombre de *vértices*, con lo que, en total, una elipse tiene cuatro vértices (dos sobre el eje mayor y dos sobre el eje menor).

En cambio, una hipérbola no corta a su eje menor, por lo que sólo tiene dos vértices  $A, A'$ , mientras que una parábola ni siquiera tiene eje menor, y sólo tiene un vértice  $A$ .

**Rectas tangentes** En realidad, en la discusión precedente nos hemos desviado del propósito de esta sección, que es probar algunos resultados válidos para todas las cónicas, sin necesidad de distinguir si son elipses, parábolas o hipérbolas. Vamos a estudiar ahora las posibilidades de intersección de una recta con una cónica. El punto de partida es el teorema siguiente:

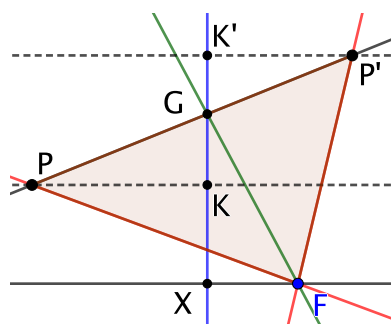
**Teorema 7.4** *Si la recta que pasa por dos puntos  $P$  y  $P'$  de una cónica de foco  $F$  corta a la directriz en un punto  $G$ , entonces la recta  $FG$  biseca uno de los ángulos formados por las rectas  $FP$  y  $FP'$ .*

DEMOSTRACIÓN: Si  $P, P', F$  están alineados el teorema se cumple trivialmente. Sean  $K$  y  $K'$  los pies de las perpendiculares a la bisectriz por  $P$  y  $P'$ . Por definición de cónica tenemos que

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PK}} = \frac{\overline{P'F}}{\overline{P'K'}},$$

luego

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{P'F}} = \frac{\overline{PK}}{\overline{P'K'}} = \frac{\overline{PG}}{\overline{P'G}}$$



Por la misma discusión que hemos hecho al analizar la existencia de vértices, esa relación la cumplen dos puntos salvo si el cociente es 1, en cuyo caso sólo hay uno. Ahora bien, por el teorema 4.3 aplicado al triángulo  $\widehat{PFP'}$  (y la nota posterior) dichos puntos son precisamente los puntos de corte con  $PP'$  de las dos bisectrices (interior y exterior) del ángulo  $\hat{F}$ . (Si el cociente es 1 es que el triángulo es isósceles y la bisectriz exterior es paralela a  $PP'$ , por lo que sólo hay un punto de corte.) ■

Como consecuencia:

**Teorema 7.5** *Una recta corta a una cónica a lo sumo en dos puntos.*

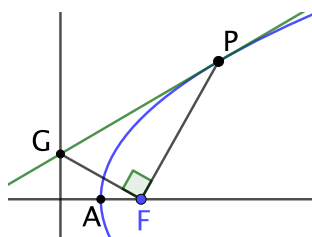
DEMOSTRACIÓN: Si la recta es paralela a la directriz, entonces todos sus puntos están a una misma distancia  $d_0$  de ella, luego todo punto  $P$  que esté en la cónica cumplirá  $\overline{FP} = ed_0$ , pero sólo hay dos puntos en una recta a una misma distancia de un punto  $F$  dado, luego no hay más que dos posibles puntos de corte.

Si la recta no es paralela a la directriz, llamamos  $G$  al punto de corte. Si la recta corta a la cónica en dos puntos  $P$  y  $P'$ , entonces, por el teorema anterior,  $FG$  es una bisectriz de las rectas  $FP$  y  $FP'$ . Si hubiera un tercer punto de intersección  $P''$ , entonces  $FG$  también tendría que ser una bisectriz de  $FP$  y  $FP''$ , pero esto significa que  $FP'$  y  $FP''$  coinciden con la recta simétrica de  $FP$  respecto de  $FG$ , luego  $P'$  y  $P''$  son ambos la intersección de esta recta con la recta dada, en contradicción con que  $P''$  era un tercer punto. ■

Observemos que tanto los ángulos interiores como los exteriores de un triángulo miden menos de  $180^\circ$ , por lo que el ángulo que forma una bisectriz interior o exterior con uno de los lados que biseca tiene que ser menor de  $90^\circ$ . Como consecuencia:

**Teorema 7.6** *Sea  $P$  un punto en una cónica que no sea un vértice y sea  $G$  el punto de corte con la directriz de la perpendicular a  $FP$  por  $F$ . Entonces la recta  $GP$  corta a la cónica únicamente en el punto  $P$ .*

DEMOSTRACIÓN: Por construcción  $GF$  es perpendicular a  $GP$ , pero por el teorema 7.4, si  $GP$  pasara por otro punto  $P'$  de la cónica, la recta  $GF$  sería una bisectriz de  $FP$  y  $FP'$ , luego no sería perpendicular a  $FP$ . ■



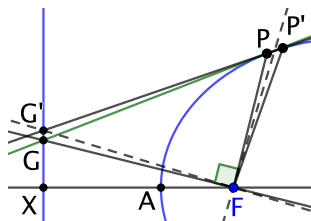
**Definición 7.7** La recta construida en el teorema anterior se llama *recta tangente* a la cónica por el punto  $P$ . La recta tangente a un vértice la definimos como la recta paralela a la directriz que pasa por él.

Notemos que si  $P$  es un vértice, también se cumple que su tangente corta a la cónica únicamente en  $P$ , pues ésta es paralela a la directriz, luego todos sus puntos están a la misma distancia de ella, luego todos los puntos de la cónica situados en la tangente tendrían que estar a la misma distancia del foco, pero  $P$  es el pie de la perpendicular a la tangente por  $F$ : ningún otro punto está a la misma distancia.

**Nota** En general, por un punto de una cónica pueden pasar varias rectas que no la corten en ningún otro punto (por ejemplo, en la figura anterior, la recta horizontal que pasa por  $P$  no corta a la parábola en ningún otro punto), pero la recta tangente que acabamos de definir no es cualquiera de ellas. En efecto, dado un punto  $P$  en una cónica, consideramos otro lo suficientemente próximo como para que ambos estén al mismo lado de la directriz. Supongamos además que  $PP'$  no es perpendicular al eje (si se da el caso, basta sustituir  $P'$  por



otro punto más próximo a  $P$ ). Sea  $G'$  el punto donde  $PP'$  corta a la directriz. Entonces, la bisectriz  $r$  del ángulo  $\widehat{PFP'}$  corta a  $PP'$  en un punto entre  $P$  y  $P'$ , luego no puede estar en la directriz (ya que los dos puntos están al mismo lado). Por consiguiente,  $FG'$  tiene que ser la bisectriz del ángulo exterior en  $F$  del triángulo  $\widehat{PFP'}$ , no del interior, luego es la perpendicular a  $r$ .



Cuanto más próximo está  $P'$  a  $P$ , la recta  $r$  se parecerá más a  $FP$  y su perpendicular  $FG'$  se parecerá más a  $FG$  (la perpendicular a la recta tangente), luego  $G'$  se parecerá cada vez más a  $G$ . Así pues, la tangente que hemos definido es la recta con la que se confunden las secantes a la cónica por  $P$  y un punto muy próximo a  $P$ . Es fácil adaptar el argumento para aplicarlo también a las tangentes en los vértices. ■

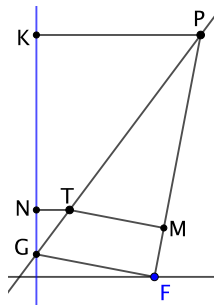
**Teorema 7.8** Sea  $P$  un punto de una cónica cuya recta tangente no sea perpendicular al eje y sea  $T$  un punto de dicha tangente distinto de  $P$ . Sean  $M$  y  $N$  los pies de las perpendiculares por  $T$  a  $FP$  y a la directriz de la cónica, respectivamente. Entonces  $\overline{MF}/\overline{TN}$  es la excentricidad  $e$  de la cónica. En particular,  $\overline{TF}/\overline{TN} > e$ .

DEMOSTRACIÓN: Sea  $G$  el punto donde la tangente corta a la directriz, de modo que  $GP$  y  $GF$  son perpendiculares, y sea  $K$  el pie de la perpendicular a la directriz por  $P$ . Entonces, por el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{MF}}{\overline{PF}} = \frac{\overline{TG}}{\overline{PG}} = \frac{\overline{TN}}{\overline{PK}},$$

luego

$$\frac{\overline{MF}}{\overline{TN}} = \frac{\overline{PF}}{\overline{PK}} = e.$$



La última afirmación se debe a que  $\overline{TF} > \overline{MF}$  ■

Como consecuencia (teniendo en cuenta que en el caso de las tangentes perpendiculares al eje es trivial):

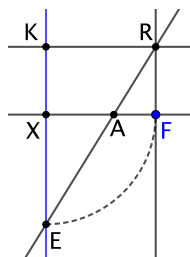
**Teorema 7.9** *Todos los puntos de una recta tangente a una cónica son exteriores salvo el punto de tangencia.*

O, dicho de otro modo, por un punto interior a una cónica no pasa ninguna recta tangente. En cambio, veremos que, por regla general, por cada punto exterior a una cónica pasan dos rectas tangentes, pero hay ciertos casos excepcionales que tendremos que discutir separadamente según el tipo de cónica.

**Teorema 7.10** *Si la recta que une dos puntos  $P$  y  $P'$  de una cónica pasa por el foco, entonces las tangentes por dichos puntos se cortan en la directriz.*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que los puntos no pueden ser vértices, y entonces  $FP$  coincide con  $FP'$ , luego la perpendicular  $GP$  (con  $G$  en la directriz) es la misma en ambos casos, luego las tangentes son  $GP$  y  $GP'$ , que se cortan en  $G$ , es decir, sobre la directriz. ■

**Teorema 7.11** *La perpendicular al eje de una cónica por su foco corta a la cónica en dos puntos cuyas tangentes se cortan en la intersección del eje con la directriz.*



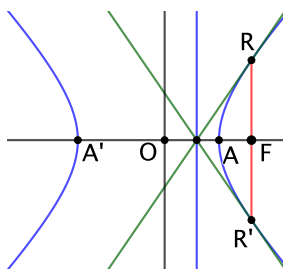
DEMOSTRACIÓN: Sea  $X$  la intersección del eje con la directriz y sea  $E$  un punto en la directriz tal que  $\overline{EX} = \overline{XF}$ . Sea  $A$  el vértice de la cónica asociado al foco y sea  $R$  la intersección de  $EA$  con la perpendicular al eje por  $F$ . Sea  $K$  el pie de la perpendicular a la directriz por  $R$ . Entonces

$$\frac{\overline{RF}}{\overline{RK}} = \frac{\overline{RF}}{\overline{XE}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AX}} = e,$$

pues el vértice  $A$  está en la cónica. Por lo tanto,  $R$  también está en la cónica, y su simétrico  $R'$  respecto al eje también. Para construir las tangentes a  $R$  y  $R'$ , el punto  $G$  de la definición es en este caso  $X$ , luego ambas tangentes se cortan en  $X$ . ■

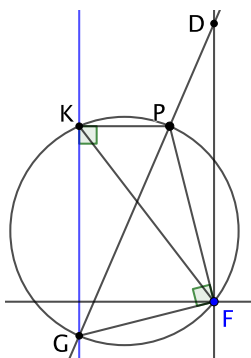
La distancia entre los dos puntos dados por el teorema anterior se llama *latus rectum* de la cónica.

La figura siguiente muestra el *latus rectum* de una hipérbola junto con las tangentes por sus extremos:



Terminamos esta sección con algunos resultados adicionales sobre tangentes que necesitaremos más adelante. El lector puede optar si lo prefiere por saltárselos y volver a ellos cuando sean necesarios:

**Teorema 7.12** *Si la tangente a una cónica por un punto  $P$  corta a la directriz en el punto  $G$  y a la perpendicular al eje por  $F$  en  $D$ , entonces  $\overline{FD}/\overline{FG}$  es la excentricidad de la cónica.*



DEMOSTRACIÓN: El ángulo  $\widehat{PFG}$  es recto por la definición que hemos dado de la recta tangente, luego los cuatro puntos  $K, P, F, G$  están sobre la circunferencia de diámetro  $\overline{PG}$ . Por lo tanto,  $\widehat{FGD} = \widehat{FGP} = \widehat{FKP}$  (como ángulos dirigidos).

Por otra parte,

$$\widehat{DFG} = \widehat{DFP} + \widehat{PFG} = \widehat{DF, FP} + 90^\circ = \widehat{DF, KP} + \widehat{KP, PF} + 90^\circ = \widehat{KPF}.$$

Por lo tanto, los triángulos  $\widehat{GFD}$  y  $\widehat{KPF}$  son (inversamente) semejantes, luego

$$\frac{\overline{FD}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{PF}}{\overline{PK}} = e. \quad \blacksquare$$

Usaremos este hecho en la prueba de los teoremas siguientes:

**Teorema 7.13** *Si las tangentes a una cónica por dos puntos  $P$  y  $P'$  se cortan en  $T$ , las rectas  $FP$  y  $FP'$  son simétricas respecto de  $FT$ .*

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que

$$\frac{\overline{KG}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{KT}}{\overline{FT}} = \frac{\overline{KG'}}{\overline{FD'}}$$

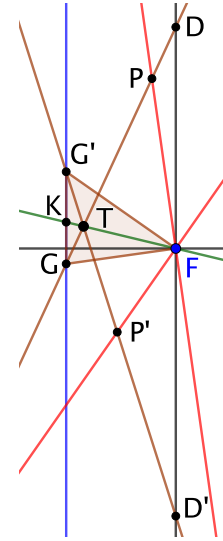
luego, por el teorema anterior,

$$\frac{\overline{KG}}{\overline{KG'}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{FD'}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{FG'}}$$

Por el teorema 4.3 y la nota posterior aplicado al triángulo  $\widehat{GFG'}$ , concluimos que  $FT$  es una bisectriz (interior o exterior) de las rectas  $FG$  y  $FG'$ , es decir, que  $\widehat{GFT} = \widehat{TFG'}$  (como ángulos dirigidos). Entonces

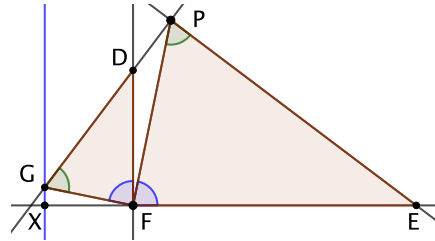
$$\begin{aligned} \widehat{P'FT} &= \widehat{P'FG'} + \widehat{G'FT} = 90^\circ + \widehat{TFG} \\ &= \widehat{GFP} + \widehat{TFG} = \widehat{TFP}, \end{aligned}$$

y por tanto  $FP$  y  $FP'$  son simétricas respecto de  $FT$ . ■



**Teorema 7.14** Si la recta normal (la perpendicular a la tangente) a una cónica en un punto  $P$  corta al eje en  $E$ , entonces  $\overline{FE}/\overline{FP}$  es la excentricidad de la cónica.

DEMOSTRACIÓN: Sea  $G$  el punto donde la tangente corta a la directriz, de modo que el ángulo  $\widehat{PFG}$  es recto, y sea  $D$  el punto donde corta a la perpendicular al eje por el foco.



Entonces

$$\widehat{GPF} + \widehat{FPE} = \widehat{GPE} = 90^\circ = \widehat{GFP} = \widehat{GPF} + \widehat{FGD},$$

luego  $\widehat{FPE} = \widehat{FGD}$ . Similarmente,

$$\widehat{EFP} + \widehat{PFD} = \widehat{EFD} = 90^\circ = \widehat{DFX} = \widehat{DFG} + \widehat{GFX},$$

pero  $\widehat{PFD} = \widehat{GFX}$ , porque  $FP$  y  $FD$  son perpendiculares a  $FG$  y  $FX$ , respectivamente, luego  $\widehat{EFP} = \widehat{DFG}$ . Por consiguiente, los triángulos  $\widehat{EFP}$  y  $\widehat{DFG}$

son semejantes, luego

$$\frac{\overline{FE}}{\overline{FP}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{FG}} = e,$$

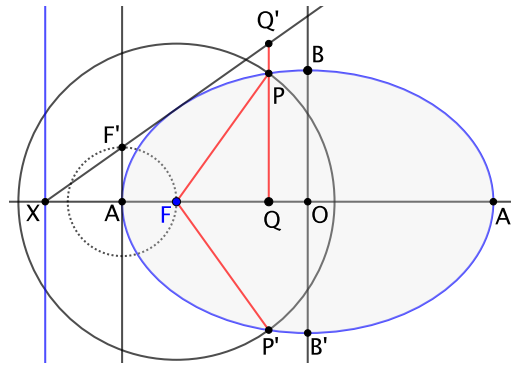
por el teorema 7.12. ■

## 7.2 La elipse

Pasamos ahora a estudiar específicamente las propiedades de las elipses, es decir, de las cónicas de excentricidad  $0 < e < 1$ .

En el apartado sobre elementos de una cónica de la sección 7.1 definimos el centro  $O$  de una elipse como el punto medio de sus vértices y vimos que, si la distancia focal de la elipse (la distancia del foco al centro) es  $c$ , entonces los vértices  $A, A'$  del eje mayor están a una distancia  $a = c/e$ , la directriz está a una distancia  $d = c/e^2 = a/e$  y los vértices  $B, B'$  del eje menor están a una distancia  $b$  tal que  $b^2 + c^2 = a^2$ .

La figura siguiente muestra cómo construir puntos de una elipse sobre una recta arbitraria perpendicular al eje mayor:



Si  $\overline{AF'} = \overline{AF}$ , entonces, el hecho de que el vértice  $A$  esté sobre la elipse implica que  $\overline{AF'}/\overline{XA} = e$ . Por lo tanto, si  $Q$  es cualquier punto situado sobre el eje mayor, se cumple que  $\overline{QQ'} = e\overline{XQ}$ , luego un punto  $P$  de la recta perpendicular al eje por  $Q$  estará en la elipse si cumple

$$\frac{\overline{FP}}{\overline{XQ}} = e,$$

es decir, si y sólo si está también en la circunferencia de centro  $F$  y radio  $QQ'$ . Para que la circunferencia corte a la recta  $QQ'$  es necesario y suficiente que  $\overline{FQ} \leq e\overline{XQ}$ .

Si graduamos la recta con origen en  $O$ , entonces  $X$  tiene coordenada  $-d$  y  $F$  tiene coordenada  $-c$ , luego si  $Q$  tiene coordenada  $q$ , la condición es

$$|q + c| \leq e|q + d|.$$

Pero es obvio que si  $Q$  está en el lado opuesto al foco respecto a la directriz, la distancia de un punto a ésta va a ser siempre menor que la distancia al foco, por lo que no hay puntos de la elipse en esa parte. Por lo tanto, podemos suponer que  $q \geq -d$ , con lo que  $q + d \geq 0$  y podemos eliminar el valor absoluto de la derecha. Usando además que  $c = ea$  y  $a = ed$  obtenemos:

$$|q + ea| \leq eq + a.$$

Esto equivale a

$$-eq - a \leq q + ea \leq eq + a$$

o también a

$$-(1 + e)a \leq (1 + e)q, \quad (1 - e)q \leq (1 - e)a,$$

luego la condición es  $-a \leq q \leq a$ .

Así, acabamos de probar que los puntos de la elipse se encuentran todos en las rectas perpendiculares al eje que lo cortan en puntos  $Q$  situados entre los vértices y que, concretamente, hay dos en cada una de estas rectas —aunque esto lo sabíamos ya para cónicas arbitrarias— excepto en el caso en que  $Q = A, A'$ .

**Expresión analítica** Llamaremos *sistema de referencia canónico* de una elipse a cualquiera que tenga como eje de abscisas el eje mayor y origen en su centro.

**Teorema 7.15** *Respecto de un sistema de referencia canónico, una elipse está formada por los puntos cuyas coordenadas cumplen la ecuación:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

DEMOSTRACIÓN: El foco tendrá coordenadas  $(\pm c, 0)$  y la directriz será la recta de ecuación  $x = \pm d$  (con el mismo signo en ambos casos). Un punto  $(x, y)$  estará en la elipse si y sólo si

$$\frac{\sqrt{(x \pm c)^2 + y^2}}{|x \pm d|} = e.$$

Elevando al cuadrado:

$$x^2 + c^2 \pm 2cx + y^2 = e^2(x^2 + d^2 \pm 2dx).$$

Ahora recordamos que  $c = e^2d$ , con lo que  $2e^2d = 2c$ , luego se simplifican los términos en  $x$  y queda

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 = e^2d^2 - c^2 = a^2 - c^2 = b^2,$$

pues  $ed = a$ . Por último, teniendo en cuenta que

$$\frac{b^2}{1 - e^2} = \frac{b^2}{1 - c^2/a^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 - c^2} = \frac{a^2b^2}{b^2} = a^2,$$

llegamos a

$$\frac{x^2}{b^2/(1-e^2)} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que es la ecuación anunciada.

Con esto hemos probado que todos los puntos de la elipse cumplen la ecuación. Recíprocamente, si un punto  $(x, y)$  cumple la ecuación, necesariamente  $-a \leq x \leq a$ , y hay exactamente dos puntos que cumplen la ecuación con el mismo valor de  $x$ , a saber,  $(x, \pm y)$  (salvo si  $x = \pm a$ , en cuyo caso tiene que ser  $y = 0$ ). Por otro lado, sabemos que hay exactamente dos puntos en la elipse con coordenada  $x$  (o uno sólo si  $x = \pm a$ ) y hemos probado que dichos puntos cumplen la ecuación, luego uno de ellos tiene que ser  $(x, y)$ . ■

**Nota** Si en la primera parte de la demostración del teorema anterior partimos de la relación con  $< e$  (resp.  $> e$ ) en lugar de  $= e$ , llegamos a la ecuación del enunciado con  $< 1$  (resp.  $> 1$ ), por lo que podemos concluir que, respecto de un sistema de referencia canónico, un punto es interior (resp. exterior) a una elipse si y sólo si cumple

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \quad (\text{resp. } > 1). \quad \blacksquare$$

De este teorema deducimos muchas consecuencias. Ante todo, es obvio que un punto  $(x, y)$  satisface la ecuación si y sólo si lo hacen  $(x, -y)$  o  $(-x, -y)$ , lo que se interpreta como que la elipse es simétrica respecto a su eje menor y respecto a su centro, cosa que ya habíamos observado en las imágenes, pero que hasta ahora no habíamos demostrado.

Otra consecuencia notable es que en realidad una elipse tiene dos focos y dos directrices, es decir, que si una elipse está definida mediante un foco  $F$  y una directriz  $d$  y un valor de  $e$  para la excentricidad, el punto  $F'$  y la recta  $d'$  simétricos de  $F$  y  $d$  respecto al eje menor, con el mismo valor de  $e$ , definen la misma elipse. En principio definirían la elipse simétrica respecto al eje menor, pero ahora sabemos que es la misma.

Más aún, sucede que una elipse está también determinada por sus dos focos, sin necesidad de hacer referencia a las directrices. El teorema siguiente puede usarse como definición alternativa de “elipse”:

**Teorema 7.16** *Dados dos puntos distintos  $F_1$  y  $F_2$  y un número  $2a > \overline{F_1F_2}$ , el conjunto de los puntos  $P$  tales que*

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

*es una elipse con focos  $F_1$  y  $F_2$  y semieje mayor  $a$ . Los puntos de cualquier elipse satisfacen esta ecuación.*

DEMOSTRACIÓN: Fijemos un sistema de referencia con origen en el punto medio de  $F_1$  y  $F_2$ , de modo que estos puntos tengan coordenadas  $(\pm c, 0)$ . Un punto  $P$  de coordenadas  $(x, y)$  cumplirá la condición del enunciado si y sólo si

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Pasamos una raíz al miembro derecho y elevamos al cuadrado:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x - c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Operando, esto equivale a

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = a^2 - xc.$$

Elevando de nuevo al cuadrado queda:

$$a^2((x - c)^2 + y^2) = (a^2 - xc)^2$$

Operando:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Sustituyendo  $b^2 = a^2 - c^2$  queda

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Con esto hemos probado que todos los puntos que cumplen la ecuación del enunciado están en una elipse de centro en el punto medio de  $F_1$  y  $F_2$ , con eje mayor  $F_1F_2$  y semiejes  $a, b$ , luego de distancia focal  $c$ , por lo que los focos son precisamente  $F_1$  y  $F_2$ .

Ahora falta probar que todo punto de la elipse de focos  $F_1$  y  $F_2$  y semieje mayor  $a$  cumple la condición del enunciado. Llamamos  $d_1$  y  $d_2$  las directrices correspondientes a los focos  $F_1$  y  $F_2$ . Dado un punto  $P$  en la elipse, sean  $K_1$  y  $K_2$  los pies de la perpendicular por  $P$  a  $d_1$  y  $d_2$  (notemos que la recta es la misma en ambos casos). Entonces

$$\overline{PF_1} = e\overline{K_1P}, \quad \overline{PF_2} = e\overline{PK_2},$$

luego

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = e(\overline{K_1P} + \overline{PK_2}) = e\overline{K_1K_2} = 2ed = 2a.$$

Además, toda elipse cumple que  $2a > 2c = \overline{F_1F_2}$ . ■

**Nota** Si en la prueba del teorema anterior partimos de una desigualdad  $< 2a$  (resp.  $> 2a$ ), llegamos a la ecuación de la elipse con  $< 1$  (resp.  $> 1$ ), por lo que concluimos que los puntos interiores (resp. exteriores) de una elipse son los que cumplen

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} < 2a \quad (\text{resp. } > 2a). \quad \blacksquare$$

Tenemos así una caracterización de la elipse en términos de sus focos que presenta una diferencia destacable con la caracterización en términos de un foco y su directriz: la condición del teorema anterior tiene sentido incluso si  $F_1 = F_2$  son un mismo punto  $F$ , en cuyo caso la cumplen los puntos cuya distancia a  $F$  es  $a$ , es decir, los puntos de la circunferencia de centro  $F$  y radio  $a$ .

En otras palabras, si definimos las elipses en términos de sus focos, podemos considerar a las circunferencias como las elipses en las que los dos focos son



iguales, con lo que  $c = 0$  y  $a = b$  es el radio de la circunferencia. La ecuación del teorema 7.15 se particulariza a  $x^2 + y^2 = a^2$  en este caso y la fórmula  $e = c/a$  sigue siendo válida si convenimos en considerar que las circunferencias son elipses de excentricidad  $e = 0$ .

Notemos, no obstante, que en una circunferencia no tiene sentido hablar de directrices, ni tampoco podemos distinguir un eje mayor y un eje menor, sino que todas las rectas que pasan por su centro son ejes de simetría, sin que ninguno destaque por nada en particular.

**Parametrización de una elipse** La ecuación de la elipse puede escribirse en la forma  $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ , y esto muestra que cuando un punto  $(x, y)$  recorre una elipse, el punto  $(x', y') = (x/a, y/b)$  satisface la ecuación  $x'^2 + y'^2 = 1$ , luego recorre la circunferencia de centro  $(0, 0)$  y radio 1.

Ahora bien, todo punto de la circunferencia unitaria puede expresarse en la forma  $(x/a, y/b) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$ , luego los puntos de la elipse son de la forma

$$(x, y) = (a \cos \alpha, b \sin \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

de modo que, cuando  $\alpha$  recorre los números reales, el punto  $(x, y)$  recorre la elipse y da una vuelta completa cada vez que  $\alpha$  avanza  $2\pi$  radianes. ■

**Ecuación de las rectas tangentes** Vamos a ver que la ecuación de la recta tangente a una elipse por un punto  $(x_0, y_0)$  es

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Para ello consideramos otro punto más de la elipse, digamos  $(x_1, y_1)$ , y observamos que la recta

$$\frac{(x_0 + x_1)x}{a^2} + \frac{(y_0 + y_1)y}{b^2} = \frac{x_0 x_1}{a^2} + \frac{y_0 y_1}{b^2} + 1$$

pasa por ambos puntos.

Si tomamos una sucesión de puntos  $(x_1, y_1)$  sobre la elipse que tienda a  $(x_0, y_0)$ , los coeficientes de la ecuación anterior tienden a los de la ecuación indicada, luego se trata de la ecuación de la tangente.<sup>1</sup> ■

---

<sup>1</sup>Más precisamente, los coeficientes de la ecuación de una recta  $ux + vy = 1$  se corresponden con los puntos  $(1/u, 0)$  y  $(0, 1/v)$  donde la recta corta a los ejes. En la nota tras la definición 7.7 hemos visto que si  $G$  es el punto donde la tangente en  $P$  corta a la directriz, cuanto más próximo a  $P$  esté un punto  $P'$ , el punto  $G'$  en el que la secante  $PP'$  corta a la directriz estará más próximo a  $G$ , y es fácil deducir de aquí que los puntos donde la secante  $PP'$  corta a los ejes estarán más próximos a los puntos de corte de la tangente, lo que significa que los coeficientes de la ecuación de la secante (expresada en la forma con término independiente 1) convergen a los coeficientes de la ecuación de la tangente, y hemos probado que, concretamente, convergen a los de la ecuación indicada.

**La circunferencia principal** La ecuación de la elipse nos permite justificar que toda elipse que no sea una circunferencia es una “circunferencia achatada”, lo que a su vez nos permite generalizar a elipses arbitrarias propiedades que conocemos para las circunferencias.

Para ello definimos la *circunferencia principal* de una elipse como la circunferencia que tiene su mismo centro y radio  $a$  (el semieje mayor).

Así, respecto a un sistema de referencia canónico, las ecuaciones de una elipse y de su circunferencia principal son:

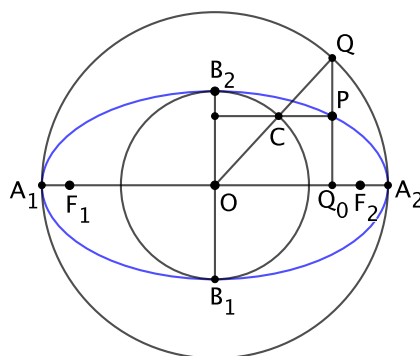
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x'^2 + y'^2 = a^2.$$

La relación entre ambas es muy simple: un punto  $(x', y')$  está en la circunferencia principal si y sólo si el punto  $(x, y) = (x', (b/a)y')$  está en la elipse y, recíprocamente,  $(x, y)$  está en la elipse si y sólo si  $(x', y') = (x, (a/b)y)$  está en la circunferencia principal.

Así pues, la transformación  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que a cada punto de coordenadas  $(x', y')$  le hace corresponder el punto de coordenadas

$$(x, y) = (x', (b/a)y') = (x', y') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b/a \end{pmatrix}$$

transforma la circunferencia principal en la elipse. Más aún, es claro que transforma los puntos interiores (resp. exteriores) de la circunferencia en los puntos interiores (resp. exteriores) de la elipse. Esta transformación es una aplicación lineal que deja fija la coordenada horizontal de cada punto y reduce la coordenada vertical, luego su efecto es que “aplata” un poco la circunferencia. En la práctica es muy fácil de calcular, como ilustra la figura siguiente:



Dado un punto  $Q$  en la circunferencia principal, calculamos el punto  $C$  donde  $\overline{OQ}$  corta a la circunferencia de centro  $O$  y radio  $b$ . La imagen de  $Q$  en la elipse es el punto  $P$  donde se cortan la perpendicular al eje mayor por  $Q$  con la perpendicular al eje menor por  $C$ .

En efecto, basta observar que

$$\frac{\overline{PQ_0}}{\overline{QQ_0}} = \frac{b}{a},$$

por lo que  $P$  es el punto que resulta “achatar” la coordenada vertical de  $Q$  con el factor  $b/a$ .

De este modo, si conocemos el centro  $O$  y los semiejes  $a, b$  de una elipse, podemos calcular cuantos puntos queramos de ella: para cada punto  $Q$  que señalemos arbitrariamente en su circunferencia principal, podemos obtener un punto  $P$  de la elipse.

Como anticipábamos, la relación entre una elipse y su circunferencia principal nos permite generalizar a elipses algunos hechos que conocemos para circunferencias. Para ello conviene observar algunos hechos generales válidos para aplicaciones lineales cualesquiera  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que sean biyectivas, como es el caso de la que relaciona una elipse con su circunferencia principal.

1.  $f$  transforma puntos colineales en puntos colineales.

Pues si tres puntos  $P, Q, R$  están alineados, en el orden adecuado cumplen  $Q = (1 - \lambda)P + \lambda R$ , para cierto  $0 < \lambda < 1$ , y como  $f$  es lineal, también  $f(Q) = (1 - \lambda)f(P) + \lambda f(R)$ , lo que significa que  $f(P), f(Q), f(R)$  también están alineados. Como consecuencia:

2.  $f$  transforma rectas en rectas.
3.  $f$  transforma rectas paralelas en rectas paralelas.
4.  $f$  transforma el punto medio de un segmento en el punto medio de la imagen.

En realidad lo hemos probado en 1., pues si  $Q$  es el punto medio de  $\overline{PR}$ , entonces  $Q = (1/2)P + (1/2)R$ , y al aplicar  $f$  obtenemos la misma relación entre las imágenes.

5.  $f$  transforma cada semiplano determinado por una recta  $r$  en uno de los semiplanos determinados por la imagen de  $r$ .

Dos puntos  $A$  y  $B$  que no estén en  $r$  están en el mismo semiplano respecto de  $r$  si y sólo si  $\overline{AB}$  no corta a  $r$ , lo cual, por la linealidad de  $f$ , equivale a que  $\overline{f(A)f(B)}$  no corte a  $f(r)$ , es decir, a que  $f(A)$  y  $f(B)$  estén en el mismo semiplano respecto de  $f(r)$ , luego  $f$  transforma cada uno de los semiplanos de  $r$  en uno de los semiplanos de  $f(r)$ .

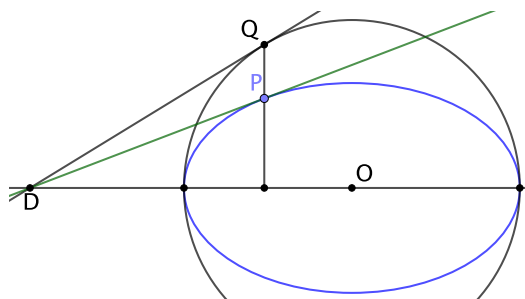
Como consecuencia:

1. La intersección entre una recta y una elipse puede ser vacía (y entonces se dice que la recta es exterior a la elipse), puede constar de un punto (y entonces se dice que la recta es tangente a la elipse) o puede constar de dos puntos (y entonces se dice que la recta es secante a la elipse).

2. Por cada punto de una elipse pasa una única recta tangente, y la elipse está contenida en el semiplano respecto de la tangente en el que está el centro.
3. Por cada punto exterior de una elipse pasan dos rectas tangentes y por cada punto interior no pasa ninguna.

En efecto, dada una recta  $r$ , consideramos la antiimagen  $f^{-1}(r)$ , que es una recta que puede cortar a la circunferencia principal de la elipse en 0, 1 o 2 puntos, y entonces  $r$  cortará a la elipse en las imágenes de dichos puntos. Igualmente se prueban los puntos restantes.

En particular, una recta  $r$  es tangente a una elipse si y sólo si  $f^{-1}(r)$  es tangente a su circunferencia principal. Esto nos da un procedimiento sencillo para calcular tangentes a elipses:



Dado un punto  $P$  en la elipse, lo elevamos hasta su imagen  $Q$  en la circunferencia auxiliar, trazamos la tangente a ésta por  $Q$  y consideramos el punto  $D$  donde corta a la prolongación del eje mayor. La tangente a la elipse es la imagen de esta recta, pero como  $Q$  se transforma en  $P$  y  $D$  permanece invariante, resulta que la tangente es simplemente la línea  $DP$ . ■

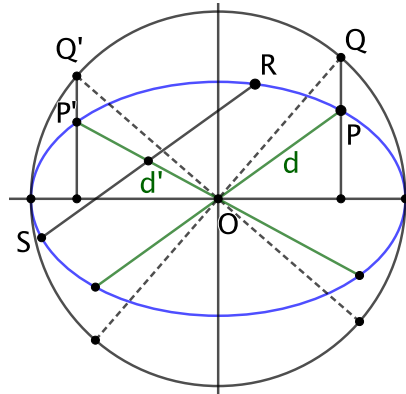
**Diámetros conjugados** En general, una *cuerda* en una cónica es un segmento que une dos de sus puntos. Un *diámetro* de una elipse es una cuerda que pasa por su centro. Dado un diámetro  $d$  de una elipse, su elevación  $d^*$  a la circunferencia principal es un diámetro de ésta, y podemos considerar su diámetro perpendicular  $d'^*$ . Si lo volvemos a bajar a la elipse obtenemos otro diámetro  $d'$  que no tiene por qué ser perpendicular a  $d$ , pues el “achatamiento” no conserva los ángulos. No obstante, hay una propiedad de los diámetros perpendiculares de una circunferencia que sí que se conserva por aplicaciones lineales:

Si  $d^*$  y  $d'^*$  son dos diámetros perpendiculares de la circunferencia principal, es obvio que  $d'^*$  pasa por el punto medio de toda cuerda paralela a  $d^*$ , así como que las tangentes a la circunferencia por los extremos de  $d'^*$  son paralelas a  $d$ . Más aún  $d'^*$  es el único diámetro que cumple esto. Como las aplicaciones lineales conservan el paralelismo y los puntos medios, podemos afirmar que  $d'$  pasa por el punto medio de toda cuerda paralela a  $d$ , y que las tangentes a la elipse por los extremos de  $d'$  son paralelas a  $d$ , así como que  $d'$  es el único diámetro que cumple esto.

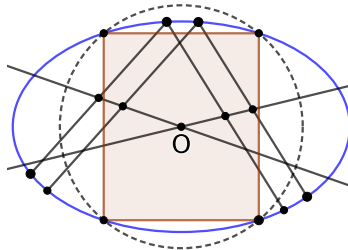
**Definición 7.17** Dos diámetros  $d$  y  $d'$  de una elipse son *conjugados* si uno pasa por los puntos medios de las cuerdas paralelas al otro y las tangentes a la elipse en los extremos de uno son paralelas al otro.

Hemos probado que cada diámetro  $d$  de una elipse tiene un único diámetro conjugado  $d'$ , de modo que  $d$  es a su vez el conjugado de  $d'$ . De hecho,  $d$  y  $d'$  son conjugados si y sólo si sus elevaciones a la circunferencia principal son ortogonales.

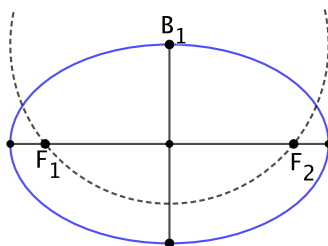
La figura siguiente muestra cómo calcular el diámetro conjugado  $d'$  de un diámetro  $d$ . Tomamos uno de sus extremos,  $P$ , lo elevamos al punto  $P'$  en la circunferencia principal, calculamos el diámetro  $\overline{OQ'}$  perpendicular a  $\overline{OP}$ , bajamos  $Q'$  a un punto  $P'$  en la elipse y  $d' = \overline{OP'}$  es el diámetro conjugado. Como ilustración la figura muestra también una cuerda  $\overline{RS}$  paralela a  $d$ , y se observa que  $d'$  pasa por su punto medio:



**Cálculo de los elementos de una elipse** Esto nos proporciona un método para encontrar el centro y los ejes de una elipse:

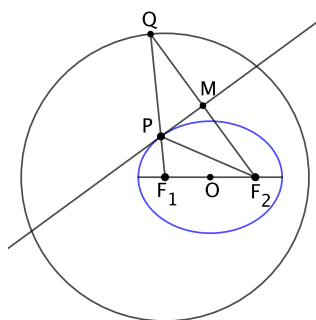


Basta trazar dos pares de cuerdas paralelas y unir sus puntos medios. Las rectas tienen que pasar por el centro, por lo que éste es su intersección. Una vez tenemos el centro, trazamos cualquier circunferencia de centro  $O$  que corte a la elipse en cuatro puntos, y éstos forman los vértices de un rectángulo con lados paralelos a los ejes. Una vez tenemos los ejes es fácil calcular los focos. Basta trazar la circunferencia de centro en un vértice del semieje menor y radio igual al semieje mayor. Los focos son los puntos de corte con el semieje mayor:



Así pues, una elipse no puede definirse más que por un único par de focos. A partir de los focos es fácil calcular las dos directrices, que, por consiguiente, también son únicas.

**Las circunferencias focales** Las *circunferencias focales* de una elipse son las circunferencias con centro en sus focos y radio igual al eje mayor. También existe una correspondencia sencilla entre sus puntos y los puntos de la elipse, como muestra la figura siguiente:



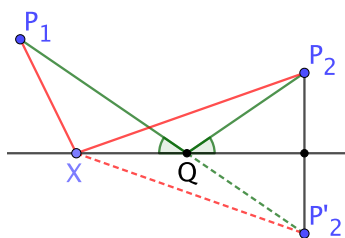
Dado cualquier punto  $Q$  en una circunferencia focal (por ejemplo la de  $F_1$ ), la intersección  $P$  entre  $QF_1$  y la mediatriz de  $QF_2$  es un punto de la elipse, pues

$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = \overline{F_1P} + \overline{PQ} = 2a.$$

Es claro que cuando  $Q$  recorre la circunferencia, los puntos  $P$  recorren toda la elipse, luego tenemos un procedimiento alternativo para construir tantos puntos de una elipse como queramos. Más aún, vamos a probar que la mediatriz es la tangente a la elipse en  $P$ . Para ello necesitamos hacer una digresión:

Consideremos una recta  $r$  y dos puntos exteriores a ella,  $P_1$  y  $P_2$ , situados en un mismo semiplano. Queremos encontrar el punto  $Q$  de  $r$  que hace que la distancia  $\overline{P_1Q} + \overline{QP_2}$  sea la menor posible.

Para encontrarlo basta calcular el punto simétrico  $P_2'$  de  $P_2$  respecto de  $r$ . El punto  $Q$  es entonces la intersección con  $r$  de  $\overline{P_1P_2'}$ .

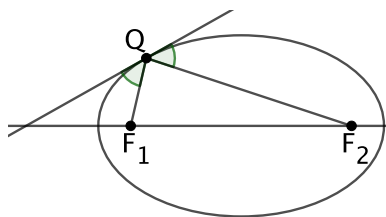


En efecto, si  $X$  es cualquier otro punto de  $r$ , se cumplirá que

$$\overline{P_1X} + \overline{XP_2} = \overline{P_1X} + \overline{XP'_2} < \overline{P_1P'_2} = \overline{P_1Q} + \overline{QP_2}.$$

El punto  $Q$  se caracteriza por que los dos ángulos marcados en la figura son iguales, pues el de la derecha es igual a su simétrico, que es opuesto por el vértice al de la izquierda.

Ahora aplicamos esto al caso en que  $r$  es una recta tangente a una elipse y los puntos son sus focos:



El punto de tangencia  $Q$  hace que  $\overline{F_1Q} + \overline{QF_2} = 2a$  y, como los demás puntos de la tangente son exteriores a la elipse, cumplen  $\overline{F_1X} + \overline{XF_2} > 2a$ , luego el punto  $Q$  cumple que los dos ángulos señalados en la figura son iguales. Equivalentemente:

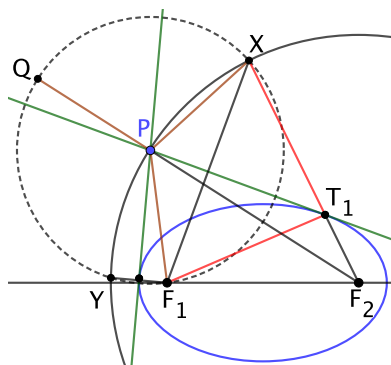
**Teorema 7.18** *La recta tangente a una elipse por uno de sus puntos  $Q$  es la bisectriz exterior del triángulo  $\widehat{F_1QF_2}$  correspondiente al vértice  $Q$ .*

Esto se interpreta como que si un rayo de luz procedente de un foco se refleja en una elipse, el rayo reflejado pasa por el otro foco.

Esto implica que, como habíamos anunciado, en la construcción de una elipse mediante una de sus circunferencias focales que hemos descrito un poco más arriba, la mediatriz del segmento  $\overline{QF_2}$  es la tangente a la elipse en el punto calculado  $P$ , ya que es la bisectriz del ángulo  $\widehat{F_2PQ}$ .

Ahora también es fácil calcular las tangentes a una elipse por un punto exterior:

**Problema 7.1** *Trazar las tangentes a una elipse por un punto exterior.*



1. Calculamos los puntos de corte  $X, Y$  entre la circunferencia de centro el punto exterior  $P$  que pasa por el foco  $F_1$  y la circunferencia focal de centro  $F_2$  (y radio  $2a$ ).
2. Las tangentes a la elipse por  $P$  son las mediatrices de los segmentos  $\overline{XF_1}$  y  $\overline{XF_2}$  y los puntos de tangencia están en  $XF_2, YF_2$ .

Ante todo, notemos que las dos circunferencias se cortan necesariamente en dos puntos, pues la circunferencia de centro  $P$  pasa por un punto interior a la circunferencia focal (el foco  $F_1$ ) y también por un punto exterior, pues si llamamos  $Q$  al punto más alejado de  $F_2$  donde la recta  $PF_2$  corta a la circunferencia, se cumple que

$$\overline{QF_2} = \overline{QP} + \overline{PF_2} = \overline{F_1P} + \overline{PF_2} > 2a.$$

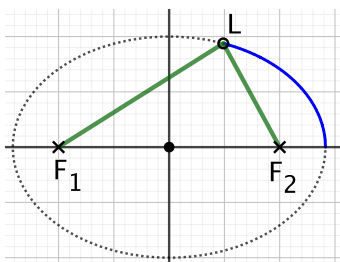
luego  $Q$  es exterior a la circunferencia focal.

Sea  $T_1$  uno de los puntos de tangencia y sea  $X'$  la intersección de  $\overrightarrow{T_1F_2}$  con la circunferencia focal. El triángulo  $\widehat{X'T_1F_1}$  es isósceles, luego la tangente, que por el teorema anterior es la bisectriz del ángulo en  $T_1$ , coincide con la mediatriz del segmento  $\overline{F_1X'}$ , pero  $P$  está en la tangente, luego  $\overline{PX'} = \overline{PF_1}$ , luego  $X'$  está en la circunferencia de centro  $P$  que pasa por  $F_1$ , luego, intercambiando  $X$  con  $Y$  si es preciso, tenemos que  $X' = X$ . ■

**Trazado de elipses** Hemos visto como, a partir de cualquier punto  $Q$  de la circunferencia principal de una elipse o de una de sus circunferencias focales, podemos determinar un punto  $P$  de la elipse. Esto permite construir cualquier número finito de puntos en una elipse que permitan trazarla “a mano” sobre el papel con resultados aceptables. No obstante, existen diversos métodos para trazar de forma “exacta” una elipse completa. El más elemental es el conocido como “método del jardinero”, porque lo usaban los jardineros para trazar elipses en la tierra para crear macizos florales elípticos:

Se clavan estacas en los focos de la elipse, se pasa por ellas una cuerda circular que se tensa con una tercera estaca para formar un triángulo, y ésta se mueve manteniendo tensa la cuerda y su posición vertical. Así la punta de la estaca va trazando una elipse en el suelo. Equivalentemente, podemos usar un hilo, unas chinchetas y un bolígrafo para dibujar una elipse sobre el papel:



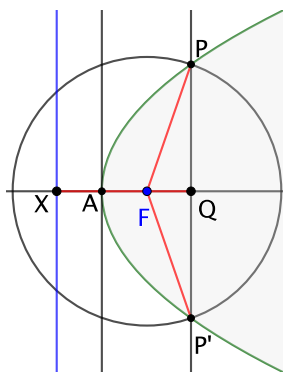


### 7.3 La parábola

Pasamos ahora a estudiar específicamente las propiedades de las parábolas. Según la definición que hemos adoptado, una parábola está formada por los puntos que equidistan de su foco y de su directriz. Hemos visto que tiene un único vértice  $A$ , que es el punto medio del segmento comprendido entre el foco  $F$  y el pie  $X$  de la perpendicular a la directriz por el foco.

La perpendicular al eje (o paralela a la directriz) por  $A$  es tangente a la parábola, y es evidente que ningún punto situado en el semiplano opuesto al foco respecto de esta tangente puede estar en la parábola.

Por el contrario, cada paralela a la directriz situada en el semiplano del foco respecto a la tangente en  $A$  corta a la parábola exactamente en dos puntos, que pueden determinarse sin más que trazar la circunferencia de centro  $F$  y radio igual a la distancia entre la recta y la directriz:



De este modo podemos trazar cuantos puntos queramos de una parábola dada.

La longitud del *latus rectum* se conoce como *parámetro* de la parábola, y claramente es el doble de la distancia de  $F$  a la directriz, o también  $p = 4\overline{FA}$ .

Es claro que dos parábolas son iguales si y sólo si tienen el mismo parámetro, pues en tal caso la distancia del foco a la directriz es la misma para ambas, luego mediante un movimiento podemos hacer que coincidan las directrices y los focos, luego también coincidirán las curvas.

**Expresión analítica** Llamaremos *sistema de referencia canónico* de una parábola a cualquiera que tenga como eje de abscisas el eje de la parábola, origen en su vértice y respecto al que el foco tenga abscisa positiva. Si la parábola tiene parámetro  $p$ , el foco tendrá coordenadas  $(p/4, 0)$  y la directriz será la recta  $x = -p/4$ .

**Teorema 7.19** *Respecto de un sistema de referencia canónico, los puntos de la parábola de parámetro  $p$  son los que cumplen la ecuación*

$$y^2 = px.$$

DEMOSTRACIÓN: La ecuación que expresa que la distancia al foco coincide con la distancia a la directriz es:

$$\sqrt{(x - p/4)^2 + y^2} = x + p/4,$$

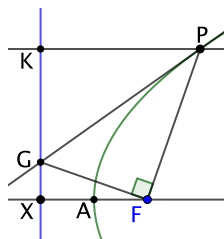
y elevando al cuadrado y simplificando queda  $y^2 = px$ . Por lo tanto, todos los puntos de la hipérbola cumplen la ecuación.

Recíprocamente, si un punto  $(a, b)$  cumple la ecuación, entonces  $a \geq 0$ . Si es  $a = 0$ , necesariamente  $b = 0$  y  $(a, b)$  es el vértice de la parábola. Si  $a > 0$ , entonces la recta vertical  $x = a$  pasa por dos puntos distintos de la parábola que cumplen la ecuación, pero sólo hay dos puntos que cumplen la ecuación con  $x = a$ , a saber,  $(a, \pm\sqrt{pa})$ , luego uno de ellos tiene que ser el punto de partida.

**Tangentes** Las tangentes a una parábola cumplen una propiedad análoga a la que en 7.18 hemos demostrado para las elipses:

**Teorema 7.20** *La tangente a una parábola en un punto  $P$  distinto de su eje biseca el ángulo formado por  $FP$  y por la perpendicular a la directriz por  $P$ .*

DEMOSTRACIÓN: Según la definición 7.7, la tangente por  $P$  es la recta  $GP$  que corta a la directriz en el punto  $G$  tal que  $GF$  es perpendicular a  $FP$ .



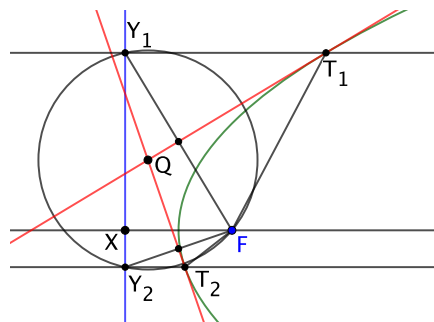
Por lo tanto, los triángulos  $\widehat{GPF}$  y  $\widehat{GKP}$  son rectángulos, tienen un lado en común y, por definición de parábola,  $\overline{PF} = \overline{PK}$ . Esto implica que son semejantes, luego  $\widehat{KPG} = \widehat{FPG}$ . ■

Esto se interpreta como que si un rayo de luz llega a la parte cóncava de una parábola paralelamente a su eje, el rayo reflejado pasará por el foco. Este principio geométrico es el fundamento de las antenas parabólicas, cuya forma

es la de la superficie que resulta de girar una parábola alrededor de su eje. Así, las ondas electromagnéticas que llegan a la antena paralelamente a su eje se concentran en su foco.

Este teorema implica que por un punto exterior a una parábola pasan exactamente dos rectas tangentes:

**Problema 7.2** *Trazar las tangentes a una parábola que pasan por un punto exterior.*



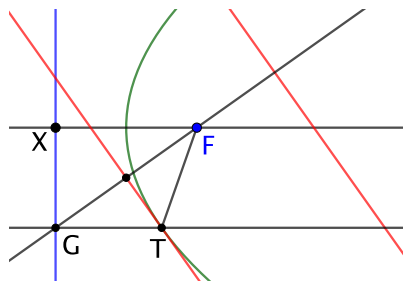
Dado un punto exterior  $Q$ :

1. Trazamos la circunferencia de centro  $Q$  que pasa por el foco  $F$ .  
Como el punto es exterior, su distancia al foco es mayor que su distancia a la directriz, luego la circunferencia corta a la directriz en dos puntos  $Y_1$  e  $Y_2$ .
2. Las tangentes buscadas son las mediatrices de los segmentos  $\overline{FY_i}$  y los puntos de tangencia  $T_i$  son las intersecciones de éstas con las perpendiculares a la directriz por los puntos  $Y_i$ .

En efecto, tenemos que  $\widehat{T_i Y_i} = \widehat{T_i F}$ , luego  $T_i$  está en la parábola y  $QT_i$  es la bisectriz del ángulo  $\widehat{T_i T_i F}$ , luego 7.20 nos da que es la tangente por  $T_i$ . ■

Similarmente, una parábola tiene una única tangente paralela a una recta dada que no sea paralela a su eje:

**Problema 7.3** *Trazar la tangente a una parábola paralela a una recta dada que no sea paralela al eje.*



1. Trazamos la perpendicular a la recta dada que pasa por el foco.

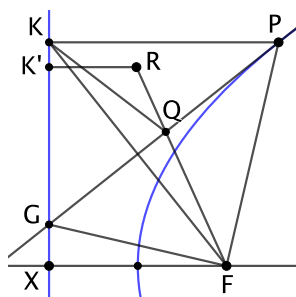
Como la recta dada no es paralela al eje, la perpendicular no será paralela a la directriz, luego la cortará en un punto  $G$ .

2. La tangente buscada es la mediatriz de  $\overline{FG}$  y el punto de tangencia es su intersección  $T$  con la perpendicular a la directriz por  $G$ .

En efecto, tenemos que  $\overline{TF} = \overline{TG}$ , luego  $T$  está en la parábola y la mediatriz es la bisectriz del ángulo  $\widehat{GTF}$ , luego por 7.20 sabemos que es la tangente a la parábola por  $T$ . ■

**Teorema 7.21** Una parábola está toda contenida en mismo semiplano que su foco respecto de cualquiera de sus tangentes.

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que todo punto  $R$  situado en el semiplano opuesto al foco es exterior. El segmento  $\overline{RF}$  cortará a la tangente en un punto  $Q$ . Sean  $K$  y  $K'$  los pies de las perpendiculares a la directriz por  $P$  y  $Q$ , respectivamente. Supongamos en primer lugar que  $Q$  es distinto de  $P$ .



Entonces, por 7.20 sabemos que la tangente  $QP$  es la bisectriz de  $\widehat{KPF}$ , pero, como  $P$  está en la parábola, el triángulo  $\widehat{KPF}$  es isósceles, luego  $QP$  es la mediatriz del segmento  $\overline{KF}$ . Esto implica que  $\overline{QF} = \overline{QK}$ . Si  $Q = P$  llegamos trivialmente a la misma conclusión. Entonces

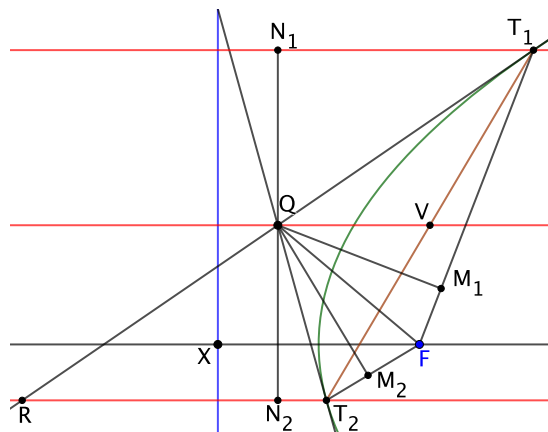
$$\overline{RF} = \overline{RQ} + \overline{QF} = \overline{RQ} + \overline{QK} > \overline{RK} \geq \overline{RK'}.$$

La desigualdad es estricta porque  $Q$  no puede estar entre  $R$  y  $K$ , ya que  $K$  y  $F$  están en semiplanos opuestos respecto a la tangente  $QP$  (pues ésta es la mediatriz del segmento que determinan), luego  $K$  y  $R$  están en el mismo semiplano, luego el segmento  $\overline{KR}$  no puede cortar a la tangente y, en particular, no contiene a  $Q$ . ■

**Diámetros** Un *diámetro* de una parábola es una recta paralela a su eje.

Vamos a probar que los diámetros de las parábolas se comportan de forma similar a los diámetros de las elipses.

**Teorema 7.22** Si las tangentes a una parábola por dos puntos  $T_1$  y  $T_2$  se cortan en un punto  $Q$ , el diámetro que pasa por  $Q$  equidista de los que pasan por  $T_1$  y  $T_2$  y biseca a la cuerda  $\overline{T_1T_2}$ .



DEMOSTRACIÓN: Sean  $M_1$  y  $M_2$  los pies de las perpendiculares por  $Q$  a  $\overline{FT_i}$ . El teorema 7.13 nos da que  $FQ$  biseca las rectas  $\overline{FT_i}$ , luego  $\overline{QM_1} = \overline{QM_2}$ . Por otro lado, el teorema 7.20 nos da que  $T_1Q$  biseca  $\widehat{FT_1N_1}$ , luego  $\overline{QN_1} = \overline{QM_1}$ . Análogamente,  $\overline{QN_2} = \overline{QM_2}$ , luego concluimos que  $\overline{QN_1} = \overline{QN_2}$ . Esto prueba la primera parte del enunciado. Ahora, por el teorema de Tales:

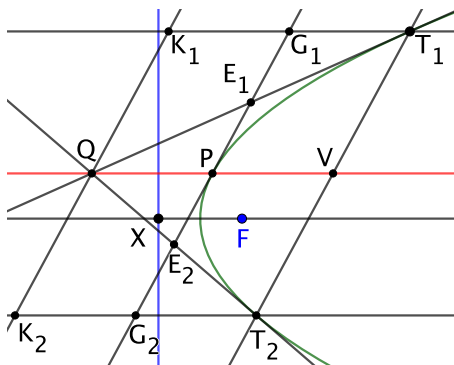
$$\frac{\overline{T_1V}}{\overline{VT_2}} = \frac{\overline{T_1Q}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{QN_1}}{\overline{QN_2}} = 1,$$

luego  $\overline{T_1V} = \overline{VT_2}$ . ■

Así pues el diámetro que pasa por el punto medio de una cuerda cualquiera de una parábola pasa por el punto de intersección de las tangentes a la parábola por los extremos de la cuerda.

Con esto podemos probar otro hecho notable:

**Teorema 7.23** Cada diámetro de una parábola biseca a todas sus cuerdas paralelas a la tangente que pasa por el punto donde corta a la parábola, y contiene los puntos de corte de las tangentes por los extremos de cada cuerda.



DEMOSTRACIÓN: Consideramos un diámetro que pase por un punto  $P$  de la parábola, la tangente a ésta por  $P$  y una cuerda  $\overline{T_1T_2}$  paralela a dicha tangente. Sea  $Q$  el punto de corte de las tangentes a la parábola por  $T_1$  y  $T_2$ . Tenemos que probar que  $Q$  está en el diámetro de partida. Llamamos  $V$  a la intersección de este diámetro con la cuerda  $\overline{T_1T_2}$ , de modo que hay que probar que  $Q$  está en  $PV$ . Tenemos que

$$\frac{\overline{E_1G_1}}{\overline{QK_1}} = \frac{\overline{E_1T_1}}{\overline{QT_1}} = \frac{\overline{E_2T_2}}{\overline{QT_2}} = \frac{\overline{E_2G_2}}{\overline{QK_2}}.$$

Por el teorema anterior sabemos que  $Q$  equidista de los diámetros que pasan por los  $T_i$ , luego  $\overline{QK_1} = \overline{QK_2}$  y, por consiguiente,  $\overline{E_1G_1} = \overline{E_2G_2}$ .

También por el teorema anterior, pero aplicado al punto  $E_i$ , donde se cortan las tangentes por  $P$  y  $T_i$ , concluimos que  $E_i$  equidista de los diámetros por  $P$  y por  $G_i$ , luego  $\overline{PE_i} = \overline{E_iG_i}$ , luego podemos concluir que los cuatro segmentos  $\overline{E_iG_i}$  y  $\overline{E_iT_i}$  son iguales, luego  $\overline{G_1P} = \overline{PG_2}$  y, por paralelismo,  $\overline{T_1V} = \overline{VT_2}$ .

Puesto que  $Q, P, V$  equidistan de los diámetros por  $T_1$  y  $T_2$ , podemos concluir que están alineados, con lo que ciertamente  $Q$  está en el diámetro de partida  $PV$  y  $V$  resulta ser el punto medio de la cuerda. ■

Incidentalmente, en la prueba del teorema anterior hemos visto que

$$\overline{VT_1} = \overline{PG_1} = 2\overline{PE_1},$$

luego el teorema de Tales nos da que  $P$  es el punto medio de  $\overline{QV}$  (y  $E_1, E_2$  los puntos medios de  $\overline{QT_1}$  y  $\overline{QT_2}$ ). Esto nos permite probar lo siguiente:

**Teorema 7.24** *Toda recta que pasa por un punto interior de una parábola y que no es paralela al eje corta a la parábola en dos puntos.*

DEMOSTRACIÓN: Dada una recta  $r$ , el problema 7.3 nos dice cómo trazar una tangente  $t$  a la parábola paralela a  $r$ . Sea  $P$  el punto de tangencia. El diámetro que pasa por  $P$  cortará a  $r$  en un punto  $V$ . Sea  $Q$  el punto simétrico de  $V$  respecto de  $P$ . Uno de los dos puntos,  $V$  o  $Q$ , tiene que ser interior, pero no puede ser  $Q$ , pues entonces la recta  $r$ , que está contenido en un semiplano respecto de la tangente  $t$  (pues es paralela a ella), estaría en el semiplano opuesto a la parábola, luego no pasaría por ningún punto interior. Por lo tanto,  $V$  es interior y  $Q$  es exterior.

Sean  $T_1$  y  $T_2$  los puntos donde las tangentes por  $Q$  tocan a la parábola. El teorema anterior prueba que la recta  $T_1T_2$  pasa por  $V$  y es paralela a  $t$ , luego tiene que ser  $r$ , y así  $r$  corta a la parábola en  $T_1$  y  $T_2$ . ■

Más explícitamente:

**Teorema 7.25** *Si una recta corta a una parábola únicamente en un punto  $P$ , entonces es la tangente o bien el diámetro que pasa por  $P$ .*

DEMOSTRACIÓN: Sea  $r$  una recta que corte a la parábola únicamente en el punto  $P$  y supongamos que no es el diámetro ni la tangente en  $P$ . No puede

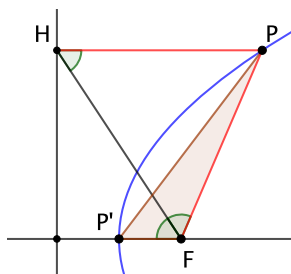
ocurrir que  $r$  sea perpendicular al eje, pues, la única perpendicular al eje que corta a la parábola en un punto es la tangente. Las demás no cortan en ningún punto o cortan en dos. Sea, pues,  $G$ , el punto donde  $r$  corta a la directriz. Así  $r = GP$ .

Sea  $s$  la recta simétrica de  $FP$  por  $FG$ . Como  $GP$  no es la tangente en  $P$ , por la definición que hemos dado de recta tangente,  $FP$  no es perpendicular a  $FG$ . También podemos suponer que  $FP$  no coincide con  $FG$ , pues, si se diera el caso, la recta dada  $GP$  pasaría por  $F$ , luego el teorema anterior nos daría que es un diámetro. Por lo tanto, las rectas  $s$  y  $FP$  son distintas.

Como  $s$  pasa por el punto interior  $F$ , corta a la parábola en uno o dos puntos, digamos  $P'$  y, si acaso  $P''$ , ambos distintos de  $P$ , pues  $s$  no es  $FP$ . Más aún,  $FP$  no contiene ni a  $P'$  ni a  $P''$ , luego tenemos triángulos  $\widehat{PFP'}$  y  $\widehat{PFP''}$ .

Por construcción,  $FG$  es una de las bisectrices de  $FP$  y  $s = FP' = FP''$ . Vamos a ver que si no existe  $P''$ , es decir, si  $s$  es el eje de la parábola y  $P'$  es el vértice,  $FP$  es, concretamente, la bisectriz exterior en  $\hat{F}$  del triángulo  $\widehat{PFP'}$ .

Para ello consideramos el diámetro  $GP$  que pasa por  $P$ , y observamos que  $HF$  es la bisectriz interior de  $\widehat{PFP'}$ . Como  $P$  está en la parábola, el triángulo  $\widehat{HPF}$  es isósceles, luego los tres ángulos marcados en la figura son iguales:



Así pues, si  $GF$  es la bisectriz interior de  $\widehat{PFP'}$ , necesariamente  $G = H$ , pero entonces  $r = PG = PH$  es el diámetro que pasa por  $P$ , en contra de lo supuesto.

Si tenemos dos puntos distintos, como  $P'$  y  $P''$  tienen que estar en lados opuestos respecto de  $F$ , si  $FG$  es la bisectriz exterior del ángulo  $\hat{F}$  del triángulo  $\widehat{PFP'}$ , entonces es la bisectriz interior del triángulo  $\widehat{PFP''}$  y viceversa. Elegimos  $P'$  de modo que  $FG$  sea la bisectriz exterior del triángulo  $\widehat{PFP'}$ .

Así pues, en cualquier caso, hemos encontrado un punto  $P'$  en la parábola distinto de  $P$  tal que  $FG$  es la bisectriz exterior del triángulo  $\widehat{PFP'}$ . No puede suceder que  $PP'$  sea paralelo a la directriz, pues entonces el triángulo  $\widehat{PFP'}$  sería isósceles y la bisectriz exterior a  $\hat{F}$  sería paralela al lado  $PP'$ , luego no cortaría a la directriz, pero la corta en  $G$ . Sea, pues,  $G'$  el punto donde  $PP'$  corta a la directriz.

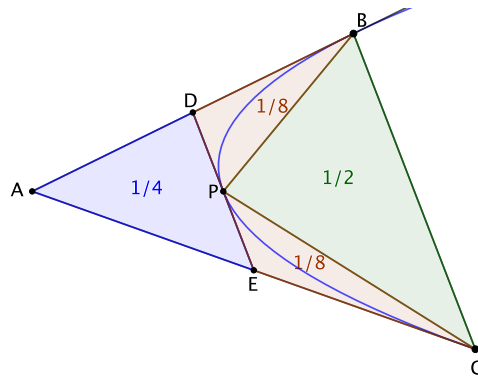
Por el teorema 7.4, la recta  $FG'$  es una de las bisectrices de las rectas  $FP$  y  $FP'$ , pero como  $P$  y  $P'$  están en la parábola y  $G'$  está en la directriz, no puede ser que  $G'$  esté entre  $P$  y  $P'$  (pues entonces habría puntos de la parábola en

los dos semiplanos determinados por la directriz), y esto implica que  $FG'$  no puede ser la bisectriz interior de  $\widehat{PFP'}$ , luego tiene que ser la exterior, es decir,  $FG' = FG$ , luego  $G' = G$  y así  $r = PG = PG' = PP'$ , luego  $r$  pasa por dos puntos de la parábola, y tenemos una contradicción. ■

En otras palabras, los diámetros son las únicas rectas que, sin ser tangentes a una parábola, la cortan únicamente en un punto. En el caso de las elipses no existen tales rectas excepcionales.

**La cuadratura de la parábola** Del teorema 7.23 y la observación posterior se deduce lo siguiente:

**Teorema 7.26** Sean  $B$  y  $C$  dos puntos de una parábola, sea  $A$  el punto donde se cortan las tangentes por  $B$  y  $C$ , sea  $P$  el punto de tangencia de la tangente paralela a  $BC$  y sean  $D$  y  $E$  los puntos donde ésta corta a las tangentes  $AB$  y  $AC$ . Entonces los cuatro triángulos que muestra la figura tienen el área indicada con respecto al área del triángulo  $\widehat{ABC}$ :



DEMOSTRACIÓN: Por la observación tras el teorema 7.23 sabemos que  $P$  es el punto medio de  $\overline{DE}$  y que  $D$  y  $E$  son los puntos medios de  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$ , respectivamente.

Por lo tanto, el triángulo  $\widehat{DAE}$  cumple que su base  $\overline{DE}$  es la mitad de la base  $\overline{BE}$  de  $\widehat{BAC}$ , y su altura también es la mitad, luego su área es la cuarta parte.

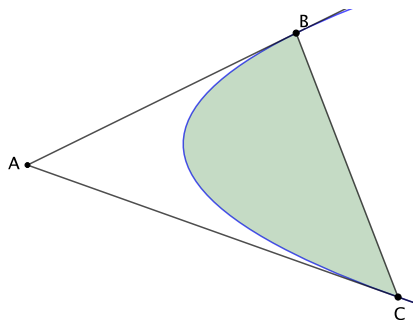
En cambio,  $\widehat{BPC}$  tiene la misma base y la mitad de la altura, luego su área es la mitad de la de  $\widehat{BAC}$ .

Finalmente, los triángulos  $\widehat{DBP}$  y  $\widehat{ECP}$  tienen bases y alturas iguales, luego también áreas iguales. Como la suma de sus áreas es  $1/4$  de la de  $\widehat{BAC}$ , la de cada uno de ellos tiene que ser  $1/8$  del área total. ■

Arquímedes se basó en este hecho para cuadrar la región parabólica limitada por una cuerda:



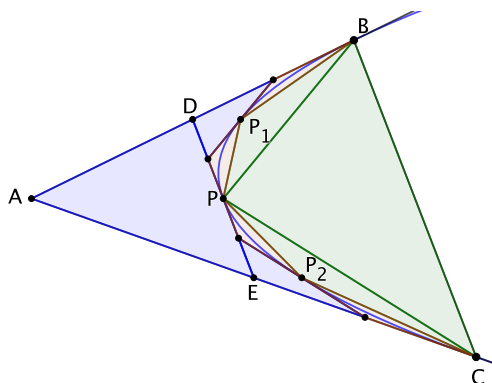
**Teorema 7.27** Sea  $\overline{BC}$  una cuerda en una parábola y sea  $A$  el punto donde se cortan las tangentes por  $B$  y  $C$ . Entonces el área de la región comprendida entre la parábola y la cuerda es  $(2/3)S$ , donde  $S$  es el área del triángulo  $\widehat{BAC}$ .



DEMOSTRACIÓN: Teniendo en cuenta el teorema anterior, el área  $A$  de la figura descrita en el enunciado cumple

$$\frac{1}{2}S < A < \left(1 - \frac{1}{4}\right)S,$$

pues contiene al triángulo  $\widehat{BPC}$  y está contenida en el cuadrilátero  $BDEC$ . Pero podemos aplicar de nuevo el teorema a las cuerdas  $\overline{BP}$  y  $\overline{PC}$ :



Así obtenemos dos nuevos triángulos contenidos en la parábola, y otros dos exteriores a ellos. Las áreas de los interiores son

$$\frac{1}{2} \frac{1}{8} S,$$

mientras que las de los exteriores son

$$\frac{1}{4} \frac{1}{8} S.$$

Como son dos, al sumar las áreas de los interiores y restar las de los exteriores a las cotas que teníamos, resulta que

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right)S < A < \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right)S,$$

y quedarán cuatro triángulos de área  $1/8^2 S$  montados sobre la parábola. Repitiendo el proceso, dentro de cada uno de ellos podemos encontrar otro triángulo contenido en la parábola cuya área será  $(1/2)(1/8^2)S$  y otro exterior a ella de área  $(1/4)(1/8^2)S$ . Teniendo en cuenta que son cuatro triángulos, concluimos que

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32}\right)S < A < \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \frac{1}{64}\right)S.$$

Una simple inducción nos permite concluir que tras  $n$  pasos tenemos un polígono contenido en la parábola y otro que la contiene de modo que

$$\frac{S}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{4^{i-1}} < A < S \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{4^i}\right),$$

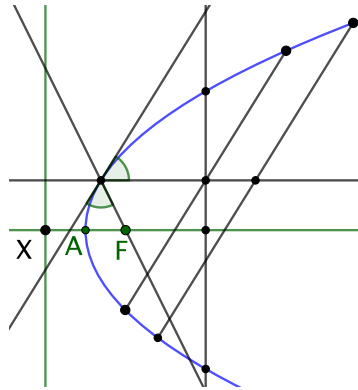
y entre ambas quedan  $2^n$  triángulos de área  $S/8^n$ . Sumando las series geométricas concluimos que

$$\frac{2}{3}S = \frac{S}{2} \frac{1}{1-1/4} \leq A \leq S \left(1 - \frac{1/4}{1-1/4}\right) = \frac{2}{3}S,$$

luego podemos asegurar que  $A = (3/4)S$ . ■

**Cálculo del foco y la directriz** Si nos encontramos una parábola dibujada en un papel, pero sin su foco y su directriz, ahora sabemos cómo calcularlos:

**Problema 7.4** *Trazar el foco y la directriz de una parábola dada.*



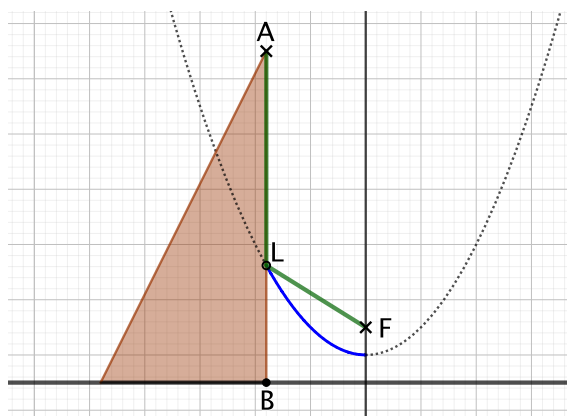
1. Trazamos dos cuerdas paralelas cualesquiera, unimos sus puntos medios, y así tenemos un diámetro.

2. Trazamos una perpendicular al diámetro y marcamos los puntos en los que corta a la parábola. El punto medio estará en el eje.
3. Trazando la paralela al diámetro calculado en 1) por el punto obtenido en 2) obtenemos el eje y el vértice.
4. Trazando la paralela a las cuerdas de 1) por el punto en que el diámetro que determinan corta a la parábola obtenemos una tangente.
5. La recta simétrica al diámetro respecto de la tangente corta el eje en el foco (por el teorema 7.20).
6. La perpendicular al eje por el punto simétrico del foco respecto del vértice es la directriz.

Vemos así que no puede suceder que una misma parábola pueda construirse a partir de dos pares distintos foco-directriz. ■

**Trazado de parábolas** Hemos visto que es posible calcular los puntos de una parábola dada (conocidos sus foco y directriz) donde corta a cualquier recta perpendicular a su eje. Podría pensarse entonces que las parábolas son esencialmente “constructibles con regla y compás”, en el sentido de que podemos construir cualquiera de sus puntos que necesitemos en un momento dado. Sin embargo, esto no es cierto. Tal y como hemos explicado en la introducción, Menecmo observó que si podemos trazar una parábola en un papel, entonces podemos trazar un segmento que guarde una proporción de  $\sqrt[3]{2}$  respecto a cualquier otro segmento dado, es decir, que podemos construir la arista del cubo que duplica (en volumen) a otro de arista conocida.

Se plantea entonces el problema de cómo podemos dibujar una parábola en un papel de forma exacta, no sólo un número finito de sus puntos. Un método consiste en tomar como directriz una ranura en la que se ha fijado una regla, de modo que sólo puede deslizarse por ella. En el extremo  $A$  de la regla se fija una cuerda de longitud  $\overline{AB}$ , y el otro extremo se fija en el foco  $F$ :



Si tensamos la cuerda con el lápiz en el punto  $L$  y empujamos hacia la izquierda, la punta del lápiz recorrerá un arco de parábola, pues

$$\overline{AL} + \overline{LF} = \overline{AB} = \overline{AL} + \overline{LB},$$

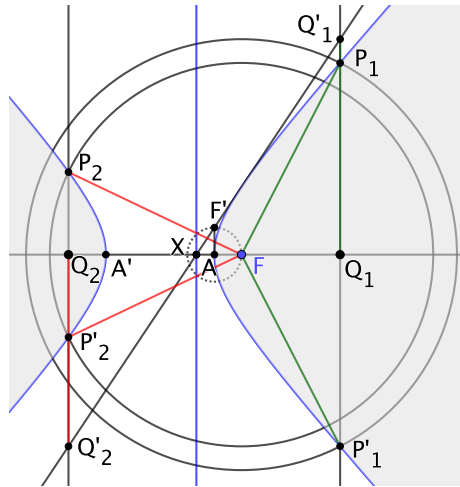
luego  $\overline{LF} = \overline{LB}$ .

Por otro lado, puede probarse que todas las “construcciones sólidas”, es decir, todas las construcciones que se apoyan en el trazado de una o varias cónicas, pueden conseguirse también con regla marcada y compás. ■

### 7.4 La hipérbola

Recordemos que una hipérbola es una cónica de excentricidad  $e > 1$ . En la sección 7.1 hemos probado que si  $c$  es la distancia focal, entonces, como en el caso de las elipses, los vértices están a una distancia  $a = c/e$  del centro y la directriz está a una distancia  $d = c/e^2 = a/e$ .

Podemos construir (y probar la existencia) de puntos de una hipérbola exactamente igual que en el caso de una elipse. Levantamos la distancia  $\overline{AF}$  para formar una recta de pendiente  $\overline{AF}/\overline{AX} = e$ , de modo que si tomamos un punto  $Q$  sobre el eje, se cumple que  $\overline{QQ'} = e\overline{XQ}$  y un punto  $P$  en la recta perpendicular al eje por  $Q$  estará en la hipérbola si y sólo si está también en la circunferencia de centro  $F$  y radio  $\overline{QQ'}$ :



Sin embargo, así como en el caso de la elipse la circunferencia cortaba a la recta cuando  $Q$  estaba entre los vértices, ahora vamos a ver que esto sucede justo en el caso opuesto. Si fijamos un sistema de referencia en el eje de la cónica en el que  $F$  tenga coordenada  $c$  y la intersección  $X$  con la directriz tenga coordenada  $d$ , entonces la perpendicular al eje por el punto  $Q$  de coordenada  $q$  cortará a la circunferencia de centro  $F$  y radio  $e\overline{XQ}$  si y sólo si

$$|q - c| \leq e|q - d|.$$

Para puntos con  $q \geq d$  esto equivale a  $|q - ea| \leq eq - a$ , que a su vez equivale a

$$a - eq \leq q - ea \leq eq - a,$$

o también a  $q \geq a$  y  $q \geq -a$ , es decir, a  $q \geq a$ .

Similarmente, para puntos con  $q \leq d$  la condición equivale a  $|q - ea| \leq a - eq$ , que a su vez equivale a

$$-a + eq \leq q - ea \leq a - eq,$$

o también a  $q \leq -a$  y  $q \leq a$ , es decir, a  $q \leq -a$ .

En resumen: las rectas perpendiculares al eje cortan a la hipérbola siempre que el pie tenga coordenada  $q \leq -a$  o  $q \geq a$ , es decir, siempre que el pie no esté comprendido entre los vértices. La intersección (que coincide con la intersección de una recta con una circunferencia) consta de dos puntos salvo en el caso de las perpendiculares por cada vértice, que sólo cortan a la hipérbola en el vértice.

**Expresión analítica** Llamaremos *sistema de referencia canónico* de una hipérbola a cualquiera que tenga como eje de abscisas el eje mayor y origen en su centro.

**Teorema 7.28** *Respecto de su sistema de referencia canónico, una hipérbola está formada por los puntos cuyas coordenadas cumplen la ecuación:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ .

DEMOSTRACIÓN: El foco tendrá coordenadas  $(\pm c, 0)$  y la directriz será la recta de ecuación  $x = \pm d$  (con el mismo signo en ambos casos). Un punto  $(x, y)$  estará en la hipérbola si y sólo si

$$\frac{\sqrt{(x \pm c)^2 + y^2}}{|x \pm d|} = e.$$

Elevando al cuadrado:

$$x^2 + c^2 \pm 2cx + y^2 = e^2(x^2 + d^2 \pm 2dx).$$

Ahora recordamos que  $c = e^2d$ , con lo que  $2e^2d = 2c$ , luego se simplifican los términos en  $x$  y queda

$$(e^2 - 1)x^2 - y^2 = c^2 - e^2d^2 = c^2 - a^2 = b^2,$$

pues  $ed = a$ . Por último, teniendo en cuenta que

$$\frac{b^2}{e^2 - 1} = \frac{b^2}{c^2/a^2 - 1} = \frac{a^2b^2}{c^2 - a^2} = \frac{a^2b^2}{b^2} = a^2,$$

llegamos a

$$\frac{x^2}{b^2/(e^2 - 1)} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que es la ecuación anunciada.

Con esto hemos probado que todos los puntos de la elipse cumplen la ecuación. El recíproco se prueba con el mismo argumento que en el caso de la elipse. ■

**Nota** Si en la primera parte de la demostración del teorema anterior partimos de la relación con  $< e$  (resp.  $> e$ ) en lugar de  $= e$ , llegamos a la ecuación del enunciado con  $> 1$  (resp.  $< 1$ ), por lo que podemos concluir que, respecto del sistema de referencia canónico, un punto es interior (resp. exterior) a una hipérbola si y sólo si cumple

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1 \quad (\text{resp. } < 1).$$

Notemos que las desigualdades están invertidas respecto del caso de la elipse. En particular, el centro de una elipse (de coordenadas  $(x, y) = (0, 0)$ ) es un punto interior, mientras que en una hipérbola es exterior. ■

Como en el caso de la elipse, ahora podemos afirmar que el eje menor de una hipérbola es también un eje de simetría, así como que una hipérbola es simétrica respecto de su centro. A su vez, la simetría respecto del eje menor implica que una hipérbola puede definirse mediante dos pares alternativos de foco y directriz, situados simétricamente respecto de su eje menor.

Más aún, tenemos la caracterización siguiente de las hipérbolas, que puede tomarse como definición:

**Teorema 7.29** *Dados dos puntos distintos  $F_1$  y  $F_2$  y un número  $2a < \overline{F_1F_2}$ , el conjunto de los puntos  $P$  tales que*

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \pm 2a$$

*es una hipérbola con focos  $F_1$  y  $F_2$  y semieje mayor  $a$ . Los puntos de cualquier hipérbola satisfacen esta ecuación.*

**DEMOSTRACIÓN:** Fijemos un sistema de referencia con origen en el punto medio de  $F_1$  y  $F_2$ , de modo que estos puntos tengan coordenadas  $(\pm c, 0)$ . Un punto  $P$  de coordenadas  $(x, y)$  cumplirá la condición del enunciado si y sólo si

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Pasamos una raíz al miembro derecho y elevamos al cuadrado:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Operando, esto equivale a

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2.$$

Elevando de nuevo al cuadrado queda:

$$a^2((x-c)^2 + y^2) = (cx - a^2)^2$$

Operando:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Sustituyendo  $b^2 = c^2 - a^2$  queda

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Con esto hemos probado que todos los puntos que cumplen la ecuación del enunciado están en una hipérbola de centro en el punto medio de  $F_1$  y  $F_2$ , con eje mayor  $F_1F_2$  y semiejes  $a, b$ , luego de distancia focal  $c$ , por lo que los focos son precisamente  $F_1$  y  $F_2$ .

Ahora falta probar que todo punto de la hipérbola de focos  $F_1$  y  $F_2$  y semieje mayor  $a$  cumple la condición del enunciado. Llamamos  $d_1$  y  $d_2$  las directrices correspondientes a los focos  $F_1$  y  $F_2$ . Dado un punto  $P$  en la hipérbola, sean  $K_1$  y  $K_2$  los pies de la perpendicular por  $P$  a  $d_1$  y  $d_2$  (notemos que la recta es la misma en ambos casos). Entonces

$$\overline{PF_1} = e\overline{K_1P}, \quad \overline{PF_2} = e\overline{PK_2},$$

luego

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = e(\overline{K_1P} - \overline{PK_2}) = \pm e\overline{K_1K_2} = \pm 2ed = \pm 2a.$$

Además, toda hipérbola cumple que  $2a < 2c = \overline{F_1F_2}$ . ■

**Nota** La igualdad del teorema anterior puede expresarse en la forma

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a,$$

mientras que los puntos interiores (resp. exteriores) cumplen  $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| > 2a$  (resp.  $< 2a$ ). En efecto, es claro que el valor de  $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}|$  no se altera si cambiamos  $P$  por su simétrico respecto del eje menor de la hipérbola, como tampoco se altera su condición de punto interior o exterior. Por lo tanto, si  $P$  cumple  $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| > 2a$  (resp.  $< 2a$ ), cambiándolo por su simétrico si es preciso podemos suponer que  $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} > 2a$  (resp.  $< 2a$ ), y los mismos cálculos que hemos hecho en la demostración del teorema nos dan entonces que las coordenadas de  $P$  cumplen la ecuación de la hipérbola con  $> 1$  (resp.  $< 1$ ).

Observemos también que la condición  $\overline{F_1F_2} > 2a$  sólo descarta casos triviales, pues si  $\overline{F_1F_2} \leq 2a$  el teorema 1.3 implica que los todos los puntos de la hipérbola tienen que estar sobre la recta  $F_1F_2$ . Más concretamente, se comprueba que si  $\overline{F_1F_2} < 2a$  entonces la “hipérbola” se reduciría a dos puntos, mientras que si  $\overline{F_1F_2} = 2a$  la “hipérbola” sería la recta  $F_1F_2$ . ■

**Parametrización de una hipérbola** Hemos visto que una elipse se puede parametrizar mediante las funciones trigonométricas, en el sentido de que sus puntos son de la forma  $(a \cos \alpha, b \sin \alpha)$ , de modo que cuando  $\alpha$  recorre los números reales estos puntos recorren toda la elipse (dando una vuelta cada vez que  $\alpha$  avanza  $2\pi$ ). Similarmente, si  $(x, y)$  es un punto de una hipérbola, entonces  $(x/a, y/b)$  cumple la ecuación

$$x'^2 - y'^2 = 1$$

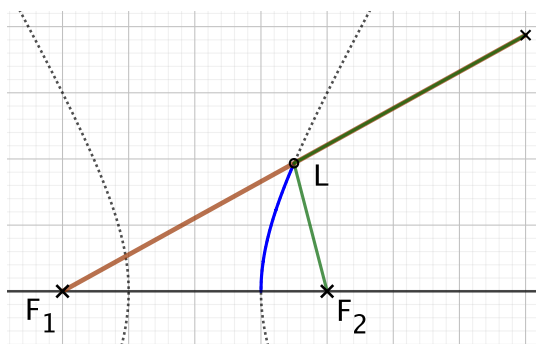
y los resultados de la sección 5.4 de [ITAn] implican que toda solución de esta ecuación se expresa de forma única como  $(x', y') = (\pm \cosh \alpha, \sinh \alpha)$ , luego cada punto de la hipérbola se expresa de forma única (respecto de un sistema de referencia canónico) como

$$(\pm a \cosh \alpha, b \sinh \alpha).$$

El signo determina la rama en la que se encuentra el punto, pero, una vez fijado, vemos que los puntos de una rama se corresponden biunívocamente con los números reales, de modo que cuando  $\alpha$  recorre los números reales, los puntos correspondientes recorren de forma continua una rama de la hipérbola. Esto expresa que las hipérbolas constan únicamente de dos “trazos” sobre el papel. También queda claro ahora por qué el seno y el coseno hiperbólico reciben dicho nombre: porque permiten parametrizar cualquier hipérbola. ■

**Trazado de hipérbolas** Veamos un método para trazar arcos de hipérbola de forma exacta:

Basta fijar un extremo de una barra rígida a un punto  $F_1$  alrededor del cual pueda girar libremente. En el otro extremo fijamos una cuerda de longitud menor que la barra, y el otro extremo de la cuerda lo fijamos a otro punto  $F_2$ .



Al tensar la cuerda con el lápiz contra la barra y moverlo, éste describirá un arco de la hipérbola de focos  $F_1$  y  $F_2$ , pues la diferencia  $\overline{LF_1} - \overline{LF_2}$  será siempre igual a la diferencia entre la longitud de la barra y la longitud de la cuerda. ■



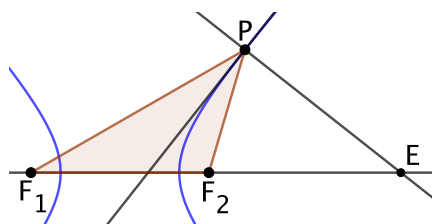
**Tangentes y asíntotas** Exactamente el mismo argumento que hemos empleado para la elipse prueba que la ecuación de la tangente a una hipérbola por un punto  $(x_0, y_0)$  es

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$

Ahora probamos el análogo para hipérbolas del teorema 7.18, que se interpreta como que si un rayo de luz que se dirige hacia un foco de una hipérbola desde el lado cóncavo de una rama se ve reflejado en ésta, el rayo reflejado se dirige al otro foco:

**Teorema 7.30** *La tangente a una hipérbola por un punto  $P$  es la bisectriz del ángulo  $\widehat{F_1PF_2}$ .*

DEMOSTRACIÓN: Si la tangente es perpendicular al eje, necesariamente  $P$  es un vértice (pues la tangente queda invariante por la simetría respecto del eje, luego  $P$  también, luego está en el eje), y la conclusión es trivial. En caso contrario, sea  $E$  el punto donde la perpendicular a la tangente por  $P$  corta al eje.



El teorema 7.14 aplicado a los dos focos nos da que

$$\frac{\overline{F_1E}}{\overline{F_1P}} = e = \frac{\overline{F_2E}}{\overline{F_2P}},$$

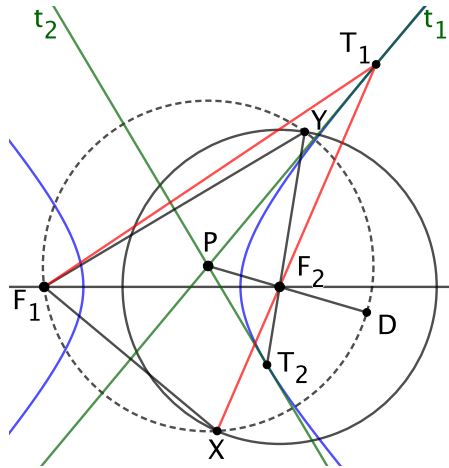
luego

$$\frac{\overline{F_1E}}{\overline{F_2E}} = \frac{\overline{F_1P}}{\overline{F_2P}}.$$

El teorema 4.3 (y la nota posterior) nos da que la normal a la hipérbola en  $P$  es una bisectriz (interior o exterior) en  $P$  del triángulo  $\widehat{F_1PF_2}$ , luego lo mismo vale para la tangente. Ahora bien, por el teorema 7.9 nos asegura que el punto de corte de la tangente con el eje tiene que ser exterior, luego tiene que estar entre los vértices y, en particular, entre los focos, luego la tangente tiene que ser la bisectriz interior del triángulo  $\widehat{F_1PF_2}$ . ■

Con esto estamos en condiciones de estudiar la existencia de tangentes a una hipérbola por puntos exteriores. Por definición, por cada punto de una cónica pasa una única tangente, y 7.9 prueba que por los puntos interiores no pasa ninguna. Para el caso de la elipse y la parábola hemos visto que por los puntos exteriores pasan dos tangentes. Sin embargo, en el caso de las hipérbolas no es exactamente así.

Para analizar la situación vamos a imitar la construcción que usamos para la elipse en el problema 7.1. Dado un punto exterior  $P$ , consideramos la circunferencia de centro  $P$  que pasa por  $F_1$  y la circunferencia focal de centro  $F_2$  de radio  $2a$ . Podemos asegurar que son secantes, pues la circunferencia de centro  $P$  pasa por un punto exterior a la circunferencia focal (el foco  $F_1$ ) y también por un punto interior, pues basta considerar el punto  $D$  situado en ella y en la semirrecta  $\overrightarrow{PF_2}$ . Como  $\overline{PD} = \overline{PF_1}$ , tenemos que  $\overline{F_2D} = |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| < 2a$ , luego  $D$  es interior a la circunferencia focal. Así pues, las dos circunferencias se cortan en dos puntos distintos  $X$  e  $Y$ .



Como  $F_1, X, Y$  son tres puntos de una circunferencia, los segmentos  $\overline{F_1X}$  y  $\overline{F_1Y}$  no están alineados y tienen mediatrices distintas,  $t_1$  y  $t_2$ . Como  $F_1$  y  $X$ , al igual que  $F_1$  e  $Y$ , están sobre una circunferencia de centro  $P$ , concluimos que  $t_1$  y  $t_2$  se cortan en  $P$ .

Supongamos ahora que  $t$  es una recta tangente a la hipérbola que pasa por el punto  $P$  y sea  $T$  el punto de tangencia. Si  $\overline{TF_1} > \overline{TF_2}$ , llamamos  $X'$  al punto de intersección de  $TF_2$  con la circunferencia focal situado en el lado puesto a  $T$  respecto de  $F_2$ , mientras que si  $\overline{TF_1} < \overline{TF_2}$  tomamos el punto situado al mismo lado de  $T$  respecto de  $F_2$ . Notemos que en este caso  $\overline{TF_2} > 2a$ , por lo que  $X'$  está entre  $F_2$  y  $T$ . En ambos casos  $X'$  y  $F_2$  están en la misma semirrecta respecto de  $T$ . Entonces

$$\overline{TX'} = \overline{TF_2} \pm \overline{F_2X'} = \overline{TF_2} \pm 2a = \overline{TF_2} \pm |\overline{TF_1} - \overline{TF_2}| = \overline{TF_1},$$

pues, por la elección de  $X'$ , el signo es positivo si y sólo si  $\overline{TF_1} > \overline{TF_2}$ .

Por lo tanto, el triángulo  $\widehat{F_1TX'}$  es isósceles<sup>2</sup> y la tangente  $t$ , que por el teorema 7.30 es la bisectriz de  $\widehat{F_1TF_2} = \widehat{F_1FX'}$ , es también la mediatriz del

<sup>2</sup>Cabe la posibilidad de que  $F_1, T, X'$  estén alineados, en cuyo caso, por definición de  $X'$ , que está en  $TF_2$ , también  $F_2$  está en la misma recta, luego se trata del eje de la hipérbola, luego  $T$  es un vértice y  $t$  es perpendicular al eje, y hemos probado que  $T$  es el punto medio entre  $F_1$  y  $X'$ , de donde se sigue que  $X'$  está en la circunferencia de centro  $P$  que pasa por  $F_1$ , que es la misma conclusión a la que llegamos en el caso contrario.

segmento  $\overline{F_1X'}$  y, como  $P$  está en ella, resulta que  $\overline{PF_1} = \overline{PX'}$ , luego  $X'$  es uno de los puntos de intersección de la circunferencia focal con la circunferencia de centro  $P$  que pasa por  $F_1$ . En suma, cambiando el nombre si es preciso, tenemos que  $X' = X$ , luego  $t = t_1$  y el punto de tangencia  $T$  es la intersección de  $t_1$  con  $XF_2$ .

Este razonamiento implica que a lo sumo puede haber dos tangentes a la hipérbola que pasen por un punto exterior  $P$ , las mediatrices de los segmentos  $\overline{F_1X}$  y  $\overline{F_2Y}$ . Ahora bien, ¿estas mediatrices son siempre tangentes?

Consideremos una de ellas, por ejemplo,  $t_1$  y supongamos que corta a  $XF_2$  en un punto  $T_1$ . Vamos a probar que  $T_1$  está en la hipérbola y que  $t_1$  es la tangente por  $T_1$ .

Si  $X$  no está en el eje<sup>3</sup> podemos considerar el triángulo  $\widehat{F_1XF_2}$ . Tenemos que  $\overline{F_1F_2} = 2c > 2a = \overline{XF_2}$  y es claro que la mediatriz de un lado de un triángulo corta al mayor de los otros dos lados, luego en este caso no corta a  $\overline{XF_2}$ , lo que significa que  $T_1$  no está entre  $X$  y  $F_2$ . Si  $\overline{T_1F_2} \geq \overline{T_1F_1} = \overline{T_1X}$ , entonces  $X$  está entre  $T_1$  y  $F_2$ , por lo que

$$\overline{F_1F_2} - \overline{T_1F_1} = \overline{XF_2} = 2a.$$

Si es  $\overline{T_1F_2} \leq \overline{T_1F_1} = \overline{T_1X}$  es que  $F_2$  está entre  $T_1$  y  $X$ , e igualmente

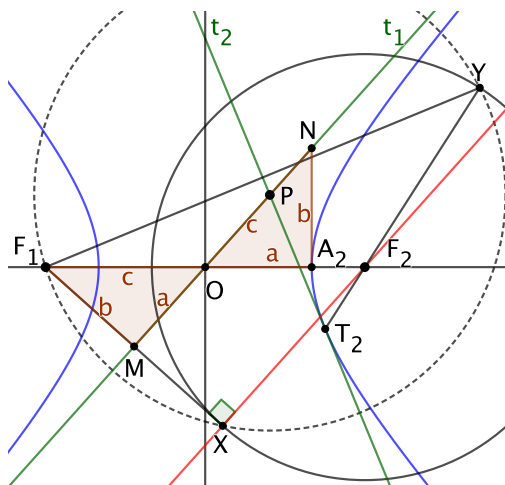
$$\overline{T_1F_1} - \overline{T_1F_2} = \overline{F_2X} = 2a.$$

En ambos casos concluimos que  $T_1$  está en la hipérbola. Además,  $t_1$  es la bisectriz del ángulo  $\widehat{F_1T_1X} = \widehat{F_1T_1F_2}$  (pues  $T_1$  no está entre  $X$  y  $F_2$ ). Por 7.30 concluimos que  $t_1$  es la tangente a la hipérbola por  $T_1$ . En resumen, hemos probado lo siguiente:

*Si  $P$  es un punto exterior a una hipérbola y  $X, Y$  son los puntos de corte entre la circunferencia de centro  $P$  que pasa por  $F_1$  y la circunferencia focal de centro  $F_2$  y radio  $2a$ , entonces las mediatrices de los segmentos  $\overline{F_1X}$  y  $\overline{F_1Y}$  son las únicas posibles tangentes a la hipérbola que pasan por  $P$ , y lo serán de hecho si y sólo si cortan, respectivamente, a las rectas  $F_2X$  y  $F_2Y$ . En tal caso el punto de corte es el punto de tangencia.*

Y ahora vamos a ver que pueden darse los casos excepcionales en que las bisectrices sean paralelas a las rectas  $F_2X$  y  $F_2Y$ , en uno de los dos casos o en ambos a la vez. La figura siguiente muestra un caso:

<sup>3</sup>Si  $X$  está en el eje, lo mismo le ocurre a  $T_1$  (porque está en  $XF_2$ ), y hay que probar que es uno de los vértices de la hipérbola, y así se concluye que  $t_1$  (la perpendicular al eje por  $T_1$ ) es la tangente en  $T_1$ . Sabemos que  $F_1$  es el punto medio de  $\overline{F_1X}$  y que  $\overline{F_2X} = 2a$ . Hay que distinguir dos casos, según si  $X$  está entre  $F_1$  y  $F_2$  o bien es  $F_2$  el que está entre  $F_1$  y  $X$ . Como  $\overline{F_1F_2} = 2c > 2a = \overline{F_2X}$ , el tercer caso es imposible. Por ejemplo, si  $F_2$  está en medio, entonces  $\overline{F_1X} = 2x + 2a$ , luego  $\overline{F_1T_1} = c + a < 2c = \overline{F_1F_2}$ , luego  $\overline{T_1F_2} = 2c - c - a = c - a$ , y así  $\overline{T_1F_1} - \overline{T_1F_2} = 2a$ . Igualmente se razona en el caso opuesto.



Tenemos un punto  $P$  y vemos que con el punto  $Y$  no hay problema: la mediatriz de  $\overline{F_1Y}$  corta a  $F_2Y$  en un punto  $T_2$  y, como tiene que ser,  $t_2$  es la tangente a la hipérbola en  $T_2$ . En cambio, la mediatriz  $t_1$  de  $\overline{F_1X}$  es paralela a  $F_2X$ , y hemos probado que en estas circunstancias no puede ser tangente a la hipérbola. Vamos a ver qué tiene que suceder para que se de este caso.

En primer lugar observamos que  $X$  no puede estar en el eje, porque entonces  $t_1$  sería perpendicular al eje y  $XF_2$  sería el eje, con lo que sí que se cortarían (en un vértice de la hipérbola). Como  $M$  es el punto medio de  $\overline{F_1X}$  y  $t_1$  es paralela a  $XF_2$ , concluimos que  $O$  tiene que ser el punto medio de  $\overline{F_1F_2}$ , es decir, el centro de la hipérbola. Así, pues, es necesario que  $t_1$  pase por el centro. Más aún, como  $\overline{XF_2} = 2a$ , el teorema de Tales nos da que  $\overline{MO} = a$ , y el triángulo  $\widehat{MOF_1}$  es rectángulo, con hipotenusa  $c$  y un cateto  $a$ , luego el otro cateto tiene que ser  $b$ . El triángulo  $\widehat{A_2ON}$  tiene los ángulos iguales y un cateto igual (el que mide  $a$ ), luego ambos son iguales y concluimos que la pendiente de  $t_1$  es  $\pm b/a$ , pues nada impide que  $M$  esté sobre el eje y que, consecuentemente,  $N$  esté bajo el eje, y entonces la pendiente de  $t_1$  es negativa.

**Definición 7.31** Las *asíntotas* de una hipérbola son las rectas que pasan por su centro  $O$  y por los puntos donde la circunferencia de centro  $O$  y radio  $c$  corta a las tangentes por los vértices, es decir, las rectas que tienen pendiente  $\pm b/a$  respecto del eje de la hipérbola.

Respecto de un sistema de referencia canónico, las asíntotas son las rectas de ecuación

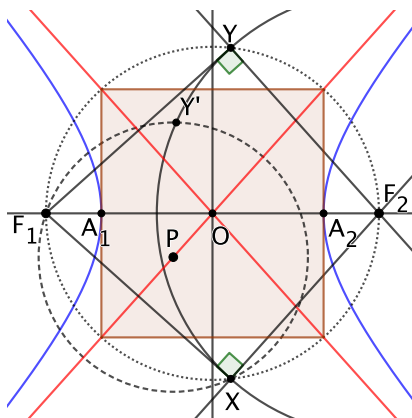
$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Esta expresión muestra inmediatamente que no tienen puntos en común con la hipérbola, pues un punto  $(x, y)$  que cumpla esta ecuación cumplirá

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0,$$

luego no está en la hipérbola.

La figura siguiente muestra las asíntotas de una hipérbola.



A la hora de enunciar lo que hemos demostrado sobre existencia de tangentes por puntos exteriores la situación se simplifica drásticamente si adoptamos el convenio de considerar que las asíntotas son tangentes. Así lo que hemos demostrado es que las rectas  $t_1$  y  $t_2$  que podemos asociar a cada punto exterior de una hipérbola son tangentes o asíntotas y, por consiguiente:

**Teorema 7.32** *Por un punto exterior a una hipérbola pasan exactamente dos rectas tangentes (entendiendo que una de ellas, o ambas, puede ser una de las asíntotas).*

Concretamente, hemos probado que si  $t_1$  o  $t_2$  no es tangente, es que es una asíntota, pero a esto podemos añadir que, para cada punto  $P$  situado sobre una asíntota, una de las “candidatas a tangente”  $t_1$  o  $t_2$  es precisamente la asíntota sobre la que está situado (o las dos, si el punto es  $O$ ). Así podemos afirmar que los puntos que tienen una única tangente “verdadera” son los situados sobre una asíntota (salvo  $O$ , que no tiene ninguna tangente “verdadera”).

En efecto, en la figura están señalados los puntos  $X, Y$  en los que la circunferencia de centro  $O$  y radio  $c$  corta a la circunferencia de centro  $F_2$  y radio  $2a$ . Los ángulos en  $X$  y en  $Y$  son rectos, pues abarcan media circunferencia, por lo que la mediatriz de  $\overline{F_1X}$  es paralela a  $F_2X$  e, igualmente, la mediatriz de  $\overline{F_1Y}$  es paralela a  $F_2Y$ . Según el razonamiento previo a la definición 7.31, esto implica que por  $O$  no pasa ninguna tangente a la hipérbola. Las “candidatas”  $t_1$  y  $t_2$  son en este caso las asíntotas, y no pueden ser tangentes.

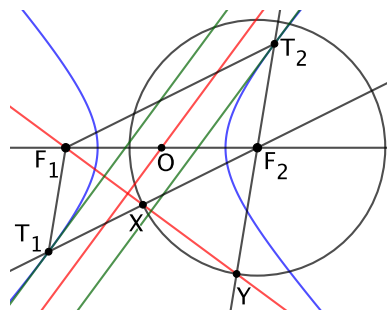
Y si tomamos cualquier punto  $P$  en una de las asíntotas, por ejemplo la mediatriz de  $\overline{F_1X}$ , resulta que  $X$  está en la circunferencia de centro  $P$  que pasa por  $F_1$ , luego la intersección de ésta con la circunferencia focal constará del mismo punto  $X$  y de otro punto  $Y'$ , por lo que, de las dos “candidatas” a tangentes por  $P$ , una de ellas será la propia asíntota. Similarmente, al tratar de calcular las tangentes de los puntos situados sobre la otra asíntota (la mediatriz de  $\overline{F_1Y}$ ) uno de los puntos de intersección que obtenemos es el mismo  $Y$  junto con otro  $X'$ , por lo que una de las “candidatas” será la asíntota correspondiente. ■

En resumen, una vez hemos incluido a las asíntotas entre las tangentes, el procedimiento para calcular las tangentes que pasan por un punto exterior de una hipérbola es el siguiente:

**Problema 7.5** *Calcular las tangentes (o asíntotas) que pasan por un punto exterior de una hipérbola.*

1. Trazamos la circunferencia de centro el punto dado  $P$  que pasa por uno de los focos, digamos  $F_1$  y la circunferencia de centro el segundo foco  $F_2$  y radio  $2a$ . Ambas se cortan en dos puntos  $X$  e  $Y$ .
2. Las tangentes son las mediatrices de los segmentos  $\overline{F_1X}$  y  $\overline{F_1Y}$ , y los puntos de tangencia son los puntos donde éstas cortan a las rectas  $F_2X$  y  $F_2Y$ , respectivamente. ■

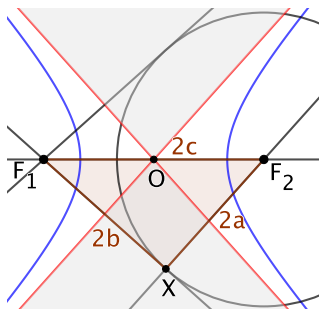
También podemos calcular fácilmente las tangentes (o asíntotas) paralelas a una recta dada. En efecto, si una recta  $t$  es tangente a una hipérbola y el punto de tangencia es  $T$ , consideramos la circunferencia de centro uno de los focos, por ejemplo  $F_2$ , y radio  $2a$ . Si  $T$  está más cerca de  $F_1$  consideramos el punto  $X$  donde la recta  $TF_2$  corta a la circunferencia que está entre  $T_1$  y  $F_2$ , mientras que si  $T$  está más cerca de  $F_2$  consideramos el punto  $X$  opuesto a  $T$  respecto de  $F_2$ . Esta elección garantiza que  $\overline{TX} = \overline{TF_1}$ , así como que  $\widehat{F_1TF_2} = \widehat{F_1TX}$ . Como  $t$  es la bisectriz de este ángulo, también es la mediatriz de  $\overline{F_1X}$ , luego  $X$  está en la intersección de la perpendicular a  $t$  (o a cualquiera de sus paralelas) por  $F_1$  y la circunferencia focal. Además, el punto de tangencia  $T$  es la intersección de  $t$  con la recta  $XF_2$ .



Recíprocamente, un razonamiento análogo al que hemos empleado para calcular las tangentes por un punto exterior muestra que si  $X$  e  $Y$  son los puntos donde la perpendicular por  $F_1$  a una recta dada corta a la circunferencia focal y las mediatrices  $t_1$  y  $t_2$  de  $\overline{F_1X}$  y  $\overline{F_1Y}$  cortan a  $\overline{F_2X}$  y  $\overline{F_2Y}$  en  $T_1$  y  $T_2$ , respectivamente, entonces  $t_1$  y  $t_2$  son tangentes a la hipérbola paralelas a la recta dada y  $T_1$ ,  $T_2$  son los puntos de tangencia.

Así pues, para que existan tangentes a una hipérbola paralelas a una recta dada es necesario y suficiente que la perpendicular a ésta por un foco corte a la circunferencia focal centrada en el segundo foco. Es claro que esto sucede

si y sólo si la recta dada (que podemos suponer que pasa por  $O$ ) se encuentra en el ángulo delimitado por las perpendiculares de las tangentes por  $F_1$  a la circunferencia focal de  $F_2$ , pero las perpendiculares a dichas tangentes no son sino las asíntotas.



En efecto, si  $X$  es el punto de tangencia de una de las tangentes a la circunferencia focal por  $F_1$ , el triángulo  $\widehat{F_1XF_2}$  es rectángulo con hipotenusa  $2c$  y un cateto  $2a$ , luego el otro cateto es  $2b$ . De aquí se sigue fácilmente que las perpendiculares a  $F_1X$  tienen pendiente  $\pm b/a$ , luego las que pasan por  $O$  son las asíntotas. En resumen: para cada recta que pasa por  $O$  comprendida entre las asíntotas (en la zona sombreada de la figura) hay dos tangentes a la hipérbola paralelas a ella. Así pues:

**Problema 7.6** *Calcular las tangentes (o asíntotas) paralelas a una recta dada.*

1. Trazamos la perpendicular por uno de los focos  $F_1$  a la recta dada y la circunferencia de centro el segundo foco  $F_2$  y radio  $2a$ . Si no se cortan en dos puntos  $X$  e  $Y$  no existen tangentes.
2. Las tangentes son las mediatrices de los segmentos  $\overline{F_1X}$  y  $\overline{F_1Y}$ , y los puntos de tangencia son los puntos donde éstas cortan a las rectas  $F_2X$  y  $F_2Y$ , respectivamente. ■

La situación general es la siguiente:

**Teorema 7.33** *Dada una hipérbola, de entre las rectas paralelas a una recta dada de pendiente  $m$  (respecto del eje):*

1. Si  $|m| < b/a$ , todas ellas cortan a la hipérbola en dos puntos.
2. Si  $|m| = b/a$ , la que pasa por el centro  $O$  es una asíntota y no corta a la hipérbola, mientras que las demás cortan a la hipérbola en un único punto, pero no son tangentes.
3. Si  $|m| > b/a$  (incluyendo el caso de las rectas verticales, de pendiente infinita) entonces dos rectas son tangentes, las situadas entre ellas no cortan a la hipérbola, y las restantes la cortan en dos puntos.

DEMOSTRACIÓN: Como una demostración sintética que distinguiera todos los casos sería farragosa, vamos a dar una prueba analítica que ilustre las ventajas de este enfoque:

Fijado un sistema de referencia canónico, los puntos de la hipérbola son los que cumplen la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

y los puntos de una recta de pendiente  $m$  (que no sea vertical) satisfacen una ecuación de la forma

$$y = mx + n.$$

Al variar  $n$  obtenemos todo un haz de rectas paralelas. Un punto que esté en la recta y en la hipérbola cumplirá ambas ecuaciones, luego su coordenada  $x$  cumplirá la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx + n)^2}{b^2} = 1.$$

Al desarrollar queda:

$$(a^2m^2 - b^2)x^2 + 2a^2mnx + a^2(n^2 + b^2) = 0.$$

Si  $|m| = b/a$ , el coeficiente de  $x^2$  se anula y queda una ecuación de primer grado:

$$2mnx + (n^2 + b^2) = 0.$$

Si  $n = 0$ , es decir, si la recta es la asíntota  $y = (\pm b/a)x$ , la ecuación se reduce a  $b^2 = 0$ , que no tiene solución, lo que se corresponde con el hecho de que las asíntotas no cortan a la hipérbola. En cambio, si  $n \neq 0$ , hay un único valor para  $x$  que cumple la ecuación, que, con el correspondiente valor de  $y$  obtenido de la ecuación de la recta, nos da un único punto de corte entre la recta y la hipérbola. Así pues, cada paralela a una asíntota corta a la hipérbola en un punto. Sin embargo, la recta no es tangente.

Para comprobarlo basta sustituir la ecuación  $y = (\pm b/a)x + n$  en la ecuación de la hipérbola, lo que nos da

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(\pm(b/a)x + n)^2}{b^2} = \frac{2n}{ab}x \mp \frac{n^2}{b^2}$$

que tomará valores menores o mayores que 1 según el valor de  $x$ , lo que significa que la recta contiene tanto puntos interiores como exteriores de la hipérbola, mientras que las tangentes sólo tienen puntos exteriores (teorema 7.9).

Si  $|m| \neq b/a$  tenemos una ecuación de segundo grado cuyo discriminante es

$$\Delta = 4a^2m^2n^2 + (b^2 - a^2m^2)a^2(n^2 + b^2),$$

luego

$$\frac{\Delta}{4a^2b^2} = b^2 + n^2 - a^2m^2.$$



Si  $|m| < b/a$ , es decir, si  $m^2 a^2 < b^2$ , se cumple  $\Delta > 0$  para todo  $n$ , luego la recta corta en dos puntos a la hipérbola. Si  $|m| > b/a$ , es decir, si  $m^2 a^2 > b^2$ , entonces

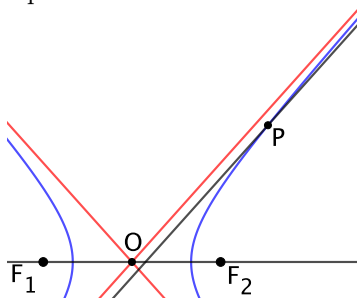
$$\frac{\Delta}{4a^2b^2} = n^2 - (m^2 a^2 - b^2)$$

es negativo si  $n^2 < m^2 a^2 - b^2$ , luego hay un intervalo de valores de  $n$  en el que la recta no corta a la hipérbola. En el intervalo opuesto el discriminante es positivo y hay dos puntos de corte, mientras que si  $n^2 = m^2 a^2 - b^2$  entonces la recta corta a la parábola únicamente en un punto, y tiene que ser tangente, pues hemos visto que, para cada pendiente  $|m| > b/a$ , tiene que haber dos rectas tangentes a la hipérbola con dicha pendiente. El caso de las rectas verticales, de ecuación  $x = n$ , no ofrece ninguna dificultad. ■

Así pues, al igual que los diámetros de una parábola son “falsas tangentes”, que cortan a la cónica en un único punto, pero no “tocándola”, sino “atravesándola”, es decir, pasando del exterior al interior o viceversa, en el caso de las parábolas las “falsas tangentes” son las rectas paralelas a las asíntotas.

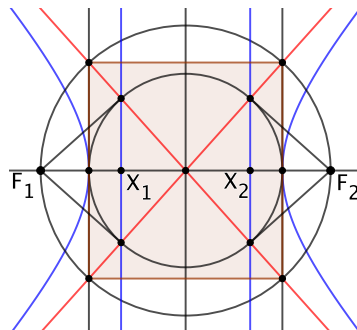
Además, la demostración precedente nos da una distinción algebraica entre las rectas que tocan a una cónica y las que la cortan en un solo punto. En el primer caso, la ausencia de un segundo punto se debe a que al resolver el sistema de ecuaciones formado por la recta y la cónica llegamos a una ecuación de segundo grado con una raíz doble, mientras que en el segundo caso la falta de un segundo punto se debe a que se anula el término de segundo grado y llegamos a una ecuación de primer grado. El lector puede comprobar que lo mismo sucede en el caso de las parábolas, y esto conduce a una noción algebraica de “tangente” mucho más general, pero no vamos a entrar en ello aquí.

Una consecuencia notable del teorema anterior es que cualquier recta paralela a una asíntota, por muy próxima que se encuentre a ella, corta a la hipérbola en un punto  $P$  y, concretamente, es claro que toda una “punta” de una de sus ramas, a partir de  $P$ , queda comprendida entre la asíntota y su paralela. Esto significa que las ramas de la hipérbola “se pegan” a las asíntotas, en el sentido de que los puntos de la hipérbola están más cerca de las asíntotas cuanto más se alejan del centro:



Otro hecho que ahora es evidente es que cada asíntota deja a una rama de la hipérbola en un semiplano distinto, de donde se sigue que lo mismo vale para cualquier tangente, que puede obtenerse aumentando la inclinación de una asíntota (con lo que sigue dejando una rama en cada semiplano) y luego trasladándola paralelamente a sí misma hasta tocar la curva.

Para terminar con las propiedades básicas de las asíntotas, dejamos al lector la comprobación de los hechos que muestra la figura siguiente:



Las asíntotas cortan a la circunferencia de centro  $O$  y radio  $a$  en los mismos puntos que las directrices, y las tangentes a la circunferencia por dichos puntos pasan por los focos.

**Diámetros conjugados** Considerando el sistema de referencia en el que una hipérbola viene dada por la ecuación canónica, es evidente que el punto medio de una cuerda vertical está sobre el eje mayor. En particular, todos los puntos medios de las cuerdas verticales están alineados. No es evidente que lo mismo vale para cualquier familia de cuerdas paralelas:

**Teorema 7.34** *La recta que pasa por los puntos medios de dos cuerdas paralelas de una hipérbola pasa también por su centro.*

DEMOSTRACIÓN: Ya hemos visto que, obviamente, esto es cierto para cuerdas verticales. Consideremos ahora un haz de rectas paralelas no verticales, que cumplirán ecuaciones de la forma  $y = mx + n$ , donde la pendiente  $m$  es fija. Al variar  $n$  recorreremos las distintas rectas del haz. Si una de estas rectas corta a la hipérbola de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

entonces la coordenada  $x$  de los puntos de la intersección cumplirá:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx + n)^2}{b^2} = 1.$$

Operando:

$$(b^2 - a^2m^2)x^2 - 2a^2mnx - a^2n^2 - a^2b^2 = 0.$$

Si  $m = \pm b/a$  tenemos una ecuación de primer grado que tendrá a lo sumo una solución, luego la recta no determina una cuerda en la hipérbola. En caso contrario tenemos una ecuación de segundo grado que tendrá a lo sumo dos soluciones, digamos  $x_1, x_2$  (tal vez iguales). Equivalentemente:

$$x^2 - \frac{2a^2mn}{b^2 - a^2m^2}x - \frac{a^2n^2 + a^2b^2}{b^2 - a^2m^2} = 0.$$

Ahora bien, desarrollando  $(x - x_1)(x - x_2)$  y comparando los coeficientes, vemos que

$$x_1 + x_2 = \frac{2a^2mn}{b^2 - a^2m^2}$$

O también:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a^2m}{b^2 - a^2m^2} n.$$

Los extremos de la cuerda  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  cumplirán

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{mx_1 + n + mx_2 + n}{2} = \frac{a^2m^2}{b^2 - a^2m^2} n + n = \frac{b^2}{b^2 - a^2m^2} n,$$

luego el punto medio de la cuerda es

$$M_n = \left( \frac{a^2m}{b^2 - a^2m^2} n, \frac{b^2}{b^2 - a^2m^2} n \right).$$

Cuando varía  $n$ , estos puntos recorren una recta que pasa por  $(0, 0)$ , es decir, por el centro de la hipérbola. Notemos que su pendiente es  $m' = b^2/(a^2m)$ . ■

**Definición 7.35** Dos diámetros de una hipérbola son *conjugados* si uno pasa por los puntos medios de las cuerdas paralelas al otro.

Claramente los ejes de la hipérbola son diámetros mutuamente conjugados y acabamos de probar que el diámetro conjugado de un diámetro de pendiente  $m$  es el diámetro de pendiente  $b^2/(a^2m)$ , de donde se sigue que el diámetro conjugado de éste es el inicial. Así pues, un diámetro es conjugado de otro si y sólo si el otro lo es del uno.

En particular, si una hipérbola es *equilátera*, es decir, si  $a = b = 1$ , entonces el diámetro conjugado de  $y = mx$  es  $y = (1/m)x$ , pero ésta es la ecuación de la recta simétrica respecto de la recta  $y = x$  (o respecto de  $y = -x$ ), pero dichas rectas son claramente las asíntotas. Así pues:

*En una hipérbola equilátera, dos diámetros son conjugados si y sólo si son simétricos respecto de las asíntotas.*

El teorema siguiente afirma que el diámetro conjugado a un diámetro que corte a la hipérbola es simplemente el paralelo a la tangente por el punto de corte:

**Teorema 7.36** *Si un diámetro corta a la hipérbola en un punto, la tangente por dicho punto es paralela al diámetro conjugado.*

DEMOSTRACIÓN: Si el diámetro tiene ecuación  $y = mx$  y corta a la hipérbola en  $(x_0, mx_0)$ , la tangente por dicho punto tiene ecuación

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{mx_0y}{b^2} = 1,$$

y la recta paralela que pasa por el centro es

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{mx_0y}{b^2} = 0$$

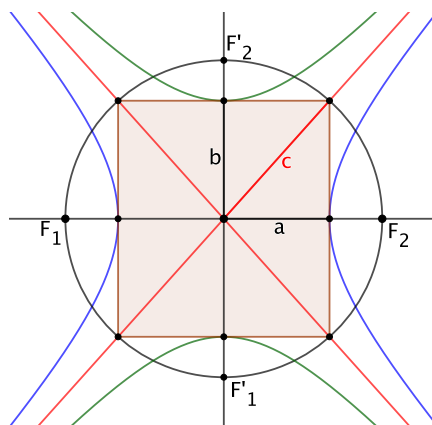
o, equivalentemente,

$$y = \frac{b^2}{a^2m}x,$$

que es la ecuación del diámetro conjugado del diámetro dado. ■

Es frecuente llamar diámetros de una hipérbola únicamente a las cuerdas que pasan por su centro, excluyendo las rectas que no cortan a la hipérbola. En este sentido estricto, la recta conjugada de un diámetro no es un diámetro, pero podemos llamarla igualmente “diámetro conjugado” porque es un diámetro de la llamada “hipérbola conjugada”:

**Definición 7.37** Llamaremos *hipérbola conjugada* de una hipérbola dada a la que tiene por semieje mayor el semieje menor de la dada, con el mismo centro y la misma distancia focal, pero con los semiejes  $a$  y  $b$  intercambiados.



Notemos que si la excentricidad de la hipérbola dada es  $e = c/a$ , la de la hipérbola conjugada es  $e' = c/b$ , luego en general las cónicas conjugadas no son semejantes. Respecto de un sistema de referencia canónico para la hipérbola dada, la ecuación de la hipérbola conjugada es

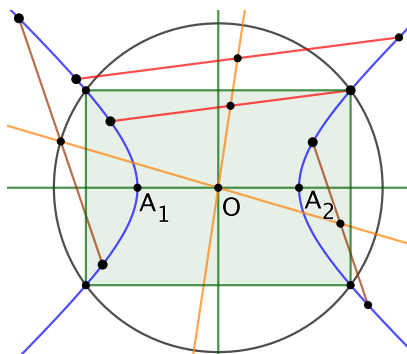
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

(en la ecuación hay que intercambiar  $a$  y  $b$ , pero también hay que intercambiar  $x$  e  $y$ , para que el eje mayor de la nueva hipérbola sea el eje menor de la dada).

Es fácil ver que dos hipérbolas conjugadas tienen las mismas asíntotas. Notemos que la hipérbola conjugada de la hipérbola conjugada es la propia hipérbola de partida. Si tratáramos de definir un concepto análogo de “elipse conjugada” obtendríamos que la elipse conjugada de una elipse dada es ella misma.

Dado un diámetro de una hipérbola, las tangentes por sus extremos son dos rectas paralelas a la recta conjugada. El teorema 7.33 implica que la paralela a dichas tangentes por el centro  $O$  no corta a la hipérbola, pero sí a la hipérbola conjugada, luego la recta conjugada es ciertamente un diámetro de la hipérbola conjugada.

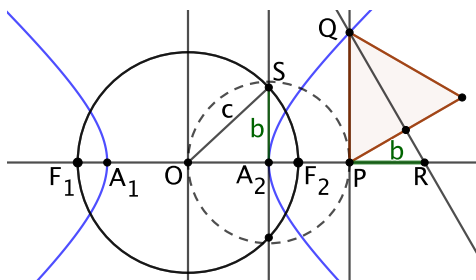
**Problema 7.7** *Calcular los ejes de una hipérbola.*



Basta trazar dos pares de cuerdas paralelas, de modo que las rectas que unen sus puntos medios se cortan en el centro  $O$  de la hipérbola. Una vez conocido  $O$ , trazamos una circunferencia de centro  $O$  que corte a la hipérbola en cuatro puntos. Éstos forman un rectángulo y los ejes de la hipérbola son las mediatrices de sus lados. ■

Una vez tenemos los ejes, tenemos los vértices y un ingenioso argumento nos da los focos:

**Problema 7.8** *Calcular los focos de una hipérbola.*



1. Trazamos el punto  $P$  sobre el eje mayor tal que  $\overline{OP} = 2a$ .
2. Calculamos uno de los puntos  $Q$  donde la perpendicular al eje mayor por  $P$  corta a la hipérbola.  
Sustituyendo  $x = 2a$  en la ecuación de la hipérbola obtenemos  $y = \pm\sqrt{3}b$ , luego  $\overline{PQ} = \sqrt{3}b$ .
3. Construimos un triángulo equilátero sobre  $\overline{PQ}$ .

4. Trazamos el punto  $R$  donde la altura por  $Q$  del triángulo corta al eje mayor.  
Entonces  $\overline{PR} = b$ .
5. Trazamos la perpendicular al eje mayor por el vértice  $A_2$  y sobre ella marcamos el punto  $S$  tal que  $\overline{A_2S} = \overline{PR} = b$ .  
Entonces  $\overline{OS} = c$ .
6. Abatimos  $\overline{OS}$  sobre el eje mayor y así obtenemos los focos  $F_1$  y  $F_2$ . ■

**La hipérbola canónica** Varias propiedades de las elipses las hemos demostrado a partir del hecho de que toda elipse se obtiene a partir de su circunferencia principal mediante una aplicación lineal. Con las hipérbolas podemos hacer algo parecido. Consideremos una hipérbola arbitraria, que respecto del sistema de referencia adecuado tendrá ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Si en esta ecuación hacemos el cambio de variables

$$x = \frac{au + av}{2}, \quad y = \frac{-bu + bv}{2},$$

obtenemos la ecuación  $uv = 1$ .

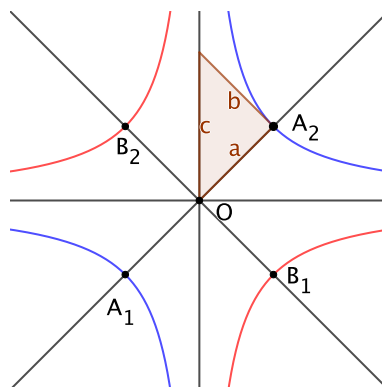
Esto se interpreta como que la aplicación lineal dada por

$$f(u, v) = \left( \frac{au + av}{2}, \frac{-bu + bv}{2} \right)$$

transforma la curva de ecuación  $uv = 1$  en la hipérbola de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ahora bien, la curva de ecuación  $uv = 1$  es también una hipérbola:



En efecto, el giro

$$(u, v) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \right)$$

transforma la ecuación  $uv = 1$  en

$$\frac{x^2}{\sqrt{2}^2} - \frac{y^2}{\sqrt{2}^2} = 1,$$

lo que prueba que  $uv = 1$  es la ecuación de una hipérbola equilátera con semiejes  $a = b = \sqrt{2}$  y, por consiguiente,  $c = 2$ .

Es obvio que  $uv = 1$  es simétrica respecto de las rectas  $u = \pm v$ , luego estas rectas son sus ejes. El eje mayor es  $u = v$ , pues corta a la hipérbola en los vértices  $(\pm 1, \pm 1)$ , y las asíntotas tienen que tener pendiente  $b/a = 1$  respecto de los ejes de la hipérbola, luego son los ejes coordenados  $u = 0$  y  $v = 0$ .

La figura anterior muestra también la hipérbola conjugada de  $uv = 1$ , que es fácil ver que es  $uv = -1$ .

Notemos que si aplicamos el cambio de variables a las ecuaciones de las asíntotas

$$y = \pm \frac{b}{a}x,$$

obtenemos  $-u + v = \pm(u + v)$ , que equivale a  $u = 0$  o bien  $v = 0$ . Esto significa que la aplicación lineal  $f$  transforma los ejes de coordenadas en las asíntotas, es decir, transforma las asíntotas de  $uv = 1$  en las asíntotas de la hipérbola de partida. Similarmente se comprueba que transforma los ejes de una hipérbola en los de la otra.

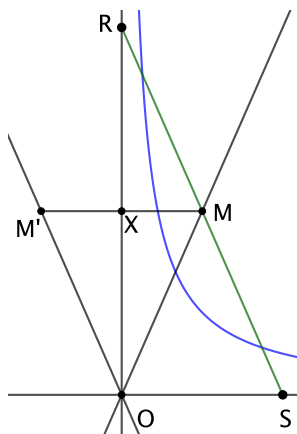
A su vez, esto implica que  $f$  transforma la recta tangente en un punto en la recta tangente en la imagen del punto. En efecto, recordando las propiedades de las aplicaciones lineales (biyectivas) que enumeramos en la página 325, basta tener en cuenta que la tangente a una hipérbola por un punto se caracteriza como la única recta que corta a la hipérbola sólo en dicho punto y que no es paralela a una asíntota. Como las aplicaciones lineales conservan la incidencia, el paralelismo y también hemos visto que  $f$  transforma las asíntotas en las asíntotas, concluimos que también transforma tangentes en tangentes.

Similarmente,  $f$  transforma cada par de diámetros conjugados de  $uv = 1$  en un par de diámetros conjugados de la hipérbola dada. En efecto, basta tener en cuenta la definición: dos diámetros son conjugados si uno pasa por los puntos medios de las cuerdas paralelas al otro, y estas propiedades se conservan por aplicaciones lineales.

La aplicación  $f$  permite reducir la prueba de muchos resultados al caso de la hipérbola  $uv = 1$ . Veamos algunos ejemplos:

**Teorema 7.38** *Si  $R$  y  $S$  son puntos situados uno en cada asíntota de una hipérbola (distintos de su centro), el diámetro conjugado al diámetro paralelo a  $RS$  pasa por el punto medio de  $\overline{RS}$ .*

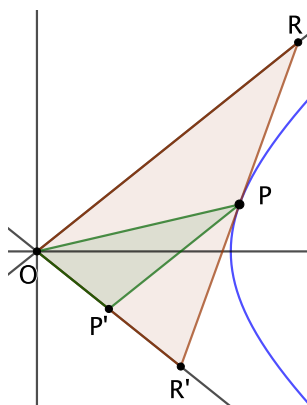
DEMOSTRACIÓN: Basta probarlo para el caso de la hipérbola de ecuación  $uv = 1$ , pues usando la aplicación lineal  $f$  podemos concluir que si ésta cumple el teorema lo mismo vale para la hipérbola dada. En este caso basta tener en cuenta que dos diámetros son conjugados si y sólo si son simétricos respecto de los ejes:



Si  $M$  es el punto medio de  $\overline{RS}$ , entonces  $\overline{OS} = 2\overline{XM}$ , luego el simétrico  $M'$  respecto de la asíntota  $OR$  cumple  $\overline{M'M} = \overline{OS}$ , luego  $OM'$  es paralela a  $RS$ , luego es el diámetro paralelo a  $RS$  y  $OM$  es el diámetro conjugado. ■

**Teorema 7.39** Sea  $P$  un punto en una hipérbola y sean  $R$  y  $R'$  los puntos en los que la tangente por  $P$  corta a las asíntotas. Sea  $P'$  el punto donde la paralela a una asíntota corta a la otra: Entonces:

1.  $\overline{OR} \cdot \overline{OR'} = c^2$ .
2.  $\overline{OP} \cdot \overline{PP'} = c^2/4$ .
3. El área de  $\widehat{ROR'}$  es  $ab$ .
4. El área de  $\widehat{POP'}$  es  $ab/4$ .





DEMOSTRACIÓN: Observemos en primer lugar que, por el teorema 7.36, la recta  $\overline{RR'}$  es paralela al diámetro conjugado de  $\overline{OP}$ , luego 7.38 implica que  $P$  es el punto medio de  $\overline{RR'}$ .

Sean  $Q, Q', S, S'$  las antiimágenes por la aplicación lineal  $f$  de los puntos  $P, P', R, R'$ . Entonces  $S = (0, q)$ ,  $S' = (q', 0)$  y  $Q = (q'/2, q/2)$ , pero a la vez, como está sobre la hipérbola de ecuación  $uv = 1$ , se cumple que  $qq' = 4$ . Así pues,  $\overline{OS} \cdot \overline{OS'} = qq' = 4$ .

La aplicación  $f$  cumple  $f(1, 0) = (a/2, -b/2)$ , luego  $f(q', 0) = (q'/2)(a, -b)$ , luego  $\overline{OR'} = cq'/2$ , e igualmente  $\overline{OR} = cq/2$ , luego  $\overline{OR} \cdot \overline{OR'} = c^2 qq'/4 = c^2$ .

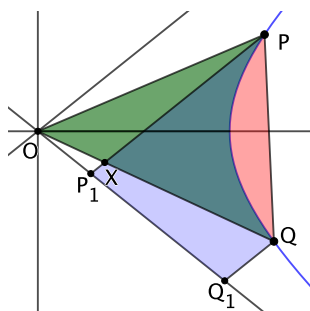
La segunda afirmación es consecuencia de la primera, pues  $\overline{OP'} = (1/2)\overline{OR'}$ ,  $\overline{PP'} = (1/2)\overline{OR}$ .

El triángulo  $\widehat{SOS'}$  es rectángulo, luego su área es  $(1/2)qq' = 2$  y, según el teorema [ITAn A.16], al aplicar  $f$ , el área de una figura se multiplica por

$$|(a/2)(b/2) - (a/2)(-b/2)| = \frac{ab}{2}.$$

Así pues, el área de  $\widehat{ROR'}$  es  $ab$ . La última afirmación se puede deducir de ésta o bien observando que  $\widehat{QOQ'}$  tiene área  $qq'/8 = 1/2$ . ■

**La cuadratura de la hipérbola** Arquímedes calculó el área de una elipse (véase el último apartado de la sección 5.2 de [ITAn]) y también calculó el área limitada por una parábola y una de sus cuerdas (teorema 7.27), pero no calculó el área limitada por una hipérbola y una de sus cuerdas  $\overline{PQ}$ :



Este problema de “cuadrar una hipérbola” es más difícil que los análogos para elipses o parábolas. Ante todo, formularlo en términos del área comprendida entre la hipérbola y una cuerda no es lo más conveniente. Puesto que el área del triángulo  $\overline{POQ}$  es conocida, el problema es equivalente al de calcular el área del “sector hiperbólico” limitado por el arco de hipérbola  $\overline{PQ}$  y los segmentos  $\overline{OP}$  y  $\overline{OQ}$ .

Para el caso de la hipérbola  $uv = 1$  el problema está resuelto en [ITAn 4.11]. En los términos que estamos considerando aquí, la respuesta es que el área del ‘sector hiperbólico es en este caso

$$\log \frac{\overline{OQ_1}}{\overline{OP_1}}.$$

Vemos así la razón de la dificultad de la cuadratura de la hipérbola: mientras la cuadratura de la elipse involucra únicamente el número  $\pi$  y la parábola es cuadrable incluso con regla y compás, la cuadratura de un sector hiperbólico involucra logaritmos, un concepto desconocido para los griegos.

En este apartado daremos una prueba esencialmente geométrica de la fórmula para el área de un sector hiperbólico. En primer lugar demostramos un resultado que en la prueba de [ITAn 4.11] está demostrado para el caso particular de una hipérbola  $uv = r^2$ , a saber, que el área del sector hiperbólico determinado por los puntos  $P$  y  $Q$  es la misma que la comprendida entre el arco de hipérbola  $PQ$  y los segmentos  $PP_1$ ,  $QQ_1$  determinados por los puntos  $P_1$  y  $Q_1$  donde las paralelas a una asíntota por  $P$  y  $Q$  cortan a la otra asíntota. Sucede que el problema resulta “más natural” en estos términos.

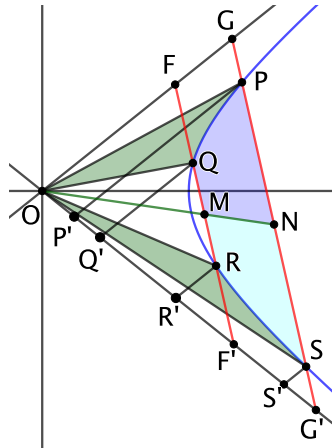
En efecto, por el teorema 7.39, los triángulos  $\widehat{OPP_1}$  y  $\widehat{OQ_1Q}$  tienen la misma área, luego el área del triángulo  $\widehat{OPX}$ , que es la de  $\widehat{OPP_1}$  menos la de  $PXP_1$ , coincide con la de  $\widehat{OQ_1Q}$  menos la de  $\widehat{OXQ_1}$ , es decir, con el área del polígono  $P_1Q_1QX$ . Concluimos entonces que las dos figuras descritas tienen la misma área, pues ambas resultan de sumar al triángulo  $\widehat{OPX}$  y al polígono  $P_1Q_1QX$  el mismo triángulo hiperbólico  $XPQ$ .

Ahora probamos el hecho fundamental:

**Teorema 7.40** Sean  $P, Q, R, S$  cuatro puntos sobre una hipérbola tales que sus proyecciones sobre una asíntota mediante rectas paralelas a la otra asíntota cumplen la relación

$$\frac{\overline{OQ'}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{OS'}}{\overline{OR'}}$$

Entonces los sectores hiperbólicos  $POQ$  y  $ROS$  tienen la misma área.



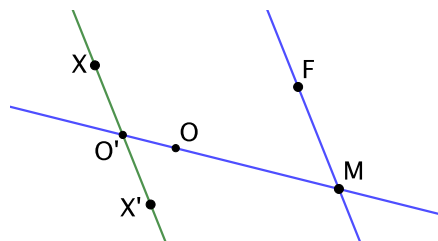
DEMOSTRACIÓN: Sean  $F$  y  $F'$  (resp.  $G$  y  $G'$ ) los puntos donde la recta  $QR$  (resp.  $PS$ ) corta a las asíntotas. El diámetro conjugado del diámetro paralelo

a  $FF'$  pasa por el punto medio de la cuerda  $\overline{QR}$  (por definición de diámetro conjugado) y por el punto medio del segmento  $\overline{FF'}$  (por el teorema 7.38), luego ambos puntos medios coinciden, y como consecuencia  $\overline{FQ} = \overline{F'R}$ . Igualmente concluimos que  $\overline{GP} = \overline{SG'}$ . Por el teorema de Tales,  $\overline{OQ'} = \overline{R'F'}$ , e igualmente  $\overline{OP'} = \overline{S'G'}$ . Así:

$$\frac{\overline{R'F'}}{\overline{S'G'}} = \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OP'}} = \frac{\overline{OS'}}{\overline{OR'}} = \frac{\overline{RR'}}{\overline{SS'}},$$

donde, en la última igualdad, hemos empleado el teorema 7.39. Esto implica que los triángulos  $\widehat{RR'F'}$  y  $\widehat{SS'G'}$  son semejantes (pues tienen además igual el ángulo  $\hat{R} = \hat{S}$ ) y, por consiguiente, las rectas  $FF'$  y  $GG'$  son paralelas. Esto implica que sus puntos medios  $M$  y  $N$  están alineados con el centro  $O$  de la hipérbola. Más aún, el diámetro  $MN$  biseca a todas las cuerdas de la hipérbola paralelas a  $\overline{QR}$ .

Para cada punto  $X$ , podemos considerar la paralela a  $FM$  que pasa por  $X$ , la cual cortará a  $OM$  en un punto  $O'$ , y llamamos  $X'$  al punto simétrico de  $X$  respecto de  $O'$ .



Es claro que la aplicación  $X \mapsto X'$  hace corresponder los puntos de la región  $PQMN$  sombreada en la figura con los puntos de la región  $SRMN$ . Vamos a probar que dicha aplicación es lineal y que conserva las áreas, con lo que las dos figuras sombreadas tendrán la misma área.

Además, la aplicación hace corresponder el triángulo  $\widehat{OPN}$  con  $\widehat{OSN}$  y el triángulo  $\widehat{OQM}$  con  $\widehat{ORM}$ , y las regiones descritas en el enunciado, cuyas áreas queremos probar que son iguales, son las que resultan de quitar a los triángulos  $\widehat{OPN}$  (resp.  $\widehat{OSN}$ ) la figura  $PQMN$  (resp.  $SRMN$ ) y el triángulo  $\widehat{OQM}$  (resp.  $\widehat{ORM}$ ). Por consiguiente son iguales.

Sea  $u = (u_1, u_2)$  un vector que marque la dirección de  $OM$  y  $v = (v_1, v_2)$  otro que marque la dirección de  $MF$ . La aplicación lineal

$$h_1(x, y) = (u_1x + v_1y, u_2x + v_2y)$$

cumple  $h_1(1, 0) = u$  y  $h_1(0, 1) = v$ . Similarmente, la aplicación lineal

$$h_2(x, y) = (u_1x - v_1y, u_2x - v_2y)$$

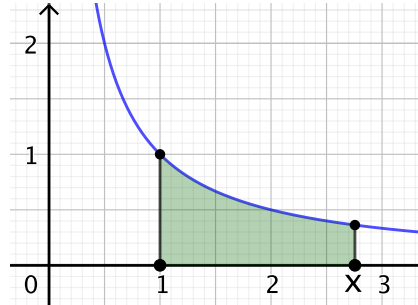
hace corresponder  $h_2(1, 0) = u$  y  $h_2(0, 1) = -v$ . Según [ITAn A.16], ambas multiplican el área de cualquier figura por  $|u_1v_2 - v_1u_2|$ , luego la aplicación

lineal  $h$  que resulta de aplicar primero la inversa de  $h_1$  y luego  $h_2$  deja las áreas invariantes y cumple  $h(u) = u$ ,  $h(v) = -v$ . Basta probar que, para todo punto  $X$ , se cumple  $h(X) = X'$ .

Ahora bien, si  $O'$  es el punto de corte entre  $OM$  y la recta paralela a  $FM$  que pasa por  $X$ , tenemos que  $O' = \lambda u$ , para cierto  $\lambda$ , luego  $X = \lambda u + \mu v$ , para cierto  $\mu$ . Por lo tanto,  $h(X) = \lambda u - \mu v$ , que claramente es el punto simétrico a  $X$  respecto de  $O'$ . ■

Esta propiedad puede expresarse de una forma conceptualmente más simple. Aunque es válida para una hipérbola arbitraria, conviene estudiarla para la hipérbola  $xy = 1$ .

Para cada número real  $x > 1$ , definimos  $L(x)$  como el área limitada por la hipérbola  $uv = 1$  y las rectas  $v = 0$ ,  $u = 1$ ,  $u = x$ :



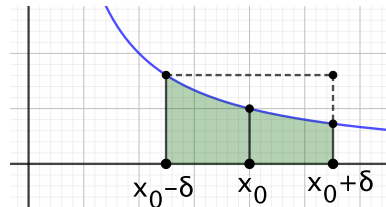
En estos términos, lo que afirma (un caso particular de) el teorema anterior es que  $L(x) = L(xy) - L(y)$  o, equivalentemente, que

$$L(xy) = L(x) + L(y).$$

Distinguiendo casos se concluye fácilmente que la misma relación vale para todo  $x > 0$  si convenimos en definir  $L(1) = 0$  y  $L(x) < 0$  cuando  $x < 1$  (es decir,  $L(x)$  se define como el área indicada en la definición, pero con signo negativo). Notemos que este convenio hace que, si  $x < y$ , entonces  $L(y) - L(x) > 0$  es el área comprendida entre la hipérbola y las rectas verticales  $u = x$  y  $u = y$ .

Así tenemos definida una función  $L : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  que es continua, pues si  $x_0 > 0$ ,  $0 < \delta < x_0$  y  $|x - x_0| < \delta$ , entonces

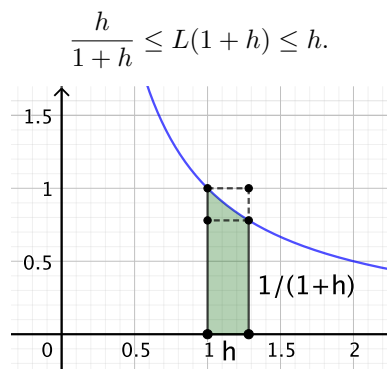
$$|L(x) - L(x_0)| < L(x_0 + \delta) - L(x_0 - \delta) \leq \frac{2\delta}{x_0 - \delta},$$



y tomando  $\delta$  suficientemente pequeño podemos hacer que el último término sea menor que cualquier  $\epsilon > 0$  prefijado.

Por consiguiente, también es continua la función  $f(x) = L(e^x)$ , que satisface la ecuación de Cauchy  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ , luego por [ITAn 3.11] existe un  $k > 0$  tal que  $f(x) = kx$ , luego, cambiando  $x$  por  $\log x$ , concluimos que  $L(x) = k \log x$ . Vamos a probar por último que  $k = 1$ .

Para ello observamos que si  $h > 0$ , entonces, como muestra la figura siguiente,



Por consiguiente,

$$\frac{1}{1+h} \leq \frac{L(1+h)}{h} \leq 1,$$

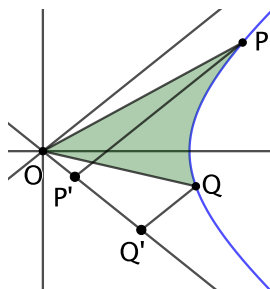
de donde (por las observaciones tras [ITAn 4.5]):

$$k = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k \log(1+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(1+h)}{h} = 1.$$

En definitiva:  $L(x) = \log x$ , y el área comprendida entre la hipérbola y dos rectas verticales  $u = x$ ,  $u = y$  con  $x < y$  es  $\log y - \log x = \log(y/x)$ . Teniendo en cuenta que la aplicación  $f$  que relaciona la hipérbola  $uv = 1$  con una hipérbola arbitraria multiplica las áreas por  $ab/2$  (y deja invariantes las longitudes de los segmentos situados sobre las asíntotas), el resultado general es:

**Teorema 7.41** *El área del sector hiperbólico sombreado en la figura es*

$$\frac{ab}{2} \log \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OP'}}.$$

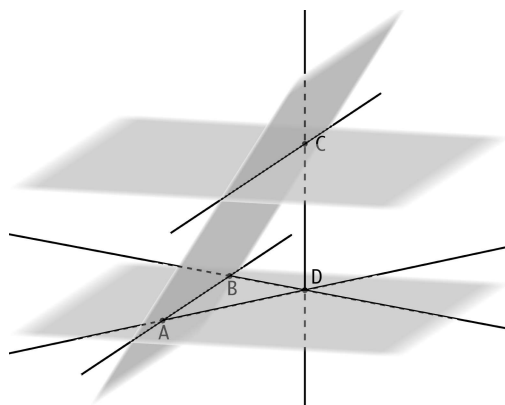


## 7.5 Las secciones cónicas

Finalmente vamos a comprobar que las curvas que hemos estudiado coinciden con las secciones cónicas propiamente dichas, es decir, con las curvas que se obtienen al cortar una superficie cónica con un plano que no pase por el vértice.

Los resultados que vamos a mostrar en esta sección eran bien conocidos por los antiguos griegos, aunque algunos son tardíos y no se encuentran sino en la obra de Pappo de Alejandría (siglo IV d.C.). No obstante, aquí los vamos a exponer siguiendo un método ideado en 1822 por el matemático francés (posteriormente belga) Germain Pierre Dandelin. Previamente necesitamos algunos resultados elementales de la geometría tridimensional.

**Rectas y planos** El concepto análogo en la geometría tridimensional al concepto de “plano” de la geometría plana es el de “espacio”. En el espacio podemos considerar diversos *planos*, considerados como superficies sin grosor y sin límites. Cada plano divide al espacio en dos *semiespacios*. Es evidente que dos planos cualesquiera o bien no tienen puntos en común (son paralelos) o bien se cortan en una recta.



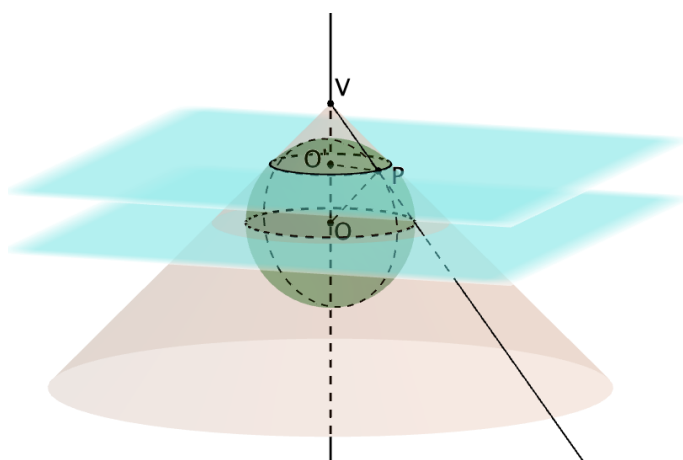
La figura muestra dos planos paralelos y un tercero que los corta en dos rectas paralelas. Es muy importante tener presente que en la geometría tridimensional dos rectas no se consideran paralelas cuando no tienen puntos en común, sino que se exige además que ambas estén contenidas en un mismo plano. Por ejemplo, las rectas  $AB$  y  $CD$  no tienen puntos en común, pero no son paralelas, sino que se dice que *se cruzan*.

Igual que por dos puntos pasa una única recta, por tres puntos cualesquiera no alineados pasa un único plano. Por ejemplo, la figura muestra los planos  $ABC$  y  $ABD$  (los únicos planos que pasan por los tres puntos indicados en cada caso). También es obvio que por una recta y un punto exterior a ella pasa un único plano, o también que dos rectas secantes están contenidas en un único plano. Esto también es cierto para rectas paralelas, pero en realidad es por la propia definición que hemos dado de paralelismo.

Una recta y un plano pueden no tener puntos en común (y se dice que la recta es paralela al plano), como sucede con el plano  $ABD$  y la recta de la figura que pasa por  $C$ , o bien pueden tener un punto en común, como es el caso del plano  $ABD$  y la recta  $CD$ , o en otro caso la recta está contenida en el plano, es decir: si una recta tiene al menos dos puntos en común con un plano, es que está contenida en él.

La recta  $CD$  de la figura no sólo corta al plano  $ABD$ , sino que de hecho es *perpendicular* a él, en el sentido de que es perpendicular a todas las rectas contenidas en el plano que pasan por el punto de corte. Por cada punto pasa una única recta perpendicular a un plano dado.

**Esferas** Consideremos ahora la figura siguiente:



La *esfera* de centro  $O$  y radio  $r$  es, por definición, el lugar geométrico de los puntos del espacio (no del plano) que están a una distancia  $r$  de  $O$ . La intersección de una esfera con un plano  $\Pi$  que pase por  $O$  está formada por todos los puntos del plano  $\Pi$  situados a una distancia  $r$  de  $O$ , luego es *una* (no “la”) circunferencia de centro  $O$  y radio  $r$ .

Pero, más en general, la intersección de cualquier plano con una esfera, o es vacía, o es un punto, o es una circunferencia.

En efecto, dado un plano cualquiera  $\Pi$  (que podemos suponer que no pasa por  $O$ , pues ya hemos considerado ese caso), consideramos la recta perpendicular a  $\Pi$  por  $O$ . Si  $P$  es un punto de  $\Pi$ , tenemos un triángulo rectángulo  $\widehat{PO'O}$ , luego

$$\overline{OP}^2 = \overline{OO'}^2 + \overline{O'P}^2.$$

Si  $\overline{OO'} > r$ , entonces es imposible que  $\overline{OP} = r$ , luego el plano y la esfera son disjuntos. Si  $\overline{OO'} = r$ , entonces  $P$  estará en la esfera si y sólo si  $P = O'$ , luego el plano es *tangente* a la esfera y sólo tiene en común con ella el punto  $O'$ . Por último, si  $s = \overline{OO'} < r$ , entonces  $P$  estará en la esfera si y sólo si se cumple  $\overline{O'P} = \sqrt{r^2 - s^2}$ , luego la intersección es una circunferencia de centro  $O'$ .

Si  $V$  es un punto exterior a una esfera de centro  $O$ , podemos considerar la recta  $OV$  y un plano cualquiera que contenga a dicha recta. Este plano cortará a la esfera en una circunferencia y habrá dos rectas tangentes a dicha circunferencia que pasen por  $V$ . Si  $P$  es uno de los puntos de tangencia, es claro que  $P$  es el único punto en común entre la recta  $PV$  y la esfera, por lo que la recta  $PV$  es, de hecho, tangente a la esfera.

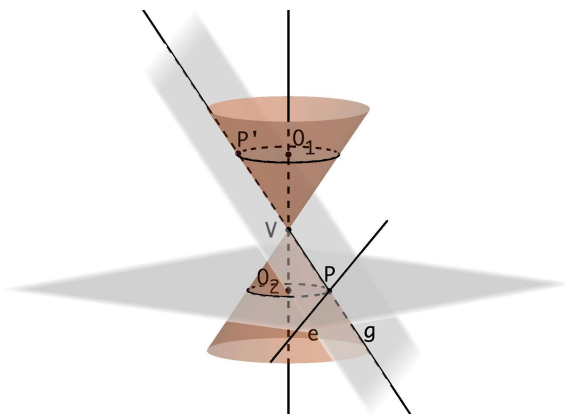
Más aún, si  $O'$  es el pie de la perpendicular a  $OV$  por  $P$ , entonces los triángulos  $\widehat{OO'P}$  y  $\widehat{OPV}$  son semejantes, pues son rectángulos con un ángulo en común aparte del recto. Por lo tanto,

$$\frac{\overline{OV}}{r} = \frac{r}{\overline{OO'}},$$

luego  $\overline{OO'} = r^2/\overline{OV}$  es independiente del plano considerado.

Así pues, hemos probado que por cada plano que contenga a  $OV$  pasan dos tangentes a la esfera, y los puntos de tangencia están todos situados sobre el plano perpendicular a  $OV$  que pasa por un mismo punto  $O'$  y forman una circunferencia de centro  $O'$  y radio  $\sqrt{r^2 - \overline{OO'}^2}$ . La distancia de  $V$  a cualquier punto de tangencia  $P$  es siempre la misma:  $\sqrt{\overline{OV}^2 - r^2}$ .

**Conos** Tal y como hemos explicado en la introducción, para el estudio de las secciones cónicas conviene llamar “conos” a las “superficies cónicas”, es decir, como las superficies formadas por todas las rectas que pasan por un punto de una circunferencia y por un vértice  $V$  situado en la recta perpendicular a su plano que pasa por su centro. En el apartado anterior hemos probado que las tangentes a una esfera por un punto exterior  $V$  forman un cono cuya intersección con la esfera es una circunferencia contenida en el plano perpendicular al eje  $OV$  y con centro  $O'$  en dicha recta.



Supongamos que hemos definido un cono a partir de una circunferencia de centro  $O_1$ . Si  $\Sigma$  es cualquier plano perpendicular al eje  $e$  que no pase por  $V$ , su intersección con el cono es una circunferencia. En efecto, dado un punto  $P$



de la intersección, estará en una generatriz  $g$  que pasará por un punto  $P'$  de la circunferencia de centro  $O_1$ . Si llamamos  $O_2$  a la intersección de  $\Sigma$  con  $e$ , el teorema de Tales nos da que

$$\frac{\overline{O_2P}}{\overline{O_2V}} = \frac{\overline{O_1P'}}{\overline{O_1V}},$$

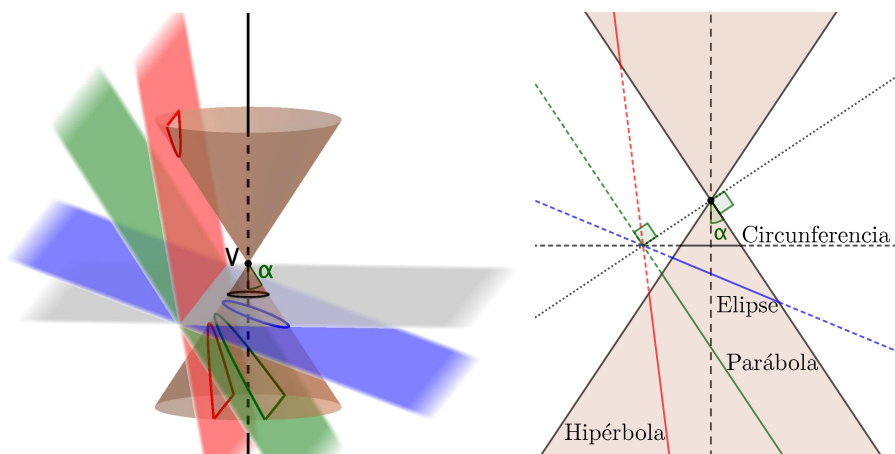
luego  $\overline{O_2P}$  es constante, luego la intersección es una circunferencia de centro  $O_2$ . Más aún, el cono puede definirse igualmente usando esta circunferencia, es decir, está formado por todas las rectas que pasan por el vértice  $V$  y por uno de sus puntos.

Consideremos ahora un punto cualquiera  $P$  de un cono que no sea su vértice. Sea  $\Sigma$  el plano perpendicular al eje  $e$  que pasa por  $P$ , sea  $O_2$  la intersección de  $\Sigma$  con  $e$  y sea  $g$  la generatriz de  $P$ . Así estamos de nuevo en la situación anterior, pero ahora  $P$  es un punto arbitrario del cono distinto de su vértice.

Si  $t$  es la tangente en  $P$  a la circunferencia en que  $\Sigma$  corta al cono, el plano  $\Pi$  que contiene a  $t$  y  $g$  corta al cono únicamente en  $g$ . En efecto, si la intersección contuviera otro punto  $Q$  exterior a  $g$ , como  $V$  está en  $\Pi$ , la generatriz  $VQ$  estaría contenida en  $\Pi$  y cortaría a la circunferencia en un punto  $Q'$  distinto de  $P$ , pero entonces la recta  $t$  (que es la intersección de  $\Pi$  con  $\Sigma$ ) pasaría por  $Q'$  y no sería tangente.

Se dice que un plano  $\Pi$  es *tangente* a un cono si lo corta exactamente en una de sus generatrices. Acabamos de probar que por cada punto  $P$  de un cono distinto de su vértice pasa un plano tangente, y de hecho es único. En efecto, si  $\Pi'$  fuera otro plano tangente, su intersección con  $\Sigma$  sería una recta que pasa por  $P$  tangente a la circunferencia en la que  $\Sigma$  corta al cono, luego dicha recta tiene que ser  $t$ , luego  $\Pi'$  contiene a  $t$  y a la generatriz  $g$  que pasa por  $P$ , luego  $\Pi' = \Pi$ , pues por dos rectas secantes pasa un único plano.

**Las esferas de Dandelin** Tal y como hemos explicado en la introducción, las *secciones cónicas* son las curvas que se obtienen como intersección de un cono con un plano  $\Pi$  que no pase por su vértice.

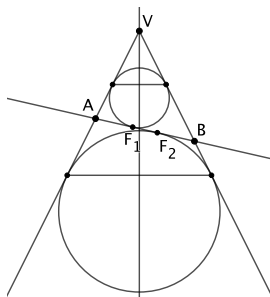


Las características de la curva resultante dependen de lo que podemos llamar *ángulo de incidencia*  $\theta$ , que es el ángulo que forma con el eje del cono la perpendicular a  $\Pi$  que pasa por el vértice  $V$ . La figura de la derecha muestra el plano  $\Sigma$  que contiene a la recta perpendicular al plano que pasa por  $V$  y al eje del cono. La sección cónica recibe el nombre de *elipse*, *parábola* o *hipérbola* según si el ángulo de incidencia  $\theta$  es menor, igual o mayor que el complementario de  $\alpha$ , respectivamente. Remitimos a la introducción para una discusión más detallada de cada uno de los tres casos.

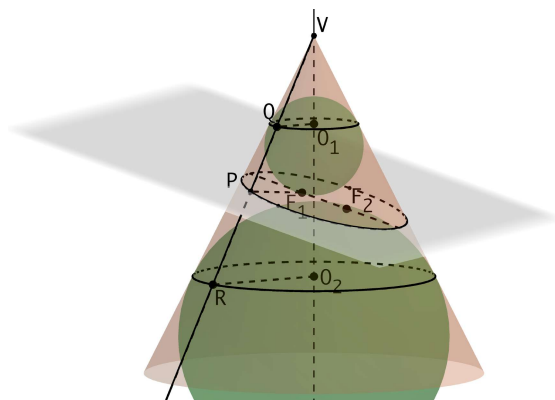
Ahora tenemos dos definiciones distintas de "cónica". Vamos a probar que son equivalentes, pero mientras no lo tengamos probado, llamaremos "cónicas métricas" a las cónicas que hemos estudiado en las secciones precedentes.

**La elipse** Una elipse, como sección cónica, es la curva que se obtiene como intersección con una superficie cónica de un plano  $\Pi$  que corta a todas sus generatrices. Descartemos el caso trivial en que  $\Pi$  es perpendicular al eje del cono, pues ya sabemos que la curva obtenida en ese caso es una circunferencia.

Llamemos  $A$  y  $B$  a los puntos de corte con las dos contenidas en el plano  $\Sigma$  descrito anteriormente. Tenemos entonces un triángulo  $\widehat{AVB}$ , donde  $V$  es el vértice del cono. Consideramos la circunferencia inscrita y la circunferencia excrita tangente al lado  $\overline{AB}$ . Sean  $F_1$  y  $F_2$  los puntos de tangencia:



Si hacemos girar las circunferencias alrededor del eje del cono obtenemos dos esferas tangentes a  $\Pi$  en los puntos  $F_1$  y  $F_2$  respectivamente:



Además, las esferas (llamadas *esferas de Dandelin*), cortan al cono en dos circunferencias de centros  $O_1$  y  $O_2$ .

Consideremos ahora un punto  $P$  de la elipse. Entonces la recta  $VP$  es tangente a las dos esferas. Sean  $Q$  y  $R$  los puntos de tangencia. Como las rectas  $PQ$  y  $PF_1$  son tangentes a una de las esferas, hemos visto que  $\overline{PF_1} = \overline{PQ}$ , e igualmente  $\overline{PF_2} = \overline{PR}$ . Por consiguiente,

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{QP} + \overline{PR} = \overline{QR},$$

pero la longitud  $\overline{QR}$  no depende de  $P$ , sino únicamente de las distancias de los centros  $O_1$  y  $O_2$  de las circunferencias de tangencia al vértice  $V$  del cono y de los radios de éstas.

Los puntos  $F_1$  y  $F_2$  se llaman *focos* de la elipse (como sección cónica), y acabamos de probar que la suma de las distancias de un punto  $P$  cualquiera de la elipse a los dos focos toma el valor constante  $\overline{QR}$ . Esto significa que toda elipse está contenida en una elipse métrica con los mismos focos. Para probar que en realidad son la misma curva observamos en primer lugar lo siguiente:

Una elipse contiene exactamente dos puntos en su eje  $F_1F_2$  (los puntos  $A$  y  $B$ , a los que llamaremos vértices) y, para cada punto  $Q$  situado entre ellos (distinto de ambos), la recta perpendicular al eje por  $Q$  corta al cono y, por lo tanto, a la elipse, en exactamente dos puntos.

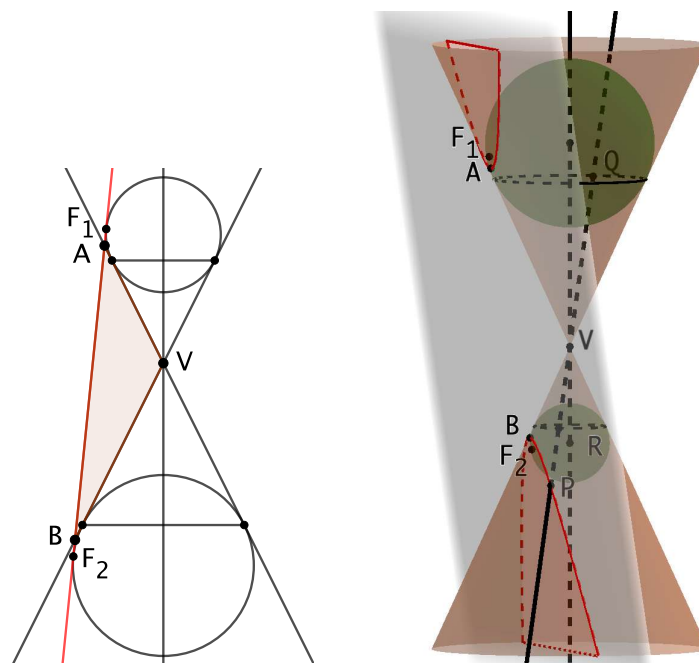
Sabemos que lo anterior también es cierto para las elipses métricas. En particular, los dos vértices de la elipse cónica son vértices de la elipse métrica y, como no puede haber más que dos, son todos ellos, luego los vértices de la elipse métrica coinciden con los de la elipse.

Ahora, si  $P$  es cualquier punto de la elipse métrica en la que está contenida la elipse, o bien es uno de los vértices, en cuyo caso ya sabemos que está en la elipse, o bien la recta perpendicular al eje por  $P$  corta a la elipse métrica en otro punto  $P'$  y al eje en un punto  $Q$  situado entre los vértices (todo esto son hechos que tenemos probados para las elipses métricas), pero, según acabamos de señalar, dicha recta tiene que cortar a la elipse en dos puntos, que necesariamente serán  $P$  y  $P'$ , luego  $P$  está en la elipse y concluimos que ambas curvas son la misma.

Con esto hemos probado que toda elipse coincide con una elipse métrica, pero falta probar que toda elipse métrica es una elipse, es decir, que puede obtenerse a partir de un cono cortado con un plano adecuado. Posponemos la prueba para tratar simultáneamente los casos de la elipse, la parábola y la hipérbola (véase el apartado "Directrices", más abajo).

**La hipérbola** Consideramos ahora el caso de una hipérbola, en el que los puntos  $A$  y  $B$  donde el plano  $\Pi$  corta a las dos generatrices contenidas en el plano  $\Sigma$  están en conos opuestos, pero podemos considerar igualmente el triángulo  $\widehat{AVB}$  así como las dos circunferencias excritas correspondientes a los lados  $\overline{AV}$  y  $\overline{VB}$ , que tocarán a dichos lados en puntos  $F_1$  y  $F_2$ .

Nuevamente, al girar las circunferencias alrededor el eje del cono obtenemos dos esferas (las esferas de Dandelin de la hipérbola) que tocan el plano  $\Pi$  en los puntos  $F_1$  y  $F_2$  y cortan al cono en dos circunferencias de centros  $O_1$  y  $O_2$ :



Si  $P$  es un punto de la intersección de  $\Pi$  con la superficie cónica, consideramos los puntos  $Q$  y  $R$  donde su generatriz corta a las intersecciones de las esferas de Dandelin con el cono. Así  $\overline{PF_1} = \overline{PQ}$  y  $\overline{PF_2} = \overline{PR}$  y, como en el caso de las elipses, ahora concluimos que

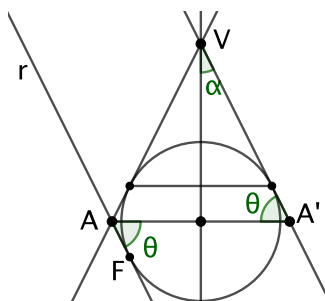
$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \overline{PQ} - \overline{PR} = \overline{QR},$$

que es independiente de  $P$ . En realidad esto vale si  $P$  está en el cono que contiene a  $F_2$ , como en la figura. Si estuviera en el cono de  $F_1$  habría que restar  $\overline{PF_2} - \overline{PF_1}$ , luego en general se cumple que  $\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = \pm \overline{QR}$ .

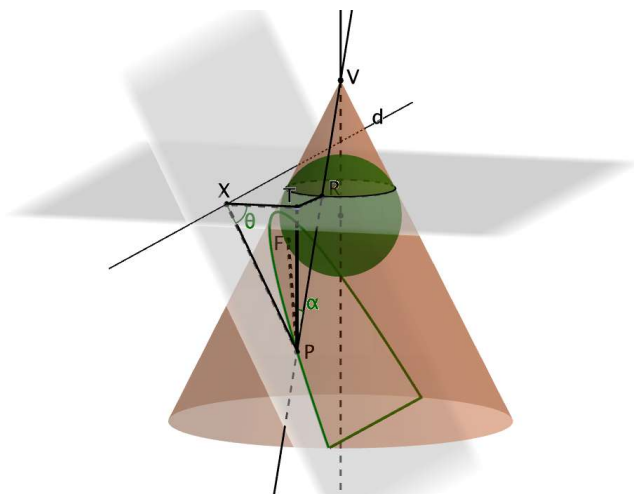
Por consiguiente, toda hipérbola está contenida en una hipérbola métrica con los mismos focos. En realidad ambas curvas coinciden, y esto se demuestra análogamente al caso de la elipse con una modificación obvia: una hipérbola —al igual que una hipérbola métrica— tiene también dos vértices sobre el eje  $y$ , para cada punto  $Q$  no situado entre ellos, la perpendicular al eje por  $Q$  corta a la hipérbola en exactamente dos puntos. Salvo por esta modificación sobre la posición de  $Q$ , el argumento empleado para las elipses vale literalmente para las hipérbolas.

Con esto tenemos probado que toda hipérbola es una hipérbola métrica. Como en el caso de la elipse, posponemos la prueba del recíproco (en el apartado “Directrices”).

**La parábola** En el caso de una parábola, la intersección  $r$  de  $\Pi$  con  $\Sigma$  es paralela a una de las generatrices contenidas en  $\Sigma$  y corta a la otra en un punto  $A$ :



Es fácil ver que existe una única circunferencia tangente a  $r$  y a las dos generatrices. Concretamente, su centro tiene que estar en la bisectriz del ángulo que forman las dos generatrices (o sea, el eje del cono) y en la bisectriz del ángulo formado por  $r$  y la bisectriz que pasa por  $A$ . Ahora bien, esta bisectriz no es sino la perpendicular al eje por  $A$ , pues si llamamos  $AA'$  a esta perpendicular, entonces el triángulo  $\widehat{AA'V}$  es isósceles, luego  $\widehat{VAA'} = \widehat{VA'A} = \theta$ . Concretamente,  $\theta = \pi/2 - \alpha$  es el que hemos llamado ángulo de incidencia de  $\Pi$ . Llamamos  $F$  al punto de tangencia con  $r$ .



Al girar la circunferencia respecto del eje del cono obtenemos una esfera que toca al cono en una circunferencia. Las parábolas tiene una única esfera de Dandelin y un único foco  $F$ . Ahora bien, podemos considerar la recta  $d$  donde  $\Pi$  corta al plano de la circunferencia en la que la esfera corta al cono, que se llama *directriz* de la parábola.

Si  $P$  es un punto arbitrario de la parábola y  $R$  es el punto donde la generatriz de  $P$  toca a la esfera, tenemos que  $\overline{PF} = \overline{PR}$ . Si  $X$  es el pie de la perpendicular

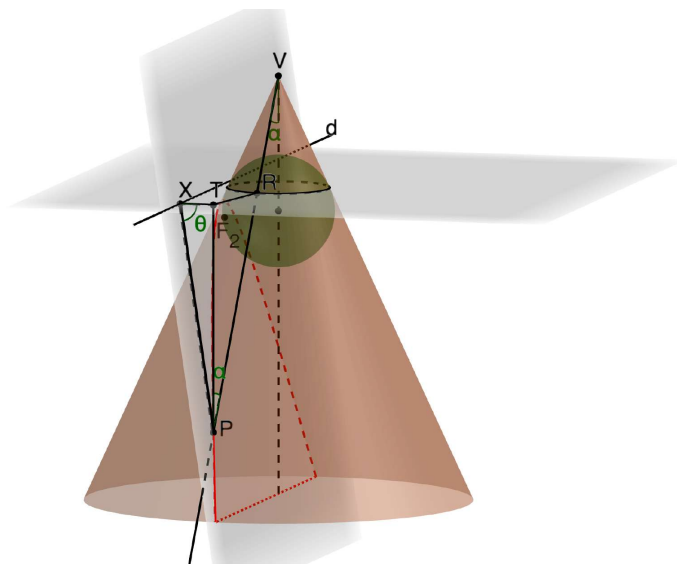
a  $d$  por  $P$ , tenemos que

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PX}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{PX}} = \frac{\overline{PR} \overline{PT}}{\overline{PT} \overline{PX}} = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \alpha},$$

pero  $\alpha$  no es sino la semiamplitud del cono, y  $\theta$  es el ángulo que forma  $\pi$  con la perpendicular al eje  $o$ , equivalentemente, el ángulo que forma la perpendicular a  $\Pi$  con el eje, es decir, el ángulo de incidencia, que es  $\pi/2 - \alpha$ . Por lo tanto,  $\text{cos } \alpha = \text{sen } \theta$  y concluimos que  $\overline{PF} = \overline{PX}$ . Observando, por último, que  $\overline{PX}$  es, por definición, la distancia de  $P$  a la directriz  $d$ , concluimos que la distancia de  $P$  al foco coincide con su distancia a la directriz.

Con esto hemos probado que toda parábola está contenida en una parábola métrica y, como en los casos anteriores, probamos que ambas curvas coinciden. La única diferencia es que ahora el eje de la parábola se define como la perpendicular a la directriz por el foco y se comprueba que contiene un único vértice (el punto  $A$ ) y que toda perpendicular al eje que lo corte en un punto de la semirrecta opuesta a la intersección con la directriz corta a la parábola en dos puntos.

**Directrices** La construcción de la directriz de una parábola que acabamos de mostrar es válida en realidad para cualquier sección cónica obtenida con un ángulo de incidencia  $\theta > 0$ . En efecto, incluso en el caso de una elipse o una hipérbola, siempre podemos considerar uno de sus focos y la esfera de Dandelin correspondiente (la figura muestra el caso de una hipérbola, pero el caso de una elipse es análogo:



Llamamos *directriz* asociada al foco a la recta en la que el plano de la cónica corta al plano de la circunferencia en la que la esfera corta al cono, y exactamente

el mismo razonamiento empleado en el apartado anterior prueba que, para cada punto  $P$  de la curva, el cociente

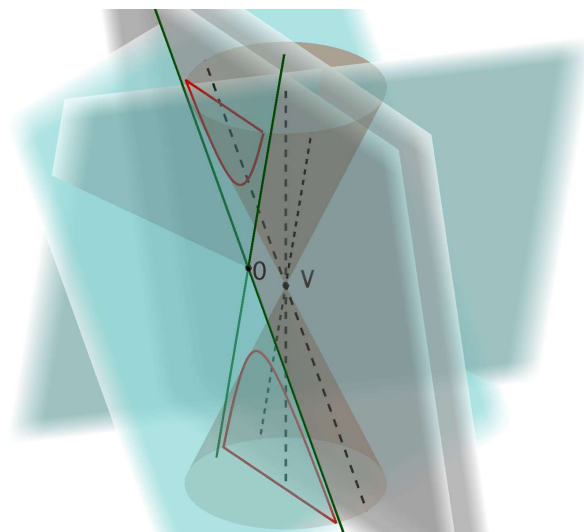
$$e = \frac{\overline{PF}}{\overline{PX}} = \frac{\overline{PR}}{\overline{PX}} = \frac{\overline{PR} \overline{PT}}{\overline{PT} \overline{PX}} = \frac{\sin \theta}{\cos \alpha},$$

es constante, y no es sino la excentricidad de la cónica. Más aún, vemos que eligiendo adecuadamente los ángulos  $\theta$  y  $\alpha$  obtenemos cónicas de cualquier excentricidad  $e > 0$ . Incluso la fórmula resulta ser correcta para  $\theta = 0$ , que da lugar a una circunferencia, aunque en tal caso no está definida la directriz.<sup>4</sup> Más aún, si aplicamos una homotecia de centro  $V$ , el cono queda inalterado, el plano de corte  $\Pi$  se transforma en otro paralelo y la cónica se transforma en una cónica homotética en la que la distancia del foco a la directriz se multiplica por la razón de la homotecia. Esto implica que, cambiando  $\Pi$  por un plano paralelo, podemos conseguir cualquier cónica de una excentricidad dada o, equivalentemente, que todas las cónicas en el sentido métrico pueden obtenerse como secciones cónicas a partir de un cono adecuado. Más precisamente, a partir de un cono de semiamplitud  $0 < \alpha < \pi/2$  pueden obtenerse todas las cónicas de excentricidad  $0 \leq e \leq 1/\cos \alpha$ .

**Tangentes** En este punto ya tenemos probado que las cónicas que hemos estudiado en las secciones precedentes son las mismas que definieron los antiguos griegos como secciones de conos. No vamos a desarrollar toda la teoría que ya conocemos a partir de esta definición alternativa, pero sí es interesante observar la interpretación “tridimensional” de algunos de los conceptos que hemos estudiado. Ya conocemos la de los focos y las directrices, y es fácil probar directamente la existencia de rectas tangentes: la recta tangente a una cónica por un punto  $P$  no es más que la intersección con el plano  $\Pi$  de la cónica del plano tangente al cono que contiene a la generatriz sobre la que se encuentra el punto  $P$ . Como el plano sólo corta al cono en la generatriz, la recta tangente sólo corta a la cónica en  $P$ , y como el plano tangente deja cada “medio cono” en un semiespacio, es inmediato que la recta tangente deja toda la cónica en un mismo semiplano excepto en el caso de las hipérbolas, en el que cada rama queda en un semiespacio diferente. Hemos probado que estas propiedades caracterizan a las tangentes que habíamos definido a partir de la definición “métrica” de las cónicas, luego son las mismas que ya teníamos definidas.

**Asíntotas** En el caso de una hipérbola, el plano paralelo al plano  $\Pi$  de la cónica que pasa por el vértice del cono contiene dos de sus generatrices que, por consiguiente, no tienen ningún punto en la cónica. Por consiguiente, los planos tangentes al cono que contienen a dichas generatrices, aunque cortan a  $\Pi$ , no determinan rectas tangentes a ningún punto. Las intersecciones son precisamente las asíntotas de la hipérbola, como muestra la figura siguiente:

<sup>4</sup>Más aún, podemos conseguir cualquier excentricidad  $e > 0$  fijando cualquier  $\theta > 0$ , o también fijando  $\theta = \alpha$ , que es lo que hizo Menecmo al considerar secciones por planos perpendiculares a la superficie cónica, de modo que  $e = \tan \alpha$ . Así, las elipses se obtienen a partir de conos acutángulos ( $2\alpha < \pi/2$ ), las parábolas a partir de conos rectángulos y las hipérbolas a partir de conos obtusángulos.



En el caso de una parábola, el plano paralelo a  $\Pi$  por el vértice contiene una única generatriz y coincide con su plano tangente, por lo que éste no corta a  $\Pi$  y, por ello, las parábolas no tienen asíntotas. En el caso de una elipse el plano paralelo sólo corta al cono en  $V$  y todos los planos tangentes al cono determinan rectas tangentes a la elipse.

**Puntos en el infinito** Fijemos en un cono una circunferencia obtenida por la intersección con un plano perpendicular a su eje. Por ejemplo, para el caso de la elipse, podemos considerar la figura (tridimensional) de la página 372 y, concretamente, la circunferencia donde la esfera de Dandelin de  $F_1$  corta al cono, simplemente porque está representada, pero sirve cualquier otra. Vemos que, para cada punto  $Q$  en la circunferencia, podemos considerar la generatriz que lo contiene, la cual corta a la elipse en un punto  $P$ . De este modo tenemos una correspondencia biunívoca entre los puntos de la circunferencia y los de la elipse, y ésta es una de las posibles razones (hemos visto otras) por las que una elipse tiene el aspecto de una “circunferencia deformada”. La distancia  $\overline{PQ}$  no es constante, sino que, debido a la inclinación del plano de corte de la elipse, al recorrer la elipse nos alejamos de la circunferencia y nos volvemos a acercar. Los puntos más cercano y más lejano son los vértices situados sobre el eje mayor.

En el caso de una parábola (véase la figura de la página 375), también podemos asignar un punto  $P$  de la parábola a cada punto  $R$  de la circunferencia, con una única excepción: el punto  $R^*$  de la circunferencia situado sobre la generatriz contenida en el plano paralelo al plano  $\Pi$  de la cónica que pasa por el vértice del cono no se corresponde con ningún punto de la parábola. Si  $R$  recorre la circunferencia, cuanto más nos acercamos a  $R^*$  la distancia  $\overline{RP}$  se hace mayor, y tiende a infinito al acercarnos a  $R^*$ . Esto se puede entender considerando que una parábola es como una circunferencia con un punto infinitamente lejano.

En el caso de la hipérbola hay dos puntos  $R_1^*$  y  $R_2^*$  de la circunferencia situados sobre generatrices que no cortan a la cónica. Estos puntos dividen a



la circunferencia en dos arcos complementarios, cada uno de los cuales tiene sus imágenes en una de las ramas de la hipérbola. Por ello podemos considerar que una hipérbola es como una circunferencia con dos puntos infinitamente lejanos. Las asíntotas son las rectas tangentes por dichos puntos infinitos. En el caso de la parábola la tangente por el punto infinito consta exclusivamente de puntos infinitamente lejanos, por lo que no deja rastro en el plano finito.

No obstante, indirectamente estos puntos infinitos “imaginarios” sí que dejan un rastro. Al adoptar el convenio introducido en el capítulo IV de considerar que todas las rectas paralelas a una dada tienen un punto en común infinitamente alejado, muchas de las propiedades que hemos demostrado para las cónicas admiten un enunciado más simple que no requiere distinguir entre los tres tipos de curvas.

Por ejemplo, el punto del infinito de una parábola es el punto por el que pasan sus diámetros (las rectas paralelas al eje). Eso explica por qué los diámetros son “falsas tangentes”, es decir, rectas que tienen sólo un punto en común con la parábola sin ser las tangentes. La razón es que son rectas secantes que cortan a la parábola en dos puntos: uno finito y el único punto infinito de la parábola. La tangente por el punto infinito es, como ya hemos señalado, la “recta infinita” formada por todos los puntos infinitos.

Similarmente, en el caso de una hipérbola, sus puntos infinitos son los puntos infinitos de sus asíntotas (y de las paralelas a éstas, lo que explica que tales paralelas sean también secantes que parecen “falsas tangentes”).

En estos términos, podemos afirmar que por cualquier punto interior de una cónica no pasan tangentes, por cualquier punto de la propia cónica pasa una única tangente y por cualquier punto exterior pasan dos tangentes. Las excepciones que conocemos a esta regla desaparecen cuando consideramos puntos infinitos y la recta infinita determinada por éstos.

Por ejemplo, las rectas tangentes a una cónica paralelas a una recta dada son las tangentes por el punto infinito de dicha recta. En el caso de una elipse, hay dos tangentes paralelas a cada recta, porque los puntos infinitos son todos exteriores, así que hay dos tangentes que pasan por cada uno de ellos.

En el caso de una parábola, hay una única tangente paralela a una recta dada que no sea un diámetro porque todos los puntos infinitos distintos del que está en la parábola son exteriores, luego por cada uno de ellos pasan dos tangentes, una de las cuales es la que hemos visto cómo calcular y la otra es la recta infinita. No hay tangentes paralelas a un diámetro porque el punto infinito de los diámetros está en la parábola, luego por él sólo pasa una recta tangente, que es la recta infinita.

En el caso de la hipérbola, la recta infinita es secante, luego parte de sus puntos son interiores y parte exteriores. Esto se traduce en que las rectas de pendiente  $|m| > b/a$  (las que pasan por puntos infinitos exteriores) tienen dos paralelas tangentes, las de pendiente  $|m| < b/a$  (las que pasan por puntos infinitos interiores) no tienen paralelas tangentes y las de pendiente  $|m| = b/a$  (las paralelas a las asíntotas) tienen una única paralela tangente (la propia asíntota) porque el punto del infinito está en la hipérbola.

Conviene definir el *centro* de una parábola como su único punto infinito. Así, el centro de una elipse es un punto interior, el de una parábola es un punto de la curva y el de una hipérbola es un punto exterior. Los diámetros son, en todos los casos, las rectas que pasan por el centro. El lector podrá “unificar” en esta línea muchos más de los resultados que hemos probado sobre cónicas.

## Apéndice A

# La geometría analítica

En este apéndice mostramos la conexión existente entre la geometría sintética estudiada en este libro y la geometría analítica que subyace en muchos de los conceptos y resultados de [ITAn] y, en menor medida, de [ITAl]. En realidad el contexto algebraico adecuado para desarrollar la geometría analítica es el determinado por la estructura conocida como “espacio afín”, que incorpora la distinción entre los objetos que representan los puntos de los “vectores”, que representan traslaciones de puntos. Sin embargo, aquí no entraremos en esta sutileza, y nos limitaremos a presentar el marco más simple que permite cubrir nuestros objetivos.

### A.1 Puntos y vectores

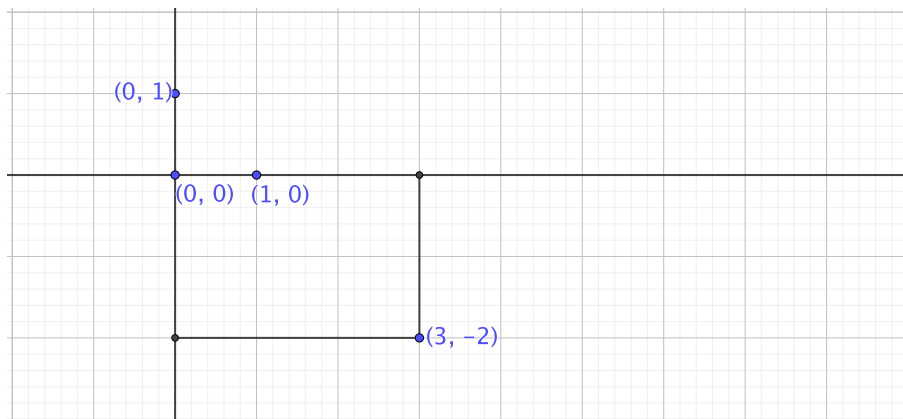
La idea básica de la geometría analítica consiste en que, al igual que una graduación nos permite identificar cada punto de una recta con un número real, al fijar lo que se conoce sistema de referencia cartesiano, podemos identificar cada punto del plano con un par de números reales, es decir, con un elemento del producto cartesiano  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

**Definición A.1** Un *sistema de referencia cartesiano* está determinado por dos rectas perpendiculares, graduadas tomando como  $P_0$  el punto de su intersección, y como puntos  $P_1$  y  $P'_1$  dos puntos tales que  $\overline{P_0P_1} = \overline{P_0P'_1}$ , es decir, con la misma unidad de longitud. La recta  $P_0P_1$  se llama *eje de abscisas*, mientras que la recta  $P_0P'_1$  se llama *eje de ordenadas*.

Fijado un sistema de referencia, a cada punto  $P$  le podemos asociar unas coordenadas  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , donde  $x$  es el número real que corresponde según la graduación del eje de abscisas al punto de corte con la perpendicular que pasa por  $P$  y análogamente se determina  $y$  considerando el eje de ordenadas.

Es evidente que a cada punto del plano le corresponden pares de coordenadas distintos y que todo par de números reales son las coordenadas de un único punto del plano. Observemos que las coordenadas de  $P_0$  son  $(0, 0)$ , las de  $P_1$  son  $(1, 0)$  y las de  $P'_1$  son  $(0, 1)$ .

Es habitual representar el eje de abscisas como una recta horizontal y el eje de ordenadas como una recta vertical, y las graduaciones se eligen de modo que el sentido positivo en el eje de abscisas sea de izquierda a derecha, y en el eje de ordenadas de abajo hacia arriba:



Podemos pensar en las coordenadas  $(x, y)$  de un punto  $P$  (respecto de un sistema de referencia dado) como en unas “instrucciones” para llegar hasta  $P$  desde el origen de coordenadas  $O = (0, 0)$ . Concretamente,  $(x, y)$  significa: “muévete  $|x|$  unidades en la dirección del eje de abscisas (en el sentido determinado por el signo de  $x$ ) y luego  $|y|$  unidades en la dirección del eje de ordenadas (en el sentido determinado por el signo de  $y$ ).

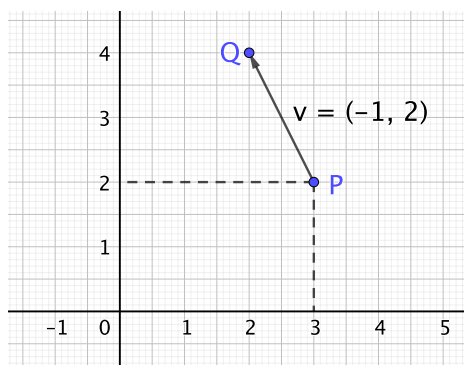
Cuando pensamos en estos términos en los pares de números reales los llamamos *vectores* (lat. transportador) y los representamos como flechas. La geometría afín proporciona un marco teórico adecuado para distinguir objetivamente entre puntos y vectores, pero en el tratamiento elemental que presentamos aquí la diferencia es meramente subjetiva: un par  $(x, y)$  representa un punto cuando lo usamos para determinar la posición de un punto, y representa un vector cuando lo usamos para determinar un desplazamiento. Para precisar estas ideas conviene considerar la suma en  $\mathbb{R}^2$  dada por

$$(x, y) + (z, w) = (x + z, y + w).$$

Si interpretamos los dos sumandos como puntos, la suma no tiene ninguna interpretación geométrica natural, pero sí que tiene sentido sumar un punto más un vector:

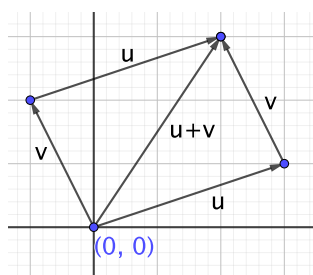
*Si  $P = (x, y)$  es un punto y  $v = (z, w)$  es un vector, entonces  $Q = P + \vec{v}$  es el punto al que se llega desde  $P$  siguiendo las instrucciones de desplazamiento dadas por  $\vec{v}$ .*

La figura muestra la suma  $Q = P + v$  con  $P = (3, 2)$  y  $v = (-1, 2)$ , lo que supone moverse una unidad hacia la izquierda y dos hacia arriba. En general, dados dos puntos  $P$  y  $Q$ , el vector  $\vec{PQ} = Q - P$  es el único vector que lleva desde  $P$  hasta  $Q$ . Así pues, tiene sentido restar dos puntos para obtener un vector:



También tiene un sentido geométrico claro la suma de dos vectores:

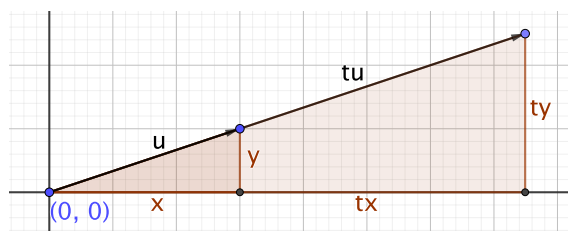
*La suma de dos vectores  $u = (x, y)$  y  $v = (z, w)$  es el vector que lleva desde un punto cualquiera  $P$  al punto al que se llega moviéndose primero según las instrucciones de  $u$  y luego aplicando en ese punto las de  $v$ .*



En el ejemplo de la figura, con  $u = (3, 1)$  y  $v = (-1, 2)$  y  $P = (0, 0)$ . Primero nos movemos 3 unidades hacia la derecha y 1 unidad hacia arriba y, desde ese punto, nos movemos 1 unidad hacia la izquierda y 2 unidades hacia arriba. El vector  $u + v = (2, 3)$  nos lleva directamente hasta el punto al que hemos llegado.

Es fácil convencerse de que el aspecto de la figura anterior no es casual: si los vectores  $u$  y  $v$  no están situados sobre la misma recta, el vector  $u + v$  recorre la diagonal del paralelogramo que tiene por lados los vectores  $u$  y  $v$ .

Otra operación con una interpretación geométrica clara es el producto de un número real por un vector,  $t(x, y) = (tx, ty)$ :



Dado un vector  $u = (x, y)$ , con  $xy \neq 0$  y un número  $t > 0$ , consideramos el vector que resulta de alargar (o acortar)  $u$  hasta el punto cuya abscisa es  $tx$ . Tenemos así dos triángulos en posición de Tales, luego son semejantes, y eso se traduce en que la ordenada es  $ty$ , luego el vector “alargado” es precisamente  $tu$ . Además, por la semejanza, la longitud de  $tu$  es  $t$  veces mayor que la de  $u$ .

En otras palabras,  $tu$  es el vector que tiene la misma dirección y sentido que  $u$ , pero cuya longitud es  $t$  veces mayor. Si  $t < 0$  es claro que  $tu = (-1)(-t)u$ , así como que multiplicar un vector por  $-1$  simplemente invierte su sentido, luego en general:

*El vector  $tu$  es el vector que tiene la misma dirección que  $u$ , pero es  $|t|$  veces mayor y su sentido es el mismo que el de  $u$  o bien el opuesto según el signo de  $t$ .*

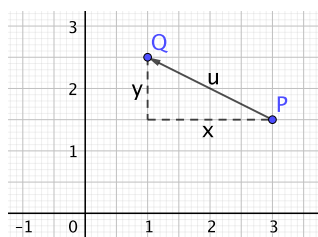
En principio hemos justificado esto bajo la hipótesis de que las coordenadas del vector sean no nulas, pero es fácil ver que si una de ellas es nula se cumple también (y si  $u = (0, 0)$  entonces todos los vectores  $tu$  son nulos.)

De aquí se sigue que si multiplicamos las coordenadas de todos los puntos de una figura por un mismo número  $t > 0$  el resultado es que la figura “cambia de escala”, es decir, se hace mayor o menor, pero conservando todas las proporciones. Por ello, al trabajar con vectores, a los números se les llama *escalares*, porque “escalán” los vectores.

**Nota** Observemos que la suma y el producto que acabamos de definir son las mismas introducidas en la sección 1.1 de [ITAn] (véase el apartado sobre el plano  $\mathbb{R}^2$ ) y —de acuerdo con el apartado siguiente de [ITAn]— pueden verse también como la suma de números complejos y el producto de un número real por un número complejo. Aquí estamos en condiciones de justificar las interpretaciones geométricas dadas allí. ■

**El módulo de un vector** Si  $u = (x, y)$  es un vector y sus coordenadas son no nulas, el teorema de Pitágoras nos da que la longitud de cualquier segmento de extremos un punto  $P$  y el punto  $p + u$  es

$$|u| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



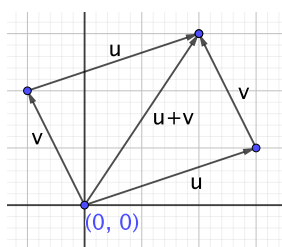
En realidad para aplicar el teorema de Pitágoras tenemos que suponer que las coordenadas  $x, y$  no son nulas, pero es fácil ver que en caso contrario la fórmula también es trivialmente cierta.

El valor  $|u|$  se llama *módulo* del vector  $u$ . Según acabamos de mostrar, la longitud del segmento de extremos  $P$  y  $Q$  es  $\overline{PQ} = |\overrightarrow{PQ}| = |Q - P|$ .

Las propiedades siguientes son inmediatas a partir de las interpretaciones geométricas de los conceptos involucrados:

1.  $|v| \geq 0$  y  $|v| = 0$  si y sólo si  $v = (0, 0)$ .
2.  $|tv| = |t| |v|$ , donde  $t$  es un número real.
3.  $|u + v| \leq |u| + |v|$ .

Por ejemplo, si  $u$  y  $v$  no están sobre la misma recta, entonces la tercera propiedad no es sino la desigualdad triangular dada por el teorema 1.3:



Tenemos un triángulo de lados  $|u|$ ,  $|v|$  y  $|u + v|$ , en el que la longitud de un lado no puede exceder a la suma de las longitudes de los otros dos. Si están sobre la misma recta, entonces  $v = tu$ , para cierto número real  $t$ , con lo que

$$|u + v| = |(1 + t)u| = |1 + t| |u| \leq (1 + |t|) |u| = |u| + |v|.$$

**El producto escalar** Conviene observar que el módulo de un vector puede expresarse en términos del *producto escalar*, que es la operación en  $\mathbb{R}^2$  dada por

$$(x, y)(x', y') = xx' + yy'.$$

Concretamente, si  $u = (x, y)$  tenemos que  $u \cdot u = x^2 + y^2$ , luego  $|u| = \sqrt{u \cdot u}$ .

En la sección 1.1 de [ITAn] introdujimos también el producto escalar, pero ahora podemos mostrar su interpretación geométrica. Dados dos vectores  $u$  y  $v$ , tenemos que

$$(v - u) \cdot (v - u) = u \cdot u + v \cdot v - 2u \cdot v,$$

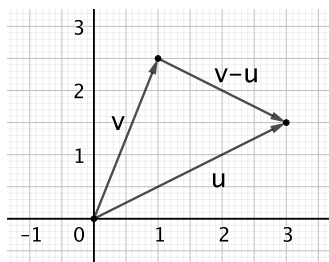
es decir,

$$|v - u|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2u \cdot v.$$

Si ambos vectores son no nulos y tienen direcciones distintas, forman un triángulo con el origen de coordenadas, cuyos lados miden precisamente  $|u|$ ,  $|v|$  y  $|v - u|$ . Comparando con el teorema del coseno, concluimos que

$$u \cdot v = |u| |v| \cos(\widehat{u, v}),$$

donde  $\widehat{u, v}$  es el ángulo que forman ambos vectores en 0.



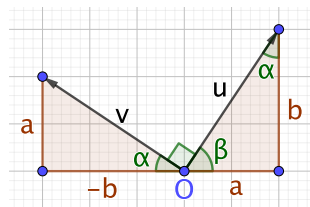
Si los vectores son no nulos pero tienen la misma dirección, es decir, si  $v = \lambda u$ , para cierto  $\lambda$  no nulo, entonces  $u \cdot v = \lambda u \cdot u = \lambda |u|^2 = \pm |u||v|$ , que es un caso particular de la fórmula anterior si convenimos en que el ángulo  $\widehat{u, v}$  es en este caso 0 (con coseno 1) si  $u$  y  $v$  tienen el mismo sentido (es decir, si  $\lambda > 0$ ) o bien es  $\pi$  (con coseno  $-1$ ) si  $u$  y  $v$  tienen sentidos opuestos ( $\lambda < 0$ ).

Así pues:

*El producto escalar de dos vectores no nulos es el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.*

Se dice que dos vectores  $u$  y  $v$  son *ortogonales* si  $u \cdot v = 0$ . Si son no nulos, esto equivale a que formen un ángulo recto, pues  $\pi/2$  es el único ángulo convexo con coseno nulo.

Así pues, dado un vector no nulo  $u = (a, b)$ , es claro que dos vectores ortogonales a  $u$  son  $(-b, a)$  y  $(b, -a)$ , pues ciertamente  $(a, b)(-b, a) = -ab + ab = 0$ , e igualmente con  $(b, -a)$ . Conviene observar que esto puede probarse directamente sin dificultad, sin más que considerar la figura siguiente:



Los dos triángulos son iguales, pues tienen dos lados iguales y el ángulo (recto) que forman. Por lo tanto, los dos ángulos rotulados como  $\alpha$  son iguales y, por otra parte,  $\alpha + \beta = \pi/2$ , luego el ángulo que forman los vectores  $u = (a, b)$  y  $v = (-b, a)$  también es recto.

Terminamos este apartado enunciando las propiedades elementales del producto escalar:

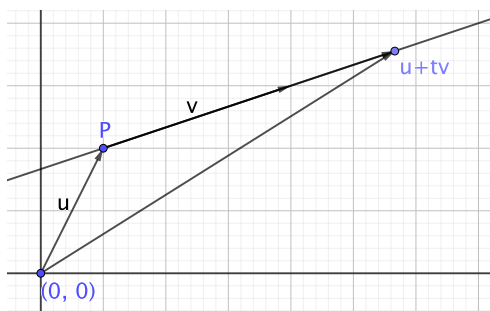
1.  $uv = vu$ ,
2.  $u(v + w) = uv + uw$ ,  $(v + w)u = vu + wu$ ,
3.  $(tu)v = t(uv)$ ,  $u(tv) = t(uv)$ ,



## A.2 Rectas

**La ecuación vectorial de una recta** Los vectores admiten otros usos además del de determinar la posición de los puntos. Por ejemplo, si la posición de un punto  $P$  viene dada por el vector  $u = (a, b)$  y  $v = (v_1, v_2)$  es un vector no nulo, la interpretación que hemos dado del producto de un número por un vector muestra que los vectores  $tv$ , cuando  $t$  recorre los números reales, recorren una recta que pasa por el origen de coordenadas y, a su vez, los vectores de la forma  $u + tv$  recorren una recta que pasa por el punto  $P$ .

En este caso el vector  $v$  no está marcando la posición de ningún punto, sino la dirección de la recta, y por ello se llama *vector director* de la recta. Es claro que toda recta puede describirse mediante una ecuación de esta forma, pues basta tomar como  $u$  el vector de posición de cualquiera de sus puntos y como  $v$  la diferencia entre dos de sus puntos.



Por ejemplo, en la figura anterior está representada la recta  $r$  que pasa por el punto  $P$  con vector de posición  $u = (1, 2)$  y que tiene por vector director  $v = (3, 1)$ , con lo que sus coordenadas son de la forma

$$(x, y) = (1, 2) + t(3, 1),$$

o también

$$(x, y) = (1 + 3t, 2 + t).$$

La primera ecuación se conoce como *ecuación vectorial* de la recta, mientras que la segunda es la *ecuación paramétrica*.

Es claro que si  $v$  es un vector director de una recta, todos sus múltiplos no nulos también lo son (y son los únicos vectores directores de dicha recta) y que dos rectas son paralelas si y sólo si tienen un mismo vector director.

**Semirrectas y segmentos** Es obvio que las semirrectas que  $P$  determina en la recta de ecuación vectorial  $P + tv$  están formadas por los puntos correspondientes a  $t \geq 0$  para una de ellas y  $t \leq 0$  para la otra.

Consideremos ahora dos puntos distintos  $P$  y  $Q$ . Si  $v = Q - P$ , entonces  $P + tv$  es la ecuación vectorial de la recta que pasa por  $P$  y  $Q$ . Concretamente, el

punto  $P$  corresponde a  $t = 0$  y  $Q$  a  $t = 1$ . Por lo tanto, los puntos del segmento  $\overline{PQ}$  son los que están en la misma semirrecta respecto a  $P$  que  $Q$  (es decir, los puntos con  $t \geq 0$ ) y que distan de  $P$  menos que  $Q$ , es decir, tales que

$$|P + tv - P| = t|v| \leq |v| = |Q - P|,$$

lo que equivale a que  $t \leq 1$ . Ahora es fácil concluir:

**Teorema A.2** *Dados dos puntos distintos  $P = (a, b)$  y  $Q = (c, d)$ , el segmento de extremos  $P$  y  $Q$  está formado por los puntos con coordenadas de la forma*

$$(1 - t)(a, b) + t(c, d), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

DEMOSTRACIÓN: Llamando  $v = Q - P = (c - a, d - b)$ , acabamos de probar que el segmento está formado por los puntos de la forma

$$(a, b) + t(c - a, d - b), \quad 0 \leq t \leq 1$$

y esta expresión coincide claramente con la del enunciado. ■

Observemos que  $M = (1/2)(a, b) + (1/2)(c, d)$  es el punto medio de  $P$  y  $Q$ , pues ciertamente está entre ambos y

$$|M - P| = |(1/2)(a, b) + (1/2)(c, d) - (a, b)| = \frac{1}{2}|(c, d) - (a, b)| = \frac{1}{2}|Q - P|,$$

luego la distancia de  $M$  a  $P$  es la mitad de la distancia de  $P$  a  $Q$ .

**La ecuación general de una recta** Hemos visto que las coordenadas de los puntos de una recta están determinados por unas ecuaciones paramétricas de la forma

$$x = a + ct, \quad y = b + dt,$$

donde  $t$  recorre los números reales,  $u = (a, b)$  son las coordenadas de uno de sus puntos y  $v = (c, d)$  es un vector director. No puede ser  $c = d = 0$  (pues entonces el vector director  $(c, d)$  sería nulo y la ecuación sólo la cumpliría un punto). Si, por ejemplo,  $d \neq 0$ , podemos despejar

$$t = \frac{y - b}{d}$$

y, al sustituir en la primera ecuación, queda

$$x = a + c \frac{y - b}{d},$$

lo cual equivale a  $dx = da + cy - cb$ , o también a

$$dx - cy = da - cb.$$

Si  $c \neq 0$  llegamos a la misma expresión. Recíprocamente, es fácil ver que todo punto  $(x, y)$  que cumpla esta ecuación satisface también las ecuaciones

paramétricas iniciales, tomando  $t = (y - b)/d$  si  $d \neq 0$  o bien  $t = (x - a)/c$  si  $c \neq 0$ . Por lo tanto, concluimos que las coordenadas de los puntos de una recta están caracterizados por una ecuación de la forma

$$ax + by = c,$$

donde  $ab \neq 0$ . De hecho,  $v = (-b, a)$  es un vector director de la recta.<sup>1</sup> Esta ecuación recibe el nombre de *ecuación general* de la recta.

Recíprocamente, toda ecuación de esta forma corresponde a una recta. Basta tomar un punto  $u = (x_0, y_0)$  que la cumpla (que claramente existe siempre) y el vector  $v = (-b, a)$ . Según hemos visto, la ecuación de la recta determinada por  $u$  y  $v$  es

$$ax + by = ax_0 + by_0 = c,$$

luego es la ecuación dada. Así pues:

**Teorema A.3** *Fijado un sistema de referencia cartesiano, los puntos de una recta están caracterizados por que sus coordenadas  $(x, y)$  cumplen una ecuación de la forma<sup>2</sup>*

$$ax + by = c,$$

para ciertos números reales  $a, b, c$  con  $ab \neq 0$ . Recíprocamente, los puntos que cumplen una ecuación de esta forma son precisamente los puntos de una recta.

Si  $b = 0$ , la ecuación equivale a otra de la forma  $x = c$ , y claramente corresponde a una recta vertical (respecto del sistema de referencia). En caso contrario, podemos despejar  $y$  para expresar la ecuación en la forma

$$y = mx + n.$$

El número  $m$  se llama *pendiente* de la recta, y —con los convenios usuales de orientación— claramente indica lo que la recta sube (o baja si  $m < 0$ ) por cada unidad que nos desplazamos horizontalmente hacia la derecha. Cuanto mayor es  $|m|$ , más empinada es la recta, sea “hacia arriba” o “hacia abajo”. Las rectas verticales no tienen pendiente o, si se prefiere, tienen “pendiente infinita”.

**La ecuación normal de una recta** Se dice que un vector  $n$  no nulo es *normal* a una recta si es ortogonal a cualquiera de sus vectores directores (es obvio que si es ortogonal a uno lo es a todos). Si una recta pasa por un punto  $P$  con vector de posición  $u$  y tiene a  $n$  como vector normal, entonces un punto  $X$  está en la recta si y sólo si  $X - u$  es el vector nulo o bien un vector director de la recta, si y sólo si

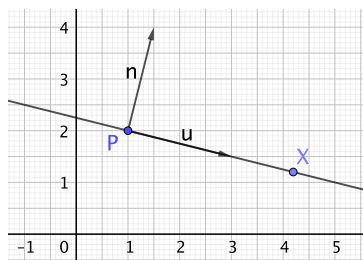
$$n(X - u) = 0.$$

Esta ecuación se conoce como *ecuación normal* de una recta.

**Ejemplo** Vamos a calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto  $P = (1, 2)$  y tiene vector director  $u = (4, -1)$ .

<sup>1</sup>En efecto, en la deducción precedente hemos partido de un vector director  $(c, d)$  y hemos llegado a una ecuación de la forma  $dx - cy = k$ .

<sup>2</sup>Es por ello que estas ecuaciones se llaman *ecuaciones lineales*.



Un vector normal es entonces  $n = (1, 4)$ , con lo que un punto  $X = (x, y)$  está en la recta si y sólo si

$$(X - P)n = 0,$$

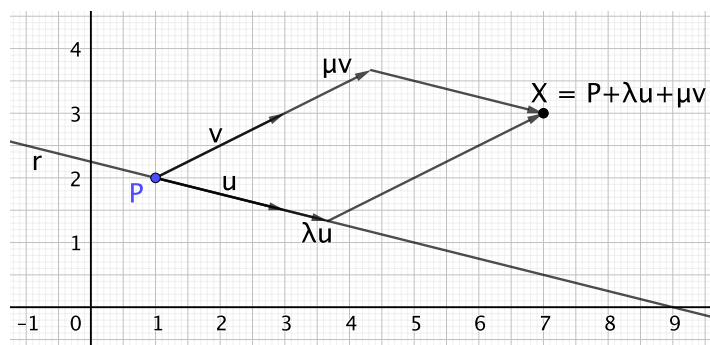
luego la ecuación normal es:

$$(x - 1, y - 2)(1, 4) = 0.$$

Esto equivale a  $x - 1 + 4y - 8 = 0$ , luego la ecuación general es

$$x + 4y = 9. \quad \blacksquare$$

**Semiplanos** Consideremos una recta  $r$  que pasa por un punto  $P$  y tiene vector director  $u$ , y sea  $v$  otro vector que no sea múltiplo de  $u$ . Es claro entonces que los puntos  $X$  que no están sobre la recta son los de la forma  $X = P + \lambda u + \mu v$  con  $\mu \neq 0$ , y que  $X$  estará en un semiplano u otro respecto de  $r$  según el signo de  $\mu$ . En la figura, los puntos con  $\mu > 0$  están en el semiplano superior y los puntos con  $\mu < 0$  en el inferior.



Si  $n$  es un vector normal a  $u$ , entonces

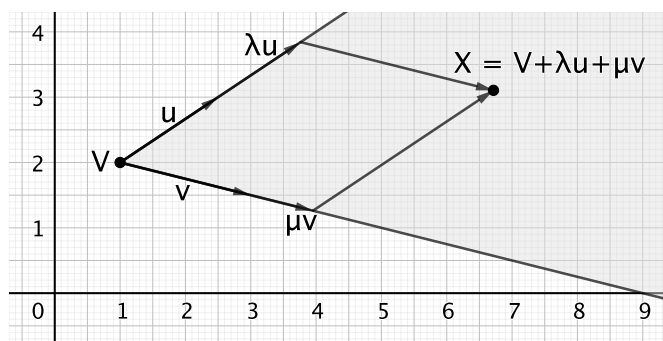
$$n(X - P) = (\lambda u + \mu v)n = \mu vn,$$

luego el signo de  $\mu$  se corresponde con el de  $n(X - P)$  (en el sentido de que el signo es el mismo para todos los puntos  $X$  o bien es opuesto para todos los puntos  $X$ ). Si al desarrollar  $n(X - P)$  se obtiene una expresión de la forma  $ax + by - c$ , resulta

que la ecuación general de  $r$  es  $ax + by = c$ , y los dos semiplanos determinados por  $r$  son los formados por los puntos cuyas coordenadas cumplen  $ax + by > c$  y  $ax + by < c$ , respectivamente (o  $ax + by \geq c$  y  $ax + by \leq c$  si queremos incluir a  $r$  en ambos semiplanos). En resumen:

*Los semiplanos determinados por la recta de ecuación  $ax + by = c$  son los conjuntos de puntos cuyas coordenadas cumplen una de las dos ecuaciones  $ax + by \geq c$  y  $ax + by \leq c$  (con la desigualdad estricta o no estricta según si se quiere que incluyan o no a la recta).*

**Ángulos** Dado un punto  $V$  y un vector  $u$ , la recta que pasa por  $V$  con vector director  $u$  está formada por los puntos de la forma  $V + \lambda u$ , y las semirrectas determinadas por  $V$  están formadas por los puntos que cumplen  $\lambda > 0$  o  $\lambda < 0$ . Cambiando  $u$  por  $-u$  si es preciso, siempre podemos exigir que los puntos de una semirrecta prefijada sean los que tienen coordenada  $\lambda > 0$ . Si consideramos otro vector  $v$  que no sea múltiplo de  $u$ , es claro que los puntos del ángulo convexo determinado por las semirrectas  $V + \lambda u$ ,  $V + \mu v$  (con  $\lambda, \mu > 0$ ) está formado por los puntos de la forma  $X = V + \lambda u + \mu v$  con  $\lambda, \mu > 0$ .



Claramente, la amplitud del ángulo convexo determinado por un punto  $V$  y unos vectores  $u$  y  $v$  es precisamente el ángulo  $\widehat{u, v}$  que hemos definido anteriormente.

### A.3 Isometrías

En esta sección mostraremos la expresión analítica del concepto de igualdad de figuras geométricas, aunque en este contexto es mejor hablar de figuras congruentes. La idea geométrica subyacente es que dos figuras planas  $F$  y  $F'$  son congruentes cuando podemos “calcar”  $F$  sobre un plano transparente superpuesto al plano en el que se encuentra, y luego podemos mover este plano auxiliar, admitiendo la posibilidad de “darle la vuelta”, como al pasar una página de un libro, de modo que la copia de  $F$  se superponga exactamente a  $F'$ . Así, cada punto  $P$  de  $F$  tiene un punto *homólogo*  $P'$  en  $F'$  (pues en la “copia” podríamos marcar el punto  $P$  y entonces  $P'$  es el punto de  $F'$  sobre el que se

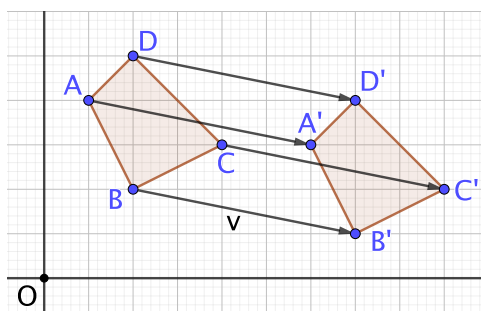
superpone  $P$  cuando desplazamos la copia). Ahora bien, aunque sólo nos interesen los puntos de  $F$  y sus homólogos en  $F'$ , lo cierto es que al desplazar una copia del plano estamos transformando cada punto  $P$  (esté o no en  $F$ ) en otro punto homólogo  $P'$ , de modo que  $F'$  es precisamente la figura formada por los puntos homólogos a los puntos de  $F$ . Puesto que la longitud de un segmento tiene que ser igual que la de su homólogo, esto nos lleva a la definición siguiente:

**Definición A.4** Una *isometría* es un criterio que a cada punto  $P$  del plano le asigna un *punto homólogo*  $P'$  de modo que si  $P$  y  $Q$  son dos puntos distintos, entonces sus homólogos  $P'$  y  $Q'$  también son distintos y  $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$ . En otras palabras, la distancia entre dos puntos es la misma que la distancia entre sus homólogos.

Fijado un sistema de referencia y un vector  $u$  definimos la *traslación* determinada por  $u$  como la isometría dada por  $P' = P + u$ .

Ciertamente las traslaciones son isometrías, pues la longitud de  $\overline{P'Q'}$  es  $|P + u - (Q + u)| = |P - Q|$ , que es la longitud de  $\overline{PQ}$ .

La figura muestra la traslación de una figura determinada por el vector  $v = (5, -1)$ :



Consideremos una isometría arbitraria y llamemos  $v = O' - O$  al vector que traslada el origen  $O$  a su homólogo  $O'$ . Es claro que la relación

$$P'' = -v + P'$$

define otra isometría del plano, pues, para cualquier par de puntos distintos  $P$  y  $Q$ , tenemos que  $\overline{P''Q''} = \overline{P'Q'} = \overline{PQ}$ .

Pero esta segunda isometría tiene la propiedad de que

$$O'' = -v + O' = O,$$

es decir que deja invariante al origen de coordenadas.

A las isometrías que cumplan  $O' = O$  (respecto de un sistema de referencia) las llamaremos *isometrías lineales*.

Teniendo en cuenta que  $P' = v + P''$ , hemos demostrado lo siguiente:

**Teorema A.5** *Toda isometría puede expresarse en la forma  $P' = v + P''$ , donde  $v$  es un vector y  $P''$  una isometría lineal.*

En otras palabras, toda isometría puede efectuarse aplicando primero una isometría lineal y luego una traslación adecuada.

Supongamos ahora que  $u \mapsto u'$  es una isometría lineal en  $\mathbb{R}^2$ . Entonces, la longitud del segmento de extremos  $O$  y  $u$  es la misma que la del segmento de extremos  $O' = O$  y  $u'$ , pero esto significa que  $|u| = |u'|$ . Esto significa que las isometrías lineales conservan el módulo de los vectores.

Por otro lado, la relación

$$|u - v|^2 = (u - v)(u - v) = u \cdot u + v \cdot v - 2uv = |u|^2 + |v|^2 - 2uv$$

implica que

$$u'v' = \frac{1}{2}(|u'|^2 + |v'|^2 - |u' - v'|^2) = \frac{1}{2}(|u|^2 + |v|^2 - |u - v|^2) = uv,$$

pues  $|u' - v'| = |u - v|$  por definición de isometría. Esto significa que las isometrías lineales conservan el producto escalar.

Observemos ahora que si  $u$ ,  $v$  y  $w$  están alineados, lo mismo sucede con sus homólogos  $u'$ ,  $v'$  y  $w'$ .

Basta tener en cuenta que los módulos  $|u - v|$ ,  $|u - w|$ ,  $|v - w|$  cumplen que uno es la suma de los otros dos (dependiendo de cuál de los puntos esté entre los otros dos), luego lo mismo sucede con  $|u' - v'|$ ,  $|u' - w'|$ ,  $|v' - w'|$ , pero esto implica que  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  están alineados, ya que, en caso contrario, la desigualdad triangular implica que cualquiera de los tres números  $|u' - v'|$ ,  $|u' - w'|$ ,  $|v' - w'|$  es estrictamente menor que la suma de los otros dos.

En particular, si  $t$  es un número real, entonces  $(tv)' = tv'$ .

En efecto, si  $v = 0$  o  $t = 0, 1$  es inmediato. En caso contrario,  $O$ ,  $v$  y  $tv$  son tres puntos distintos alineados, al igual que sus homólogos  $O$ ,  $v'$  y  $(tv)'$ , luego  $(tv)' = sv'$ , para cierto número real  $s$ , pero, multiplicando por  $v'$  queda que

$$s|v'|^2 = (tv)'v' = tv \cdot v = t|v|^2 = t|v'|^2,$$

luego  $s = t$  y así  $(tv)' = tv'$ .

A continuación probamos que  $(u + v)' = u' + v'$ .

Si  $u = v$  es trivial, pues  $(u + u)' = (2u)' = 2u' = u' + u'$ . También es claro el caso en que  $u = 0$  o  $v = 0$ . En otro caso, llamemos  $w = u + v$ , de modo que  $|w - u| = |v|$ ,  $|w - v| = |u|$ . Igualmente,  $|w' - u'| = |v'|$ ,  $|w' - v'| = |u'|$ . Esto significa que  $w'$  está en la circunferencia de centro  $u'$  y radio  $|v'|$  y también en la circunferencia de centro  $v'$  y radio  $|u'|$ . Como los centros son distintos, se trata de circunferencias distintas, que sólo pueden cortarse en dos puntos, y uno de

ellos tiene que ser  $u' + v'$ . Llamamos  $z' \neq u' + v'$  al posible segundo punto de corte (si no lo hay, ya tenemos que  $w' = u' + v'$ ). Observemos ahora que

$$\begin{aligned} |w'|^2 &= |w|^2 = (u+v)(u+v) = |u|^2 + |v|^2 + 2uv \\ &= |u'|^2 + |v'|^2 + 2u'v' = (u' + v')(u' + v') = |u' + v'|^2, \end{aligned}$$

luego  $|w'| = |u' + v'|$ , lo que significa que tanto  $w'$  como  $u' + v'$  están en la circunferencia de centro  $O$  y radio  $|w'|$ . Basta probar que  $z'$  no puede estar en ella. Si lo estuviera, significaría que  $O$  está a la misma distancia de  $z'$  y de  $u' + v'$ , es decir, que está en la mediatriz del segmento con dichos extremos, pero  $u'$  y  $v'$  están en dicha mediatriz, pues  $z'$  y  $u' + v'$  están en circunferencias con dichos centros. La conclusión es que  $O$ ,  $u'$  y  $v'$  están alineados, pero entonces también  $u' + v'$  está alineado con ellos.

Ahora bien, si dos circunferencias de centros distintos  $u'$  y  $v'$  tienen en común un punto de la recta que pasa por sus centros, es que son tangentes en ese punto (véase la discusión previa al teorema 1.2) y no pueden tener un segundo punto  $z'$  en común.

Si llamamos  $e_1 = (1, 0)$  y  $e_2 = (0, 1)$ , entonces todo vector  $u = (x, y)$  se expresa como  $u = xe_1 + ye_2$ , luego, por lo que hemos probado en los dos pasos precedentes,  $u' = xe'_1 + ye'_2$ . Si  $e'_1 = (a, b)$ ,  $e'_2 = (c, d)$ , esto equivale a que

$$u' = (ax + cy, bx + dy).$$

En general, las aplicaciones de esta forma se llaman *aplicaciones lineales*, por lo que hemos demostrado que las isometrías lineales son aplicaciones lineales.

Observemos que una aplicación  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es lineal si y sólo si cumple

$$f(u + v) = f(u) + f(v), \quad f(tu) = tf(u),$$

para todos los vectores  $u, v$  y todos los números reales  $t$ .

En efecto, una implicación la hemos usado ya para probar que las isometrías son lineales: si  $f(1, 0) = (a, b)$  y  $f(0, 1) = (c, d)$ , obtenemos como antes que  $f(x, y) = (ax + cy, bx + dy)$ . En particular, vemos que hay una única aplicación lineal que transforma  $e_1$  y  $e_2$  en dos vectores dados.

Recíprocamente, es fácil ver que toda aplicación de esta forma cumple las condiciones sobre la suma y el producto por escalares.

En este punto es útil usar la notación matricial presentada en la sección 11.2 de [ITAL], que nos permite expresar toda aplicación lineal en la forma

$$f(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, no toda aplicación lineal es una isometría lineal. En el caso concreto de las isometrías, como  $e_i \cdot e_i = 1$ , tiene que ser  $e'_i \cdot e'_i = 1$ , es decir:

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1.$$



Pero  $e_1 e_2 = 0$ , luego los vectores  $e'_1$  y  $e'_2$  tienen que ser ortogonales, y sólo hay dos vectores de módulo 1 ortogonales a  $(a, b)$ , que son  $(b, -a)$  y  $(-b, a)$ , luego  $c = \pm b$  y  $d = \mp a$ . En definitiva:

**Teorema A.6** *Toda isometría lineal en  $\mathbb{R}^2$  es de la forma*

$$(x, y) \mapsto (x, y) \begin{pmatrix} a & \pm b \\ b & \mp a \end{pmatrix},$$

para ciertos números reales  $a, b$  tales que  $a^2 + b^2 = 1$ . Recíprocamente, toda aplicación de esta forma es una isometría lineal.

DEMOSTRACIÓN: Ya hemos probado que toda isometría lineal es de la forma indicada. Recíprocamente, si  $u \mapsto u'$  es una aplicación de esta forma, ya hemos visto que es lineal. Para probar que es una isometría observamos en primer lugar que conserva los módulos de los vectores, pues si  $u = (x, y)$ , entonces

$$\begin{aligned} |u'| &= \sqrt{(ax \pm by)^2 + (bx \mp ay)^2} \\ &= \sqrt{a^2 x^2 + b^2 y^2 \pm 2abxy + b^2 x^2 + a^2 y^2 \mp 2abxy} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)x^2 + (a^2 + b^2)y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |u|. \end{aligned}$$

Y si  $u$  y  $v$  son dos vectores distintos, entonces, usando la linealidad,

$$\overline{u'v'} = |v' - u'| = |(v - u)'| = |v - u| = \overline{uv}. \quad \blacksquare$$

**Nota** De la linealidad de las isometrías lineales se deduce fácilmente que la imagen de una recta por una isometría es una recta (pues esto es trivialmente cierto para las traslaciones) y del hecho de que las isometrías lineales conserven el producto escalar se deduce fácilmente que, aunque hemos definido las isometrías como las aplicaciones que conservan las longitudes de los segmentos, de hecho también conservan las amplitudes de los ángulos.  $\blacksquare$

**Simetrías axiales** Vamos a ver que las simetrías lineales de la forma

$$(x, y) \mapsto (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

(con  $a^2 + b^2 = 1$ ) son las simetrías axiales respecto de rectas que pasan por el origen  $O$ .

En efecto, si  $a = 1$ , entonces  $(x, y)' = (x, -y)$ , que claramente es la simetría respecto del eje de abscisas. Si  $a = -1$  entonces  $(x, y)' = (-x, y)$  es la simetría respecto del eje de ordenadas.

Si  $a \neq \pm 1$ , entonces  $b \neq 0$ , y vamos a ver que se trata de la simetría respecto de la recta  $r$  que pasa por  $O$  y tiene por vector director  $u = (b, 1 - a)$  o bien  $v = (a + 1, b)$ . Notemos que ambos vectores determinan la misma recta, pues

$$\frac{a+1}{b}u = \left(a+1, \frac{1-a^2}{b}\right) = \left(a+1, \frac{b^2}{b}\right) = (a+1, b) = v.$$

Si  $e_1 = (1, 0)$ , tenemos que  $e'_1 = (a, b)$ . La recta que une ambos puntos tiene vector director  $(a - 1, b)$ , que es ortogonal a  $u = (b, 1 - a)$ , luego la recta es perpendicular a  $r$ , y el punto medio del segmento  $\overline{e_1 e'_1}$  es

$$\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e'_1 = \frac{1}{2}(a + 1, b) = \frac{1}{2}v,$$

luego está en  $r$ . Esto prueba que  $e'_1$  es el simétrico de  $e_1$  respecto de  $r$ .

Igualmente, si  $e_2 = (0, 1)$ , tenemos que  $e'_2 = (b, -a)$ . La recta que une ambos puntos tiene vector director  $(b, -a - 1)$ , que es ortogonal a  $v = (b, 1 - a)$ , luego la recta es perpendicular a  $r$ , y el punto medio del segmento  $\overline{e_2 e'_2}$  es

$$\frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e'_2 = \frac{1}{2}(b, 1 - a) = \frac{1}{2}u,$$

luego está en  $r$ . Esto prueba que  $e'_2$  es el simétrico de  $e_2$  respecto de  $r$ .

Así pues, la simetría respecto de  $r$  coincide sobre  $e_1$  y  $e_2$  con la isometría dada, y como ambas son aplicaciones lineales, si coinciden sobre estos vectores coinciden sobre todos los demás. ■

**Giros** Consideremos ahora las isometrías lineales de la forma

$$(x, y) \mapsto (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

(con  $a^2 + b^2 = 1$ ). El teorema [ITAn 5.4] nos da que existe un número real  $\theta$  tal que  $a = \cos \theta$ ,  $b = \sin \theta$ , de modo que la isometría es de la forma

$$(x, y) \mapsto (x, y) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

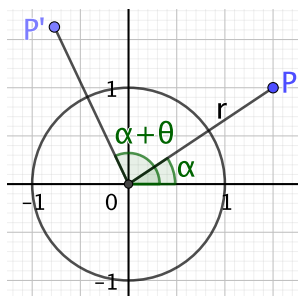
Las isometrías de esta forma se llaman *giros* (alrededor del origen de coordenadas  $O$ ). En efecto, son lo que intuitivamente se entiende por un giro, pues si expresamos un punto cualquiera no nulo como

$$P = r(\cos \alpha, \sin \alpha),$$

entonces su imagen por el giro de ángulo  $\theta$  es

$$\begin{aligned} P' &= r(\cos \alpha, \sin \alpha) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= r(\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta, \cos \alpha \sin \theta + \sin \alpha \cos \theta) \\ &= r(\cos(\alpha + \theta), \sin(\alpha + \theta)) \end{aligned}$$

Así pues,  $P'$  se obtiene sumando  $\theta$  al ángulo que  $P$  forma con el semieje de abscisas positivas, es decir, que es lo que normalmente se entiende por girar  $P$  un ángulo  $\theta$  respecto de  $O$  en sentido antihorario (si  $\theta > 0$ , que es lo mismo que un giro de  $2\pi - \theta$  en sentido horario):



Y no hay más posibilidades para una isometría. En total, hemos demostrado lo siguiente:

**Teorema A.7** *Toda isometría es la composición de una traslación y un giro o bien de una traslación y una simetría axial.*<sup>3</sup>

Esto prueba que el concepto de isometría se corresponde exactamente con el concepto de igualdad geométrica, es decir, que dos figuras son “iguales” (técnicamente, son congruentes) si y sólo si una se transforma en la otra mediante una isometría. En principio, sabíamos que las figuras iguales tienen que ser isométricas, pero ahora que hemos probado que no hay más isometrías que las composiciones de traslaciones, giros y simetrías, es evidente que si dos figuras son isométricas, entonces son iguales.

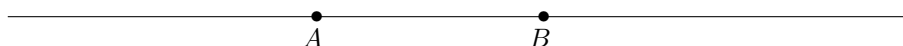
En general, las isometrías lineales son aplicaciones lineales cuya matriz tiene determinante  $\pm 1$ . Esto basta para justificar que la medida de Jordan definida en el apéndice A del [ITAn] —que se corresponde con la noción intuitiva de área— es invariante por isometrías (compárese con el teorema [ITAn A.17]).

## A.4 Bases, orientación

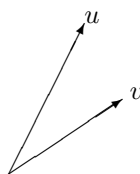
Terminamos este apéndice discutiendo la expresión analítica de unos conceptos cuya interpretación intuitiva es bien simple, pero no es obvio en absoluto cómo puede expresarse analíticamente. Nos referimos a precisar analíticamente el significado de frases como que un punto está “a la izquierda” o “a la derecha” de otro, o que un punto resulta de girar otro tantos grados “en sentido horario” o “en sentido antihorario”.

Lo primero que debemos observar es que estos conceptos son “relativos” en el sentido de que no sólo dependen de los objetos a los que se aplican, sino también, en mayor o menor medida, del punto de vista desde el que los observamos. Por ejemplo, si ante esta figura:

<sup>3</sup>No es difícil probar que, de hecho, toda isometría es una traslación, un giro, una simetría axial o bien una simetría axial compuesta con una traslación en la dirección del eje de simetría. Esto se debe a que la composición de una traslación y un giro es siempre un giro (respecto de un centro distinto al del giro inicial) y una composición de una traslación y una simetría respecto de un eje perpendicular a la dirección de traslación es de nuevo una simetría.



nos preguntamos si el punto  $A$  está a la izquierda o a la derecha del punto  $B$ , diremos que está a la izquierda, pero si el lector apoya este libro sobre la superficie de una mesa, un observador sentado enfrente de él dirá que  $A$  está a la derecha de  $B$ . Por eso en el lenguaje usual decimos “a mi izquierda” o “a tu derecha”. En general, para que dos personas coincidan en su uso de “izquierda” y “derecha” deben asegurarse de que ambas miran hacia el mismo lugar, es decir, que ambas coinciden en el significado de “delante” y “detrás”. Una forma de reducir esta “relatividad” es plantearse si en la figura siguiente el vector  $v$  está a la izquierda o a la derecha del vector  $u$ :



Esto hay que entenderlo como que si nos situamos en el origen común de ambos vectores mirando hacia donde señala el vector  $u$ , entonces veremos al vector  $v$  a nuestra derecha. Y en esto coincidirá alguien que esté sentado frente a nosotros con esta página del libro dispuesta sobre la mesa. Sin embargo, esta noción vectorial de “izquierda” y “derecha” no es completamente absoluta, pues si dibujamos los vectores en un cristal, observadores situados en los lados opuestos del cristal diferirán en si  $v$  está a la izquierda o a la derecha de  $u$ .

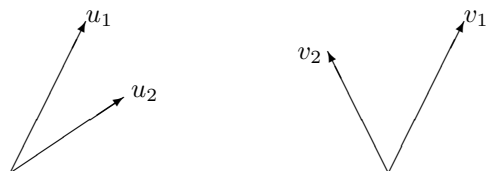
A su vez, esto está relacionado con la noción de “sentido de giro”. Por ejemplo, para girar el vector  $u$  hasta que apunte en el mismo sentido que  $v$  recorriendo el ángulo menor, es necesario realizar el giro en sentido antihorario, pero alguien que vea la figura “desde el otro lado del cristal” dirá que el sentido de giro tiene que ser horario.

Es importante tener presente que ninguna de estos conceptos admite una definición absoluta, en el sentido de que es imposible definir cuál es “la derecha” o cuál es el sentido de giro “horario” si no es poniendo un ejemplo concreto. Si sabemos distinguir entre “izquierda” y “derecha” es porque alguien alguna vez nos ha dicho “ésta es tu mano derecha”, y el “ésta” es esencial. No hay forma de enseñarle a alguien cuál es la mano derecha y cuál la izquierda si no es señalándosela o haciendo referencia a alguna asimetría de nuestro cuerpo, como “la mano derecha es la que está en el lado opuesto al corazón”. Es imposible hacerlo recurriendo exclusivamente a conceptos geométricos.

Ahora bien, la definición siguiente sí que es absoluta:

Consideremos dos pares de vectores  $u_1, u_2$  y  $v_1, v_2$  de modo que apunten en direcciones distintas (es decir, que  $u_1$  no sea múltiplo de  $u_2$  ni viceversa y que  $v_1$  no sea múltiplo de  $v_2$  ni viceversa). Diremos que ambos pares tienen *la misma orientación* si cuando nos situamos en el origen de coordenadas mirando hacia donde señala  $u_1$  vemos a  $u_2$  al mismo lado (izquierdo o derecho) en el que vemos a  $v_2$  cuando miramos hacia donde señala  $v_1$ .

Por ejemplo, los dos pares de vectores de la figura siguiente no tienen la misma orientación, pues si miramos en la dirección de  $u_1$  vemos a  $u_2$  a nuestra derecha, mientras que si miramos en la dirección de  $v_1$  vemos a  $v_2$  a nuestra izquierda:



Lo esencial es que, si alguien llama “derecha” a lo que nosotros llamamos “izquierda” y viceversa, dirá que  $u_2$  está a la izquierda de  $u_1$  y que  $v_2$  está a la derecha de  $v_1$  pero —aunque en esto difiera de nuestro criterio— al final coincidirá con nosotros en que los dos pares de vectores no tienen la misma orientación, e igualmente coincidirá en que para girar de  $u_1$  a  $u_2$  por el ángulo más corto, habrá que girar en sentido opuesto al necesario para girar de  $v_1$  a  $v_2$ , aunque, desde nuestro punto de vista el sentido sea el horario en el primer caso y el antihorario en el segundo, mientras que para él sea al revés.

Vemos así que “tener o no la misma orientación” es algo que absoluto, que no depende del criterio con el que hemos decidido a qué llamamos “izquierda” o “derecha” o “sentido horario” y “sentido antihorario” o del punto de vista desde el que observemos los objetos considerados.

En esta sección vamos a analizar con más detalle estas ideas hasta obtener una caracterización analítica del concepto de “orientación”.

**Bases** Diremos que dos vectores  $v_1, v_2$  (dados en un cierto orden) forman una *base* (ordenada) si uno no es múltiplo del otro, es decir, si no sucede que  $v_1 = \lambda v_2$ , para cierto número real  $\lambda$ , ni viceversa. En particular esto requiere que ambos sean no nulos.

Equivalentemente,  $v_1, v_2$  forman una base si y sólo si son no nulos y, para cualquier punto  $P$  prefijado, las rectas  $X = P + tv_1$  y  $X = P + tv_2$  son distintas.

Esto tiene una caracterización algebraica sencilla en términos de las coordenadas de los vectores: si  $v_1 = (a, b)$  y  $v_2 = (c, d)$ , entonces  $v_1$  y  $v_2$  forman una base si y sólo si<sup>4</sup>

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

En efecto, el determinante es  $ad - bc$ . Si  $v_1 = \lambda v_2$ , entonces  $(a, b) = \lambda(c, d)$  y se comprueba inmediatamente que el determinante da 0. Recíprocamente, supongamos que  $ad - bc = 0$ .

Si  $c = 0$ , entonces  $ad = 0$ , luego, o bien  $c = d = 0$ , con lo que  $v_2 = (0, 0)$  y los vectores no forman una base, o bien  $a = c = 0$ , con lo que

$$v_1 = (0, b) = (b/d)(0, d) = (b/d)v_2$$

<sup>4</sup>Esto es un caso particular de [ITA1 1.9].

y tampoco forman una base. Igualmente concluimos si es  $d = 0$ . En caso contrario podemos definir  $\lambda = a/c = b/d$ , y se cumple que  $v_1 = \lambda v_2$ .

A su vez, esto implica que si  $v_1, v_2$  forman una base, todo vector  $w$  se expresa de forma única como

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2,$$

para ciertos números reales  $\lambda_1, \lambda_2$ .

En realidad esto es evidente si tenemos en cuenta su interpretación geométrica, y de hecho lo hemos usado ya al mostrar la expresión analítica de los conceptos de semiplano o de ángulo. Algebraicamente, un vector  $w = (e, f)$  cumplirá la relación indicada si y sólo si

$$\begin{aligned} a\lambda_1 + c\lambda_2 &= e \\ b\lambda_1 + d\lambda_2 &= f \end{aligned}$$

lo que equivale a la ecuación matricial

$$(\lambda_1, \lambda_2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (e, f)$$

que, según el teorema [ITAl 11.7] tiene solución única

$$(\lambda_1, \lambda_2) = (e, f) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}$$

Los números  $(\lambda_1, \lambda_2)$  se llaman *coordenadas* del vector  $w$  respecto de la base  $v_1, v_2$ , y pueden verse como “instrucciones” para llegar a  $w$  desde el origen  $O$ : camina  $\lambda_1$  unidades en el sentido marcado por  $v_1$  (entendiendo que es el sentido opuesto si  $\lambda_1 < 0$ ) y luego  $\lambda_2$  unidades en el sentido marcado por  $v_2$ .

Notemos que los vectores  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$  forman claramente una base, que recibe el nombre de *base canónica*, y las coordenadas de un vector  $w = (a, b)$  respecto a dicha base son precisamente  $a$  y  $b$ , por lo que lo que hasta ahora llamábamos “coordenadas de un vector” no son sino sus coordenadas respecto de la base canónica en el sentido más general que acabamos de introducir.

**Orientación** Consideremos ahora dos vectores  $v_1 = (a, b)$ ,  $v_2 = (c, d)$ . Es claro que existe un único giro que transforma  $v_1$  en el vector  $(|v_1|, 0)$ . Si llamamos  $M$  a la matriz de dicho giro, tenemos que

$$(a, b)M = (|v_1|, 0), \quad (c, d)M = (c', d').$$

Equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} |v_1| & 0 \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, es evidente que los giros conservan las orientaciones, es decir, que si al mirar hacia donde señala  $v_1$  vemos a  $v_2$  a nuestra izquierda (o a nuestra

derecha), al aplicar el giro (si nosotros giramos igualmente para seguir mirando hacia donde señala el vector  $v_1$  girado) seguiremos viendo al segundo vector (girado) en el mismo lado. En otras palabras la orientación de la base  $v_1, v_2$  tiene que ser la misma que la de la base  $(|v_1|, 0), (c', d')$  o, en términos absolutos: la base  $v_1, v_2$  tendrá la misma orientación que la base canónica si y sólo si lo mismo le sucede a la base  $(|v_1|, 0), (c', d')$ .

Pero el vector  $e_1 = (1, 0)$  de la base canónica señala en la misma dirección que  $(|v_1|, 0)$ , por lo que la base  $(|v_1|, 0), (c', d')$  tendrá la misma orientación que la base canónica si y sólo si el vector  $(c', d')$  está en el mismo semiplano que el vector  $e_2 = (0, 1)$ .

Y es evidente que los vectores que están en el mismo semiplano que  $e_2$  son los que tienen segunda coordenada positiva, luego concluimos que  $v_1, v_2$  tiene la misma orientación que la base canónica si y sólo si  $d' > 0$ .

Finalmente observamos que, teniendo en cuenta que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes y que las matrices de los giros tienen determinante 1,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = |v_1|d',$$

luego la condición  $d' > 0$  es equivalente a que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0.$$

Esto nos lleva a la definición siguiente:

**Definición A.8** Diremos que una base  $v_1 = (a, b), v_2 = (c, d)$  está *positivamente orientada* si

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0.$$

En caso contrario diremos que está *negativamente orientada*. Dos bases tienen la misma orientación si ambas están positivamente orientadas o ambas están negativamente orientadas. Obviamente la base canónica está positivamente orientada.

El razonamiento precedente nos da la interpretación geométrica de esta definición: una base  $v_1, v_2$  está positivamente orientada si cuando miramos hacia donde indica  $v_1$  vemos a  $v_2$  al mismo lado (izquierdo o derecho) en el que vemos al vector  $e_2$  de la base canónica cuando miramos hacia donde indica  $e_1$ .

Lo que no podemos hacer es precisar la definición para que en lugar de decir “al mismo lado” podamos decir “a la izquierda” o “a la derecha”. Si al elegir el sistema de ejes cartesianos que nos permite asignar coordenadas a los puntos seguimos la costumbre de elegir el punto  $(1, 0)$  “a la derecha” de  $(0, 0)$  y el punto  $(0, 1)$  “arriba” de  $(0, 0)$ , entonces el vector  $e_2$  de la base canónica está a la izquierda de  $e_1$ , por lo que una base  $v_1, v_2$  está positivamente orientada si y sólo si  $v_2$  está a la izquierda de  $v_1$ , pero esto depende de la elección del sistema de ejes cartesianos. Con una elección distinta, el sentido positivo pasaría a ser el negativo, y viceversa.

**Sentidos de giro** Llamaremos *giro de amplitud*  $\theta > 0$  *en sentido positivo* al giro determinado por la matriz

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

mientras que *el giro de amplitud*  $\theta > 0$  *en sentido negativo* será el determinado por la matriz  $M_{-\theta}$ .

Vamos a ver que, si elegimos la base canónica con el convenio usual, el sentido positivo de giro es el sentido antihorario.

En efecto, si consideramos un vector no nulo arbitrario  $v = (a, b)$  y un ángulo  $\theta > 0$  que no sea múltiplo de  $\pi$ , es decir, tal que  $\operatorname{sen} \theta \neq 0$ , entonces al girar el vector  $v$  obtenemos el vector

$$v' = (a, b)M_\theta = (a \cos \theta - b \operatorname{sen} \theta, a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta),$$

y la orientación de la base  $v, v'$  viene determinada por

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a \cos \theta - b \operatorname{sen} \theta & a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta \end{vmatrix} = (a^2 + b^2) \operatorname{sen} \theta.$$

Por lo tanto,  $v, v'$  está positivamente orientada si y sólo si  $\operatorname{sen} \theta > 0$ , es decir, si y sólo si  $0 < \theta < \pi$ , salvo múltiplos de  $2\pi$ .

Ahora basta observar que esto es precisamente lo que cumplen los giros en sentido antihorario: cuando giramos un vector  $v$  en sentido antihorario con una amplitud  $0 < \theta < \pi$ , el vector girado  $v'$  queda a la izquierda del vector  $v$  luego, si la base canónica cumple que  $e_2$  está a la izquierda de  $e_1$ , tenemos que la base  $v, v'$  está positivamente orientada, mientras que si la amplitud del giro es  $\pi < \theta < 2\pi$ , entonces  $v'$  está a la derecha de  $v$  y la base está negativamente orientada. Así pues —con el convenio usual sobre la elección de la base canónica— el sentido positivo de giro es el antihorario.

Notemos que si  $\theta = \pi$  entonces  $v' = -v$ , con lo que no tiene sentido plantearse si el giro se ha hecho en sentido horario o antihorario, pues en ambos casos el resultado es el mismo, y lo mismo vale si  $\theta = 0$ , en cuyo caso  $v' = v$ .

Otra consecuencia es la caracterización siguiente de las bases positivamente orientadas:

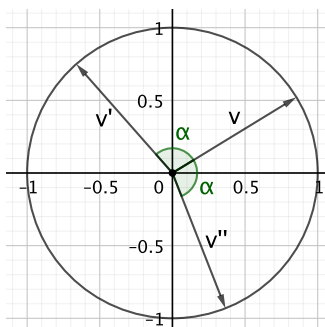
*Una base  $v_1, v_2$  está positivamente orientada si y sólo si el giro que transforma  $v_1$  en  $v_2$  en sentido positivo tiene amplitud  $0 < \theta < \pi$  o, equivalentemente, si el giro de menor amplitud que transforma  $v_1$  en  $v_2$  es el de sentido positivo.*

**Ángulos dirigidos** Si tenemos dos vectores no nulos  $v_1, v_2$ , el ángulo que forman es

$$\widehat{v_1, v_2} = \widehat{v_2, v_1} = \arccos \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1||v_2|},$$

de modo que hay dos vectores distintos (de un mismo módulo, unitario, por ejemplo)  $v'$  que forman un mismo ángulo  $\alpha$  con un vector dado  $v$ :





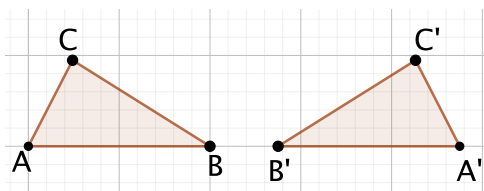
En la figura, podemos transformar  $v$  en  $v'$  o en  $v''$  mediante dos giros de amplitud  $0 < \alpha < \pi$ , pero ahora podemos decir que para pasar de  $v$  a  $v'$  hay que girar un ángulo  $\alpha$  *en sentido positivo*, mientras que para pasar de  $v$  a  $v''$  hay que girar un ángulo  $\alpha$  *en sentido negativo*. Esto se ve porque la base  $v, v'$  está positivamente orientada (ya que  $v'$  está a la izquierda de  $v$ ), mientras que  $v, v''$  está negativamente orientada, luego el giro que lleva de  $v$  a  $v'$  es el de matriz  $M_\alpha$ , y el que lleva de  $v$  a  $v''$  es el de matriz  $M_{-\alpha}$ .

A su vez, si tenemos dos rectas distintas con vectores directores  $v_1$  y  $v_2$ , cambiando el signo a uno de ellos si es preciso, podemos suponer que la base  $v_1, v_2$  está positivamente orientada (notemos que, en general, las bases  $v_1, v_2$  y  $v_1, -v_2$  tienen orientaciones opuestas), y entonces  $\alpha = \widehat{v_1, v_2}$  es el ángulo que hay que girar en sentido positivo para transformar la recta de vector director  $v_1$  en la de vector director  $v_2$  (no al revés), luego es el ángulo dirigido entre ambas rectas definido en 3.28. En otras palabras:

*El ángulo dirigido que forman dos rectas  $l_1$  y  $l_2$  es el ángulo que forman dos cualesquiera de sus vectores directores  $v_1, v_2$  elegidos con la condición de que la base  $v_1, v_2$  esté positivamente orientada (o es 0 si las rectas son paralelas o coincidentes).*

**Orientación de triángulos** Ahora podemos definir un triángulo  $\widehat{ABC}$  *positivamente orientado* como un triángulo tal que la base  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  esté positivamente orientada, es decir, que el giro de menor amplitud que transforma  $\overrightarrow{AB}$  en  $\overrightarrow{AC}$  es el de sentido positivo.

Por ejemplo, el triángulo  $\widehat{ABC}$  de la figura siguiente está positivamente orientado, mientras que  $\widehat{ACB}$  o  $\widehat{A'B'C'}$  están negativamente orientados:



La definición depende del orden en que consideramos los vértices, pero es simétrica en el sentido de que

$$\widehat{ABC}, \widehat{BCA}, \widehat{CAB}$$

tienen la misma orientación, mientras que

$$\widehat{ACB}, \widehat{BAC}, \widehat{CBA}$$

tienen la orientación opuesta.

En efecto, es fácil ver que la orientación de un triángulo  $\widehat{ABC}$  corresponde al signo de la expresión

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}.$$

# Índice de Materias

- acutángulo (triángulo), 27
- adyacentes (ángulos), 21
- agudo (ángulo), 22
- alineados (puntos), 11
- amplitud, 17
- ángulo, 14
  - agudo, 22
  - cóncavo/convexo, 14
  - completo, 14
  - de incidencia, 372
  - dirigido, 133
  - inscrito, 30
  - llano, 14
  - nulo, 14
  - obtuso, 22
  - recto, 22
  - semiinscrito, 42
- antisimilitud (circunferencia de), 219
- Apolonio
  - circunferencia de, 253
  - problema de la persecución de, 252
- Apolonio (circunferencia de), 258
- apotema, 112
- arbelo, 234
- arco, 7
  - capaz, 32
- asíntota, 350
- áureo
  - número, 89
  - rectángulo, 89
  - triángulo, 91
- baricentro, 149
- base, 399
  - orientada, 401
- bisectriz, 35
- Brahmagupta (fórmula de), 125
- Bretschneider (fórmula de), 124
- cónica, 307
- catetos, 27
- centro
  - de similitud, 130
  - de una cónica, 311
  - de una circunferencia, 7
  - de una esfera, 369
  - de una homotecia, 127
  - isogónico
    - primero, 175
    - segundo, 178
  - radical, 210
- ceviana, 181
- circular (transformación), 274
- círculo, 7
- círculo ortocentroidal, 268
- circuncentro, 141
- circunferencia, 7
  - circunscrita, 37
  - de antisimilitud, 219
  - de Apolonio, 253
    - de un triángulo, 258
  - de Arquímedes, 236
  - de los nueve puntos, 152
  - excrita, 146
  - focal, 328
  - graduada, 51
  - inscrita, 142
  - principal, 324
  - tritangente, 146
- circunradio, 83, 141
- circunscrita (circunferencia), 37
- coaxial (sistema), 245, 247
- conjugada (hipérbola), 358

- conjugado
  - diámetro, 327, 357
  - isogonal, 188
  - isotómico, 191
  - sistema coaxial, 249
- cono, xxxi
- constructible
  - con regla marcada y compás, 300
  - con regla y compás, 288
- continuidad (principio de), 57
- coseno, 102
- cuadratriz de Dinóstrato, 306
- cuerda, 326
- diámetro, 7
  - de una elipse, 326
  - de una parábola, 334
- directriz, 307
- distancia focal, 312
- Durero (aproximación del heptágono), 116
- ecuación de una recta
  - general, 389
  - normal, 389
  - vectorial, 387
- eje
  - de Brocard, 259
  - de Lemoine, 259
  - de una cónica, 308
    - mayor/menor, 311
  - radical, 208
- elipse, 307
- equiángulo (polígono), 37
- equilátero
  - polígono, 37
  - triángulo, 13
- escaleno
  - trapecio, 37
  - triángulo, 13
- esfera, 369
  - de Dandelin, 373
- espiral de Teodoro, 81
- Euler (recta de), 151
- excentricidad, 307
- excentro, 146
- extradio, 146
- Fermat (punto de), 175, 178
- foco, 307
- generatriz, xxxi
- Gergonne (triángulo de, punto de), 163
- giro, 402
- grado sexagesimal, 53
- Herón (fórmula de), 82
- hipérbola, 307
  - equilátera, 357
- hipotenusa, 27
- homotecia, 127
- incentro, 142
- inradio, 142
- inscrita (circunferencia), 142
- inscrito (ángulo), 30
- inversión, 214
- isósceles
  - trapecio, 37
  - triángulo, 13
- isodinámicos (puntos), 259
- isometría, 392
- lado, 14
  - de un ángulo, 14
  - de un triángulo, 11
- latus rectum, 316
- longitud, 6
  - dirigida, 126
  - nula, 8
- lúnula, xxi
- medial (triángulo), 149
- mediatriz, 24
- medida
  - de un ángulo, 66
  - de un segmento, 63
- Miquel (punto de, circunferencia de), 164
- Möbius (transformación de), 274
- neusis, 99

- obtusángulo (triángulo), 27
- obtuso (ángulo), 22
- opuestos por el vértice (ángulos), 21
- orientación, 49
- órtico (triángulo), 146
- ortocéntrico (sistema), 156
- ortocentro, 146
- ortogonales (circunferencias), 211
  
- parábola, 307
- paralaje, 120
- paralelas (rectas), 25
- paralelogramo, 33
- parámetro (de una parábola), 331
- pedal
  - circunferencia, 264
  - triángulo, 167
- perímetro, 112
- perpendiculares (rectas), 22
- pie, 23
- plano, 368
- polar (recta), 224
- poligonal, 36
- polígono, 36
  - cíclico, 37
  - convexo, 37
  - regular, 37
- polo, 224
- potencia, 205
- producto escalar, 385
- punto, 2
  - de Fermat, 175, 178
  - de Gergonne, 163
  - de Miquel, 164
  - homotético, 127
  - interior/exterior a una cónica, 309
  - límite, 246
  - simétrico, 24
  - simediano, 161
  
- radio, 7
- razón
  - de una semejanza, 272
- razón (de una homotecia), 127
- rectángulo (triángulo), 27
  
- recta, 2
  - de centros, 245
  - de Euler, 151
  - graduada, 49
  - polar, 224
  - tangente, 314
- recto (ángulo), 22
- regular (polígono), 37
- resta
  - de ángulos, 19
  - de longitudes, 8
- rombo, 37
- romboide, 37
  
- secante, 25, 40
- segmento, 3
- semejantes (triángulos), 69
- semejanza, 272
- semiamplidut, xxxi
- semieje, 312
- semiespacio, 368
- semiinscrita (ángulo), 42
- semiplano, 3
- semirrecta, 3
- seno, 102
- simediana, 158
- simetría axial, 25
- simétrico (punto), 24
- Simson (recta de), 167
- sistema de referencia, 381
  - canónico, 320
- suma
  - de ángulos, 18
  - de longitudes, 8
- suplementarios (ángulos), 21
  
- Tales (posición de), 70
- tangencial (triángulo), 155
- tangente, 40, 102, 314
- Teorema
  - de Apolonio, 109
  - de Casey, 210
  - de Ceva, 181
  - de Desargues, 195
  - de Feuerbach, 267
  - de Kosnita, 241

- de la potencia, 206
- de los senos, 106
- de Menelao, 179
- de Miquel, 163
- de Napoleón, 176
- de Pascal, 190
- de Pitágoras, 72, 80
- de Ptolomeo, 85
- de Simson, 167
- de Stewart, 109
- de Tales, 70, 79
- de Viviani, 85
- del área de Pappus, 81
- del coseno, 105
- trapecio, 37
- traslación, 392
- triángulo, 11
  - acutángulo, rectángulo, obtusángulo, 27
  - de Gergonne, 163
  - equilátero, isósceles, escaleno, 13
  - medial, 149
  - órtico, 146
  - pedal, 167
  - tangencial, 155
- trisectriz de Hipias, 304
- vértice
  - de un ángulo, 14
  - de un cono, xxxi
  - de un triángulo, 11
  - de una cónica, 310, 312
  - de una poligonal, 36