

Carlos Ivorra Castillo

**TOPOLOGÍA
ALGEBRAICA**

*Si simplemente hace girar la rueda, es álgebra; pero
si contiene una idea, es topología.*

SOLOMON LEFSCHETZ

Índice General

Introducción	ix
1 Topología	1
Capítulo I: Preliminares de topología conjuntista	3
1.1 Convexidad	3
1.2 Espacios normales	8
1.3 Espacios paracompactos	12
1.4 Variedades topológicas	15
1.5 Homotopías	21
1.6 Retractos absolutos de entornos	28
1.7 Espacios cociente	31
1.8 Cubrimientos	45
Capítulo II: El teorema de la esfera peluda y sus consecuencias	55
2.1 El teorema de la esfera peluda	55
2.2 El teorema del punto fijo de Brouwer	57
2.3 El teorema de la curva de Jordan	59
2.4 La invarianza de los dominios	71
2.5 El teorema de Borsuk-Ulam	74
2.6 El teorema de Schoenflies	77
2.7 Nudos	82
2.8 Triangulaciones	85
Capítulo III: Grafos, deltaedros y complejos celulares	93
3.1 Grafos	93
3.2 Deltaedros	104
3.3 La clasificación de las superficies compactas	119
3.4 Complejos celulares	128

2	Álgebra	139
	Capítulo IV: Homología de complejos	141
4.1	Categorías	141
4.2	Complejos	147
4.3	Complementos	153
4.4	Límites inductivos	158
	Capítulo V: Módulos y haces de módulos	163
5.1	Módulos inyectivos y proyectivos	163
5.2	Productos tensoriales	171
5.3	Haces	181
5.4	Funtores exactos	191
	Capítulo VI: Funtores derivados	199
6.1	Complejos	199
6.2	Resoluciones inyectivas y proyectivas	203
6.3	La construcción de los funtores derivados	209
6.4	Caracterización axiomática	216
	Capítulo VII: Ejemplos de funtores derivados	221
7.1	Productos de torsión	221
7.2	La homología de los productos tensoriales	228
7.3	Módulos de extensiones	234
7.4	Cohomología de haces de módulos	243
7.5	Álgebras de cohomología	252
3	Topología Algebraica	263
	Capítulo VIII: El grupo fundamental	265
8.1	Construcción del grupo fundamental	265
8.2	Cubrimientos	270
8.3	El teorema del giro de la tangente	281
8.4	El teorema de Steifert-van Kampen	288
8.5	El grupo de los nudos toroidales	304
8.6	La esfera cornuda de Alexander	309
	Capítulo IX: Homología singular	323
9.1	Símplices afines	323
9.2	Complejos de cadenas singulares	326
9.3	Grupos de homología	331
9.4	El teorema de homotopía	337
9.5	La sucesión exacta de homología	341
9.6	El teorema de escisión	344
9.7	La sucesión de Mayer-Vietoris	357
9.8	El teorema de los modelos acíclicos	361

Capítulo X: Aplicaciones de la homología singular	365
10.1 La homología de las esferas	365
10.2 El teorema de la esfera peluda, etc.	368
10.3 La homología de las superficies compactas	375
10.4 La homología de los complejos celulares	378
10.5 Los números de Betti y la característica de Euler	392
10.6 Relación con el grupo fundamental	396
10.7 Orientación de variedades	399
10.8 La variedad de orientaciones	408
Capítulo XI: Cohomología	423
11.1 La cohomología de De Rham	423
11.2 La cohomología de De Rham con soportes compactos	429
11.3 Homología con coeficientes en un módulo	436
11.4 Cohomología singular	439
11.5 La cohomología de Alexander-Spanier	445
11.6 Inmersiones tensas	451
11.7 Cohomología con soportes compactos	455
11.8 El teorema de homotopía en la cohomología de Alexander-Spanier	463
Capítulo XII: Homología y cohomología	473
12.1 Cambio de coeficientes en homología	473
12.2 La homología de un producto	483
12.3 Homología y cohomología singular	485
12.4 El producto exterior	487
12.5 Ejemplos de álgebras de cohomología	499
12.6 La dualidad de Poincaré	510
12.7 La dualidad de Alexander	520
Capítulo XIII: Cohomologías en espacios paracompactos	525
13.1 La cohomología singular	525
13.2 La cohomología de Alexander-Spanier	530
13.3 El teorema de De Rham	534
13.4 La estructura multiplicativa	543
Bibliografía	547
Índice de Materias	548

Introducción

En 1854 Bernhard Riemann presentó su “Lección inaugural” en la universidad de Gotinga, necesaria para optar a una plaza de *Privatdozent*, es decir, de profesor sin sueldo (que cobraba directamente una cuota a los alumnos que quisieran asistir a sus clases). El título fue *Sobre las hipótesis en que se basa la geometría*, en la que introdujo los conceptos básicos de la geometría diferencial moderna y presentó ideas muy profundas sobre la geometría en “variedades” arbitrarias. Fue Riemann quien acuñó este término que generalizaba la noción de superficie contenida en \mathbb{R}^3 a otro más general con dos características fundamentales: que permitía un número arbitrario de dimensiones y que no requería que las variedades estuvieran sumergidas en un espacio \mathbb{R}^n . Esto permitía tratar matemáticamente con geometrías de dimensiones arbitrarias y, sobre todo, con geometrías no euclídeas, cuyo valor matemático estaba entonces puesto en entredicho.

Las ideas novedosas introducidas por Riemann, aunque sin duda eran muy profundas, estaban expresadas en términos muy rudimentarios desde el punto de vista moderno, y fueron muchos los matemáticos que con posterioridad contribuyeron a precisarlas y a encontrar el marco teórico adecuado para expresarlas con el rigor necesario. Esto llevó, por una parte, al desarrollo de la geometría diferencial moderna y, por otra, al nacimiento de la topología general.

Aunque, naturalmente, contaba con ciertos precedentes, el nacimiento de la topología puede asociarse a la publicación en 1895 del artículo titulado *Analysis Situs* (análisis del lugar o análisis local) de Henri Poincaré. En él Poincaré trabajaba con variedades diferenciales en el sentido de Riemann, pero introdujo, por ejemplo, la noción de *homeomorfismo* entre variedades, así como dos de los conceptos básicos de lo que hoy se conoce como *topología algebraica*: los grupos de homología y el grupo fundamental.

La topología no tardó en desligarse de la geometría diferencial: en 1906 Maurice Fréchet introdujo la noción de “espacio métrico”, en 1914 fue Felix Hausdorff quien acuñó el término “espacio topológico”, si bien con él se refería a lo que actualmente llamamos un “espacio de Hausdorff”, mientras que la noción general de espacio topológico fue introducida en 1922 por Kazimierz Kuratowski. La topología se diferenció así de la geometría diferencial en cuanto que estudiaba conceptos que podían definirse exclusivamente a partir de una estructura de espacio topológico (o de espacio métrico), suficiente para hablar de funciones continuas y homeomorfismos, pero sin necesidad de una estructura diferencial necesaria para hablar de diferenciabilidad de funciones.

Éste era el caso de los grupos de homología y el grupo fundamental introducidos por Poincaré. Son invariantes topológicos que pueden asociarse a cualquier espacio topológico, de modo que si dos espacios topológicos son homeomorfos, entonces sus grupos de homología y su grupo fundamental son isomorfos.

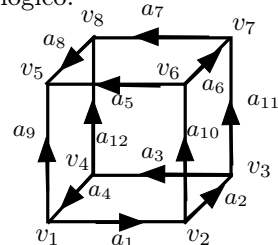
Esto permite obtener resultados negativos que, de otro modo, serían prácticamente inabordables. Por ejemplo, para probar que dos espacios topológicos son homeomorfos basta construir un homeomorfismo entre ellos, lo cual es comparativamente mucho más fácil que demostrar que dos espacios topológicos dados no son homeomorfos, pues ello supone demostrar de algún modo que no hay ninguna posibilidad de establecer un homeomorfismo entre ellos. La forma habitual de hacerlo es probando que uno de los espacios cumple alguna propiedad topológica —es decir, invariante por homeomorfismos— que el otro no cumple. Así, por ejemplo, podemos asegurar que \mathbb{R}^n no es homeomorfo a la esfera S^n porque \mathbb{R}^n no es compacto, y la esfera sí que lo es, o que \mathbb{R} no es homeomorfo a \mathbb{R}^2 porque \mathbb{R} se vuelve desconexo al quitarle un punto y \mathbb{R}^2 no.

Sin embargo, los argumentos de este tipo, basados únicamente en la topología conjuntista, no permiten llegar demasiado lejos, y así, no es fácil probar en general que \mathbb{R}^n no es homeomorfo a \mathbb{R}^m cuando $n \neq m$, o que la esfera S^n no es homeomorfa a S^m . Hemos empleado la expresión “topología conjuntista” por oposición a la “topología algebraica”, que es el contenido de este libro.

La topología algebraica permite asignar a cada espacio topológico invariantes topológicos de naturaleza algebraica (grupos, módulos, álgebras) que permiten analizar en profundidad los espacios topológicos que aparecen en geometría, tanto en geometría diferencial como en geometría algebraica, y en aquellas ramas del análisis directamente relacionadas con la geometría, como el cálculo diferencial e integral en variedades, o la teoría de funciones de variable compleja y —especialmente dentro de ésta— en la teoría de las superficies de Riemann. Además, sus resultados algebraicos subyacentes pueden desarrollarse en un contexto abstracto, puramente algebraico, con aplicaciones a la teoría de grupos y a la teoría de números. Su potencia radica principalmente en que sus conceptos son esencialmente globales, es decir, que dependen de la totalidad del espacio que los determina, al contrario de lo que sucede con la mayoría de los conceptos del cálculo diferencial, que son de naturaleza local.

La homología de la esfera Como esto que estamos diciendo serán palabras huecas para el lector que no tenga una cierta idea de en qué consiste la topología algebraica, vamos a presentar a grandes rasgos un par de ejemplos concretos de lo que son los grupos de homología de un espacio topológico.

Consideramos, concretamente, el caso de una esfera. Para estudiarla mediante técnicas algebraicas podemos identificarla con la superficie de un cubo. Ésta a su vez la podemos considerar descompuesta en ocho vértices, doce aristas y seis caras, tal y como muestra la figura. Es importante que las aristas y las caras las hemos de considerar orientadas. En el caso de las aristas, esto significa que hemos de determinar un extremo inicial y un extremo



final. En la figura hemos indicado mediante flechas la orientación de cada arista. La orientación de una cara es un sentido de giro. Por ejemplo, podemos establecer que el sentido positivo en una cara será el sentido antihorario cuando la vemos de frente desde fuera del cubo.

Si S es el cubo, llamaremos $C_0(S)$ al grupo abeliano libre generado por sus vértices, y a sus elementos los llamaremos *cadena*s de dimensión 0. Así pues, una cadena de dimensión 0 de S es una expresión algebraica de la forma

$$n_1v_1 + n_2v_2 + n_3v_3 + n_4v_4 + n_5v_5 + n_6v_6 + n_7v_7 + n_8v_8, \quad n_i \in \mathbb{Z}.$$

Similarmente, definimos el grupo de las cadenas de dimensión 1 como el grupo abeliano libre $C_1(S)$ generado por las aristas de S . Debemos pensar que la cadena $-a_1$ representa la misma arista que a_1 pero recorrida al revés, de modo que su origen es el vértice v_2 y su extremo es v_1 . La cadena $-a_1 + a_9 - a_8$ representa el “camino” que parte de v_2 , pasa por v_1 , luego por v_5 y acaba en v_8 . La cadena $2a_1 + 2a_{10} - 2a_5 - 2a_9$ representa dos vueltas en sentido antihorario alrededor de la cara frontal de la figura. Similarmente, definimos el grupo $C_2(S)$ de las cadenas de dimensión 2, generado por las seis caras, digamos c_1, \dots, c_6 .

Definimos la frontera de una arista como la diferencia de sus extremos. Por ejemplo, $\partial_1 a_1 = v_2 - v_1 \in C_0(S)$. El operador frontera se define extendiendo por linealidad esta definición sobre todo el grupo $C_1(S)$. Tenemos así un homomorfismo $\partial_1 : C_1(S) \rightarrow C_0(S)$.

Similarmente, la frontera de una cara c se define como la cadena formada por las aristas de su contorno con los signos necesarios para que el recorrido se haga según la orientación fijada en c . Por ejemplo, si convenimos que c_1 es la cara central de la figura, cuya orientación hemos establecido como el giro antihorario, entonces

$$\partial_2 c_1 = a_1 + a_{10} + a_5 - a_9.$$

Extendiendo esta definición por linealidad obtenemos un homomorfismo de grupos $\partial_2 : C_2(S) \rightarrow C_1(S)$. Por completitud definimos

$$\partial_0 : C_0(S) \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad \partial_3 : 0 \rightarrow C_2(S)$$

como los homomorfismos nulos. Es inmediato comprobar que $\partial_i \circ \partial_{i-1} = 0$. En efecto, si c es una cadena de dimensión 1, la condición $\partial_1 c = 0$ significa que los extremos de sus aristas componentes se cancelan mutuamente, lo que sólo puede ocurrir si la cadena consta de uno o varios circuitos cerrados, como le ocurre, por ejemplo, a $\partial_2 c_1$:

$$\partial_1(\partial_2 c_1) = \partial_1 a_1 + \partial_1 a_{10} + \partial_1 a_5 - \partial_1 a_9 = v_2 - v_1 + v_6 - v_2 + v_5 - v_6 - v_5 - v_1 = 0$$

Lo mismo vale para las fronteras de las caras restantes (no por casualidad, sino por la propia definición de frontera de una cara), luego ciertamente tenemos que $\partial_2 \circ \partial_1 = 0$, y éste era el único caso no trivial. Definimos el grupo de los *ciclos* de dimensión p como

$$Z_p(S) = \{c \in C_p(S) \mid \partial_p c = 0\}.$$

Así, $Z_0(S) = C_0(S)$, mientras que $Z_1(S)$ es, como ya hemos señalado, el grupo formado por las cadenas que describen circuitos cerrados. No es difícil probar que

$$Z_2(S) = \langle c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 \rangle.$$

En efecto, ante todo, $z = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6$ es un ciclo, pues al calcular su frontera cada arista aparece dos veces con signos opuestos. Por ejemplo, la arista a_{10} aparece con signo positivo en la frontera de la cara frontal de la figura y con signo negativo en la frontera de la cara de la derecha (recordemos que el signo ha de ser el necesario para que el recorrido de cada frontera se haga en sentido antihorario). Por otra parte, si $z' \in Z_2(S)$ y c_1 aparece con coeficiente $n \neq 0$ en z' , entonces ∂c_1 aporta a $\partial z'$ un sumando na_{10} , que debe ser cancelado con otro término, pero sólo la cara derecha puede aportar otro término en a_{10} , luego el coeficiente de dicha cara ha de ser también n , y así sucesivamente llegamos a que todas las caras deben aparecer con coeficiente n , luego $z' = nz$.

Por otra parte, definimos el grupo de las *fronteras* de dimensión p como

$$F_p(S) = \{\partial_{p+1}c \mid c \in C_{p+1}(S)\}.$$

La propiedad $\partial_{p+1} \circ \partial_p = 0$ hace que $F_p(S) \leq Z_p(S)$, es decir, toda frontera es un ciclo. Recíprocamente, todo 1-ciclo es una frontera. Para entender por qué es así, pensemos por ejemplo en el ciclo

$$z = a_1 + a_{10} + a_6 + a_7 + a_8 - a_9.$$

Vemos que z divide al cubo en dos regiones, una contiene a la cara frontal y a la cara superior del cubo. Llamemos C_1 a la suma de estas dos caras y C_2 a la suma de las caras restantes, es decir, las contenidas en la otra región. Es fácil ver entonces que $\partial_2 C_1 = -\partial_2 C_2 = z$ (la clave está en que las aristas interiores de cada región se cancelan mutuamente al calcular la frontera). En general, todo ciclo es la suma de varios circuitos cerrados de aristas, cada uno de los cuales divide al cubo en dos regiones, de modo que la suma de las caras contenidas en una de ellas es una cadena cuya frontera es, salvo el signo, el ciclo considerado.

Así pues, el hecho de que todo 1-ciclo sea una 1-frontera está íntimamente relacionado con una propiedad peculiar de las esferas, a saber, que todo circuito cerrado las divide en dos componentes conexas, cada una de las cuales tiene por frontera al circuito dado. Esto se conoce como teorema de Jordan.

Se define el *grupo de homología* de dimensión p como

$$H_p(S) = Z_p(S)/F_p(S).$$

Estos grupos son los invariantes principales que vamos a estudiar. Se dice que dos ciclos son *homólogos* si se diferencian en una frontera, de modo que los elementos de $H_p(S)$ son las clases de equivalencia de ciclos homólogos, o clases de homología, de dimensión p .

Acabamos de observar que $H_1(S) = 0$. Veamos ahora que $H_0(S) \cong \mathbb{Z}$. En efecto, un vértice sólo no es una frontera, pero si $v_i \neq v_j$ entonces $v_i - v_j$ es la

frontera de cualquier 1-cadena que una v_j con v_i . Esto hace que dos vértices cualesquiera sean homólogos entre sí, por lo que todos generan la misma clase de homología $[v_i]$, la cual es un generador de $H_0(S)$. Es fácil ver que su orden es infinito.

Vemos, pues, que la estructura del grupo $H_0(S)$ está relacionada con la conexión de S . En general, si dividimos un espacio topológico de forma similar a como hemos hecho con la esfera, dos vértices son homólogos si y sólo si pueden ser unidos por un camino de aristas. Para un espacio topológico X , se cumple que $H_0(X) \cong \mathbb{Z}^r$, donde r es el número de componentes arcoconexas de X .

Por último, puesto que, por definición, $F_2(S) = 0$, tenemos que $H_2(S) \cong \mathbb{Z}$. Este hecho refleja también una propiedad topológica de la esfera: veremos (teorema 10.52) que una variedad topológica compacta y conexa V de dimensión n es orientable si y sólo si cumple $H_n(V) \cong \mathbb{Z}$, y en caso contrario $H_n(V) = 0$.

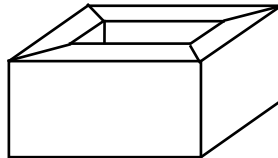
Todos estos razonamientos presuponen un hecho nada trivial, y es que los grupos de homología dependen únicamente del espacio topológico considerado, en este caso la esfera, y no de la división en celdas que hemos seleccionado. Por ejemplo, podríamos identificar la esfera con un dodecaedro y definir los correspondientes grupos de homología. El resultado sería el mismo. Más aún, no hay inconveniente en considerar casos “degenerados” mucho más simples para hacer los cálculos. Por ejemplo, hubiera bastado considerar un único vértice v (un punto cualquiera), ninguna arista y una única cara c , formada por todos los puntos de la esfera menos v . Entonces la situación sería $C_2(S) = \langle c \rangle$, $C_1(S) = 0$, $C_0(S) = \langle v \rangle$. Los operadores frontera serían todos nulos, con lo que

$$Z_2(S) = \langle c \rangle, \quad Z_1(S) = 0, \quad Z_0(S) = \langle v \rangle,$$

y al dividir entre los grupos de fronteras (nulos) llegamos igualmente a que

$$H_2(S) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(S) = 0, \quad H_0(S) \cong \mathbb{Z}.$$

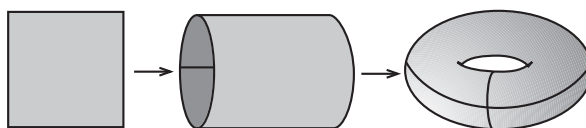
Por otra parte, podemos considerar la homología de un toro dividiéndolo como indica la figura:



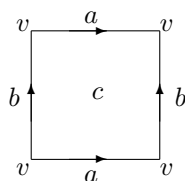
El lector puede estimar lo complicado que sería entrar en detalles. La topología algebraica nos proporciona técnicas para calcular grupos de homología sin caer en cálculos prolijos. No obstante, observemos que en un toro hay 1-ciclos que no son fronteras. Por ejemplo, el cuadrado exterior de la parte superior de la figura. Si buscamos una cadena que lo tenga por frontera podríamos considerar la suma de las cuatro caras trapezoidales superiores, pero su frontera

no es sólo el cuadrado que queremos, sino también el cuadrado interior. Para eliminar éste podríamos añadir los cuatro rectángulos interiores (debidamente orientados), pero entonces la frontera contiene también al cuadrado interior inferior (que no se ve en la figura), para eliminarlo podemos añadir las caras trapezoidales inferiores, etc., pero siguiendo así llegamos a la cadena formada por todas las caras (debidamente orientadas) y su frontera no es el cuadrado que perseguimos, sino que es nula.

No obstante, podemos calcular fácilmente la homología del toro usando una descomposición degenerada. La describiremos mejor si trabajamos con un “mapa” del toro. Un toro puede obtenerse a partir de un cuadrado identificando sus lados opuestos como indica la figura:



Al pegar dos de los lados obtenemos un cilindro y al pegar los dos lados restantes obtenemos el toro. Esto se traduce en que podemos pensar que un cuadrado es un toro si convenimos en que el lado superior es el mismo que el inferior y que el lado izquierdo es el mismo que el derecho. Notemos que los cuatro vértices corresponden al mismo punto del toro. Según esto, una descomposición degenerada es la indicada en la figura:



Cumple los únicos requisitos necesarios: que las aristas sean homeomorfas a segmentos abiertos y las caras a discos abiertos (notemos que a es una circunferencia, pero la arista propiamente dicha no incluye a v , luego es homeomorfa a un segmento, y lo mismo vale para b).

De este modo, $\partial c = a + b - a - b = 0$, luego c es un ciclo, como también lo son a y b . Ahora es fácil ver que, si llamamos T al toro,

$$H_2(T) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(T) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad H_0(T) \cong \mathbb{Z}.$$

En particular esto prueba que una esfera no es homeomorfa a un toro.

En el capítulo IX definiremos en general los grupos de homología de un espacio topológico X , pero debemos advertir al lector de que la definición general no coincidirá con la que aquí hemos usado, aunque en la sección 10.4 veremos que —sobre una amplia clase de espacios compactos— es equivalente. La razón para esta discrepancia es —entre otras— que así la definición general no dependerá de la existencia de descomposiciones “celulares” de un espacio dado en vértices, aristas, caras, etc. Anticipamos las diferencias para no desconcertar al lector:

1. Los coeficientes de las cadenas no serán necesariamente enteros, sino que admitiremos que varíen en un anillo arbitrario \mathbb{A} . De este modo recogemos —entre otros casos de interés— el caso $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$, que es el más natural en muchas ocasiones, el caso $\mathbb{A} = \mathbb{R}$, que aparece en geometría diferencial y el caso $\mathbb{A} = \mathbb{C}$, más adecuado en el análisis complejo. Por lo tanto, los grupos de homología serán en realidad \mathbb{A} -módulos, o espacios vectoriales si \mathbb{A} es un cuerpo.
2. En lugar de considerar “caras” de forma arbitraria consideraremos únicamente el caso más simple, por ejemplo, en dimensión 2 trabajaremos con triángulos. Además admitiremos triángulos singulares, es decir, imágenes continuas (en un espacio X) de triángulos en \mathbb{R}^2 , no necesariamente inyectivas.
3. No trabajaremos con caras incluidas en una descomposición particular de un espacio topológico, sino que, por ejemplo, el grupo de las 2-cadenas será el \mathbb{A} -módulo libre generado por todos los triángulos singulares en X .

Con esto será inmediato desde el principio que los grupos de homología de un espacio topológico son invariantes topológicos, ya que no usaremos ninguna descomposición en celdas en particular para definirlos.

Panorámica de resultados No quisiéramos dejar al lector con la falsa impresión de que la topología algebraica se limita a proporcionar invariantes que permiten diferenciar a unos espacios topológicos de otros. Por el contrario, con sus técnicas es posible demostrar muchos resultados topológicos profundos de naturaleza muy distinta a que tal espacio no es homeomorfo a tal otro. Enumeramos aquí algunos de los que vamos a obtener para que el lector se pueda hacer una idea aproximada del alcance de esta disciplina. No reproducimos los enunciados de algunos de ellos porque el lector puede consultarlos directamente. Ninguno de ellos hace referencia a conceptos de la topología algebraica, por lo que pueden entenderse sin necesidad de haber leído nada de este libro (a lo sumo, los comentarios precedentes al enunciado en algún caso).

1. \mathbb{R}^n no es homeomorfo a \mathbb{R}^m si $m \neq n$ (teorema 2.11 o 10.9)
2. El teorema del punto fijo de Brouwer 2.4.
3. El teorema de la esfera peluda 2.2 o, en general, 2.3.
4. El teorema de la curva de Jordan 2.7 o, más en general, el teorema de Jordan-Brouwer 10.10.
5. El teorema de invarianza de los dominios 2.9.
6. El teorema de Borsuk-Ulam 2.13.
7. El teorema del bocadillo de jamón 2.15.

8. Las superficies no orientables como el plano proyectivo $P^2(\mathbb{R})$ o la botella de Klein no son sumergibles en \mathbb{R}^3 (teorema 12.36).
9. El teorema general de separación 13.7.
10. El teorema de Jordan generalizado 13.8.

A éstos hay que añadir resultados que relacionan la topología algebraica con la geometría diferencial, como el teorema de De Rham 13.15, según el cual, los grupos de cohomología de De Rham, que pueden definirse en una variedad diferencial en términos de formas diferenciales, son en realidad invariantes topológicos.

Cómo leer este libro Este libro supone al lector familiarizado con el álgebra, la topología conjuntista y el análisis matemático, y usará libremente los resultados contenidos en mis libros de Álgebra [Al], Análisis matemático [An] y Teoría de Grupos [TG]. Ocasionalmente también se usarán resultados de mi libro de Geometría [G] o del de Introducción a la teoría analítica de números [ITAn]. El único resultado que usaremos de forma esencial sin demostración será el teorema de Schoenflies 2.18, para cuya prueba remitimos a mi libro de Funciones de variable compleja [VC], al que haremos referencia en alguna otra ocasión al tratar algunos ejemplos aislados. Por último, este libro está débilmente entrelazado con mi libro de Geometría diferencial [GD], en el sentido de que usa algunos resultados presentados en él y viceversa. Si el lector está dispuesto a omitir todos los resultados de este libro que hacen referencia a variedades diferenciales, entonces no requerirá ningún conocimiento de [GD] salvo algunos pocos hechos básicos presentados en su primer capítulo.

Este libro está dividido en tres partes. En la primera se presentan resultados puramente topológicos que no requieren de técnicas algebraicas, pero que a menudo conducen a resultados que sí que las requieren y cuya prueba dejamos pendiente hasta la tercera parte. Esto permite al lector familiarizarse con la parte topológica de muchos resultados sin necesidad de esperar a disponer de las técnicas algebraicas necesarias para demostrarlos a la vez que sirve de motivación para éstas. Además así queda claro cuál es exactamente la contribución de las técnicas algebraicas.

La segunda parte contiene todos los preliminares puramente algebraicos que vamos a necesitar en la tercera, en la que exponemos la topología algebraica propiamente dicha. Aunque, por supuesto, es posible leer los capítulos ordenadamente, no es lo más aconsejable, ya que ello supone asimilar “a ciegas” una ingente cantidad de conceptos, técnicas y resultados algebraicos sin tener una idea clara de cuál es su finalidad y su interés. Por el contrario, aunque hemos optado por separar de este modo la parte algebraica para que quede claro cuál es la contribución del álgebra a cada resultado de la topología algebraica, consideramos mucho más recomendable una lectura simultánea de la segunda y la tercera parte y los contenidos han sido estructurados para facilitar esta vía.

Así, por ejemplo, el capítulo VIII en el que presentamos el grupo fundamental no requiere de ningún resultado de la segunda parte, y puede ser leído justo a

continuación del capítulo III. La tabla siguiente resume una propuesta de lectura simultánea:

GEOMETRÍA DIFERENCIAL	TOPOLOGÍA ALGEBRAICA	
I II III	TOPOLOGÍA I II III	
IV	CATEGORÍAS 4.1	GRUPO FUNDAMENTAL VIII
V	COMPLEJOS 4.2	HOMOLOGÍA SINGULAR IX X
GEOMETRÍA RIEMANNIANA	TEORÍA DE MÓDULOS 5.1 5.2	
VI	COHOMOLOGÍA XI	
VII	TEORÍA DE FUNTORES DERIVADOS 5.3 5.4 VI	
VIII	EJEMPLOS DE FUNTORES DERIVADOS (MÓDULOS) 7.1 7.2 7.3	HOMOLOGÍA Y COHOMOLOGÍA XII
TOPOLOGÍA DIFERENCIAL	EJEMPLOS DE FUNTORES DERIVADOS (HACES)	COMPARACIÓN DE COHOMOLOGÍAS XIII
IX X	7.4 7.5	

Con más detalle, la propuesta es:

1. Leer la parte de topología.
2. Leer la primera sección del capítulo IV como introducción al lenguaje de la teoría de categorías, que se va a usar frecuentemente.
3. Item pasar al capítulo 8 en el que se presenta el grupo fundamental. La sección 4.1 no es necesaria para leer este capítulo, pero, sí aconsejable de cara a que el lector se acostumbre cuanto antes a reconocer conceptos categóricos allí donde aparecen.
4. Pasar al capítulo IX simultaneando su lectura con la segunda sección del capítulo IV a medida que sus contenidos vayan siendo requeridos. Esta sección contiene todos los preliminares algebraicos necesarios para seguir los tres capítulos siguientes de la parte de topología algebraica (desde el capítulo IX hasta el capítulo X inclusive).

5. Leer las dos primeras secciones del capítulo V como preliminares algebraicos adicionales para la lectura del capítulo XI. Las secciones restantes del capítulo IV pueden ir consultándose a medida que sean requeridas.
6. Completar la lectura del capítulo V y seguir con el capítulo VI como preliminares algebraicos adicionales.
7. Leer las tres primeras secciones del capítulo VII siguiendo las indicaciones que se dan en el texto sobre cómo simultanear su lectura con la del capítulo XII.
8. Leer la cuarta sección del capítulo VII previamente a la lectura de las tres primeras secciones del capítulo XIII.
9. La sección 7.5 es necesaria para la lectura de la última sección del capítulo XIII.

Si el lector opta por este camino, en el texto irá encontrando indicaciones adicionales sobre secciones cuya lectura puede posponerse.

La primera columna de la tabla precedente contiene también una propuesta de lectura simultánea con [GD]. Para los contenidos de este libro no relacionados con la geometría diferencial es suficiente con leer el capítulo I de [GD] antes del capítulo I del presente libro.¹ Por lo demás, las únicas dependencias esenciales más allá de las referencias frecuentes a los conceptos y resultados básicos de la geometría diferencial expuestos en los capítulos I y II de [GD] son tres:

- En la sección 10.7 introducimos el concepto de orientación de una variedad topológica y, aunque no es formalmente imprescindible, es conveniente que el lector conozca el concepto de orientación de variedades diferenciales presentado en la sección 4.2 de [GD].
- En el capítulo XI relacionamos con la topología algebraica los grupos de cohomología de De Rham definidos en el capítulo VI de [GD] (y hacemos referencia también a resultados de capítulos precedentes).
- Para probar los teoremas 8.18 y 9.42 nos apoyamos en el teorema 1.36, cuya prueba requiere resultados del capítulo VII de [GD], por lo que el lector que esté simultaneando la lectura de ambos libros deberá aceptar provisionalmente 1.36 sin demostración hasta que llegue al capítulo mencionado de [GD], que es el penúltimo.

Además, aunque no se requiere en ningún momento, en la sección 9.5 de [GD] se demuestra la unicidad de la suma conexa de variedades diferenciales, definida aquí en la sección 1.7.

¹La única excepción es el teorema 8.37, cuyo enunciado es puramente topológico, pero en la prueba usamos el teorema [GD 2.20] de existencia de entornos tubulares de subvariedades diferenciales.

Primera parte

Topología

Capítulo I

Preliminares de topología conjuntista

En este primer capítulo recopilamos algunos resultados generales sobre topología conjuntista que van más allá de los contenidos en [An] y que necesitaremos más adelante. Usaremos las notaciones:

$$I = [0, 1], \quad B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}, \quad S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}.$$

En varias ocasiones vamos a necesitar un resultado elemental sobre espacios métricos compactos que, como no encaja en ninguna otra sección, lo presentamos aquí:

Teorema 1.1 (Lema del cubrimiento de Lebesgue) *Dado un cubrimiento abierto en un espacio métrico compacto M , existe un $\epsilon > 0$ tal que todo subconjunto de M de diámetro menor que ϵ está contenido en uno de los abiertos del cubrimiento.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $x \in M$, tomamos una bola abierta $B(x, r_x)$ contenida en un abierto del cubrimiento. Las bolas $B(x, r_x/2)$ forman un cubrimiento de M del que podemos extraer un subcubrimiento finito. Tomamos ϵ igual al mínimo radio de las bolas de este subcubrimiento. Así, si un conjunto A tiene diámetro menor que ϵ , está contenido en una de las bolas $B(x, r_x)$, luego está contenido en uno de los abiertos del cubrimiento. ■

1.1 Convexidad

Recordemos que un subconjunto A de \mathbb{R}^n es *convexo* si contiene al segmento que une a dos cualesquiera de sus puntos, es decir, si cuando $a, b \in A$ y $t \in [0, 1]$, entonces $(1-t)a + tb \in A$. Más en general, se dice que un punto x es *combinación convexa* de a_0, \dots, a_m si es de la forma

$$x = t_0 a_0 + \dots + t_m a_m, \quad t_0 + \dots + t_m = 1, \quad t_i \geq 0.$$

Si A es convexo, entonces A contiene a todas las combinaciones convexas de sus puntos. En efecto, si $t_m = 1$ entonces $x = a_m \in A$, mientras que si $t_m \neq 1$, entonces

$$t_0 a_0 + \cdots + t_m a_m = (1 - t_m) \left(\frac{t_0}{1 - t_m} a_0 + \cdots + \frac{t_{m-1}}{1 - t_m} a_{m-1} \right) + t_m a_m,$$

y basta razonar por inducción sobre m .

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, la *envoltura convexa* de A es el conjunto formado por todas las combinaciones convexas de puntos de A . Es claro que se trata del mínimo conjunto convexo en \mathbb{R}^n que contiene a A .

Teorema 1.2 *La clausura de un conjunto convexo es convexa.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y tomemos $x, y \in \overline{C}$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Si $\{x_n\}_n$ e $\{y_n\}_n$ son sucesiones en C que convergen a x e y respectivamente, entonces $\{(1 - \lambda)x_n + \lambda y_n\}_n$ es una sucesión en C que converge a $(1 - \lambda)x + \lambda y$, luego $(1 - \lambda)x + \lambda y \in \overline{C}$. ■

Para los resultados siguientes conviene probar primero un resultado técnico general. Afirma que si nos movemos en línea recta desde un punto interior de un convexo hasta un punto de su clausura, entonces todos los puntos por los que pasamos, salvo quizá el último, están en el interior del convexo.

Teorema 1.3 *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, sea x un punto de su interior e y un punto de su clausura. Entonces, si $0 \leq \lambda < 1$, el punto $(1 - \lambda)x + \lambda y$ está en el interior de C .*

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$, de modo que

$$x = \frac{1}{1 - \lambda} z - \frac{\lambda}{1 - \lambda} y.$$

Para cada par de puntos $z', y' \in \mathbb{R}^n$, sea $x' = \frac{1}{1 - \lambda} z' - \frac{\lambda}{1 - \lambda} y'$. Así,

$$z' = (1 - \lambda)x' + \lambda y'.$$

Si tomamos y', z' suficientemente próximos a y, z respectivamente, podemos conseguir que x' esté arbitrariamente próximo a x . Así, como x es un punto interior de C , podemos conseguir que $x' \in C$. Ahora bien, como y está en la clausura de C , podemos tomar puntos $y' \in C$ arbitrariamente próximos a y , y si z no estuviera en el interior de C , tendríamos puntos $z' \in \mathbb{R}^n \setminus C$ arbitrariamente próximos a z , con lo que obtendríamos una combinación convexa z' de dos puntos de C que no estaría en C , en contradicción con la convexidad de C . ■

Representaremos por B^n a la bola unitaria en \mathbb{R}^n y por S^{n-1} a su frontera, es decir:

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}, \quad S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

Claramente B^n y S^{n-1} son espacios compactos y B^n es convexo.

Teorema 1.4 *Todo espacio compacto convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ de interior no vacío es homeomorfo a B^n . Además el homeomorfismo hace corresponder ∂K con S^{n-1} .*

DEMOSTRACIÓN: Aplicando una traslación si es preciso podemos suponer que 0 está en el interior de K . Para cada $x \in S^{n-1}$, llamemos

$$t_x = \sup\{t > 0 \mid tx \in K\}.$$

Como K está acotado y 0 está en su interior, es claro que $t_x > 0$ está bien definido. Además es claro que $g(x) = t_x x \in \partial K$, luego tenemos definida una función $g : S^{n-1} \rightarrow \partial K$. Vamos a probar que es biyectiva. Concretamente, su inversa $f : \partial K \rightarrow S^{n-1}$ es la dada por $f(x) = x/\|x\|$. Ciertamente, $g \circ f = 1$, lo que prueba que g es inyectiva. Falta probar que $f \circ g = 1$. Tomemos $x \in \partial K$, sea $y = f(x)$ y $t_0 = \|x\|$. Por convexidad $tx \in K$ para todo $t \leq t_0$, luego $t_y \geq t_0$. Si fuera $t_y > t_0$ entonces, x sería combinación convexa de 0 y $g(y)$, y por el teorema anterior x sería un punto interior de K , cuando tenemos que es un punto frontera. Así pues, $t_y = t_0$, luego $g(f(x)) = g(y) = x$.

Puesto que f es claramente continua, por compacidad es un homeomorfismo, luego g también lo es. Ahora podemos definir $h : B^n \rightarrow K$ mediante

$$h(x) = \begin{cases} \|x\| g(x/\|x\|) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Es fácil ver que h es un homeomorfismo. ■

Por ejemplo, es claro que el producto cartesiano de convexos es convexo, luego el cubo I^n , donde $I = [0, 1]$, es un compacto convexo de interior no vacío. Por el teorema anterior, es homeomorfo a B^n .

Necesitamos una caracterización similar de los abiertos convexos, que podemos obtener de este teorema usando lo siguiente:

Teorema 1.5 *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto convexo, entonces A coincide con el interior de su clausura.*

DEMOSTRACIÓN: Sea z un punto del interior de la clausura de A y sea $x \neq z$ un punto de A . El segmento que une x con z puede prolongarse un poco sin salirse de la clausura de A , es decir, podemos expresar z como combinación convexa de x y un punto $y \in \bar{A}$. Por el teorema 1.3 concluimos que $z \in A$. ■

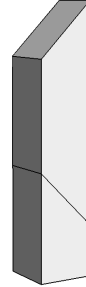
Como consecuencia obtenemos:

Teorema 1.6 *Todo abierto convexo en \mathbb{R}^n es homeomorfo a una bola abierta.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto convexo. Aplicando un homeomorfismo podemos suponer que está acotado, de modo que \bar{A} es un compacto convexo de interior no vacío. Por el teorema 1.4 tenemos que \bar{A} es homeomorfo a B^n , y el homeomorfismo transforma $\partial \bar{A}$ en S^{n-1} , luego transforma A (por el teorema anterior) en la bola abierta unitaria. ■

Notemos que este teorema es un caso particular de [GD 1.28], que afirma que todo abierto estrellado en \mathbb{R}^n es difeomorfo a \mathbb{R}^n .

Homeomorfismos afines en segmentos Los teoremas 1.4 y 1.6 nos aseguran la existencia de homeomorfismos entre espacios aparentemente muy diversos, pero a menudo es necesario conocer explícitamente el homeomorfismo o, al menos, justificar que podemos exigir condiciones adicionales. Por ejemplo, a partir de 1.4 es inmediato que la figura de la derecha es homeomorfa a la pieza inferior, pues ambos son cerrados convexos en \mathbb{R}^3 . Sin embargo, nos puede hacer falta asegurar, por ejemplo, que hay un homeomorfismo que envía los puntos de cada cara lateral a la misma cara y que deja fijos a los puntos de la base.



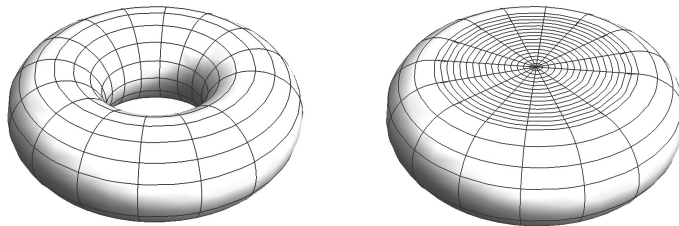
Es fácil definir explícitamente un homeomorfismo que cumpla tales requisitos. Para ello basta definirlo de modo que sea afín en cada segmento vertical. De hecho, esta condición ya determina unívocamente el homeomorfismo. Concretamente, se trata de definirlo de modo que cada punto (x, y, z) se transforme en otro (x, y, z') situado en el mismo segmento vertical, y el valor de z' queda determinado por el hecho de que exigimos que $z \mapsto z'$ sea una transformación afín.

Por ejemplo, si suponemos que la base de la figura es un cuadrado de lado 1 y que las alturas son 4 y 5, así como que las líneas oblicuas están en el plano XZ , queremos que el punto $(x, y, 4 + x)$ se transforme en $(x, y, 2 - x)$ y que $(x, y, 0)$ quede invariante, y la única transformación afín que cumple esto es

$$(x, y, z) \mapsto \left(x, y, \frac{2-x}{4+x} z\right).$$

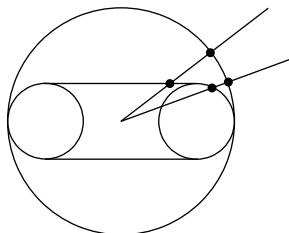
Es pura rutina comprobar que la aplicación así definida es realmente un homeomorfismo que cumple los requisitos exigidos. En situaciones similares hablaremos de homeomorfismos definidos mediante aplicaciones afines en segmentos sin dar más detalles sobre su construcción. ■

El complementario de un toro Consideremos un toro como el que muestra la figura de la izquierda:

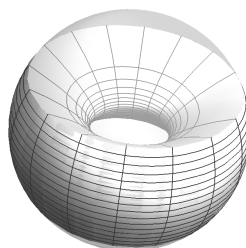


Hay que entender que nos referimos al toro sólido, es decir, de modo que incluye los puntos encerrados por su superficie. No es un conjunto convexo, pero pasa a serlo si rellenamos el agujero entre dos planos tangentes horizontales, como muestra la figura de la derecha. Así le podemos aplicar el teorema 1.4, según el cual es homeomorfo a una bola cerrada.

Sin embargo, podemos decir más y construir un homeomorfismo de \mathbb{R}^3 en sí mismo que transforme el toro relleno en una bola cerrada. Para ello basta exigir que sea lineal en las semirrectas de origen en el centro del toro. En efecto, existe una única transformación afín sobre cada semirrecta que fija a su origen y envía su punto de corte con la frontera del toro relleno a su punto de corte con la esfera.

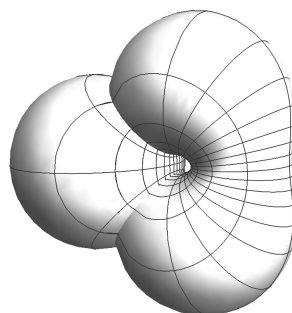


Es pura rutina comprobar que la aplicación definida así sobre cada semirrecta es un homeomorfismo de \mathbb{R}^3 en sí mismo que cumple lo requerido. La figura muestra el resultado. El toro original se transforma en un “toro esférico” y el relleno en una especie de copa doble coronada con dos casquetes esféricos, y es fácil ver que su clausura es homeomorfa a una bola cerrada (es fácil “inflarla” para que ocupe toda la bola). Esto tiene interés por el motivo siguiente:



Si consideramos a \mathbb{R}^3 como subespacio de su compactificación por un punto (que, a su vez, podemos identificar con la esfera S^3), sucede que el complementario de la bola abierta en S^3 es homeomorfo a una bola cerrada. Esto se justifica, por ejemplo, considerando la inversión respecto de la esfera [G A.5], que es un homeomorfismo de S^3 en sí misma que deja invariante a la esfera y que intercambia su interior con su exterior.

Más aún, si consideramos una inversión respecto de una esfera de centro en un punto situado en el interior del toro esférico (que será el que se transforme en el punto infinito), todo el complementario de la esfera que contiene al toro esférico se transforma en una esfera usual S' en \mathbb{R}^3 (pues las inversiones transforman esferas en planos o esferas, según si contienen o no al punto con imagen infinita), los dos casquetes de contacto con la copa se transformarán en dos casquetes en S' , y la copa en un tubo que unirá dichos casquetes, luego el resultado será homeomorfo a un toro, como muestra la figura. Todos los homeomorfismos que hemos considerado son en realidad homeomorfismos de S^3 en sí misma, luego hemos probado lo siguiente:



Si consideramos $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$, el complementario de un toro sólido cerrado $T \subset \mathbb{R}^3$ es homeomorfo a un toro sólido abierto cuya frontera es el toro bidimensional ∂T . Equivalentemente, cada toro bidimensional en \mathbb{R}^3 divide a S^3 en dos componentes conexas homeomorfas a toros sólidos abiertos.

Por consiguiente, el complementario en \mathbb{R}^3 de un toro sólido es homeomorfo a un toro sólido menos un punto interior (pues ∞ no está en su frontera). ■

1.2 Espacios normales

La normalidad es una propiedad de separación más fuerte que la propiedad de Hausdorff:

Definición 1.7 Un espacio de Hausdorff X se dice *normal* si para todo par de cerrados disjuntos A_1 y A_2 de X existen abiertos disjuntos U_1 y U_2 en X tales que $A_i \subset U_i$. Más brevemente, se dice entonces que los abiertos U_i *separan* a los cerrados A_i .

Así, un espacio es de Hausdorff si puntos distintos pueden separarse por abiertos disjuntos, mientras que es normal si además cerrados disjuntos pueden separarse por abiertos disjuntos. Notemos, no obstante, que la propiedad de Hausdorff no se deduce de esta propiedad general de separación de cerrados porque hace falta la propiedad de Hausdorff para probar que los puntos de un espacio topológico sean cerrados. Una propiedad más débil que la normalidad es la regularidad:

Un espacio de Hausdorff X es *regular* si para todo punto $x \in X$ y todo cerrado A tal que $x \notin A$, existen abiertos disjuntos U_1 y U_2 tales que $x \in U_1$, $A \subset U_2$.

Es inmediato que todo espacio normal es regular, y hay ejemplos de que el recíproco no es cierto. No vamos a necesitar para nada el concepto de espacio regular, salvo por el hecho de que algunos resultados que necesitaremos sobre espacios normales son ciertos sin más que suponer la hipótesis de regularidad y conviene tenerlo presente, porque es una hipótesis mucho menos restrictiva.

La clase de los espacios topológicos normales incluye a dos clases importantes de espacios topológicos:

Teorema 1.8 *Todo espacio metrizable es normal.*

DEMOSTRACIÓN: En efecto, si X es un espacio metrizable y A_1, A_2 son dos cerrados disjuntos en X , consideramos la función continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{d(x, A_1)}{d(x, A_1) + d(x, A_2)},$$

donde d es cualquier distancia que induzca la topología de x . Notemos que el denominador no se anula porque los cerrados son disjuntos. Claramente, f toma el valor 0 sobre A_1 y el valor 1 sobre A_2 , luego un par de abiertos que separan a los cerrados dados son las antiimágenes de los intervalos $]-\infty, 1/2[$ y $]1/2, +\infty[$. ■

Teorema 1.9 *Todo espacio compacto es normal.*

DEMOSTRACIÓN: Sea X un espacio compacto. Veamos primero que X es regular. Tomamos, pues, un punto $x \in X$ y un cerrado $A \subset X$ tal que $x \notin A$. Como X es un espacio de Hausdorff, para cada $y \in A$ existen abiertos

disjuntos V_y, W_y tales que $x \in V_y, y \in W_y$. Los abiertos W_y forman un cubrimiento del compacto A , por lo que podemos tomar un subcubrimiento finito W_{y_1}, \dots, W_{y_n} , y basta tomar $U_1 = V_{y_1} \cap \dots \cap V_{y_n}, U_2 = W_{y_1} \cup \dots \cup W_{y_n}$.

Ahora, si A_1, A_2 son cerrados disjuntos en X , por la regularidad ya probada, para cada $x \in A_1$ existen abiertos disjuntos V_x, W_x en X tales que $x \in V_x, A_2 \subset W_x$. Nuevamente, tomamos un subcubrimiento finito V_{x_1}, \dots, V_{x_n} de A_1 y tomamos $U_1 = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}, U_2 = W_{x_1} \cap \dots \cap W_{x_n}$. ■

Otro hecho fundamental es que la normalidad se conserva por aplicaciones continuas y cerradas:

Teorema 1.10 *Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua, cerrada y suprayectiva de un espacio normal en un espacio topológico (en principio no necesariamente de Hausdorff) entonces Y es un espacio (de Hausdorff) normal.*

DEMOSTRACIÓN: Como los puntos son cerrados en X y f es cerrada y suprayectiva, tenemos que los puntos son cerrados en Y , luego si probamos que cuando A_1 y A_2 son cerrados disjuntos en Y , existen abiertos disjuntos U_1, U_2 tales que $A_i \subset U_i$, con ello habremos probado que Y es de Hausdorff y normal.

En efecto, llamemos $V_i = Y \setminus A_i$, que son abiertos tales que $Y = V_1 \cup V_2$. Entonces $X = f^{-1}[V_1] \cup f^{-1}[V_2]$, luego $X \setminus f^{-1}[V_i]$ son cerrados disjuntos en X . Por tanto, existen abiertos disjuntos $X \setminus f^{-1}[V_i] \subset U_i$, luego $X \setminus U_i \subset f^{-1}[V_i]$, son cerrados tales que $(X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2) = X$, luego $f[X \setminus U_i] \subset V_i$ son cerrados tales que $f[X \setminus U_1] \cup f[X \setminus U_2] = Y$, luego $A_i \subset Y \setminus f[X \setminus U_i] = U'_i$, que son abiertos disjuntos en Y . ■

Los espacios normales satisfacen (y están caracterizados por) una versión fuerte del lema de Urysohn [An 3.16]:

Teorema 1.11 (Lema de Urysohn) *Un espacio de Hausdorff X es normal si y sólo si para todo par de cerrados disjuntos A_0 y A_1 en X existe una función continua $f : X \rightarrow I$ tal que $f|_{A_0} = 0$ y $f|_{A_1} = 1$.*

DEMOSTRACIÓN: Una implicación es inmediata. Dados los cerrados A_0, A_1 , para cada número racional $r \in I$ vamos a definir un abierto V_r con la propiedad de que si $r < r'$ entonces $\bar{V}_r \subset V_{r'}$.

Para ello fijamos una enumeración $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ de los números racionales en I , en la que exigimos que $r_0 = 0$ y $r_1 = 1$ y definiremos V_{r_n} recurrentemente.

Sean U y U' abiertos disjuntos en X tales que $A_0 \subset U, A_1 \subset U'$. De este modo $A_0 \subset U \subset \bar{U} \subset X \setminus U' \subset X \setminus A_1$. Definimos $V_0 = U$ y $V_1 = X \setminus A_1$. Así se cumple que $\bar{V}_0 \subset V_1$, como se requiere.

Supongamos definidos V_{r_0}, \dots, V_{r_n} de modo que cumplan lo requerido. Llamemos r_i y r_d a los números entre r_0, \dots, r_n que cumplen $r_i < r_{n+1} < r_d$ de modo que no haya otros r_j intermedios, para $j = 0, \dots, n$. Por construcción tenemos que $\bar{V}_{r_i} \subset V_{r_d}$. Aplicando la normalidad de X a los cerrados disjuntos \bar{V}_{r_i} y $X \setminus V_{r_d}$ obtenemos un abierto $V_{r_{n+1}}$ tal que $\bar{V}_{r_i} \subset V_{r_{n+1}} \subset \bar{V}_{r_{n+1}} \subset V_{r_d}$.

Con esto tenemos construida la sucesión de abiertos, y ahora definimos la función $f : X \rightarrow I$ mediante

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r \in I \cap \mathbb{Q} \mid x \in V_r\} & \text{si } x \in V_1, \\ 1 & \text{si } x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$

Como $A_0 \subset V_0$, tenemos que $f|_{A_0} = 0$ y como $V_1 = X \setminus A_1$ también $f|_{A_1} = 1$. Sólo falta probar que f es continua.

Basta probar que la antiimagen por f de todo abierto básico $]a, b[$, $[0, b[$ o $]a, 1]$ es abierta, pero como $]a, b[=]a, 1] \cap [0, b[$, basta considerar los intervalos semiabiertos. Ahora bien, $f(x) < b$ equivale a que exista un número racional $r < b$ tal que $x \in V_r$, luego

$$f^{-1}[[0, b[= \bigcup_{r < b} V_r$$

es abierto. Igualmente, $f(x) > a$ equivale a que exista un $r' > a$ tal que $x \in X \setminus V_{r'}$, lo que a su vez equivale a que exista un $r > a$ tal que $x \in X \setminus \bar{V}_r$. Por lo tanto,

$$f^{-1}]a, 1] = \bigcup_{r > a} (X \setminus \bar{V}_r)$$

también es abierto. ■

De aquí se deduce a su vez una propiedad más fuerte:

Teorema 1.12 (Teorema de Tietze) *Si X es un espacio topológico normal y $C \subset X$ es un cerrado, entonces toda aplicación continua $f : C \rightarrow I$ se extiende a una función continua $\bar{f} : X \rightarrow I$.*

DEMOSTRACIÓN: Por comodidad vamos a considerar una función continua $f : C \rightarrow [-1, 1]$. Puesto que $[-1, 1]$ es homeomorfo a I , es inmediato que el resultado vale igualmente para funciones en I .

En primer lugar veamos que si $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y cumple $|f(x)| \leq c$, para todo $x \in C$, entonces existe una función continua $\bar{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$|\bar{f}(x)| \leq \frac{1}{3}c \quad \text{para todo } x \in X, \quad |\bar{f}(x) - f(x)| \leq \frac{2}{3}c \quad \text{para todo } x \in C.$$

En efecto, los conjuntos $A = f^{-1}[-c, -c/3]$ y $B = f^{-1}[c/3, c]$ son cerrados disjuntos en C , luego en X , luego por el lema de Urysohn existe una función $g : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $g|_A = 0$ y $g|_B = 1$. Basta tomar

$$\bar{f}(x) = \frac{2}{3}c \left(g(x) - \frac{1}{2} \right).$$

Así, si $x \in C$ cumple $-c \leq f(x) \leq -c/3$, tenemos que $\bar{f}(x) = -c/3$, por lo que $|\bar{f}(x) - f(x)| \leq 2c/3$. Si, por el contrario $c/3 \leq f(x) \leq c$, entonces $\bar{f}(x) = c/3$ y llegamos a la misma conclusión. Por último, si $|f(x)| \leq c/3$, lo mismo vale para $\bar{f}(x)$ y de nuevo obtenemos la desigualdad requerida.

Esto nos permite definir inductivamente funciones $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que

$$|f_i(x)| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^i \quad \text{para todo } x \in X,$$

$$\left|f(x) - \sum_{i=0}^n f_i(x)\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \quad \text{para todo } x \in C.$$

En efecto, obtenemos f_0 aplicando a f la propiedad precedente con $c = 1$ y f_{n+1} se obtiene aplicando dicha propiedad a $f - \sum_{i=0}^n f_i$ con $c = (2/3)^{n+1}$.

Finalmente definimos $\bar{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Por el criterio de mayoración de Weierstrass [An 3.56] tenemos que $\bar{f} : X \rightarrow [-1, 1]$ es continua y claramente extiende a f . ■

El teorema de Tietze vale también para funciones con valores en \mathbb{R} en lugar de en I :

Teorema 1.13 (Teorema de Tietze) *Si X es un espacio topológico normal y $C \subset X$ es un cerrado, entonces toda aplicación continua $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ se extiende a una función continua $\bar{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos cualquier homeomorfismo $h : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$. Por el teorema anterior, la composición $f^* = f \circ h : C \rightarrow]-1, 1[$ se extiende a una función continua $\bar{f}^* : X \rightarrow [-1, 1]$. Basta probar que podemos modificar \bar{f}^* para que cumpla $\bar{f}^* : X \rightarrow]-1, 1[$, pues entonces $\bar{f} = \bar{f}^* \circ h^{-1} : X \rightarrow \mathbb{R}$ es claramente una extensión continua de f .

Para ello consideramos el conjunto $D = \bar{f}^{*-1}\{-1, 1\}$, que claramente es un cerrado en X disjunto de C . Sea $g : C \cup D \rightarrow I$ la función dada por

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in C, \\ 0 & \text{si } x \in D. \end{cases}$$

Trivialmente es continua, luego, por el teorema anterior, g admite una extensión continua $\bar{g} : X \rightarrow I$. Basta considerar $\bar{f}^{**} = \bar{f}^* \bar{g} : X \rightarrow [-1, 1]$.

Por una parte \bar{f}^{**} no toma los valores ± 1 , ya que si $\bar{f}^*(x) = \pm 1$ entonces $\bar{f}^{**}(x) = 0$, mientras que si $\bar{f}^*(x) \neq \pm 1$, entonces $|\bar{f}^{**}(x)| \leq |\bar{f}^*(x)| < 1$.

Por otra parte \bar{f}^{**} es también una extensión de f^* , pues si $x \in C$, entonces $\bar{f}^{**}(x) = \bar{f}^*(x) = f^*(x)$. ■

Notemos que la primera versión del teorema de Tietze no es exactamente un caso particular de la segunda, pues contiene la información adicional de que una aplicación $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ acotada admite una extensión a X con las mismas cotas.

1.3 Espacios paracompactos

En [GD 1.21] probamos que en una variedad diferencial todo cubrimiento abierto tiene una partición de la unidad subordinada. Allí considerábamos particiones de la unidad diferenciables. Ahora vamos a dar una condición topológica que asegura la existencia de particiones de la unidad continuas subordinadas a cubrimientos dados:

Definición 1.14 Sea X un espacio topológico. Un cubrimiento abierto de X es *localmente finito* si cada punto de X está contenido tan sólo en un número finito de abiertos del cubrimiento. Un cubrimiento abierto \mathcal{V} es un *refinamiento* de otro \mathcal{U} si todo abierto de \mathcal{V} está contenido en uno de \mathcal{U} .

Un espacio topológico de Hausdorff X es *paracompacto* si todo cubrimiento abierto de X admite un refinamiento localmente finito.

Trivialmente, todo espacio compacto es paracompacto. Puede probarse que todo espacio métrico es paracompacto, aunque no vamos a necesitar este hecho ni, por consiguiente, daremos la prueba. Nos bastará con el teorema siguiente, que implica que todo espacio topológico localmente compacto con una base numerable es paracompacto:

Teorema 1.15 Sea X un espacio topológico localmente compacto con una base numerable y sea \mathcal{B} una base cualquiera de X . Entonces todo cubrimiento abierto de X tiene un refinamiento localmente finito formado por abiertos de \mathcal{B} .

DEMOSTRACIÓN: Según [GD 1.18] existe una familia $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ de abiertos de V tal que cada \overline{G}_n es compacto, $\overline{G}_n \subset G_{n+1}$ y $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n$. Convenimos que $G_i = \emptyset$ si $i < 0$. El compacto $\overline{G}_n \setminus G_{n-1}$ puede cubrirse por un número finito de abiertos de \mathcal{B} contenidos en $G_{n+1} \setminus \overline{G}_{n-2}$ y en alguno de los abiertos del cubrimiento dado. Si llamamos \mathcal{V}_n al conjunto de estos abiertos, es claro que la unión de todos los \mathcal{V}_n es un cubrimiento de X que refina al cubrimiento dado, y es localmente finito porque un abierto de \mathcal{V}_n corta a lo sumo a los abiertos de \mathcal{V}_i para $i = n-2, n-1, n, n+1, n+2$. ■

Para probar la existencia de particiones de la unidad en los espacios paracompactos necesitamos el hecho siguiente:

Teorema 1.16 Todo espacio paracompacto es normal.

DEMOSTRACIÓN: Veamos en primer lugar que si $A = \{x\}$ y B es un cerrado disjunto con A , existen abiertos disjuntos U_1 y U_2 tales que $A \subset U_1$, $B \subset U_2$.

Por la propiedad de Hausdorff, para cada $y \in B$ existen abiertos disjuntos U_1^y , U_2^y tales que $A \subset U_1^y$, $y \in U_2^y$. Entonces $\{U_2^y \mid y \in B\} \cup \{X \setminus B\}$ es un cubrimiento abierto de X , luego tiene un refinamiento localmente finito \mathcal{U} . Llamamos \mathcal{U}_0 al conjunto de los abiertos de \mathcal{U} que cortan a B .

Si $W \in \mathcal{U}_0$, entonces W está contenido en un $U_2^y \subset X \setminus U_1^y$, luego $\overline{W} \subset X \setminus U_1^y$, luego $\overline{W} \cap A = \emptyset$, luego $A \subset U_1 = X \setminus \bigcup_{W \in \mathcal{U}_0} \overline{W}$. Por otro lado, es obvio que

$B \subset U_2 = \bigcup \mathcal{U}_0$ y que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Basta probar que U_1 es abierto.

En efecto, cada $x \in U_1$ tiene un entorno abierto G que corta a lo sumo a un número finito de abiertos de \mathcal{U}_0 , digamos W_1, \dots, W_n , pero entonces tenemos que $x \in G \cap \bigcap_{i=1}^n (X \setminus \overline{W}_i) \subset U_1$, luego U_1 es entorno de todos sus puntos.

Ahora que sabemos que es posible separar puntos de cerrados repetimos el argumento con dos cerrados disjuntos A y B y tomando abiertos disjuntos U_1^y, U_2^y tales que $A \subset U_1^y, y \in Y_2^y$. Así obtenemos abiertos disjuntos U_1 y U_2 que separan A y B . ■

Definición 1.17 Si X es un espacio topológico, el *soporte* de una función continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es la clausura del conjunto de puntos donde f no se anula.

Una *partición de la unidad* en X es una familia $\{f_i\}_{i \in I}$ de funciones continuas $f_i : X \rightarrow [0, 1]$ tales que cada punto de X tiene un entorno U tal que el conjunto $\{i \in I \mid f_i|_U \neq 0\}$ es finito y $\sum_i f_i|_U = 1$.

Una partición de la unidad *subordinada* a un cubrimiento abierto \mathcal{U} es una partición de la unidad $\{f_i\}_{i \in I}$ tal que cada soporte $\text{sop } f_i$ está contenido en un abierto de \mathcal{U} .

Teorema 1.18 Si X es un espacio topológico paracompacto, todo cubrimiento abierto en X tiene una partición de la unidad subordinada.

DEMOSTRACIÓN: Dado un cubrimiento abierto de X , tomamos un refinamiento $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ localmente finito. Para cada $x \in X$, existe un $i \in I$ tal que $x \in U_i$. Como X es normal, podemos separar $\{x\}$ de $X \setminus U_i$ mediante abiertos disjuntos, lo que nos da un abierto $x \in U_x \subset \overline{U_x} \subset U_i$. Los abiertos U_x forman un cubrimiento de X , el cual admite un refinamiento $\mathcal{V} = \{V_j \mid j \in J\}$ localmente finito. Para cada índice $j \in J$ existe un $x_j \in X$ tal que $V_j \subset U_{x_j}$, y a su vez existe un $i_j \in I$ tal que $V_j \subset U_{x_j} \subset \overline{U_{x_j}} \subset U_{i_j}$. Definimos $F_i = \bigcup \{V_j \mid i_j = i\} \subset U_i$. Se cumple que $\{F_i \mid i \in I\}$ es un cubrimiento de X , pues todo $x \in X$ está en un V_j , y entonces $x \in F_{i_j}$. Veamos que F_i es cerrado.

Todo $x \in X \setminus F_i$ tiene un entorno G que corta a lo sumo a un número finito de elementos de \mathcal{V} , de los cuales habrá un número finito, digamos V_{j_1}, \dots, V_{j_n} , tales que $i_{j_k} = i$, para $k = 1, \dots, n$. Entonces

$$x \in G \cap \bigcap_{k=1}^n (X \setminus \overline{V}_{j_k}) \subset X \setminus F_i,$$

lo que prueba que $X \setminus F_i$ es entorno de todos sus puntos.

El lema de Urysohn nos da funciones continuas $g_i : X \rightarrow I$ tales que $g_i|_{X \setminus U_i} = 0$ y $g_i|_{F_i} = 1$. Así $\text{sop } g_i \subset U_i$, luego está contenido en un abierto del

cubrimiento original y, como \mathcal{U} es localmente finito, todo punto tiene un entorno que corta a un número finito de soportes. Esto hace que esté bien definida la suma $g(x) = \sum_{i \in I} g_i(x)$, que es una función continua, ya que en un entorno de cada punto es suma de un número finito de funciones continuas, y no se anula en ningún punto, porque no hay sumandos negativos y siempre hay uno que vale 1 (pues todo punto está en un F_i). Es claro entonces que las funciones $f_i = g_i/g$ forman una partición de la unidad subordinada al cubrimiento dado. ■

Notas En la prueba del teorema anterior se ve que si el cubrimiento de partida es localmente finito, $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$, entonces la partición de la unidad se puede tomar con el mismo conjunto de índices, $\{f_i\}_{i \in I}$, de modo que $\text{sop } f_i \subset U_i$.

El teorema 1.15 prueba que toda variedad topológica con una base numerable es paracompacta, y [GD 1.21] prueba que, en el caso de una variedad diferencial, las particiones de la unidad pueden tomarse diferenciables. ■

Vamos a necesitar una propiedad más de los espacios paracompactos (que, de hecho, es equivalente a la paracompacidad):

Definición 1.19 Si \mathcal{U} es una familia de subconjuntos de un conjunto X , para cada $A \subset X$, definimos la *estrella* de A como el conjunto

$$A_{\mathcal{U}}^* = \bigcup \{U \in \mathcal{U} \mid U \cap A \neq \emptyset\}.$$

Si \mathcal{U} es un cubrimiento de X , diremos que otro cubrimiento \mathcal{V} es un *refinamiento baricéntrico* de \mathcal{U} si para todo $x \in X$ existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que $\{x\}_{\mathcal{V}}^* \subset U$.

Diremos que un cubrimiento \mathcal{V} es un *refinamiento estrella* de \mathcal{U} si para cada $V \in \mathcal{V}$ existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que $V_{\mathcal{V}}^* \subset U$.

Claramente, todo refinamiento estrella es un refinamiento baricéntrico, y todo refinamiento baricéntrico es un refinamiento.

Si definimos $\mathcal{V}^* = \{V_{\mathcal{V}}^* \mid V \in \mathcal{V}\}$, entonces \mathcal{V} es un refinamiento estrella de \mathcal{U} si y sólo si \mathcal{V}^* es un refinamiento de \mathcal{U} .

Teorema 1.20 Si X es un espacio topológico paracompacto, entonces todo cubrimiento abierto de X admite un refinamiento estrella abierto.

DEMOSTRACIÓN: Sea \mathcal{U} un cubrimiento abierto de X y veamos en primer lugar que admite un refinamiento baricéntrico abierto.

Empezamos razonando exactamente igual que en la prueba del teorema 1.18, es decir, tomamos un refinamiento $\mathcal{U}' = \{U_i \mid i \in I\}$ localmente finito del cubrimiento dado y a partir de él formamos un refinamiento $\{F_i \mid i \in I\}$ formado por conjuntos cerrados $F_i \subset U_i$.

Para cada $i \in I$, sea $G_i \in \mathcal{U}$ tal que $F_i \subset G_i$. Como \mathcal{U}' es localmente finito, lo mismo vale para el cubrimiento formado por los cerrados F_i , luego, para cada $x \in X$, el conjunto $I_x = \{i \in I \mid x \in F_i\}$ es finito, luego el conjunto

$$V_x = \bigcap_{i \in I_x} G_i \cap (X \setminus \bigcup_{i \in I \setminus I_x} F_i)$$

es abierto y $x \in V_x$, por lo que $\mathcal{V} = \{V_x \mid x \in X\}$ es un cubrimiento abierto del espacio X . Veamos que es un refinamiento baricéntrico de \mathcal{U} .

Tomamos $x_0 \in X$ y fijemos un índice $i_0 \in I_{x_0}$. Si $x_0 \in V_x$, entonces $i_0 \in I_x$, pues en caso contrario $x_0 \in X \setminus F_{i_0}$ en contra de la elección de i_0 . Por lo tanto $V_x \subset G_{i_0}$, luego $\{x_0\}_{\mathcal{V}}^* \subset G_{i_0}$.

Así pues, \mathcal{V} es un refinamiento baricéntrico abierto de \mathcal{U} . Aplicando a \mathcal{V} lo que hemos probado podemos tomar un refinamiento baricéntrico abierto \mathcal{V}' de \mathcal{V} . Vamos a probar que \mathcal{V}' es un refinamiento estrella de \mathcal{U} .

Tomamos $V'' \in \mathcal{V}''$. Para cada $x \in V''$ elegimos $V_x \in \mathcal{V}$ tal que $\{x\}_{\mathcal{V}''}^* \subset V_x$. Entonces

$$V_{\mathcal{V}''}''^* = \bigcup_{x \in V''} \{x\}_{\mathcal{V}''}^* \subset \bigcup_{x \in V''} V_x.$$

Fijemos $x_0 \in V''$. Entonces, si $x \in V''$, se cumple que $x_0 \in \{x\}_{\mathcal{V}''}^* \subset V_x$, luego $V_x \subset \{x_0\}_{\mathcal{V}}^*$. Por consiguiente,

$$\bigcup_{x \in V''} V_x \subset \{x_0\}_{\mathcal{V}}^*.$$

Ahora tomamos $U \in \mathcal{U}$ tal que $\{x_0\}_{\mathcal{V}}^* \subset U$, con lo que $V_{\mathcal{V}''}''^* \subset U$. ■

1.4 Variedades topológicas

En el estudio de las variedades diferenciales aparecen con frecuencia resultados que realmente dependen tan sólo de la estructura topológica subyacente, pero eso no significa que sean válidos para espacios topológicos cualesquiera, ya que no todo espacio topológico puede ser el espacio topológico subyacente a una variedad diferencial. Una condición necesaria es que sea una variedad topológica en el sentido que vamos a introducir a continuación, y esto le confiere características muy peculiares.

Definición 1.21 Una *variedad topológica* de dimensión n es un espacio topológico de Hausdorff en el que todo punto tiene un entorno abierto homeomorfo a un abierto en \mathbb{R}^n . Los homeomorfismos entre abiertos de la variedad y abiertos de \mathbb{R}^n se llaman *cartas* de la variedad.

La definición de variedad topológica es formalmente más simple que la de variedad diferencial porque en ella podemos hacer uso de la noción de homeomorfismo, mientras que en la de variedad diferencial no podemos usar el concepto de difeomorfismo, que se define a partir de la estructura diferencial.

Es frecuente exigir la conexión en la definición general de variedad, pero por motivos técnicos nos conviene no hacerlo, de modo que cuando queramos considerar variedades conexas lo indicaremos explícitamente. Notemos que las variedades topológicas son localmente arcoconexas, luego las variedades topológicas conexas son, de hecho, arcoconexas.

Es evidente que toda variedad diferencial de dimensión n es, como espacio topológico, una variedad topológica de dimensión n .

Así, por ejemplo, la esfera S^n es una variedad topológica de dimensión n , pues sabemos que admite una estructura de variedad diferencial de dimensión n .

Las variedades topológicas más simples son los abiertos de \mathbb{R}^n , pues es obvio que todo punto de un abierto de \mathbb{R}^n tiene un entorno abierto homeomorfo (de hecho, igual) a una bola abierta en \mathbb{R}^n . Más en general, cualquier abierto en una variedad topológica es una variedad topológica de la misma dimensión.

En una variedad topológica V de dimensión n , los abiertos homeomorfos a bolas abiertas de \mathbb{R}^n se llaman *abiertos coordinados*, y constituyen una base de V . Más aún, los abiertos coordinados homeomorfos a bolas abiertas en \mathbb{R}^n constituyen una base de V .

En efecto, supongamos que $x \in V$ y que $U \subset V$ es un entorno abierto de x en V . Por definición de variedad, existe un homeomorfismo $f : U' \rightarrow \tilde{U}$, donde U' es un entorno de x en V y \tilde{U} es un abierto en \mathbb{R}^n . Entonces $U \cap U'$ es abierto en U' , luego $f[U \cap U']$ es un abierto en B . Podemos tomar una bola abierta B tal que $f(x) \in B \subset f[U \cap U']$. Así $f^{-1}[B]$ es un entorno coordinado de x contenido en U y homeomorfo a B .

Puede probarse que una variedad topológica puede sumergirse en un espacio \mathbb{R}^n si y sólo si tiene una base numerable, por lo que es frecuente incorporar esta condición en la definición. Aquí probaremos únicamente un resultado más sencillo:

Teorema 1.22 *Para toda variedad compacta V existe un natural m y una aplicación continua e inyectiva $f : V \rightarrow \mathbb{R}^m$.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos cubrir a V con un número finito de abiertos U_1, \dots, U_r homeomorfos a bolas abiertas de \mathbb{R}^n . Tomemos homeomorfismos $f_i : U_i \rightarrow S^n \setminus \{N\}$, donde N es el polo norte de la esfera. Todos ellos se extienden a aplicaciones continuas $f_i : V \rightarrow S^n$ de modo que los puntos de $V \setminus U_i$ tienen imagen N . A su vez, estas aplicaciones definen $f : V \rightarrow (S^n)^r$ mediante $f(x) = (f_1(x), \dots, f_r(x))$. Claramente, la aplicación f es inyectiva y continua, y $(S^n)^r \subset \mathbb{R}^{r(n+1)}$. ■

Aunque no vamos a necesitar este hecho, conviene observar que el teorema [GD 1.24] sobre variedades diferenciales es válido para variedades topológicas exactamente con la misma prueba (cambiando la diferenciabilidad por la mera continuidad):

Teorema 1.23 *Si V es una variedad topológica, $G \subset V$ es un abierto conexo y x, y son dos puntos de G , existe un homeomorfismo $f : V \rightarrow V$ que fija a los puntos de $V \setminus G$ y cumple $f(x) = y$.*

Esto significa que, por muchas peculiaridades que pueda tener la forma local de una variedad topológica, desde un punto de vista puramente topológico cualquier punto de una variedad topológica es indistinguible de cualquier otro, no

es posible distinguir un punto de otro por ninguna característica topológica de la variedad. Esto no sucede así con otros espacios topológicos. Por ejemplo, en el intervalo $I = [0, 1]$ los extremos del intervalo se distinguen topológicamente de los demás porque, para todo $p \in I$, se cumple que $I \setminus \{p\}$ es conexo si y sólo si $p = 0, 1$. Esto se traduce en que un homeomorfismo de I en sí mismo debe necesariamente conservar o intercambiar los extremos.

La clasificación de las curvas topológicas Los espacios topológicos forman una clase muy vasta de objetos matemáticos, de modo que resulta impensable tratar de clasificarlos todos de forma sistemática. Sin embargo las variedades topológicas son una clase mucho más restrictiva hasta el punto de que pensar en clasificarlas no es descabellado. Por ejemplo, es relativamente fácil clasificar todas las variedades topológicas de dimensión 1, al menos si añadimos un par de condiciones razonables:

Definición 1.24 Una *curva topológica (diferencial)* es una variedad topológica (diferencial) conexa con una base numerable.

A poco que el lector reflexione sobre qué clase de espacios topológicos (o variedades diferenciales) pueden cumplir esta definición se convencerá de la plausibilidad del teorema siguiente:

Teorema 1.25 (Clasificación de las curvas topológicas) *Toda curva topológica (diferencial) es homeomorfa (difeomorfa) a \mathbb{R} o a S^1 .*

En particular toda curva topológica (diferencial) compacta es homeomorfa (difeomorfa) a S^1 .

Sin embargo, la prueba es algo menos simple de lo que podría suponerse. No vamos a necesitar este hecho más adelante, por lo que el lector que no esté especialmente interesado puede saltársela si así lo prefiere.

DEMOSTRACIÓN: Sea C una curva topológica o diferencial. Fijemos en ella dos cartas $\phi_1 : U_1 \rightarrow J_1$, $\phi_2 : U_2 \rightarrow J_2$, donde J_1 y J_2 son intervalos abiertos acotados en \mathbb{R} . Supongamos además que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ y que U_1 y U_2 no están contenidos uno en otro. Llamamos

$$\alpha = \phi_1^{-1} \circ \phi_2 : \phi_1[U_1 \cap U_2] \rightarrow \phi_2[U_1 \cap U_2].$$

En el caso topológico, ϕ_1 y ϕ_2 son simplemente homeomorfismos, al igual que α , mientras que en el caso diferenciable α es además un difeomorfismo.

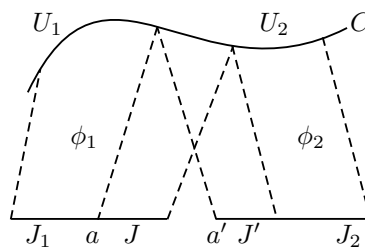
Como $\phi_1[U_1 \cap U_2]$ es abierto en \mathbb{R} , sus componentes conexas son también abiertas, luego $\phi_1[U_1 \cap U_2]$ puede expresarse como unión de intervalos abiertos disjuntos dos a dos. Sea $J \subset J_1$ una de estas componentes conexas y sea $J' = \alpha[J] \subset J_2$, que será también un intervalo abierto.

Claramente, $\alpha|_J : J \rightarrow J'$ es un homeomorfismo entre ambos intervalos, que se extiende a un homeomorfismo entre las clausuras respectivas.¹

¹Esto se debe a que todo homeomorfismo entre intervalos es creciente o decreciente, pues si $u < v < w$ pero, por ejemplo, $\alpha(u) < \alpha(w) < \alpha(v)$, entonces, tiene que existir $u < x < v$ tal que $\alpha(x) = \alpha(w)$, en contradicción con que α sea biyectiva.

La figura representa el caso en que la intersección $U_1 \cap U_2$ es conexa, por lo que $\phi_1[U_1 \cap U_2] = J$. En general, sea $a \in \bar{J}$ un extremo de J y sea a' su imagen en \bar{J}' por la extensión de α . Observemos que si $a \in J_1$, entonces $a' \notin J_2$.

En efecto: como el abierto $\phi_1[U_1 \cap U_2]$ es unión disjunta de J y otros intervalos abiertos y a es un extremo de J , tiene que ser $a \notin \phi_1[U_1 \cap U_2]$, pero $a \in J_1 = \phi_1[U_1]$, luego $p = \phi_1^{-1}(a) \notin U_2$. Si fuera $a' \in J_2$, tendríamos que $q = \phi_2^{-1}(a') \in U_2$, luego $p \neq q$. Ahora bien, si $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ es una sucesión en J que converge a a , entonces $\{\phi_1^{-1}(x_n)\}_{n=0}^\infty$ es una sucesión en $U_1 \cap U_2$ que converge a $\phi_1^{-1}(a) = p$, y $\{\alpha(x_n)\}_{n=0}^\infty$ es una sucesión en J' que converge a a' . Por consiguiente, la sucesión $\{\phi_2^{-1}(\alpha(x_n))\}_{n=0}^\infty = \{\phi_1^{-1}(x_n)\}_{n=0}^\infty$ converge a $\phi_2^{-1}(a') = q$, luego $p = q$, contradicción.

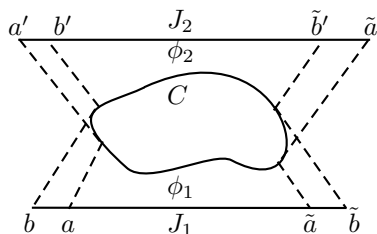


No puede suceder que ninguno de los extremos de J' esté en J_2 , pues eso equivale a que $J' = J_2$, luego $\phi_2[U_1 \cap U_2] = \phi_2[U_2]$, luego $U_2 \subset U_1$, en contra de lo supuesto. Por lo tanto, no es posible que los dos extremos de J estén en J_1 . Igualmente, tampoco es posible que ninguno de los extremos de J esté en J_1 , luego concluimos que exactamente uno de los dos extremos de J está en J_1 , y el otro es uno de los extremos de J_1 .

Equivalentemente, cada componente conexa de $\phi_1[U_1 \cap U_2] \subset J_1$ es un intervalo con exactamente un extremo en común con J_1 , luego el número de componentes conexas no puede ser mayor de dos.

Supongamos ahora que C admite dos cartas ϕ_1 y ϕ_2 en las condiciones que estamos considerando de modo que $U_1 \cap U_2$ tenga dos componentes conexas. Pongamos que $J_1 =]b, \tilde{b}[$ y $J_2 =]a', \tilde{a}'[$. Entonces

$$\phi_1[U_1 \cap U_2] =]b, a[\cup]\tilde{a}, \tilde{b}[,$$



para ciertos números reales $a \leq \tilde{a}$, que pueden ser iguales. Cambiando si es preciso ϕ_2 por $-\phi_2$ podemos suponer que $\alpha|_{]b, a[} :]b, a[\rightarrow]a', b'[$ se extiende a un homeomorfismo que hace corresponder a con a' y b con b' , y entonces necesariamente $\alpha|_{]\tilde{a}, \tilde{b}[}$ se extiende a un homeomorfismo que hace corresponder \tilde{a} con \tilde{a}' y \tilde{b} con \tilde{b}' , de modo que $a' < b' \leq \tilde{b}' < \tilde{a}'$. En realidad podemos modificar las cartas para exigir que $b < a < \tilde{a} < \tilde{b}$ y $a' < b' < \tilde{b}' < \tilde{a}'$ pues, por ejemplo, si $a = \tilde{a}$ basta cambiar a' por otro valor un poco mayor (pero menor que b'). Esto supone sustituir J_2 por un intervalo un poco menor, y a su vez sustituir U_2 por un abierto un poco menor, y entonces a pasa a ser un poco menor que \tilde{a} .

Componiendo ϕ_1 con un homeomorfismo (difeomorfismo) adecuado, podemos suponer que $J_1 =]0, 3\pi/2[$. Más aún, usando [GD 1.24] en el caso diferenciable, podemos suponer que $a = \pi/2$ y $\tilde{a} = \pi$. Similarmente, componiendo ϕ_2

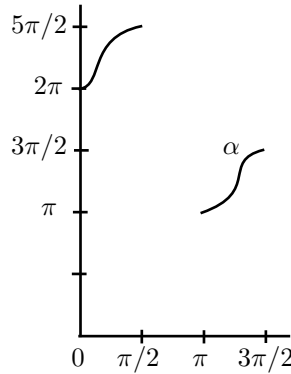
con una aplicación que invierta el sentido, podemos suponer que $J_2 =]\pi, 5\pi/2[$ y que α transforma crecientemente $]0, \pi/2[$ en $]2\pi, 5\pi/2[$ y $] \pi, 3\pi/2[$ en sí mismo. Así, la aplicación $f_1 : U_1 \rightarrow S^1$ dada por

$$f_1(x) = (\cos \phi_1(x), \text{sen } \phi_1(x))$$

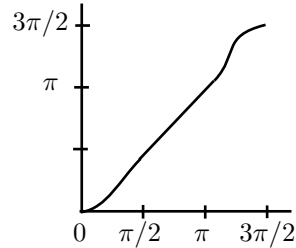
es un difeomorfismo de U_1 en el arco de S^1 que comprende los tres primeros cuadrantes.

Similarmente podemos definir $f_2 : U_2 \rightarrow S^2$ con imagen en los cuadrantes tercero, cuarto y primero. Si coincidieran en $U_1 \cap U_2$, tendríamos un difeomorfismo $f : U_1 \cup U_2 \rightarrow S^1$, pero no tiene por qué darse el caso. Más concretamente, si $p \in U_1 \cap U_2$ y $\theta = \phi_1(p)$, entonces

$$f_1(p) = (\cos \theta, \text{sen } \theta) \in S^1, \quad f_2(p) = (\cos \alpha(\theta), \text{sen } \alpha(\theta)).$$



Ahora bien, vamos a probar que existe un homeomorfismo (difeomorfismo) $J_1 \rightarrow J_1$ que coincide con $\alpha - 2\pi$ en el intervalo $]0, \pi/4[$ y con α en el intervalo $]5\pi/4, 3\pi/2[$. Aceptando esto, resulta que al sustituir ϕ_1 por su composición con esta aplicación obtenemos una nueva carta tal que las imágenes de los puntos de $\phi_1^{-1}[]0, \pi/4[$ por ϕ_1 y ϕ_2 se diferencian en 2π , mientras que las de los puntos de $\phi_1^{-1}[]5\pi/4, 3\pi/2[$ son iguales. Esto hace que las funciones f_1 y f_2 coincidan en estos abiertos, luego f_1 y $f_2|_{\phi_2^{-1}[]5\pi/4, 9\pi/4[}$ coinciden en la intersección de sus dominios, cuya unión es igualmente $U_1 \cup U_2$, luego definen un homeomorfismo (difeomorfismo)



$$f : U_1 \cup U_2 \rightarrow S^1.$$

En particular, esto implica que $U_1 \cup U_2$ es compacto, luego cerrado en C , pero también es abierto, luego por conexión $C = U_1 \cup U_2$, y concluimos que C es homeomorfa (difeomorfa) a S^1 .

La existencia de la aplicación requerida en J_1 es trivial en el caso continuo, y en el caso diferenciable se sigue del resultado siguiente:

(*) Si $f :]a, b[\rightarrow]a, b[$ es un difeomorfismo creciente, existe otro difeomorfismo g que coincide con f en $](a+b)/2, b[$ y que es la identidad en un intervalo $]a, a + \delta[$.

De aquí se sigue el resultado análogo en el que f y g coinciden en la primera mitad del intervalo y basta aplicar ambos resultados a la función α en los intervalos $]0, \pi/2[$ y $] \pi, 3\pi/2[$, pues los dos difeomorfismos obtenidos pueden enlazarse con la identidad en $[\pi/2, \pi]$.

Para probar (*) no perdemos generalidad si suponemos que $a = 0$. Tomamos $0 < c < b/2$, llamamos $\epsilon = f(c) > 0$, consideramos una función diferenciable

creciente $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que valga 0 hasta c y que valga 1 a partir de $b/2$ y consideramos $\tilde{f}(x) = u(x)(f(x) - \epsilon)$, que es una función diferenciable creciente que vale 0 hasta c y vale $f - \epsilon$ a partir de $b/2$. Ahora tomamos una función diferenciable $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que coincida con la identidad hasta un cierto $\delta > 0$ y crezca hasta valer constantemente ϵ a partir de $b/2$ (puede obtenerse integrando una función que pase de valer constantemente 1 a valer constantemente 0). Entonces $g(x) = \tilde{f}(x) + v(x)$ es estrictamente creciente y cumple lo requerido. ■

Volviendo a la prueba, a partir de aquí podemos suponer que todos los pares de cartas ϕ_1 y ϕ_2 de C en las condiciones indicadas cumplen que $U_1 \cap U_2$ es conexo, y tenemos que probar que C es homeomorfa (difeomorfa) a \mathbb{R} .

Ahora la situación es la que ilustra la primera figura de la prueba. Vamos a añadir una condición adicional al par de cartas que estamos considerando, y es que se extiendan a cartas sobre abiertos mayores que contengan a las clausuras de U_1 y U_2 , respectivamente. Esto asegura que α se extiende a un homeomorfismo (difeomorfismo) sobre un intervalo abierto que contiene a los extremos de $J = \phi_1[U_1 \cap U_2]$. Componiendo ϕ_1 con un homeomorfismo (difeomorfismo) adecuado (pero sin tocar ϕ_2) podemos suponer que $J_1 =]c, b[$, $J_2 =]a, c'[$ y que $J = J' =]a, b[$, con $c < a < b < c'$, de modo que α es creciente.

Usando que α puede extenderse a un homeomorfismo o difeomorfismo (creciente) un poco más a la izquierda de a , es fácil ver que de hecho puede extenderse a un difeomorfismo definido sobre J_1 . Componiendo ϕ_1 con dicho difeomorfismo obtenemos una nueva carta que coincide con ϕ_2 en $U_1 \cap U_2$, luego ϕ_2 se extiende a una carta $U_1 \cup U_2 \rightarrow]c, c'[$.

En resumen, hemos probado que, dadas dos cartas (extendibles) de C con una parte de su dominio en común, es posible extender una de ellas al dominio de la otra.

Si C puede cubrirse por un número finito de abiertos coordenados extendibles, es claro que a partir de ellos puede obtenerse una carta cuyo dominio sea todo C , lo cual prueba que C es homeomorfa (difeomorfa) a un intervalo abierto (o, equivalentemente, a \mathbb{R}). A partir de aquí suponemos lo contrario.

Los abiertos coordenados de C cuya clausura está contenida en otro abierto coordenado forman una base de C , de la que podemos extraer una base numerable. Llamémosla $\{U_i\}_{i=0}^{\infty}$. Sea $\phi_i : U_i \rightarrow I_i$ una carta sobre U_i extendible a un entorno de \bar{U}_i .

Definimos una subsucesión $\{U'_i\}_{i=0}^{\infty}$ partiendo de $U'_0 = U_0$ y de modo que, una vez definidos U'_0, \dots, U'_k , tomamos $U'_{k+1} = U_i$, donde i es el menor índice tal que U_i corta a la unión $U'_0 \cup \dots \cup U'_k$ sin estar contenido en ella (existe, pues estamos suponiendo que C no puede cubrirse por un número finito de abiertos U_i).

Es fácil ver entonces que $C = \bigcup_k U'_k$, pues en caso contrario, si llamamos U a la unión, por conexión U no es cerrado en C , luego existe un $p \in \bar{U} \setminus U$, y existirá un i tal que $p \in U_i$. Sea k_0 tal que $U'_{k_0} \cap U_i \neq \emptyset$. Entonces U_i corta a

cualquier unión $U'_0 \cup \dots \cup U'_k$, para $k \geq k_0$ y no está contenida en ella, luego la sucesión $\{U'_k\}_{k=k_0}^\infty$ no puede contener ningún U'_j con $j \geq i$, lo cual es absurdo.

Ahora podemos definir una sucesión de cartas $\{\phi'_k\}_{k=0}^\infty$ de modo que cada $\phi'_k : U'_0 \cup \dots \cup U'_k \rightarrow J'_k$ extiende a las anteriores y J'_k es un intervalo abierto acotado, y a su vez todas ellas determinan una carta $\phi' : C \rightarrow J'$, donde J' es un intervalo abierto en \mathbb{R} (acotado o no). Esto prueba que C es homeomorfa (difeomorfa) a \mathbb{R} . ■

En la sección 3.3 abordaremos la clasificación de las superficies compactas y demostraremos que cualquiera de ellas es homeomorfa a una de una lista de superficies que habremos construido previamente. En 8.33 o, alternativamente, en 10.3, usaremos la topología algebraica para demostrar que dos superficies distintas de la lista no son homeomorfas entre sí, lo que completará la clasificación.

1.5 Homotopías

La topología algebraica asocia a cada espacio topológico una serie de invariantes topológicos, es decir, invariantes por homeomorfismos, pero sucede que en realidad son invariantes por una relación de “similitud” más débil que el homeomorfismo, la homotopía, que vamos a estudiar en esta sección.

La idea intuitiva es que si consideramos, por ejemplo, las letras I, H, O, P como espacios topológicos, ninguno es homeomorfo a los restantes. Por ejemplo, una H no es homeomorfa a las restantes porque en la H podemos eliminar un punto y obtener tres componentes conexas, mientras que en las demás esto no es posible. Sin embargo, la H resulta ser homotópica a la I en el sentido de que podemos reducir progresivamente el segmento vertical derecho hasta obtener \vdash y luego reducir progresivamente el segmento vertical hasta obtener una I. En cambio, no es posible transformar una O en un I de este modo, pero una P sí que puede convertirse en una O reduciendo paulatinamente su “pie” hasta hacerlo desaparecer.

Para formalizar esta idea necesitamos el concepto de homotopía entre funciones continuas:

Definición 1.26 Diremos que dos aplicaciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos son *homotópicas* si existe $F : I \times X \rightarrow Y$ continua tal que $F_0 = f$ y $F_1 = g$, donde, para cada $0 \leq t \leq 1$, la aplicación $F_t : X \rightarrow Y$ es la dada por $F_t(x) = F(t, x)$. Se dice que F es una *homotopía* de f a g .

En tal caso, las aplicaciones $F(-, x) : I \rightarrow Y$ son arcos continuos que unen $f(x)$ con $g(x)$, de modo que la homotopía entre f y g consiste en que es posible trazar caminos en Y que vayan desde cada punto $f(x)$ hasta cada punto $g(y)$ de modo que la aplicación F que determina todos los caminos sea continua.

Es fácil ver que la homotopía es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las aplicaciones continuas entre dos espacios topológicos dados. Por

ejemplo, para probar la transitividad basta observar que si F es una homotopía de f a g y G es una homotopía de g a h , entonces una homotopía de f a h viene dada por

$$H(t, x) = \begin{cases} F(2t, x) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ G(2t - 1, x) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

El teorema siguiente proporciona una condición suficiente muy simple para que dos aplicaciones en un subespacio de \mathbb{R}^n sean homotópicas:

Teorema 1.27 Sean $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ dos aplicaciones continuas de un espacio topológico X en un subespacio $Y \subset \mathbb{R}^n$. Si para todo $x \in X$ se cumple que el segmento de extremos $f_0(x)$ y $f_1(x)$ está contenido en Y , entonces f_0 y f_1 son homotópicas.

DEMOSTRACIÓN: Basta considerar $F(t, x) = tf_0(x) + (1 - t)f_1(x)$. ■

En particular, dos aplicaciones continuas cualesquiera de un espacio X en un subconjunto convexo de \mathbb{R}^n son homotópicas. En cambio, veremos más adelante que no todo par de aplicaciones de un espacio X en la esfera S^n son homotópicas, pero del teorema anterior se sigue una condición suficiente para que lo sean:

Teorema 1.28 Sean $f_0, f_1 : X \rightarrow S^n$ dos aplicaciones continuas tales que para todo $x \in X$ se cumpla que $f_0(x) \neq -f_1(x)$. Entonces f_0 y f_1 son homotópicas.

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior son homotópicas si las consideramos como aplicaciones en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, pues el segmento que une cada par de puntos $f_0(x)$, $f_1(x)$ no pasa por el origen. Consideramos la composición de una homotopía entre ambas con la aplicación $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$ dada por $x \mapsto x/\|x\|$. Como es continua y deja fijos a los puntos de S^n , es fácil ver que dicha composición es una homotopía $G : I \times X \rightarrow S^n$ entre f_0 y f_1 . ■

Teorema 1.29 Si $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ y $g_0, g_1 : Y \rightarrow Z$ son dos pares de aplicaciones homotópicas, entonces $f_0 \circ g_0$ es homotópica a $f_1 \circ g_1$.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos homotopías f_t y g_t . Entonces es claro que $f_t \circ g_0$ es una homotopía entre $f_0 \circ g_0$ y $f_1 \circ g_0$, pero $f_1 \circ g_t$ es una homotopía entre $f_1 \circ g_0$ y $f_1 \circ g_1$, luego por transitividad $f_0 \circ g_0$ es homotópica a $f_1 \circ g_1$. ■

Retractos por deformación Ahora ya podemos introducir la noción de homotopía entre espacios topológicos, pero empezaremos con una noción más fuerte:

Definición 1.30 Sea C un subespacio de un espacio topológico X . Una *retracción* de X en C es una aplicación continua $r : X \rightarrow C$ que deja invariantes a los puntos de C . Si existe una retracción de X en C se dice que C es un *retracto* de X .

Diremos que C es un *retracto por deformación* de X si existe una retracción $r : X \rightarrow C$ homotópica a la identidad. Diremos que C es un *retracto por deformación fuerte* de X si además la homotopía $F : I \times X \rightarrow C$ entre r y la identidad cumple que $F(t, c) = c$ para todo $(t, c) \in I \times C$.

En otras palabras, un subconjunto $C \subset X$ es un retracto por deformación de X si cada punto de X se puede llevar continuamente hasta su imagen en C por una retracción, y es un retracto por deformación fuerte si además los puntos de C no necesitan moverse para garantizar la continuidad de la deformación.

Observemos que si C es un retracto de un espacio de Hausdorff X , necesariamente C es cerrado en X , pues C es el conjunto de los puntos de X en los que la retracción $r : X \rightarrow C$ coincide con la identidad.

Por otra parte, es trivial que todo punto $x_0 \in X$ es un retracto de X (mejor dicho, $\{x_0\}$ es un retracto de X), pues la función constantemente igual a x_0 es una retracción (la única posible), pero no es necesariamente un retracto por deformación.

Un espacio topológico X es *contractible* si la identidad en X es homotópica a una función constante. Si, concretamente, la identidad es homotópica a la función constantemente igual a x_0 , se dice que X se puede contraer a x_0 , lo cual equivale a que x_0 sea un retracto por deformación de X .

Veamos algunos ejemplos:

- *Todo subespacio convexo de \mathbb{R}^n es contractible.*

En efecto, por la observación tras el teorema 1.27, todo punto en un subespacio convexo $X \subset \mathbb{R}^n$ es un retracto por deformación de X (y analizando la prueba se ve que, de hecho, es un retracto por deformación fuerte).

- *Si $P \in S^n$, entonces $S^n \setminus \{P\}$ es contractible.*

Basta tener en cuenta que $S^n \setminus \{P\}$ es homeomorfo a \mathbb{R}^n . Una prueba directa consiste en observar que la identidad en $S^n \setminus \{P\}$ es homotópica a la función constante $-P$. Basta considerar la homotopía construida en el teorema 1.28, que no es sino la dada por

$$H_t(x) = \frac{t(-P) + (1-t)x}{\|t(-P) + (1-t)x\|}.$$

Ciertamente, $H_t(x)$ no toma nunca el valor P , luego es una homotopía en $S^n \setminus \{P\}$.

- *S^n es un retracto por deformación fuerte de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.*

En efecto, una retracción es $r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$ dada por $r(x) = x/\|x\|$, y una homotopía entre ella y la identidad es la dada por

$$H(t, x) = (1-t)x + t \frac{x}{\|x\|}.$$

En particular, S^1 es un retracto por deformación fuerte de $B^2 \setminus \{0\}$ (basta considerar la restricción de la retracción y la homotopía que hemos considerado $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ en S^1).

- S^{n-1} es homeomorfa a un retracto por deformación fuerte de S^n menos dos puntos.

Esto se debe a que S^n menos dos puntos es homeomorfa a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Explícitamente, si consideramos, por ejemplo, los “polos” $N = (0, \dots, 0, 1)$ y $S = (0, \dots, 0, -1)$, podemos ver directamente que el “ecuador”

$$\tilde{S}^{n-1} = \{x \in S^n \mid x_{n+1} = 0\}$$

es un retracto por deformación fuerte de $S^n \setminus \{N, S\}$. Una retracción es la aplicación $r : S^n \setminus \{N, S\} \rightarrow \tilde{S}^{n-1}$ dada por

$$r(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{(x_1, \dots, x_n, 0)}{\|(x_1, \dots, x_n, 0)\|},$$

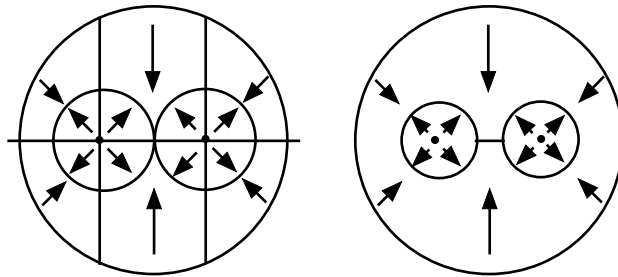
y la homotopía es

$$H_t(x) = \frac{tr(x) + (1-t)x}{\|tr(x) + (1-t)x\|}.$$

Obviamente \tilde{S}^{n-1} es homeomorfo a S^{n-1} .

Más en general, S^{n-1} es homeomorfa a un retracto por deformación de S^n menos dos cualesquiera de sus puntos. Basta tener en cuenta, por ejemplo, el teorema 1.23 implica que existen homeomorfismos de S^n en sí mismo que dejan fijo al polo norte N y transforman cualquier otro punto $Q \in S^n$ en el polo sur S (aunque tales homeomorfismos también pueden construirse explícitamente sin dificultad).

- Las dos circunferencias tangentes de la figura de la izquierda son un retracto por deformación fuerte de B^2 menos los dos centros:



En efecto, una retracción se obtiene combinando cuatro retracciones distintas: dos retracciones radiales de los interiores de los círculos sobre las circunferencias, las proyecciones verticales en las dos franjas intermedias y dos retracciones radiales desde el exterior de las circunferencias sobre las

dos piezas laterales. Como coinciden sobre las dos rectas verticales que separan las definiciones, la combinación es una función continua. Es fácil definir una homotopía que lleve a cabo la retracción gradualmente.

- *Las dos circunferencias unidas por un segmento de la figura de la derecha son también un retracto por deformación fuerte de B^2 menos los dos centros.*

La justificación es completamente análoga.

Sin la ayuda de la topología algebraica no es fácil probar resultados negativos, como, por ejemplo, el teorema 2.5, según el cual S^n no es un retracto de \mathbb{R}^n .

Volviendo al ejemplo informal considerado al principio de esta sección, ahora podemos decir que una I es homeomorfa a un retracto por deformación fuerte de una H , mientras que una O es homeomorfa a un retracto por deformación fuerte de una P .

Homotopía entre espacios topológicos Podemos decir que, cuando un espacio es un retracto por deformación de otro (u homeomorfo a un retracto por deformación fuerte de otro), entre ambos hay un cierto parecido más laxo que el que se da cuando son homeomorfos. Por ejemplo, una H se parece más a una I que a una O , porque la H y la I no tienen circuitos cerrados, mientras que una O se parece más a una P que a una I . Sin embargo, no podemos definir un concepto de “similitud laxa” a partir de la noción de retracto por deformación. Para entender por qué observemos de nuevo los los espacios de la figura:



En los ejemplos precedentes hemos visto que ambos son retractos por deformación fuertes de un mismo espacio (una bola cerrada menos dos puntos interiores.), pero sucede que ninguno de los dos es homeomorfo a un retracto por deformación fuerte del otro. Más aún, ninguno es homeomorfo a un subespacio del otro.

Para probarlo probamos primero que \mathbb{R} no contiene subespacios homeomorfos a S^1 , mientras que un subespacio de S^1 homeomorfo a S^1 tiene que ser necesariamente todo S^1 . En efecto, basta observar que si $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces la función $g(x) = f(x) - f(-x)$ cumple $g(-x) = -g(x)$, luego por conexión tiene que tomar el valor 0 en algún punto x , luego $f(x) = f(-x)$ y, por consiguiente, f no es inyectiva. Similarmente, si $f : S^1 \rightarrow S^1$ es inyectiva y continua, tiene que ser suprayectiva, pues si $p \in S^1$ no está en la imagen, entonces $S^1 \setminus \{p\}$ es un espacio homeomorfo a \mathbb{R} que contiene un subespacio homeomorfo a S^1 , en contra de lo que acabamos de probar.

Ahora llamemos X e Y a los dos espacios precedentes y veamos que los únicos subespacios de X homeomorfos a S^1 son las dos circunferencias obvias.

En efecto, un homeomorfismo $f : S^1 \rightarrow X$ entre S^1 y un subespacio de X debe contener en su imagen al punto de contacto p entre ambas circunferencias, pues en caso contrario $f[S^1]$ debería estar en una de las dos componentes conexas de $X \setminus \{p\}$, que son homeomorfas a intervalos, pero un intervalo no contiene copias de S^1 . Si $q \in S^1$ cumple $f(q) = p$, entonces, como $S^1 \setminus \{q\}$ es conexo, su imagen tiene que estar en una de las dos componentes conexas de $X \setminus \{p\}$, luego $f[S^1]$ está contenida en una de las dos circunferencias de X , luego tiene que ser exactamente una de ellas. Similarmente se prueba que Y no contiene más que las dos copias obvias de S^1 , luego un hipotético homeomorfismo entre X y un subespacio de Y o viceversa debe biyectar los dos pares de circunferencias, pero esto es imposible, porque las circunferencias son disjuntas en Y , pero no en X . ■

Esto nos lleva a pasar a una definición más general que sí que dé lugar a una relación de equivalencia:

Definición 1.31 Dos espacios topológicos X e Y son *homotópicos* si existen aplicaciones continuas $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tales que $f \circ g$ es homotópico a la identidad en X y $g \circ f$ es homotópico a la identidad en Y .

Si X es un retracto por deformación de Y , entonces X e Y son homotópicos, pues la definición se cumple tomando como f la inclusión y como g una retracción.

En particular, un espacio contractible es homotópico a un punto, y el recíproco también es cierto: si un espacio X es homotópico a un punto $Y = \{y\}$, entonces, con la notación de la definición precedente, $f \circ g$ es la función constante $g(y)$, y es homotópica a la identidad, luego X es contractible.

Teorema 1.32 *La homotopía es una relación de equivalencia entre espacios topológicos.*

Claramente la homotopía es reflexiva y simétrica. Para probar que es transitiva suponemos que un espacio X es homotópico a otro Y y que éste a su vez es homotópico a Z . Sean $f_0 : X \rightarrow Y$, $g_0 : Y \rightarrow X$, $f_1 : Y \rightarrow Z$, $g_1 : Z \rightarrow Y$ aplicaciones según la definición de homotopía. Según 1.29, tenemos que $f_0 \circ f_1 \circ g_1 \circ g_0$ es homotópica a $f_0 \circ g_0$, que a su vez es homotópica a la identidad en X . Similarmente al revés. ■

Así pues, como las dos circunferencias tangentes y las unidas por un segmento son ambas retractos de una bola menos dos puntos, ambas son homotópicas a la bola menos dos puntos y, por transitividad, ambos espacios son homotópicos.

Ejercicio: Particularizar la prueba del teorema anterior para encontrar una homotopía explícita entre estos dos espacios, o bien encontrar una directamente.

Ciertamente, dos espacios homeomorfos son homotópicos, pues si f es un homeomorfismo la definición de homotopía se cumple con f y f^{-1} . El recíproco no es cierto pues, por ejemplo, todos los espacios contractibles son homotópicos entre sí. Más concretamente, \mathbb{R}^n es homotópico a \mathbb{R}^m , para cualesquiera m y n , o a B^n , y ciertamente \mathbb{R}^n no es homeomorfo al compacto B^n .

Probamos ahora un teorema sobre extensión de homotopías que necesitaremos en el capítulo siguiente:

Teorema 1.33 *Sea X un espacio topológico tal que $I \times X$ sea normal, sea $A \subset X$ cerrado, $f : A \rightarrow U$ una función continua en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Si f es homotópica a una constante, entonces puede extenderse a una función continua $\tilde{f} : X \rightarrow U$ homotópica a una constante.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $F : I \times A \rightarrow U$ una homotopía entre la función constante x_0 y f . Podemos extenderla a una función continua

$$F : (\{0\} \times X) \cup (I \times A) \rightarrow U$$

que tome el valor x_0 en $\{0\} \times X$. Como $I \times X$ es normal, el teorema de Tietze aplicado a cada función coordenada de F nos da una extensión continua $\bar{F} : I \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$. Vamos a modificarla para asegurar que toma valores en U . Sea $V = \bar{F}^{-1}[U]$. Entonces $(\{0\} \times X) \cup (I \times A) \subset V \subset I \times X$. Como I es compacto, existe un abierto² $A \subset W \subset X$ tal que $I \times W \subset V$.

Se cumple que X es normal, porque $\{0\} \times X$ es cerrado en $I \times X$, que es normal, luego existe $\phi : X \rightarrow [0, 1]$ continua tal que $\phi|_{X \setminus W} = 0$ y $\phi|_A = 1$. Consideramos $g : X \rightarrow (\{0\} \times X) \cup (I \times W) \subset V$ dada por $g(x) = (\phi(x), x)$.

Ahora podemos definir $\tilde{f} : X \rightarrow U$ mediante $\tilde{f}(x) = \bar{F}(\phi(x), x)$, que para puntos $x \in A$ cumple $\tilde{f}(x) = \bar{F}(1, x) = f(x)$, luego es una extensión de f . Además, $F^* : I \times X \rightarrow U$ dada por $F^*(t, x) = \bar{F}(t\phi(x), x)$ es una homotopía entre la constante x_0 y \tilde{f} . ■

La propiedad de extensión de homotopías Más adelante necesitaremos considerar una propiedad técnica relacionada con homotopías. Esencialmente la necesitamos porque figura en la hipótesis del teorema 1.47.

Definición 1.34 Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ un subespacio. Diremos que (X, A) tiene la *propiedad de extensión de homotopías* si cuando $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua y $H : I \times A \rightarrow Y$ es una homotopía entre $f|_A$ y otra función H_1 , existe una homotopía $\tilde{H} : I \times X \rightarrow Y$ entre $H_0 = f$ y otra función \tilde{H}_1 de modo que \tilde{H} extiende a H .

Equivalentemente, (X, A) tiene la propiedad de extensión de homotopías si toda función continua $H : (\{0\} \times X) \cup (I \times A) \rightarrow Y$ admite una extensión continua a $I \times X$.

En particular, la identidad

$$(\{0\} \times X) \cup (I \times A) \rightarrow (\{0\} \times X) \cup (I \times A)$$

admite una extensión continua $r : I \times X \rightarrow (\{0\} \times X) \cup (I \times A)$, lo cual significa que $(\{0\} \times X) \cup (I \times A) \rightarrow$ es un retracts de $I \times X$.

El recíproco también es cierto:

²Fijado $a \in A$, para cada $t \in I$ existen abiertos $(t, a) \in J_t \times W_{t,a} \subset V$. Tomamos un subcobrimiento finito de los J_t , tomamos la intersección finita de los $W_{t,a}$ y así tenemos un abierto W_a tal que $I \times W_a \subset V$. Finalmente tomamos $W = \bigcup_a W_a$.

Teorema 1.35 *Un par de espacios topológicos (X, A) tiene la propiedad de extensión de homotopías si y sólo si $(\{0\} \times X) \cup (I \times A)$ es un retracto de $I \times X$.*

DEMOSTRACIÓN: Ya hemos probado una implicación. Recíprocamente, si $r : I \times X \rightarrow (\{0\} \times X) \cup (I \times A)$ es una retracción, vemos que componiendo con r obtenemos una extensión continua de cualquier aplicación continua dada $(\{0\} \times X) \cup (I \times A) \rightarrow Y$. ■

De momento no estamos en condiciones de dar ejemplos interesantes de espacios que cumplen esta propiedad.

Buenos cubrimientos en variedades diferenciales Al tratar con variedades diferenciales, vamos a necesitar en alguna ocasión un hecho no trivial cuya prueba requiere resultados del capítulo VII de [GD] (entendemos que la definición de variedad diferencial se incluye la existencia de una base numerable):

Teorema 1.36 *Si V es una variedad diferencial, todo cubrimiento abierto de V tiene un refinamiento localmente finito \mathcal{U} tal que las intersecciones finitas no vacías de abiertos de \mathcal{U} son contractibles.*

DEMOSTRACIÓN: El teorema de Whitney [GD 2.36] afirma que V puede sumergirse en \mathbb{R}^m , para un m suficientemente grande, lo cual permite dotarla de una métrica de Riemann ([GD 4.2]). El teorema [GD 7.32] nos da que las bolas abiertas convexas forman una base de V , luego por 1.15 podemos tomar un cubrimiento \mathcal{U} de V localmente finito formado por bolas abiertas convexas. Así, si W es una intersección finita no vacía de abiertos de \mathcal{U} , es convexa por [GD 7.31], luego si $p \in W$ tenemos que W es un entorno normal de p , lo cual significa [GD 6.21] que es difeomorfo (a través de la exponencial \exp_p) a un abierto estrellado de $T_p(V)$, que a su vez es difeomorfo a un abierto estrellado de \mathbb{R}^n . En particular, W es contractible. ■

Los cubrimientos en las condiciones del teorema anterior se llaman *buenos cubrimientos* de V , y no existen en general en toda variedad topológica.

1.6 Retractos absolutos de entornos

En esta sección probaremos que las variedades topológicas tienen una propiedad nada trivial. El teorema de Tietze es una propiedad de todos los espacios normales, pero nos va a interesar verlo como una propiedad del intervalo I (o de \mathbb{R}), y en ese sentido es mucho más restrictiva:

Definición 1.37 Un espacio metrizable X es un *retracto absoluto* si cuando Y es un espacio metrizable, $C \subset Y$ es un cerrado y $f : C \rightarrow X$ es una aplicación continua, entonces existe una aplicación continua $F : Y \rightarrow X$ que extiende a f .

Así pues, en estos términos, el teorema de Tietze afirma que I y \mathbb{R} son retratos absolutos. Obviamente, ser un retrato absoluto es una propiedad topológica, luego se conserva por homeomorfismos, luego todos los espacios topológicos homeomorfos a I o a \mathbb{R} son retratos absolutos.

El nombre de “retrato absoluto” se debe a que, según el teorema siguiente, un retrato absoluto es un retrato de todo espacio métrico que lo contenga como subespacio cerrado:

Teorema 1.38 *Si X es un retrato absoluto, Y es un espacio métrico y $C \subset Y$ es un subespacio cerrado homeomorfo a X , entonces C es un retrato de Y .*

DEMOSTRACIÓN: Basta extender un homeomorfismo $f : C \rightarrow X$ para obtener una aplicación continua $F : Y \rightarrow X$ y luego considerar la retracción $r = F \circ f^{-1}$. ■

Nota Puede probarse que el recíproco también es cierto, es decir, que si un espacio métrico X es un retrato de todo espacio métrico que lo contenga como subespacio cerrado, entonces X es un retrato absoluto, pero no vamos a necesitar este hecho. ■

Es inmediato comprobar que un producto de retratos absolutos es un retrato absoluto (basta extender por separado cada función coordenada). Por consiguiente, los espacios I^n y \mathbb{R}^n son retratos absolutos, luego las bolas B^n también lo son (pues B^n es homeomorfo a I^n), y también todos los abiertos convexos en \mathbb{R}^n (pues son homeomorfos a \mathbb{R}^n por 1.6) o los compactos convexos en \mathbb{R}^n de interior no vacío (homeomorfos a B^n por 1.4).

Pese a estos ejemplos, ser un retrato absoluto es una propiedad demasiado fuerte. Por ejemplo, es fácil ver que todo retrato absoluto X es contractible, pues, fijado $x_0 \in X$, la aplicación continua $\{0, 1\} \times X \rightarrow X$ dada por

$$h(t, x) = \begin{cases} x & \text{si } t = 0, \\ x_0 & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

se extiende a una homotopía $H : I \times X \rightarrow X$ entre la identidad y una aplicación constante. Más aún, puede probarse que hay espacios contractibles que no son retratos absolutos. Introducimos ahora una propiedad ligeramente más débil, pero que la poseen muchos más espacios:

Definición 1.39 Un espacio de Hausdorff X es un *retrato absoluto de entornos* si cuando Y es un espacio metrizable, C es un subespacio cerrado y $f : C \rightarrow X$ es una aplicación continua, entonces existe un entorno V de C en Y (es decir, un abierto en Y que contiene a C) tal que f se extiende a una función continua $F : V \rightarrow X$.

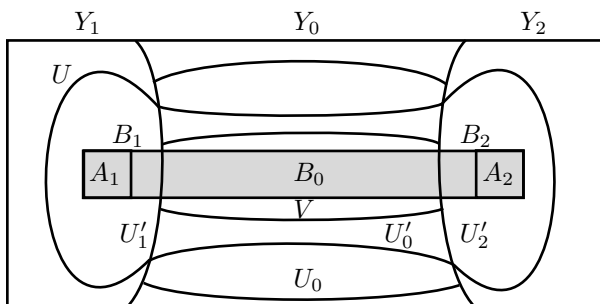
En particular, es claro que si un subespacio cerrado C de un espacio metrizable X es un retrato absoluto de entornos, entonces existe una retracción en C de un entorno de C en X .

Observemos que todo retracts absoluto es *a fortiori* un retracts absoluto de entornos, así como que todo abierto A en un retracts absoluto de entornos X es un retracts absoluto de entornos. En efecto, si C es cerrado en Y y $f : C \rightarrow A$ es una aplicación continua, entonces existe un entorno W de C en Y tal que f se extiende a una aplicación continua $G : W \rightarrow X$. Basta tomar $W = G^{-1}[A]$ y $F = G|_W$.

Así pues, dado que \mathbb{R}^n es un retracts absoluto, concluimos que todo abierto en \mathbb{R}^n es un retracts absoluto de entornos.

Teorema 1.40 Sean X_1 y X_2 dos abiertos en un espacio X tales que ambos son retracts absolutos de entornos. Entonces $X_1 \cup X_2$ también lo es.

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que $X = X_1 \cup X_2$. Sea Y un espacio metrizable, $B \subset Y$ un cerrado y $f : B \rightarrow X$ una aplicación continua. Llamemos $A_1 = B \setminus f^{-1}[X_2]$ y $A_2 = B \setminus f^{-1}[X_1]$. Claramente A_1 y A_2 son cerrados disjuntos en B . Como Y es normal existen abiertos disjuntos Y_1, Y_2 tales que $A_i \subset Y_i$. Llamemos $Y_0 = Y \setminus (Y_1 \cup Y_2)$. Sea $B_i = Y_i \cap B$, para $i = 0, 1, 2$. De este modo $f[B_1] \subset X_1$, $f[B_2] \subset X_2$, $f[B_0] \subset X_1 \cap X_2$.



Como $X_1 \cap X_2$ es un retracts absoluto de entornos, $f|_{B_0}$ se extiende a una función continua $g_0 : U_0 \rightarrow X_1 \cap X_2$, donde U_0 es un entorno de B_0 en Y_0 . Notemos que $U_0 = (U_0 \cup B) \cap Y_0$ es cerrado en $U_0 \cup B$, por lo que f y g_0 determinan una función continua $g : U_0 \cup B \rightarrow X$.

Ahora usamos que B_0 e $Y_0 \setminus U_0$ son cerrados disjuntos en Y_0 , por lo que existen abiertos disjuntos V y W (en Y_0) tales que $B_0 \subset V$ e $Y_0 \setminus U_0 \subset W$. Entonces, $U'_0 = Y_0 \setminus W$ es cerrado y $V \subset U'_0 \subset U_0$.

Tenemos que $U'_0 \cup B_i$ es cerrado en Y , y $g[U'_0 \cup B_i] \subset X_i$, para $i = 1, 2$, luego, al ser X_i un retracts absoluto de entornos, la aplicación $g|_{U'_0 \cup B_i}$ se extiende a una aplicación continua $G_i : U_i \rightarrow X_i$, donde U_i es un abierto en Y tal que $U'_0 \cup B_i \subset U_i$.

Sea $U'_i = U_i \cap (U'_0 \cup Y_i)$ y sea $U = U'_1 \cup U'_2$. Se cumple que cada U'_i es cerrado en U , pues $U \setminus U'_1 = U \cap Y_2$, y análogamente para U'_2 . Además $U'_0 = U'_1 \cap U'_2$, luego las dos funciones G_i determinan una función continua $F : U \rightarrow X$ que extiende a f . Finalmente observamos que

$$B \subset E = (U_1 \cap (V \cup Y_1)) \cup (U_2 \cap (V \cup Y_2)) \subset U,$$

y además E es abierto en Y .

En efecto, como $V \subset U_1 \cap U_2$ es abierto en Y_0 , podemos expresarlo como $V = Y_0 \cap V'$, donde $V' \subset U_1 \cap U_2$ es abierto en Y . Entonces

$$E = (U_1 \cap (V' \cup Y_1)) \cup (U_2 \cap (V' \cup Y_2)).$$

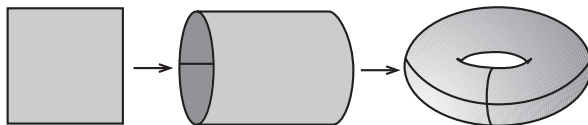
Por lo tanto, $F|_E : E \rightarrow X$ es una extensión de f a un entorno de B . ■

Teorema 1.41 *Toda variedad topológica compacta es un retracto absoluto de entornos.*

DEMOSTRACIÓN: Toda variedad topológica compacta puede cubrirse por un número finito de abiertos homeomorfos a bolas abiertas de \mathbb{R}^n . Cada uno de ellos es un retracto absoluto de entornos, y basta aplicar el teorema anterior. ■

1.7 Espacios cociente

La construcción de espacios topológicos cociente nos permite obtener (o describir) espacios más complejos a partir de otros más simples. Por ejemplo, un toro puede ser “construido” a partir de un cuadrado “pegando” sus lados dos a dos: si primero pegamos dos lados opuestos obtenemos un cilindro, de modo que los otros dos lados se han convertido en circunferencias. Si ahora pegamos estos dos lados obtenemos el toro.



De este modo, trabajar (en topología) con un toro es equivalente a trabajar con un cuadrado con el convenio de que los cuatro vértices son en realidad un mismo punto y que cada punto de un lado es el mismo que el correspondiente en el lado opuesto. En esta sección formalizaremos esta idea intuitiva.

Definición 1.42 Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación suprayectiva de un espacio topológico X en un conjunto Y . Definimos la *topología cociente* en Y asociada a f como la topología cuyos abiertos son los conjuntos $A \subset Y$ tales que $f^{-1}[A]$ es abierto en X .

Es fácil comprobar que la topología cociente así definida es realmente una topología en Y (no necesariamente de Hausdorff), respecto a la cual f se convierte en una aplicación continua.

Esto se aplica en particular al caso en que R es una relación de equivalencia en un espacio topológico X e $Y = X/R$ es el conjunto cociente (el conjunto formado por las clases de equivalencia). En tal caso se define el *espacio cociente* de X respecto de la relación R como el conjunto X/R dotado de la topología cociente asociada a la proyección canónica $p : X \rightarrow X/R$ que a cada elemento de x le asocia su clase.

La idea subyacente es que X/R es el espacio topológico que resulta de considerar que los puntos de X relacionados por R son “el mismo punto”. En estos términos, cuando en un cuadrado consideramos que cada punto de un lado “es el mismo” que el punto que tiene enfrente en el lado opuesto (lo que obliga a que los cuatro vértices sean “el mismo punto”) obtenemos un espacio cociente homeomorfo a un toro. Pronto probaremos esto con precisión. De momento veamos algunas condiciones suficientes para que un espacio cociente tenga la propiedad de Hausdorff:

Teorema 1.43 *Sea R una relación de equivalencia en un espacio de Hausdorff X que sea cerrada como subconjunto de $X \times X$. Si se cumple que la proyección $p : X \rightarrow X/R$ es abierta o X es compacto, el cociente X/R es un espacio de Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos en primer lugar que p es abierta. Dados $[x_1], [x_2] \in X/R$ distintos, entonces $(x_1, x_2) \in (X \times X) \setminus R$, luego existen abiertos $U_1, U_2 \subset X$ tales que $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2 \subset (X \times X) \setminus R$. Como p es abierta, tenemos que $p[U_1]$ y $p[U_2]$ son entornos de $[x_1]$, $[x_2]$, y son disjuntos, pues si $[x] \in p[U_1] \cap p[U_2]$, tenemos que existen $y_i \in U_i$ tales que $y_1 R x R y_2$, luego $(y_1, y_2) \in (U_1 \times U_2) \cap R$.

Si X es compacto, por 1.10 basta probar que la proyección $p : X \rightarrow X/R$ es cerrada. En efecto, tenemos que la proyección $\pi : X \times X \rightarrow X$ en la primera componente es cerrada y, si $A \subset X$ es cerrado, entonces $p^{-1}[p[A]]$ está formado por todos los elementos de X relacionados con algún elemento de A , luego $p^{-1}[p[A]] = \pi[R \cap (X \times A)]$ es cerrado en X y $p^{-1}[(X/R) \setminus p[A]] = X \setminus p^{-1}[p[A]]$ es abierto, luego $(X/R) \setminus p[A]$ es abierto en X/R , luego $p[A]$ es cerrado. ■

Identificaciones A menudo no nos interesará construir espacios cociente, sino reconocer que ciertos espacios dados son homeomorfos a cocientes de otros espacios, y para ello es conveniente introducir el concepto siguiente:

Definición 1.44 Una aplicación continua y suprayectiva $f : X \rightarrow Y$ entre dos espacios topológicos es una *identificación* si un conjunto $A \subset Y$ es abierto en Y si y sólo si $f^{-1}[A]$ es abierto en X .

De este modo, f es una identificación si y sólo si la topología de Y es la topología cociente asociada a f .

Notemos que en la definición de identificación podemos cambiar “abierto” por “cerrado” y obtenemos una definición equivalente.

Esto hace que toda aplicación continua y suprayectiva $f : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos que sea abierta o cerrada es una identificación.

En efecto, si $A \subset Y$ cumple que $f^{-1}[A]$ es abierto (resp. cerrado) en X , entonces $A = f[f^{-1}[A]]$ es abierto (resp. cerrado) en Y .

En particular, si X es compacto, toda aplicación continua y suprayectiva de X en otro espacio (de Hausdorff) Y es una identificación.

También es inmediato que si $Y \subset X$ toda retracción $r : X \rightarrow Y$ es una identificación, pues si $A \subset Y$, se cumple que $A = r^{-1}[A] \cap Y$, luego A es abierto si y sólo si lo es $r^{-1}[A]$.

En general, una aplicación $f : X \rightarrow Y$ define una relación de equivalencia en X dada por $x R_f y$ si y sólo si $f(x) = f(y)$. Si f es suprayectiva, entonces induce una biyección $\bar{f} : X/R_f \rightarrow Y$ dada por $\bar{f}([x]) = f(x)$, que hace conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow p & \uparrow \bar{f} \\ & & X/R_f \end{array}$$

En el caso particular de una proyección $p : X \rightarrow X/R$ en un cociente, tenemos que $R_p = R$ y que \bar{p} es la identidad en X/R .

Si Y es un espacio topológico y f es continua y suprayectiva, entonces la aplicación cociente $\bar{f} : X/R_f \rightarrow Y$ es continua, pues si $A \subset Y$ es abierto, $p^{-1}[\bar{f}^{-1}[A]] = f^{-1}[A]$ es abierto en X , luego $\bar{f}^{-1}[A]$ es abierto en X/R_f .

Similarmente vemos que una aplicación continua y suprayectiva $f : X \rightarrow Y$ es una identificación si y sólo si $\bar{f} : X/R_f \rightarrow Y$ es un homeomorfismo.

Otra consecuencia inmediata de la definición de identificación que conviene destacar es que si tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow h & \downarrow g \\ & & Z \end{array}$$

en el que f es una identificación, entonces g es continua si y sólo si lo es h .

En efecto, si h es continua y $A \subset Z$ es abierto, entonces $f^{-1}[g^{-1}[A]] = h^{-1}[A]$ es abierto, luego $g^{-1}[A]$ también lo es.

Ejemplo La aplicación $f : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $f(t) = (\cos 2\pi t, \text{sen } 2\pi t)$ es una identificación, pues es continua, suprayectiva y abierta.

En efecto, para probar que es abierta observamos en primer lugar que transforma entornos de 0 en entornos de 1, pues un entorno U de 0 contiene un intervalo $U' =]-\epsilon, \epsilon[$, con $0 < \epsilon < 1/2$, y entonces

$$f[U'] = \{(x, y) \in S^1 \mid |y| < \text{sen } \epsilon, x > 0\}$$

es un abierto en S^1 contenido en $f[U]$. Si $t_0 \in \mathbb{R}$ es arbitrario, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & S^1 \\ -t_0 \downarrow & & \downarrow g^{-2\pi t_0} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

donde $-t_0$ es la traslación $t \mapsto t - t_0$ y $g_{-2\pi t_0}$ es el giro determinado por la matriz

$$\begin{pmatrix} \cos(-2\pi t_0) & \operatorname{sen}(-2\pi t_0) \\ -\operatorname{sen}(-2\pi t_0) & \cos(-2\pi t_0) \end{pmatrix}.$$

Las dos flechas verticales son homeomorfismos, luego si U es un entorno de t_0 en \mathbb{R} , tenemos que $-t_0 + U$ es un entorno de 0, luego $f[-t_0 + U]$ es un entorno de 1 y $g_{-2\pi t_0}[f[-t_0 + U]] = f[U]$ es un entorno de t .

La relación de equivalencia inducida por f no es sino la congruencia módulo el subgrupo \mathbb{Z} . De hecho, f es un epimorfismo de grupos si consideramos $S^1 \subset \mathbb{C}$ como grupo con el producto usual de números complejos. Concluimos que el isomorfismo $\bar{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1$ es un homeomorfismo.

Además, toda función $g : \mathbb{R} \rightarrow X$ continua de periodo 1 (es decir, que cumpla $f(t+1) = f(t)$) induce una aplicación continua $\bar{g} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow X$ dada por $\bar{g}([t]) = g(t)$, que podemos componer con \bar{f}^{-1} para obtener una aplicación continua $g^* : S^1 \rightarrow X$ dada por $g^*(\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t) = g(t)$. ■

Ahora ya podemos tratar formalmente el ejemplo que hemos presentado en la introducción a este capítulo:

Ejemplo La aplicación $f : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(\phi, \theta) = (R \cos \theta + r \cos \phi \cos \theta, R \operatorname{sen} \theta + r \cos \phi \operatorname{sen} \theta, r \operatorname{sen} \phi),$$

donde $0 < r < R$, es continua y su imagen es un toro. Como el cuadrado es compacto, tenemos que el toro es homeomorfo al espacio que resulta de identificar en el cuadrado los puntos con la misma imagen por f , y es claro que cada punto se identifica únicamente con el correspondiente del lado opuesto, excepto los cuatro vértices, que se identifican a un solo punto. ■

Ejemplo: La cinta de Möbius Un ejemplo similar lo proporciona la cinta de Möbius M definida en la sección 7.1 de [An] mediante la parametrización

$$X(u, v) = \left(\left(1 + \frac{v}{2} \cos \pi u\right) \cos 2\pi u, \left(1 + \frac{v}{2} \cos \pi u\right) \operatorname{sen} 2\pi u, \frac{v}{2} \operatorname{sen} \pi u \right).$$

Allí la considerábamos definida en $\mathbb{R} \times]-1/2, 1/2[$ para que M fuera una variedad diferencial, pero también podemos considerar a X definida en la banda cerrada $\mathbb{R} \times [-1/2, 1/2]$ (con lo que le estamos añadiendo a M su borde) y así vemos que la restricción al cuadrado

$$X : [0, 1] \times [-1/2, 1/2] \rightarrow M$$

sigue siendo suprayectiva y los únicos puntos con la misma imagen son los de la forma $X(0, v) = X(1, -v)$. Por lo tanto, como espacio topológico, la cinta de Möbius M es homeomorfa al cociente que resulta de identificar dos lados opuestos de un cuadrado, pero no en la forma $(0, v) \sim (1, v)$ (con lo que el cociente sería homeomorfo a un cilindro), sino en la forma $(0, v) \sim (1, -v)$. ■

Identificación de un cerrado a un punto El tipo más simple de cociente que podemos formar a partir de un espacio topológico X consiste en tomar un cerrado $A \subset X$ y definir X/A como el espacio que resulta de identificar todos los puntos de A , es decir, el definido por la relación

$$x R y \text{ si y sólo si } x = y \text{ o } x, y \in A.$$

Si llamamos $a = [A] \in X/A$ a la clase de equivalencia formada por los puntos de A , tenemos que la proyección $p : X \rightarrow X/A$ se restringe a un homeomorfismo $p : X \setminus A \rightarrow X/A \setminus \{a\}$ y $A = p^{-1}[\{a\}]$. Por lo tanto, que A sea cerrado es una condición necesaria para que X/A pueda ser un espacio de Hausdorff, pero no es suficiente:

Suponiendo que X sea un espacio de Hausdorff, es fácil ver que X/A lo será también si y sólo si, para cada punto $x \in X \setminus A$, existen abiertos disjuntos $x \in U_1, A \subset U_2$.

Por ejemplo esto sucede si X es regular, y en particular se cumple si X es un espacio normal, luego, según los teoremas 1.8 y 1.9, se cumple siempre que X es compacto o metrizable. De hecho, en la prueba del teorema 1.9 se ve que es suficiente con que A sea compacto.

Ejemplo Se cumple que $B^n/S^{n-1} \cong S^n$.

Esto significa que al identificar a un punto la frontera de una bola cerrada obtenemos una esfera. Basta observar que la función $f : B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{1 - \|x\|} x$$

es un homeomorfismo que se extiende a una función continua $f : B^n \rightarrow S^n$ si identificamos $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ y consideramos que $f[S^{n-1}] = \{\infty\}$. Claramente es una identificación, pues es continua, cerrada y suprayectiva. Por lo tanto, induce un homeomorfismo $\bar{f} : B^n/S^{n-1} \rightarrow S^n$. ■

Ejemplo $(I \times S^n)/(\{0\} \times S^n) \cong B^{n+1}$.

Esto significa que si identificamos a un punto una de las dos circunferencias que componen la frontera de un cilindro obtenemos un disco cerrado. Basta considerar la aplicación $f : I \times S^n \rightarrow B^{n+1}$ dada por $f(t, u) = tu$, que es una identificación, pues es continua, cerrada y suprayectiva y sólo identifica los puntos de $\{0\} \times S^n$ al centro de B^{n+1} . Por lo tanto induce un homeomorfismo $\bar{f} : (I \times S^n)/(\{0\} \times S^n) \rightarrow B^{n+1}$. ■

Veamos una aplicación del ejemplo anterior:

Teorema 1.45 Una aplicación continua $f : S^n \rightarrow X$ es homotópica a una constante si y sólo si se extiende a una aplicación continua $\bar{f} : B^{n+1} \rightarrow X$.

DEMOSTRACIÓN: Una implicación es trivial: si existe la extensión \bar{f} , como B^{n+1} es homotópico a un punto, tenemos una homotopía $F : I \times B^{n+1} \rightarrow B^{n+1}$ entre $F_0 = 1$ la identidad en B^{n+1} y F_1 una constante. Componiéndola con \bar{f} y restringiéndola a $I \times S^n$ obtenemos una homotopía $\bar{F} : I \times S^n \rightarrow X$ entre f y una constante.

Recíprocamente, si tenemos una homotopía $F : I \times S^n \rightarrow X$ entre una constante F_0 y $F_1 = f$, entonces F es constante en $\{0\} \times S^n$, luego induce una aplicación continua $\bar{F} : (I \times S^n)/(\{0\} \times S^n) \rightarrow X$, que podemos componer con el homeomorfismo del teorema anterior para obtener una aplicación continua $\tilde{f} : B^{n+1} \rightarrow X$. Cada punto $x \in S^n \subset B^{n+1}$ se corresponde con $(1, x) \in \{1\} \times S^n$, sobre el que F actúa como $F(1, x) = f(x)$, luego \tilde{f} es una extensión de f . ■

Necesitaremos un par de teoremas sobre identificaciones a un punto. El primero nos da una condición suficiente para que el cociente sea contractible:

Teorema 1.46 *Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto compacto que sea un retracto por deformación fuerte de X . Entonces $a = p[A]$ es un retracto por deformación fuerte de X/A .*

DEMOSTRACIÓN: Por hipótesis tenemos una homotopía $H : I \times X \rightarrow X$ tal que H_0 es la identidad, $H_1 : X \rightarrow A$ es una retracción y $H_t(a) = a$ para todo $a \in A$. Definimos ahora \tilde{H} que haga conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} I \times X & \xrightarrow{H} & X \\ 1 \times \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ I \times X/A & \xrightarrow{\tilde{H}} & X/A \end{array}$$

Concretamente, si $x \notin A$ definimos $\tilde{H}_t([x]) = [H_t(x)]$ y $\tilde{H}_t(a) = a$. Es claro que \tilde{H} cierra el diagrama, y además es continua pues, si C es cerrado en X/A , entonces $\tilde{H}^{-1}[C] = (1 \times \pi)[H^{-1}[\pi^{-1}[C]]]$ es cerrado en X/A . También es obvio que \tilde{H} prueba que a es un retracto por deformación fuerte de X/A . ■

Veamos ahora una condición suficiente para que el cociente sea homotópico a X :

Teorema 1.47 *Si (X, A) satisface la propiedad de extensión de homotopías y A es contractible, entonces X/A es homotópico a X .*

DEMOSTRACIÓN: Sea $H : I \times A \rightarrow A$ una homotopía entre la identidad en A y una función constante H_1 . Por la propiedad de la extensión de homotopías H se extiende a una homotopía $\bar{H} : I \times X \rightarrow X$ entre la identidad en X y una función \bar{H}_1 que es constante en A . Para cada $t \in I$, existe una función continua $f_t : X/A \rightarrow X/A$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\bar{H}_t} & X \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ X/A & \xrightarrow{f_t} & X/A \end{array}$$

En efecto, como $\bar{H}_t|_A$ toma sus imágenes en A , la composición $\bar{H}_t \circ \pi$ es constante en A , luego induce una aplicación continua en el cociente. Es claro que f es continua como función de dos variables $f : I \times (X/A) \rightarrow X/A$, así como que f_0 es la identidad.

Para $t = 1$ tenemos que $\bar{H}_1[A]$ es un punto, por lo que \bar{H}_1 también induce una aplicación g que hace conmutativo el triángulo superior del diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\bar{H}_1} & X \\ \pi \downarrow & \nearrow g & \downarrow \pi \\ X/A & \xrightarrow{f_1} & X/A \end{array}$$

El diagrama inferior también es conmutativo, pues $\pi \circ g \circ \pi = \bar{H}_1 \circ \pi = \pi \circ f_1$ y, como π es suprayectiva, también $g \circ \pi = f_1$.

Ahora es fácil ver que g y π satisfacen la definición de homotopía entre X y X/A , pues $g \circ \pi = f_1$ es homotópica a la identidad a través de f y $\pi \circ g = \bar{H}_1$ es homotópica a la identidad a través de \bar{H} . ■

Sumas topológicas Podría pensarse que la definición que hemos dado de espacio cociente no es lo suficientemente general, ya que sólo permite identificar puntos de un mismo espacio, cuando a menudo resultará interesante formar nuevos espacios topológicos identificando puntos de un espacio con puntos de otro. No obstante, esto se reduce a formar un cociente de un único espacio topológico a través del concepto de suma topológica:

Definición 1.48 Sea $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos y sea

$$X = \bigoplus_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} X_i \times \{i\}.$$

Consideramos a $X_i \times \{i\}$ como espacio topológico con la topología que convierte a la biyección $X_i \rightarrow X_i \times \{i\}$ dada por $x \mapsto (x, i)$ en un homeomorfismo. Así podemos identificar a cada X_i con $X_i \times \{i\}$ y considerar que los X_i son subconjuntos disjuntos de X , y en este espacio consideramos a su vez la topología para la cual un conjunto A es abierto si y sólo si todos los conjuntos $A \cap X_i$ son abiertos. Es fácil comprobar que esto define realmente una topología en X , de modo que el espacio $\bigoplus_{i \in I} X_i$, con la topología que acabamos de asignarlo, se llama *suma topológica* de los espacios dados.

Es inmediato comprobar que cada X_i es abierto y cerrado en la suma topológica (y, más en general, lo mismo vale para cualquier unión $\bigcup_{i \in I_0} X_i$, con $I_0 \subset I$).

También es obvio que la suma topológica de una cantidad finita o numerable $\{X_i\}$ de variedades diferenciales de la misma dimensión admite una única estructura de variedad diferencial respecto a la cual cada X_i es una subvariedad. ■

Sumas amalgamadas Ahora ya podemos pegar espacios distintos para formar nuevos espacios. La forma más sencilla de hacerlo es de un homeomorfismo entre dos subespacios:

Definición 1.49 Sean X_1 y X_2 dos espacios topológicos y $h : C_1 \rightarrow C_2$ un homeomorfismo entre subespacios cerrados $C_i \subset X_i$. Definimos la *suma amalgamada* $X_1 \oplus_h X_2$ como el cociente de $X_1 \oplus X_2$ determinado por la relación de equivalencia R_h dada por

$$x R_h y \text{ si y sólo si } x = y \text{ o } x \in C_1, y = h(x) \text{ o } y \in C_1, x = h(y).$$

Llamemos $p : X_1 \oplus X_2 \rightarrow X_1 \oplus_h X_2$ a la proyección en el cociente y $C = p[C_1] = p[C_2]$. Las restricciones $p|_{X_i} : X_i \rightarrow X_1 \oplus_h X_2$ son cerradas.

En efecto, si $A \subset X_1$ es cerrado, también es cerrado en $X_1 \oplus X_2$, y $p[A]$ es cerrado en $X_1 \oplus_h X_2$ porque $p^{-1}[p[A]] = A \cup h[A \cap C_1]$, que es cerrado en $X_1 \oplus X_2$, y lo mismo vale para X_2 .

Por consiguiente, $p|_{X_i} : X_i \rightarrow p[X_i]$ es un homeomorfismo y $p[X_i]$ es cerrado en $X_1 \oplus_h X_2$. En otras palabras, p nos permite identificar a X_1 y X_2 con subespacios cerrados de $X_1 \oplus_h X_2$. Vistos así, tenemos que $X_1 \cap X_2 = C$.

Teorema 1.50 *La suma amalgamada de dos espacios de Hausdorff es un espacio de Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN: Con la notación precedente, veamos que se cumple este hecho:

Si $p_1 \in C_1$, $p_2 = h(p_1)$ y $p_1 \in U_1 \subset X_1$, $p_2 \in U_2 \subset X_2$ son conjuntos abiertos, existen abiertos $G_1 \subset U_1$, $G_2 \subset U_2$ tales que $p[G_1 \cup G_2]$ es abierto en $X_1 \oplus_h X_2$.

En efecto, Tenemos que $C_1 \cap U_1 \cap h^{-1}[U_2]$ es un entorno abierto de p_1 en C_1 , por lo que existe un abierto G'_1 en X_2 tal que $C_1 \cap U_1 \cap h^{-1}[U_2] = C_1 \cap G'_1$. Llamamos $G_1 = G'_1 \cap U_1$, de modo que igualmente $C_1 \cap U_1 \cap h^{-1}[U_2] = C_1 \cap G_1$.

Del mismo modo podemos tomar un abierto $p_2 \in G_2 \subset X_2$ de manera que $C_2 \cap U_2 \cap h[U_1] = C_2 \cap G_2$. Pero $h[C_1 \cap U_1 \cap h^{-1}[U_2]] = C_2 \cap U_2 \cap h[U_1]$ o, lo que es lo mismo, $h[C_1 \cap G_1] = C_2 \cap G_2$, de donde se sigue claramente que $p^{-1}[p[G_1 \cup G_2]] = G_1 \cup G_2$, por lo que $p[G_1 \cup G_2]$ es abierto en $X_1 \oplus_h X_2$.

Con esto ya es fácil probar la propiedad de Hausdorff. Si $p, q \in X_1 \oplus_h X_2$ y, por ejemplo, ambos están en C , consideramos sus antiimágenes $p_1, q_1 \in C_1$, $p_2, q_2 \in C_2$, tomamos abiertos disjuntos

$$p_1 \in U_1 \subset X_1, \quad q_1 \in V_1 \subset X_1, \quad p_2 \in U_2 \subset X_2, \quad q_2 \in V_2 \subset X_2$$

y, reduciéndolos mediante la propiedad que acabamos de probar, podemos exigir que $p[U_1 \cup U_2]$ y $p[V_1 \cup V_2]$ sean entornos disjuntos de p y q . Los casos en que sólo uno de los puntos está en C o ninguno lo está son más simples. ■

Ramos de espacios topológicos El caso más simple de suma amalgamada consiste en unir dos espacios X_1 y X_2 identificándolos únicamente a través de un punto de cada uno de ellos, es decir, fijados puntos $p_i \in X_i$, definimos el ramo $X_1 \vee X_2$ formado por X_1 y X_2 como su suma amalgamada a través de la aplicación $h : \{p_1\} \rightarrow \{p_2\}$. Explícitamente, la relación de equivalencia que define el cociente es

$$x R y \text{ si y sólo si } x = y \text{ o } \{x, y\} = \{p_1, p_2\}.$$

Equivalentemente, $X_1 \vee X_2 = (X_1 \oplus X_2)/\{p_1, p_2\}$ es el espacio que resulta de identificar a un punto el cerrado $\{p_1, p_2\}$ en $X_1 \oplus X_2$. Visto de esta forma tenemos garantizado que los ramos de espacios de Hausdorff son espacios de Hausdorff. Además así podemos generalizar fácilmente el concepto de ramo a familias arbitrarias de espacios topológicos:

Dada una familia de espacios $\{X_i\}_{i \in I}$ en los que hemos seleccionado puntos $p_i \in X_i$, definimos el ramo $\bigvee_{i \in I} X_i$ como el cociente de su suma topológica que resulta de identificar a un punto el cerrado $A = \{p_i \mid i \in I\}$. ■

Identificación de abiertos Veamos ahora qué sucede si en lugar de identificar dos cerrados identificamos dos abiertos en un espacio topológico:

Definición 1.51 Sea X un espacio topológico y $\phi : U_1 \rightarrow U_2$ un homeomorfismo entre dos abiertos de X con clausuras disjuntas. Llamaremos X_ϕ al espacio cociente que resulta de identificar a cada punto de U_1 con su imagen en U_2 , es decir, el determinado por la relación de equivalencia

$$x R_\phi y \text{ si y sólo si } x = y \text{ o } x \in U_1, y = \phi(x) \text{ o } y \in U_1, x = \phi(y).$$

Sea $\pi_\phi : X \rightarrow X_\phi$ la proyección canónica.

Notemos que la proyección π_ϕ es abierta, pues si $V \subset X$ es abierto, entonces $\pi_\phi^{-1}[\pi_\phi[V]] = V \cup \phi[V]$, que es abierto en X , luego $\pi_\phi[V]$ es abierto en X_ϕ .

Además, π_ϕ es un homeomorfismo local, es decir, todo punto de x tiene un entorno en el que π_ϕ es biyectiva (sirve cualquier abierto contenido en $X \setminus U_i$), luego es un homeomorfismo en su imagen.

Teorema 1.52 Sea X un espacio topológico de Hausdorff con una base numerable y $\phi : U_1 \rightarrow U_2$ un homeomorfismo entre dos abiertos de X con clausuras disjuntas.

1. El cociente X_ϕ es un espacio de Hausdorff si y sólo si no existe ninguna sucesión $\{x_n\}$ en U_1 convergente a un punto $p \in \partial U_1$ tal que $\{\phi(x_n)\}$ converge a un punto de ∂U_2 .
2. Si Y es otro espacio topológico, $\psi : V_1 \rightarrow V_2$ es un homeomorfismo entre dos abiertos de Y con clausuras disjuntas y $f : X \rightarrow Y$ es un

homeomorfismo que hace conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \xrightarrow{\phi} & U_2 \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ V_1 & \xrightarrow{\psi} & V_2 \end{array}$$

entonces f induce un homeomorfismo $\bar{f} : X_\phi \rightarrow Y_\psi$.

3. Si X es una variedad topológica, también lo es X_ϕ (supuesto que sea un espacio de Hausdorff).
4. Si X es una variedad diferencial, ϕ es un difeomorfismo y X_ϕ es un espacio de Hausdorff, entonces X_ϕ tiene una única estructura de variedad diferencial tal que π_ϕ es un difeomorfismo local. Además el apartado 2) se cumple con difeomorfismos en lugar de homeomorfismos.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\pi_\phi : X \rightarrow X_\phi$ la proyección en el cociente y llamemos $U = \pi[U_1] = \pi[U_2]$.

1) Sean $x, y \in X_\phi$ dos puntos distintos. Supongamos que uno de ellos, por ejemplo x , cumple $x \in U$. Entonces tiene dos antiimágenes $x_i \in U_i$. Si también se cumple que $y \in U$, entonces y tiene antiimágenes $y_i \neq x_i$ y basta tomar abiertos disjuntos $x_1 \in V_1 \subset U_1$, $y_1 \in W_1 \subset U_1$ y entonces $\pi_\phi[V_1]$ y $\pi_\phi[W_1]$ son entornos disjuntos de x e y .

Si, por el contrario, $y \in X_\phi \setminus U$, entonces tiene una única antiimagen y_0 , y basta tomar tres entornos disjuntos dos a dos $x_i \in V_i \subset U_i$, $y_0 \in W_0$, y entonces $\pi_\phi[V_1 \cap \phi^{-1}[V_2]]$ y $\phi[W_0]$ son entornos disjuntos de x e y .

Así pues, para pares de puntos de los cuales uno está en U , se cumple la propiedad de Hausdorff. A partir de aquí suponemos que $x, y \notin U$, con lo que cada uno tiene una única antiimagen, x_0, y_0 . Si uno de ellos, por ejemplo, x , está en $X_\phi \setminus \bar{U}$, podemos separar x_0, y_0 con abiertos disjuntos

$$x_0 \in V_0 \subset X \setminus (\bar{U}_1 \cup \bar{U}_2), \quad y_0 \in W_0,$$

y entonces $\pi_\phi[V_0]$, $\pi_\phi[W_0]$ son entornos disjuntos de x e y .

Por lo tanto, cualquier par de puntos de X_ϕ cumple la propiedad de Hausdorff salvo a lo sumo en el caso en que $x, y \in \partial U$. Como X tiene una base numerable, podemos tomar bases numerables decrecientes $\{V_n\}$, $\{W_n\}$ de entornos abiertos de x_0 e y_0 , respectivamente. Podemos suponer que $V_0 \cap W_0 = \emptyset$, con lo que, de hecho, $V_n \cap W_n = \emptyset$.

Claramente, x e y cumplen la propiedad de Hausdorff si y sólo si existe un índice n tal que $\pi_\phi[V_n] \cap \pi_\phi[W_n] = \emptyset$. Lo contrario sucede si y sólo si existen puntos $x_n \in V_n$, $y_n \in W_n$ tales que $\pi_\phi(x_n) = \pi_\phi(y_n) \in \pi_\phi[V_n] \cap \pi_\phi[W_n]$.

Como $x_n \neq y_n$, uno tiene que estar en U_1 y otro en U_2 . Tomando una subsucesión podemos suponer que $x_n \in V_n \cap U_1$, $y_n \in V_n \cap U_2$, luego $y_n = \phi(x_n)$, la sucesión $\{x_n\}$ converge a x_0 y se cumple la condición del enunciado.

Recíprocamente, si se cumple la condición del enunciado y q es el límite de $\{\phi(x_n)\}$, entonces $\pi_\phi(p)$ y $\phi_\phi(q)$ son puntos distintos de X_ϕ sin entornos disjuntos.

2) es inmediata.

3) es consecuencia de que π_ϕ es un homeomorfismo local.

4) Podemos formar un atlas de X compuesto por cartas $x : U \rightarrow \tilde{U}$ con dominios contenidos en $X \setminus U_1$ o bien en $X \setminus U_2$. Es claro entonces que las cartas $\bar{x} = \pi_\phi^{-1} \circ x : \pi_\phi[U] \rightarrow \tilde{U}$ forman un atlas en X_ϕ . En efecto, si $x' : V \rightarrow \tilde{V}$ es otra carta y, por ejemplo, $U \subset X \setminus U_1$, $V \subset X \setminus U_2$ (los otros casos posibles se tratan más fácilmente), entonces

$$\pi_\phi[U] \cap \pi_\phi[V] = \pi_\phi[U \cap V] \cup \pi_\phi[U \cap \phi[V]],$$

donde la unión es disjunta, y $\bar{x}^{-1} \circ \bar{x}'$ está definida en $x[U \cap V] \cup x[U \cap \phi[V]]$, en el primer abierto es igual a $x^{-1} \circ x'$, mientras que en el segundo es $x^{-1} \circ \phi^{-1} \circ x'$, luego $\bar{x}^{-1} \circ \bar{x}'$ es diferenciable.

Es claro que esta estructura diferencial convierte a π_ϕ es un difeomorfismo local y que esto la determina unívocamente.

Observemos que si X tiene una base numerable, lo mismo sucede con X_ϕ . El apartado 2) se prueba igualmente en el caso diferenciable. ■

Ejemplo Un caso sencillo en el que obtenemos un cociente de Hausdorff mediante la construcción precedente consiste en tomar $X =]0, 3[$ con el difeomorfismo $\phi :]0, 1[\rightarrow]2, 3[$ dado por $\phi(x) = 3 - x$. El cociente es difeomorfo a S^1 . A continuación vemos un ejemplo más sofisticado. ■

Suma conexa de variedades Si conectamos dos variedades topológicas mediante una suma amalgamada el resultado ya no es, salvo casos triviales, una variedad topológica. Veamos ahora una identificación ligeramente distinta que permite formar nuevas variedades topológicas (o diferenciales) a partir de dos dadas.

Sean X_1 y X_2 dos variedades topológicas (resp. diferenciales) de la misma dimensión n . Podemos considerarlas como una sola formando su suma topológica $X_1 \oplus X_2$. Sean $f_i : B^n \rightarrow X_i$ dos homeomorfismos en su imagen (resp. inmersiones regulares)³ y consideremos en $X_0 = (X_1 \setminus \{f_1(0)\}) \oplus (X_2 \setminus \{f_2(0)\})$ los abiertos $U_i = f_i[B_1(0)] \setminus \{f_i(0)\}$ y el homeomorfismo (resp. difeomorfismo) $\phi : U_1 \rightarrow U_2$ dado por $\phi = f_1^{-1} \circ \eta \circ f_2$, donde $\eta : B_1(0) \setminus \{0\} \rightarrow B_1(0) \setminus \{0\}$ es el difeomorfismo dado por

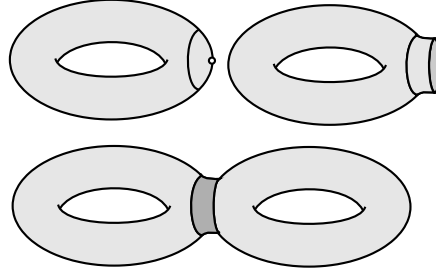
$$\eta(x) = \frac{\sqrt{1 - \|x\|^2}}{\|x\|} x.$$

Llamaremos *suma conexa* de X_1 y X_2 al cociente $X_1 \# X_2 = (X_1 \oplus X_2)_\phi$.

³Podemos admitir que X_i sean variedades diferenciales con frontera, pero entonces tomamos $f_i : B^n \rightarrow X_i \setminus \partial X_i$.

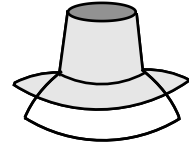
El teorema 1.52 implica que se trata de un espacio de Hausdorff, pues si una sucesión en U_1 converge a un punto de ∂U_1 (la frontera calculada en X_0), entonces f_1^{-1} la transforma en una sucesión en $B_1(0)$ convergente a un punto de S^{n-1} , luego η la transforma en una sucesión en $B_1(0)$ convergente a 0, y f_2 la transforma en una sucesión en X_2 convergente a $f_2(0)$, luego en X_0 no converge.

Por lo tanto, la suma topológica de variedades topológicas (resp. diferenciales) es una variedad topológica (resp. diferencial).



La figura inferior muestra la suma conexa de dos toros. Al quitarle un punto $f_1(0)$ a una variedad, podemos estirar el agujero microscópico hasta formar una “chimenea” y la suma conexa se forma superponiendo dos “chimeneas” formadas de este modo en dos variedades, pero cuidando de que los puntos situados cerca del borde de una (la “chimenea” no tiene realmente borde, sino que es abierta) se identifiquen con los puntos situados en la base de la otra para que las dos “chimeneas” se conviertan en un tubo de conexión.

Ésa es la misión del difeomorfismo η , que invierte uno de los discos perforados. Sin él la suma conexa no tendría la propiedad de Hausdorff, sino que las dos “chimeneas” superpuestas seguirían formando una “chimenea” con una “doble falda” en su base formada por el resto de las dos variedades, como muestra la figura.

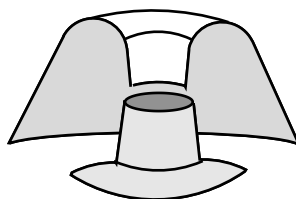


Puede probarse, aunque es un resultado nada trivial,⁴ que la construcción de la suma conexa “casi” no depende de la elección de los homeomorfismos de partida, en el sentido de que si tomamos otros obtenemos una variedad homeomorfa (difeomorfa). No vamos a entrar en esta cuestión, pero sí podemos explicar informalmente por qué hemos dicho “casi”.

Sucede que en realidad con el proceso descrito se puede llegar en algunos casos a dos variedades no homeomorfas entre sí. Para entenderlo, supongamos que hemos elegido cartas en un entorno de sendos puntos de dos toros de modo que la suma conexa es la que se muestra en la figura anterior, en la que a cada toro, al cortar un círculo, “le hemos sacado una chimenea” para solaparla con la del otro toro. Ahora supongamos que cambiamos uno de los homeomorfismos componiéndolo con $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_n)$, que cambia la orientación en B^n (en nuestro ejemplo sería B^2).

⁴La prueba depende de la llamada *conjetura del anillo*, que no fue probada completamente hasta 1969.

Entonces la suma conexa se obtendría “sacando una chimenea” de uno de los toros, pero “excavando un pozo” en el otro, de modo que el solapamiento se produce en el interior del toro que tiene el pozo, como indica la figura, en la que las dos superficies se muestran próximas, pero antes de solapar la chimenea con el pozo, y en la que hemos seccionado “el pozo” para ver su interior.



Estas dos formas de identificación “desde fuera” o “desde dentro” sí pueden dar lugar a variedades no homeomorfas, y precisar el tipo de solapamiento que estamos considerando requiere introducir el concepto de orientación de variedades topológicas, cosa que haremos más adelante.

Admitiendo que, salvo por la elección de la orientación de las cartas, la suma conexa no depende de la elección de las cartas, la homogeneidad de las variedades (teorema 1.23) implica que la suma conexa tampoco depende de la elección de los puntos alrededor de los cuales se lleva cabo la identificación.

Nada de lo que diremos más adelante se apoyará en el hecho de que las sumas conexas de variedades no dependen de la elección de las cartas. O bien las mencionaremos en comentarios marginales, o bien probaremos resultados sobre sumas conexas en los que la propia prueba mostrará que son ciertos independientemente de la elección de las cartas con las que se construyen. En particular, demostraremos (véase el ejemplo tras el teorema 12.6) que la suma conexa de superficies compactas es independiente de la elección de las cartas (incluyendo su orientación).

En la sección [GD 9.5] precisaremos estas ideas y demostraremos que la suma conexa es independiente de las inmersiones de partida en el caso de las variedades diferenciales.

Finalmente observamos que, aunque hemos definido las sumas conexas solapando sendas coronas de las variedades para justificar que el resultado es una variedad topológica / diferencial, es fácil ver que, como espacio topológico, la suma conexa es también la suma amalgamada de las variedades que resultan de eliminar en cada variedad la bola abierta $f_i[B_{1/\sqrt{2}}(0)]$ e identificar las dos superficies “agujereadas” por las esferas $f_i[\partial B_{1/\sqrt{2}}(0)]$ a través del homeomorfismo $f_1^{-1} \circ f_2$ (notemos que si $\|x\| = 1/\sqrt{2}$ entonces $\eta(x) = x$). ■

Los espacios proyectivos reales Consideremos el espacio proyectivo real $P^n(\mathbb{R})$, cuyos puntos son los subespacios vectoriales de dimensión 1 de \mathbb{R}^{n+1} . Si $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, escribiremos $[x] = \langle x \rangle \in P^n(\mathbb{R})$. Se dice que x es un vector de coordenadas homogéneas del punto $[x]$.

La aplicación $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow P^n(\mathbb{R})$ dada por $p(x) = [x]$ es suprayectiva, al igual que su restricción $p : S^n \rightarrow P^n(\mathbb{R})$.

Consideramos en $P^n(\mathbb{R})$ la topología cociente⁵ respecto de $p : S^n \rightarrow P^n(\mathbb{R})$. Así $P^n(\mathbb{R})$ es homeomorfo al cociente de S^n respecto de la relación R_p , que identifica cada par de puntos antípodas. Concretamente,

$$R_p = \{(x, y) \in S^n \times S^n \mid x = y\} \cup \{(x, y) \in S^n \times S^n \mid x = -y\},$$

que claramente es cerrado en $S^n \times S^n$, luego el teorema 1.43 nos asegura que $P^n(\mathbb{R})$ es un espacio de Hausdorff. Como S^n es compacto y conexo, lo mismo vale para $P^n(\mathbb{R})$.

Notemos que $p : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow P^n(\mathbb{R})$ también es una identificación, pues es la composición de la retracción $x \mapsto x/\|x\|$ con la restricción de p a S^n .

Si B^n es la bola unitaria cerrada en \mathbb{R}^n , consideramos la aplicación continua $B^n \rightarrow S^n$ dada por $x \mapsto (x, \sqrt{1 - \|x\|^2})$. Su imagen es media esfera, pero si la componemos con la proyección sobre $P^n(\mathbb{R})$ obtenemos una aplicación continua y suprayectiva $f : B^n \rightarrow P^n(\mathbb{R})$. Como la bola es compacta, se trata de una identificación, luego $P^n(\mathbb{R})$ es homeomorfo a B^n/R_f , donde claramente R_f es la relación que identifica cada punto de la frontera de B^n con su antípoda.

Veamos, por último, que $P^n(\mathbb{R})$ es una variedad topológica⁶ de dimensión n . Para ello definimos U_i como el conjunto de los puntos $[x_1, \dots, x_{n+1}] \in P^n(\mathbb{R})$ tales que $x_i \neq 0$. Se cumple que U_i es abierto, pues su antiimagen en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ lo es. En U_{n+1} definimos la aplicación $p_{n+1} : U_{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$p_{n+1}([x]) = (x_1/x_{n+1}, \dots, x_n/x_{n+1}).$$

Se trata de una aplicación continua, pues si $A \subset \mathbb{C}^n$ es abierto, entonces

$$p^{-1}[p_{n+1}^{-1}[A]] = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} \neq 0, x_1/x_{n+1}, \dots, x_n/x_{n+1} \in A\}$$

es claramente abierto. Además, p_{n+1} tiene inversa, dada por $x \mapsto [x_1, \dots, x_n, 1]$, que es continua, porque es la composición de $x \mapsto (x_1, \dots, x_n, 1)$ con p . Por lo tanto, p_{n+1} es un homeomorfismo.

Igualmente podemos definir homeomorfismos $p_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$, y como los abiertos U_i cubren $P^n(\mathbb{R})$, concluimos que todo punto de $P^n(\mathbb{R})$ tiene un entorno homeomorfo a \mathbb{R}^n . ■

Los espacios proyectivos complejos Todos los resultados del apartado precedente valen igualmente si cambiamos \mathbb{R} por \mathbb{C} . Concretamente, el espacio proyectivo complejo $P^n(\mathbb{C})$ está formado por los subespacios vectoriales de dimensión 1 de \mathbb{C}^{n+1} (considerado como \mathbb{C} -espacio vectorial).

Si $z \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, representamos por $[z] = \langle z \rangle$ el punto de coordenadas homogéneas z .

⁵Por la propia definición, es claro que se trata de la misma topología considerada en la sección [G 12.5].

⁶En la sección [GD 1.3] probamos, de hecho, que $P^n(\mathbb{R})$ es una variedad diferencial con las mismas cartas que vamos a considerar aquí.

La aplicación $p : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ dada por $p(x) = \langle x \rangle$ es suprayectiva, al igual que su restricción a la esfera unitaria de \mathbb{C}^{n+1} , que, si identificamos $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$, se identifica con S^{2n+1} , es decir:

$$S^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2 = 1\}.$$

Consideramos en $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ la topología cociente respecto a $p : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, que coincide con la topología cociente respecto de $p : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, ya que ésta se obtiene componiendo aquélla con la retracción $z \mapsto z/\|z\|$.

Para comprobar que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es un espacio de Hausdorff observamos que la relación $R_p \subset S^{2n+1} \times S^{2n+1}$ es la imagen de la aplicación continua

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\} \times S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1} \times S^{2n+1}$$

dada por $(\lambda, z) \mapsto (z, \lambda z)$, luego R_p es compacta y, en particular, cerrada.

Exactamente igual que en el caso real podemos cubrir $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ con los abiertos U_i formados por los puntos $[z_1, \dots, z_{n+1}] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ tales que $z_i \neq 0$, y podemos definir homeomorfismos $p_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$, que prueban que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es una variedad topológica⁷ compacta y conexa de dimensión $2n$ (porque $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$). ■

1.8 Cubrimientos

Los cubrimientos de espacios topológicos permiten reducir el estudio de unos espacios a otros más simples que muestran más claramente su estructura. La definición es muy sencilla:

Definición 1.53 Un *cubrimiento* de un espacio topológico X es una aplicación continua suprayectiva $p : \tilde{X} \rightarrow X$ tal que para todo $x \in X$ existe un abierto conexo U que contiene a x tal que la restricción de p a cada componente conexa de $p^{-1}[U]$ es un homeomorfismo sobre U .

También se dice que \tilde{X} es un *espacio recubridor* de X . El espacio X se llama *espacio base* del cubrimiento, p es la *proyección* y U es un *entorno fundamental* de x .

La definición se adapta de forma obvia al caso de variedades diferenciales, exigiendo que p sea diferenciable y que las restricciones de p sean difeomorfismos. A su vez, la definición siguiente se adapta del mismo modo, y el teorema siguiente vale con la misma prueba para el caso diferenciable:

Un *homeomorfismo local* es una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos con la propiedad de que todo $x \in X$ tiene un entorno abierto U tal que $f[U]$ es abierto en Y y $f|_U : U \rightarrow f[U]$ es un homeomorfismo.

Claramente todo cubrimiento es un homeomorfismo local, pero el recíproco no es cierto en general. Un caso en el que se cumple el recíproco es el siguiente:

⁷En [VC A.2] se prueba que las aplicaciones p_i determinan una estructura analítica en $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ que las convierte, de hecho, en aplicaciones biholomorfas.

Teorema 1.54 Si $p : \tilde{X} \rightarrow X$ es un homeomorfismo local, \tilde{X} es compacto y X es conexo y localmente conexo, entonces p es un cubrimiento.

DEMOSTRACIÓN: De la propia definición de homeomorfismo local se sigue que $p[\tilde{X}]$ es abierto en X , y por compacidad también es cerrado, luego por conexión $p[\tilde{X}] = X$. Fijado $x \in X$, tenemos que $p^{-1}[x]$ es discreto, pues para cada $\tilde{x} \in p^{-1}[x]$ podemos tomar un entorno abierto U tal que $p|_U$ es inyectiva, luego $U \cap p^{-1}[x] = \{\tilde{x}\}$. Como $p^{-1}[x]$ también es cerrado, luego compacto, tiene que ser finito. Digamos que $p^{-1}[x] = \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m\}$ y sea U_i un entorno abierto de \tilde{x}_i según la definición de homeomorfismo local. Restringiéndolos podemos suponer que son disjuntos dos a dos.

Entonces $W = \bigcap_i p[U_i]$ es un entorno abierto de x . Como p es suprayectiva, X es compacto, luego localmente compacto, luego podemos tomar un abierto $x \in V \subset \bar{V} \subset W$ de clausura compacta. Finalmente, consideramos el abierto

$$U_0 = V \setminus p[p^{-1}[\bar{V}] \setminus \bigcup_i U_i].$$

Se cumple que $x \in U_0$, pues $p^{-1}[x] \subset \bigcup_i U_i$, y $p^{-1}[U_0] \subset \bigcup_i U_i$, luego los abiertos $p^{-1}[U_0] \cap U_i$ son disjuntos dos a dos, cubren $p^{-1}[U_0]$ y, como $U_0 \subset W$, tenemos que p se restringe a homeomorfismos de cada uno de ellos en U_0 . Cualquier entorno conexo de x contenido en U_0 es un entorno fundamental. ■

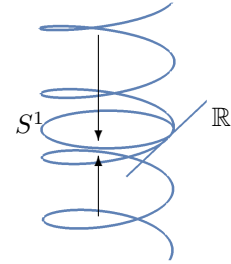
El hecho de que los cubrimientos sean homeomorfismos locales implica claramente que si $p : \tilde{X} \rightarrow X$ es un cubrimiento y \tilde{X} es una variedad topológica, entonces X también lo es. Más aún, si \tilde{X} es un abierto de \mathbb{R}^n entonces un atlas de X está formado por las inversas de las restricciones de p a los abiertos en los que es un homeomorfismo en su imagen.

Ejemplos de cubrimientos Antes de estudiar los cubrimientos conviene que nos familiaricemos con algunos ejemplos representativos:

- Uno de los cubrimientos más simples es la aplicación $p_1 : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $p_1(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$.

Si $U_0 =]-\pi, \pi[$, para cada $\theta_0 \in \mathbb{R}$, $U = p_1[\theta_0 + U_0]$ es un abierto en S^1 (es todo S^1 menos un punto), contiene a $p_1(\theta_0)$ cuya antiimagen $p_1^{-1}[U]$ tiene por componentes conexas los abiertos $\theta_0 + 2k\pi + U_0$, y p_1 se restringe a un homeomorfismo en cada una de ellas.

El cubrimiento p_1 “enrolla” la recta en la circunferencia, lo cual puede visualizarse descomponiéndolo como un homeomorfismo entre \mathbb{R} y una hélice seguido de la proyección.



La idea subyacente es que una carta de S^1 no puede abarcar toda la circunferencia. Puede abarcar hasta la circunferencia menos uno de sus puntos, pero no toda ella, porque un abierto en \mathbb{R} no es homeomorfo a S^1 . El cubrimiento p_1

es como una carta en la que hemos sacrificado la inyectividad (relajándola a una mera inyectividad local) a cambio de no tener que hacer cortes. Podemos pensar que al recorrer \mathbb{R} estamos recorriendo un “mapa” de S^1 en el que cada punto está representado infinitas veces. Cada vez que avanzamos o retrocedemos 2π unidades estamos en otro punto del mapa que representa al mismo punto de partida. De este modo, toda la información local sobre S^1 puede recogerse (con infinitas repeticiones) en el cubrimiento p_1 , pero, según veremos, éste recoge también información global sobre S^1 que no está contenida en las cartas en el sentido usual de las variedades topológicas.

Estas consideraciones se aplican a todos los cubrimientos cuyo dominio es un abierto en \mathbb{R}^n y, en menor medida, también a los cubrimientos cuyo dominio es una variedad topológica o incluso a cubrimientos arbitrarios.

- Por ejemplo, una ligera variante del caso anterior es $p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times S^1$ dada por $p_2(z, \theta) = (z, \cos \theta, \sin \theta)$.

El hecho de que la aplicación anterior fuera un cubrimiento implica inmediatamente que ésta también lo es.⁸

En este caso estamos “enrollando” el plano \mathbb{R}^2 alrededor del cilindro $\mathbb{R} \times S^1$.

Podemos pensar que p_2 convierte a \mathbb{R}^2 en un mapa del cilindro de altura infinita, de modo que cuando nos movemos a lo largo de una recta vertical estamos recorriendo el cilindro longitudinalmente, mientras que cada vez que avanzamos 2π unidades hacia la izquierda o hacia la derecha pasamos a otro punto del mapa que representa el mismo punto de partida, pero habiendo dado una vuelta completa alrededor del cilindro.

- Más interesante es el cubrimiento $p_3 :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ asociado a las coordenadas polares: $p_3(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$.

Para comprobar que se trata realmente de un cubrimiento basta observar que en realidad es el mismo que el anterior, pues tenemos el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{p_2} & \mathbb{R} \times S^1 \\
 f \downarrow & & \downarrow g \\
]0, +\infty[\times \mathbb{R} & \xrightarrow{p_3} & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}
 \end{array}$$

Las flechas verticales son $f(x, y) = (e^x, y)$ y $g(x, z) = e^x z$. El hecho de que p_2 sea un cubrimiento y f y g sean homeomorfismos implica claramente que p_3 también lo es.

Es bien conocido que la representación en coordenadas polares resulta muy útil en numerosas ocasiones para describir posiciones o movimientos a lo largo del plano menos el origen. Al considerar el cubrimiento p_3 estamos eliminando la restricción de que θ no puede salir de un intervalo abierto de longitud 2π —lo que deja fuera una semirrecta para tener un homeomorfismo en la imagen— a cambio de perder la inyectividad.

⁸En general, es inmediato comprobar que si p_1 y p_2 son cubrimientos, también lo es $p_1 \times p_2$.

• También es destacable el cubrimiento dado por la composición $f \circ p_3$ considerada en el apartado anterior. Explícitamente, $(f \circ p_3)(\rho, \theta) = e^\rho(\cos \theta, \text{sen } \theta)$, pero, de acuerdo con la sección 5.1 de [An], si identificamos $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, el cubrimiento no es sino la función exponencial $z \mapsto e^z$.

• En la sección anterior hemos expresado un toro T como cociente del cuadrado $[0, 2\pi]^2$. Con un cambio de variable obtenemos $g : I^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$g(s, t) = (R \cos 2\pi t + r \cos 2\pi s \cos 2\pi t, R \text{sen } 2\pi t + r \cos 2\pi s \text{sen } 2\pi t, r \text{sen } 2\pi s),$$

con lo que tenemos el toro T expresado como cociente del cuadrado I^2 . Sin embargo, en lugar de restringir artificialmente la variación de los parámetros al intervalo $[0, 2\pi]$ o a $[0, 1]$, podemos extender g a una aplicación $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow T$ con la misma definición, y entonces tenemos un cubrimiento del toro T .

En efecto, si llamamos T_0 al cociente de I^2 determinado por $g|_{I^2}$, podemos descomponer la extensión a \mathbb{R}^2 como composición de $p_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_0$ dada por $p_4(x, y) = [(E[x], E[y])]$, donde E representa la parte entera, seguida del homeomorfismo $\bar{g} : T_0 \rightarrow T$, y basta probar que p_4 es un cubrimiento.

En efecto, se trata de una aplicación continua, pues su restricción a cada cuadrado $[m, m+1] \times [n, n+1]$ es continua, ya que se descompone en una traslación $(x, y) \mapsto (x-m, y-n)$ seguida de la proyección en el cociente, y como cada punto de \mathbb{R}^2 tiene un entorno U que corta a lo sumo a cuatro cuadrados, el hecho de que $p_4|_U$ se restrinja a funciones continuas en a lo sumo cuatro cerrados implica que p_4 es continua en U (teorema [An 2.49]).

Y es un cubrimiento, pues si $U_0 =]-1/4, 1/4[\times]-1/4, 1/4[$ y

$$U_{(x,y)} = \bigcup_{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} (x+m, y+n) + U_0,$$

entonces $p_4^{-1}[p_4[U_{(x,y)}]] = U_{(x,y)}$, luego $p_4[U_{(x,y)}]$ es abierto en T , es un entorno de $p_4(x, y)$ y claramente es un entorno fundamental de $p_4(x, y)$.

Geoméricamente, p_4 (y g) enrollan el plano \mathbb{R}^2 para formar un cilindro de altura infinita, de modo que cada vez que avanzamos una unidad hacia la izquierda o hacia la derecha en \mathbb{R}^2 damos una vuelta entera al cilindro, y a la vez enrolla el cilindro para formar un toro dando infinitas vueltas, de modo que cada vez que avanzamos una unidad hacia arriba o hacia abajo en \mathbb{R}^2 damos una vuelta completa al toro, ya sea longitudinal o transversalmente.

A su vez, el cubrimiento $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow T$ induce una biyección continua (luego, por compacidad, un homeomorfismo) $\bar{g} : (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2 \rightarrow T$. En efecto, en primer lugar observamos que g induce una aplicación continua $\bar{g}_1 : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \rightarrow T$ y ésta a su vez induce la biyección continua \bar{g} .

Usando que $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ tenemos un homeomorfismo $g^* : S^1 \times S^1 \rightarrow T$ dado por

$$g^*(w, z) = (Rz_1 + rw_1z_1, Rz_2 + rw_1z_2, rw_2)$$

(basta sustituir $w = (\cos 2\pi s, \text{sen } 2\pi s)$, $z = (\cos 2\pi t, \text{sen } 2\pi t)$ en la definición de g).

A través de este homeomorfismo, el cubrimiento del toro se corresponde con el cubrimiento $p_5 : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1$ dado por $p_5(\alpha, \beta) = (\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha, \cos \beta, \operatorname{sen} \beta)$, que no es sino el producto $p_1 \times p_1$ del cubrimiento $p_1 : \mathbb{R} \rightarrow S^1$. ■

En esta sección vamos a estudiar una única noción relacionada con los cubrimientos, pero con la que conviene familiarizarse bien:

Definición 1.55 Sean $p : \tilde{X} \rightarrow X$ y $f : Y \rightarrow X$ aplicaciones continuas. Una elevación de f a \tilde{X} es una aplicación continua $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ tal que $f = \tilde{f} \circ p$.

Que una aplicación admita una elevación a un cubrimiento se traduce en que, en lugar de estudiarla “al natural”, podemos estudiarla más cómodamente a través de “nuestro mapa”. En general una aplicación no tiene por qué poder elevarse a un cubrimiento dado, pero si existe la elevación es casi única:

Teorema 1.56 Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un homeomorfismo local y $f : Y \rightarrow X$ una aplicación continua con Y conexo. Si $g_1, g_2 : Y \rightarrow \tilde{X}$ son elevaciones de f que coinciden sobre un punto de Y , entonces $g_1 = g_2$.

DEMOSTRACIÓN: Llamemos

$$Y_0 = \{y \in Y \mid g_1(y) = g_2(y)\}.$$

Obviamente Y_0 es cerrado en Y y por hipótesis no es vacío. Bastará probar que es abierto. Ahora bien, si $y \in Y_0$ tomamos un abierto $U \subset \tilde{X}$ que contenga a $g_1(y) = g_2(y)$ tal que $p[U]$ sea abierto en X y $p|_U : U \rightarrow p[U]$ sea un homeomorfismo. Entonces $W = g_1^{-1}[U] \cap g_2^{-1}[U]$ es un entorno abierto de y tal que si $y' \in W$ entonces $g_1(y'), g_2(y') \in U$ y $p(g_1(y')) = f(y') = p(g_2(y'))$, luego $g_1(y') = g_2(y')$, luego $y' \in Y_0$. Así pues, $W \subset Y_0$, que es, por consiguiente, abierto. ■

Más adelante (teorema 8.9) daremos una condición necesaria y suficiente para que una aplicación continua tenga una elevación a un cubrimiento, pero de momento vamos a comprobar que esto siempre sucede para los arcos:

Teorema 1.57 Si $p : \tilde{X} \rightarrow X$ es un cubrimiento, $x \in X$, $\tilde{x} \in \tilde{X}$ cumple $p(\tilde{x}) = x$ y $\alpha : [a, b] \rightarrow X$ es un arco de origen en x , entonces α admite una única elevación a \tilde{X} con origen en \tilde{x} .

DEMOSTRACIÓN: Por simplicidad vamos a suponer que $\alpha : I \rightarrow X$, pero es fácil ver que con esto no perdemos generalidad.

Sea U un entorno fundamental de x y sea U_0 la componente conexa de $p^{-1}[U]$ que contiene a \tilde{x} . Así $p|_{U_0} : U_0 \rightarrow U$ es un homeomorfismo. Sea $t_0 > 0$ tal que $[0, t_0] \subset \alpha^{-1}[U]$.

Entonces $g_0 = \alpha|_{[0, t_0]} \circ (p|_{U_0})^{-1} : [0, t_0] \rightarrow U_0$ es una elevación de $\alpha|_{[0, t_0]}$ tal que $g_0(0) = \tilde{x}$. Sea s el supremo del conjunto

$$J = \{t \in I \mid \alpha|_{[0, t]} \text{ admite una elevación a } \tilde{X} \text{ con origen en } \tilde{x}\}.$$

Acabamos de probar que $s > 0$. Vamos a probar que $s = 1 \in J$. Sea U un entorno fundamental de $\alpha(s)$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $]s - \epsilon, s] \subset \alpha^{-1}[U]$ (si $s < 1$ tomamos ϵ de modo que $]s - \epsilon, s + \epsilon[\subset \alpha^{-1}[U]$).

Existe un $t \in J$ tal que $s - \epsilon < t < s$. Sea $g : [0, t] \rightarrow \tilde{X}$ una elevación de $\alpha|_{[0, t]}$ y sea U_0 la componente conexa de $p^{-1}[U]$ que contiene a $g(t)$ (notemos que $p(g(t)) = \alpha(t) \in U$). Entonces $\alpha|_{]s - \epsilon, s[} \circ (p|_{U_0})^{-1}$ coincide con g en $]s - \epsilon, t]$, pues, para todo t' en este intervalo, $(p|_{U_0})^{-1}(\alpha(t')) = g(t')$ equivale a $\alpha(t') = p(g(t'))$. Esto nos permite extender g a una elevación $g' : [0, s] \rightarrow \tilde{X}$, luego $s \in J$. Más aún, si $s < 1$ tenemos en realidad una extensión a $[0, s + \epsilon[$, lo que contradice la definición de s . La unicidad se debe al teorema anterior. ■

Las elevaciones de arcos son compatibles con las homotopías:

Teorema 1.58 *Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un cubrimiento, sean σ_0, σ_1 dos arcos en X homotópicos a través de $F : I \times I \rightarrow X$. Sea $x \in X$ el origen de σ_0 y sea $\tilde{x} \in \tilde{X}$ tal que $p(\tilde{x}) = x$. Entonces existe una única homotopía $G : I \times I \rightarrow \tilde{X}$ entre la elevación de σ_0 con origen en \tilde{x} y una elevación de σ_1 tal que $G \circ p = F$. Si σ_1 también tiene origen x y $F_t(0) = x$ para todo t , entonces $G_t(0) = \tilde{x}$ para todo t , luego G_1 es la elevación de σ_1 con origen \tilde{x} . Igualmente, si ambos arcos tienen el mismo extremo y y $F_t(1) = y$ para todo t , entonces $G_t(1)$ también es constante, luego las elevaciones tienen el mismo extremo.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $(t, s) \in I \times I$, consideramos un entorno fundamental de $F(t, s)$ y su antiimagen en $I \times I$. Así formamos un cubrimiento abierto de $I \times I$. Por 1.1 existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ de modo que cada $F[[t_i, t_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]]$ está contenido en un abierto fundamental.

Sea U un abierto fundamental que contenga a $F[[t_0, t_1] \times [t_0, t_1]]$ y sea U_0 la componente conexa de $p^{-1}[U]$ que contiene a \tilde{x} . Definimos G sobre este cuadrado como $F \circ (p|_{U_0})^{-1}$. Notemos que si $F_t(0)$ es constante, también lo es G_t , para $t \in [t_0, t_1]$.

Ahora repetimos el argumento con $[t_0, t_1] \times [t_1, t_2]$. Consideramos un entorno fundamental U de su imagen por F y tomamos la componente conexa U_0 de $p^{-1}[U]$ que contiene a $G[[t_0, t_1] \times \{t_1\}]$. De este modo $F \circ (p|_{U_0})^{-1}$ define una función continua sobre el cuadrado $[t_0, t_1] \times [t_1, t_2]$ que coincide con la que ya teníamos definida en el cuadrado anterior sobre la arista común. Por consiguiente podemos extender G a una función continua en $[t_0, t_1] \times [t_0, t_2]$. Siguiendo así terminamos con G definida sobre $[t_0, t_1] \times I$. Si $F_t(1)$ es constante, tenemos que $G_t(1)$ también lo es en $[t_0, t_1]$.

A continuación consideramos $[t_1, t_2] \times [t_0, t_1]$, tomamos un abierto fundamental U de su imagen por F y la componente conexa U_0 de $p^{-1}[U]$ que contiene a $G[\{t_1\} \times [t_0, t_1]]$, con lo que $F \circ (p|_{U_0})^{-1}$ nos da una función continua en este cuadrado que coincide con la parte de G ya definida en la arista $\{t_1\} \times [t_0, t_1]$, luego podemos extender G a este cuadrado.

En el paso siguiente tomamos la componente conexa que contiene al conexo $G[\{t_1\} \times [t_1, t_2] \cup [t_1, t_2] \times \{t_1\}]$, etc. Así terminamos con G definida sobre $[t_0, t_2] \times I$, que será constante sobre $[t_0, t_2] \times \{1\}$ si lo es F . Repitiendo el argumento llegamos a una extensión a $I \times I$. ■

Índices de arcos cerrados en el plano Vamos a interpretar las elevaciones de arcos al cubrimiento $p_1 : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dado por $p_1(\theta) = (\cos \theta, \text{sen } \theta)$.

Si $\alpha : [a, b] \rightarrow S^1$ es cualquier aplicación continua y $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una elevación, entonces tenemos que $\alpha(t) = (\cos \theta(t), \text{sen } \theta(t))$.

Así, θ es lo que se llama una *determinación continua del argumento* de α , es decir, una función continua que a cada punto t le asigna uno de los infinitos argumentos⁹ de $\alpha(t)$.

Hemos visto que la continuidad de θ se traduce en que está completamente determinada por la elección de un único argumento $\theta(a)$ para $\alpha(a)$. Si $\theta^*(t)$ es otra determinación continua del argumento correspondiente a otro valor inicial, entonces la función $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}(\theta^*(t) - \theta(t))$$

tiene que ser continua, luego es constante, lo cual significa que $\theta^*(t) = \theta(t) + 2k\pi$, para un $k \in \mathbb{Z}$ fijo. En particular, la diferencia $\theta(b) - \theta(a)$ es independiente de la elección de θ y se interpreta como la distancia recorrida por el arco α , pero no en el sentido de la longitud del arco, sino contada de modo que los avances en sentido horario cancelan los avances en sentido antihorario.

Más en general, fijemos un punto $x \in \mathbb{R}^2$ y sea $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un arco continuo que no pase por x . Entonces la traslación $\alpha_x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dada por $\alpha_x(t) = \alpha(t) - x$ tiene una elevación al cubrimiento

$$p_3 :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

dado por $p_3(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \text{sen } \theta)$.

Dicha elevación será de la forma $\tilde{\alpha}_x(t) = (\rho_x(t), \theta_x(t))$, de modo que

$$\alpha(t) = x + \rho_x(t)(\cos \theta_x(t), \text{sen } \theta_x(t)).$$

La función $\rho_x(t) = \|\alpha(t) - x\|$ puede definirse explícitamente a partir de α y no aporta gran cosa, mientras que $\alpha_x(t)$ es lo que se conoce como una *determinación continua del argumento de α respecto del punto x* , y claramente mide el ángulo que gira α alrededor de x , entendiendo que un movimiento en sentido horario cancela a un movimiento en sentido antihorario.

Nuevamente tenemos que $\theta_x(t)$ está completamente determinada por α , x y una elección arbitraria de un argumento $\theta_x(0)$ de $\alpha(0) - x$.

Por consiguiente, si $\theta_x^*(t)$ es otra determinación continua del argumento de α respecto de x , tenemos que $\theta_x(t)$ y $\theta_x^*(t)$ son dos argumentos de $\alpha(t) - x$, luego

⁹Nos referimos a “argumento” en el sentido de la expresión en coordenadas polares de cada punto de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ como $(x, y) = \rho(\cos \theta, \text{sen } \theta)$, donde ρ es el módulo y θ el argumento, que está determinado salvo múltiplos enteros de 2π .

se diferencian en un múltiplo entero de 2π y así la función $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}(\theta_x^*(t) - \theta_x(t))$$

es continua y sólo toma valores enteros, luego tiene que ser constante. En otras palabras, se cumple que $\theta_x^*(t) = \theta_x(t) + 2k\pi$, para un $k \in \mathbb{Z}$ fijo.

Como antes, concluimos que la diferencia $\theta_x(b) - \theta_x(a)$ no depende de la elevación considerada, y expresa el ángulo total que gira α alrededor de x entendiendo que los giros en sentido horario cancelan a los giros en sentido antihorario.

Si $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un bucle, es decir, si cumple que $\alpha(a) = \alpha(b)$, entonces $\theta_x(a)$ y $\theta_x(b)$ son dos argumentos de $\alpha(0) - x$, luego se diferencian en un múltiplo entero de 2π . Esto justifica la definición siguiente:

Definición 1.59 Si $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un bucle, y $\alpha^* = \alpha[[a, b]]$, llamaremos

$$\text{Índ}(\alpha, -) : \mathbb{R}^2 \setminus \alpha^* \rightarrow \mathbb{Z}$$

a la función dada por $\text{Índ}(\alpha, x) = (\theta_x(b) - \theta_x(a))/2\pi$, donde θ_x es cualquier determinación continua del argumento de α respecto de x .

El entero $\text{Índ}(\alpha, x)$ recibe el nombre de *índice* de α respecto del punto x , y claramente se interpreta como el número de vueltas que da α alrededor de x , entendiendo que las vueltas en sentido horario cancelan a las vueltas en sentido antihorario.

El teorema siguiente recoge las propiedades básicas los índices de bucles. En el enunciado de su tercer apartado usamos un hecho elemental, y es que si $K \subset \mathbb{R}^2$ es compacto (y esto en particular se aplica a $K = \alpha^*$), entonces $\mathbb{R}^2 \setminus K$ tiene una única componente conexa no acotada, ya que existe una bola $B_R(0)$ que contiene a K , luego $\mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)$ es un conexo contenido en una componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus K$, luego dicha componente conexa será no acotada y todas las demás estarán contenidas en $B_R(0)$, luego estarán acotadas.

Teorema 1.60 *El índice $\text{Índ}(\alpha, -) : \mathbb{R}^2 \setminus \alpha^* \rightarrow \mathbb{Z}$ de un bucle α en \mathbb{R}^2 tiene las propiedades siguientes:*

1. Si $\alpha_t : I \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ es una homotopía entre bucles (es decir, de modo que cada α_t es un bucle), entonces $\text{Índ}(\alpha_t, x)$ no depende de t .
2. $\text{Índ}(\alpha, -)$ es constante sobre cada componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha^*$.
3. $\text{Índ}(\alpha, -)$ es nulo sobre la componente conexa no acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus \alpha^*$.

DEMOSTRACIÓN: 1) Es claro que $\alpha_t - x : I \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es una homotopía entre bucles, luego por el teorema 1.58 tenemos que¹⁰ existe una

¹⁰Por comodidad hemos enunciado el teorema 1.58 para homotopías entre arcos con dominio I , pero mediante un cambio de variable se prueba fácilmente que vale para homotopías entre arcos cuyo dominio sea cualquier intervalo $[a, b]$.

homotopía $\tilde{\alpha}_t : I \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ entre las elevaciones de $\alpha_0 - x$ y $\alpha_1 - x$, cuya segunda componente es una homotopía $\theta_{x,t}$ entre dos determinaciones continuas del argumento de α_0 y α_1 respecto de x . Entonces $(\theta_{x,t}(b) - \theta_{x,t}(a))/2\pi$ es una función continua de t que sólo toma valores enteros, luego es constante. En particular, evaluando en $t = 0, 1$ concluimos que $\hat{\text{Índ}}(\alpha_0, x) = \hat{\text{Índ}}(\alpha_1, x)$.

2) Sean $x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \alpha^*$ dos puntos situados en la misma componente conexa. Sea $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \alpha^*$ un arco que los una (que existe, porque los abiertos conexos en \mathbb{R}^2 son arcoconexos). Entonces la aplicación $\alpha : I \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dada por $\alpha_t(s) = \alpha(s) - \gamma(t)$ es una homotopía entre $\alpha - x$ y $\alpha - y$, luego $\hat{\text{Índ}}(\alpha, x) = \hat{\text{Índ}}(\alpha - x) = \hat{\text{Índ}}(\alpha - y) = \hat{\text{Índ}}(\alpha, y)$.

3) Sea $R > 0$ tal que $\alpha^* \subset B_R(0)$ y sea $x \in \mathbb{R}^2 \setminus B_R(0)$. Así tenemos que $\alpha^* - x \subset B_R(-x)$ y $0 \notin B_R(-x)$. Claramente, esta bola está contenida en el abierto U formado por \mathbb{R}^2 menos un semieje, el cual es un abierto fundamental para el cubrimiento p determinado por las coordenadas polares. Por ejemplo, si eliminamos el semieje X negativo, su antiimagen es la unión

$$]0, +\infty[\times \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi +]-\pi, \pi[)$$

y p se restringe a un homeomorfismo sobre cada componente conexa. Si U_0 es cualquiera de ellas, tenemos que una elevación de $\alpha - x$ es $(\rho, \theta) = (\alpha - x) \circ p|_{U_0}^{-1}$, que es un bucle, luego $\theta(b) - \theta(a) = 0$, luego $\hat{\text{Índ}}(\alpha, x) = 0$. ■

Capítulo II

El teorema de la esfera peluda y sus consecuencias

Hay una familia de teoremas topológicos muy simples de enunciar, pero cuya prueba no es trivial. En general afirman hechos triviales para el caso unidimensional, difíciles de probar en el caso bidimensional (no en el sentido de que las pruebas sean complicadas, sino más bien en cuanto a que requieren buena dosis de ingenio) y más difíciles aún de generalizar a dimensiones superiores. En este capítulo probaremos algunos de estos teoremas en el caso bidimensional y en capítulos posteriores los generalizaremos empleando la topología algebraica. Algunos de ellos los emplearemos en la última sección en la prueba de que toda superficie es triangulable, un resultado fundamental en la clasificación de las superficies compactas que veremos en el capítulo siguiente.

2.1 El teorema de la esfera peluda

El “teorema de la esfera peluda” fue conjeturado por Henri Poincaré a finales del siglo XIX, que demostró un caso particular en el contexto de las curvas definidas por ecuaciones diferenciales. La primera prueba puramente topológica se debe al matemático neerlandés Luitzen Egbertus Jan Brouwer y data de 1912.

Informalmente, el teorema afirma que no es posible peinar una esfera peluda, es decir, una esfera a la que le salga un pelo de cada uno de sus puntos. Formalmente:

Teorema de la esfera peluda *Si $v : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación continua, existen un $p \in S^2$ y un número real λ tales que $v(p) = \lambda p$.*

Podemos pensar que v asigna a cada punto de S^2 el pelo que va desde p hasta $p + v(p)$, y entonces el teorema dice que al menos uno de estos pelos, o bien tiene longitud 0 (es decir, la esfera tiene una “calva” puntual) o bien apunta justo hacia el centro de la esfera o justo en dirección opuesta. Si descartamos

que los pelos puedan meterse en la esfera, sólo nos queda la opción de que haya al menos un pelo “de punta”, sin peinar.

Podemos incidir más en la noción de “peinado” a través del concepto siguiente:

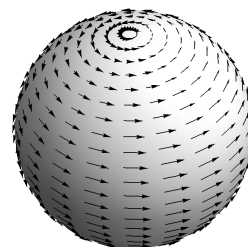
Definición 2.1 Un campo de vectores tangentes a S^n es una aplicación continua $v : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que, para todo $p \in S^n$, se cumple que $p \cdot v(p) = 0$.

Así, un campo de vectores tangentes a S^2 es un campo de pelos peinados. En estos términos, el teorema de la esfera peluda puede enunciarse así:

Teorema 2.2 (de la esfera peluda) Todo campo de vectores tangentes a S^2 se anula en algún punto.

Esto significa que, si hemos logrado peinar una esfera, es que ésta no era completamente peluda, sino que tenía al menos una calva microscópica consistente en un punto de que no salía ningún pelo.

Notemos que si $v : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es cualquier aplicación continua, a partir de ella podemos formar el campo de vectores tangentes $w(p) = v(p) - (p \cdot v(p))p$ que resulta de proyectar ortogonalmente el pelo de p en el plano tangente a la esfera en p , y así vemos que la segunda versión del teorema implica la primera, pues afirma que tiene que existir un punto p donde $w(p) = 0$, es decir, donde $v(p) = (p \cdot v(p))p$.



DEMOSTRACIÓN: Consideremos la aplicación $p : [-1, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^2$ dada por

$$p(t, \theta) = (\sqrt{1-t^2} \cos 2\pi\theta, \sqrt{1-t^2} \sin 2\pi\theta, t).$$

Claramente es continua y suprayectiva. Al variar θ recorremos la circunferencia formada por los puntos de S^2 situados a altura t . Sean

$$v_1, v_2 : [-1, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

las aplicaciones dadas por

$$v_1(t, \theta) = (-\sin 2\pi\theta, \cos 2\pi\theta, 0), \quad v_2(t, \theta) = (-t \cos 2\pi\theta, -t \sin 2\pi\theta, \sqrt{1-t^2}).$$

Es inmediato comprobar que $p \cdot v_1 = p \cdot v_2 = v_1 \cdot v_2 = 0$, lo que se traduce en que $v_1(t, \theta)$ y $v_2(t, \theta)$ son una base del espacio tangente a S^2 en el punto $p(t, \theta)$.

Supongamos ahora que $v : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ es un campo de vectores tangentes a S^2 que no se anula en ningún punto. Podemos sustituirlo por el campo $v'(p) = v(p)/\|v(p)\|$ o, equivalentemente, podemos suponer que $\|v(p)\| = 1$ en todo punto p . Sea $\bar{v} = p \circ v : [-1, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

Consideramos ahora $F : [-1, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dada por

$$F(t, \theta) = (\bar{v}(t, \theta) \cdot v_1(t, \theta), \bar{v}(t, \theta) \cdot v_2(t, \theta)).$$

Así $F(t, \theta)$ es el vector de coordenadas respecto de la base $v_1(t, \theta), v_2(t, \theta)$ del vector unitario $\bar{v}(t, \theta)$.

Ahora observamos que $\bar{v}(1, \theta) = v(p(1, \theta)) = v(0, 0, 1) = (x_1, y_1, 0)$ es constante y $x_1^2 + y_1^2 = 1$, porque todos los vectores $v(p)$ son unitarios. Podemos tomar α tal que $x_1 = \cos \alpha, y_1 = \sin \alpha$.

Entonces

$$\begin{aligned} F_1(\theta) &= (-\sin 2\pi\theta \cos \alpha + \cos 2\pi\theta \sin \alpha, -\cos 2\pi\theta \cos \alpha, -\sin 2\pi\theta \sin \alpha) \\ &= (\cos 2\pi\theta, -\sin 2\pi\theta) \begin{pmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz, para cualquier valor de α corresponde a una isometría de \mathbb{R}^2 , que deja fija a S^1 . Tenemos que F_1 es un bucle en S^1 con origen y extremo en el punto $(\cos \alpha, \sin \alpha)$. La aplicación $H : I \times I \rightarrow S^1$ dada por

$$H(s, \theta) = (\cos 2\pi\theta, -\sin 2\pi\theta) \begin{pmatrix} \sin(s\alpha + (1-s)\frac{\pi}{2}) & -\cos(s\alpha + (1-s)\frac{\pi}{2}) \\ \cos(s\alpha + (1-s)\frac{\pi}{2}) & \sin(s\alpha + (1-s)\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

es una homotopía entre F_1 y el bucle $H_1(\theta) = (\cos(-2\pi\theta), \sin(-2\pi\theta))$, luego por el teorema 1.60,

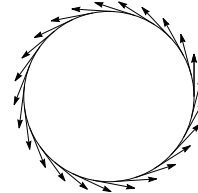
$$\text{Índ}(F_1, 0) = \text{Índ}(H_1, 0) = -1,$$

pues una determinación continua del argumento de H_1 es $\theta \mapsto -2\pi\theta$.

Cálculos completamente análogos nos dan que $\text{Índ}(F_{-1}, 0) = 1$, pero esto contradice al teorema 1.60, pues F_{2t-1} es una homotopía entre F_{-1} y F_1 , luego ambos bucles deberían tener el mismo índice. ■

El teorema de la esfera peluda es generalizable a dimensiones superiores, pero con cautela, pues es fácil ver que sí que es posible peinar una circunferencia y, más en general, si $n = 2k - 1$ es impar, un campo vectorial continuo (y, de hecho, diferenciable) en S^n que no se anula en ningún punto es el dado por

$$f(x_1, \dots, x_{2k}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2k}, x_{2k-1}).$$



La generalización correcta es:

Teorema 2.3 *La esfera S^n admite un campo de vectores continuo que no se anula en ningún punto si y sólo si n es impar.*

Demostremos esta versión general tras el teorema 10.6.

2.2 El teorema del punto fijo de Brouwer

Nos ocupamos ahora del teorema siguiente:

Teorema 2.4 (del punto fijo de Brouwer) *Si $f : B^n \rightarrow B^n$ es continua, existe un punto $x \in B^n$ tal que $f(x) = x$.*

Brouwer publicó una prueba del caso $n = 3$ en 1909 y un año después Hadamard publicó una prueba del caso general para funciones diferenciables con el nombre de “teorema de punto fijo de Brouwer”, lo que hace suponer que Brouwer se lo había comunicado personalmente. La primera prueba del caso general para funciones continuas fue publicada por Brouwer en 1912.

Vamos a ver que el teorema de la esfera peluda para dimensión $n = 2k$ implica el teorema de Brouwer para dimensiones $2k$ y $2k-1$. Como de momento tenemos probado el teorema de la esfera peluda para dimensión 2, con ello habremos probado el teorema de Brouwer para dimensiones 1 y 2, si bien hay que señalar que el caso $n = 1$ es trivial:

Dada una función continua $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$, la función $g(x) = x - f(x)$ cumple que $g(-1) \leq 0$ y $g(1) \geq 0$, luego por el teorema de los valores intermedios existe un $c \in [-1, 1]$ tal que $g(c) = 0$, es decir, tal que $f(c) = c$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : B^n \rightarrow B^n$ una función continua con n par. Identificando los puntos $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ con pares $(\bar{x}, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, definimos $v : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mediante

$$v(x) = (x_{n+1}(f(\bar{x}) - \bar{x}), -(f(\bar{x}) - \bar{x}) \cdot \bar{x}).$$

Claramente v es continua y $x \cdot v(x) = 0$. Por el teorema de la esfera peluda, existe un $x \in S^n$ tal que $v(x) = 0$. Si $x = (\bar{x}, x_{n+1})$, vamos a probar que $f(\bar{x}) = \bar{x}$. En caso contrario, de la relación $x_{n+1}(f(\bar{x}) - \bar{x}) = 0$ deducimos que $x_{n+1} = 0$, luego $\|\bar{x}\| = 1$.

Por otra parte, $(f(\bar{x}) - \bar{x}) \cdot \bar{x} = 0$, luego $f(\bar{x}) \cdot x = \bar{x} \cdot \bar{x} = \|\bar{x}\|^2 = 1$. Entonces

$$1 = \|\bar{x}\|^2 = |\bar{x} \cdot f(\bar{x})| \leq \|\bar{x}\| \|f(\bar{x})\| \leq 1,$$

luego $\bar{x} \cdot f(\bar{x}) = \|\bar{x}\| \|f(\bar{x})\|$, y esto equivale a que $f(\bar{x}) = \lambda \bar{x}$, para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$, pero, más concretamente,

$$(f(\bar{x}) - \bar{x}) \cdot \bar{x} = (\lambda - 1) \|\bar{x}\|^2 = 0,$$

luego $\lambda = 1$ y es $f(\bar{x}) = \bar{x}$, en contra de lo supuesto.

Supongamos ahora que $f : B^{n-1} \rightarrow B^{n-1}$ y sea $F : B^n \rightarrow B^n$ dada por $F(\bar{x}, x_n) = (f(\bar{x}), 0)$. Por el caso ya probado F tiene un punto fijo, de modo que $F(\bar{x}, x_n) = (\bar{x}, x_n) = (f(\bar{x}), 0)$, luego $f(\bar{x}) = \bar{x}$. ■

El teorema 1.4 implica que el teorema del punto fijo de Brouwer vale igualmente para todo cerrado convexo en \mathbb{R}^n .

El teorema siguiente es equivalente al teorema de Brouwer en el sentido de que es fácil probar uno a partir del otro:

Teorema 2.5 *No existen retracciones $r : B^n \rightarrow S^{n-1}$.*

DEMOSTRACIÓN: Si existe tal retracción, la función $f : B^n \rightarrow B^n$ dada por $f(x) = -r(x)$ no tiene puntos fijos, pues $-r(x) = x$ requiere que $x \in S^{n-1}$, pero entonces se reduce a $x = -x$, lo cual es absurdo. ■

Como tenemos probado el teorema de Brouwer para $n = 2$, también tenemos probado el caso $n = 2$ del teorema anterior. El caso general está probado tras el teorema 10.4 y, como ya hemos señalado, esto implica el caso general del teorema de Brouwer. En efecto:

DEMOSTRACIÓN (de 2.4 a partir de 2.5): Si $f : B^n \rightarrow B^n$ es una aplicación continua sin puntos fijos, definimos $g : \overline{B}_2(0) \rightarrow \overline{B}_2(0)$ mediante

$$g(x) = \begin{cases} (2 - \|x\|)f(x/\|x\|) & \text{si } \|x\| \geq 1, \\ f(x) & \text{si } \|x\| \leq 1. \end{cases}$$

Claramente es una aplicación continua y no tiene puntos fijos, pues si $g(x) = x$, entonces $x \in B^n$, luego $g(x) = f(x) = x$. Ahora definimos $r : \overline{B}_2(0) \rightarrow \overline{B}_2(0)$ mediante

$$r(x) = 2 \frac{x - g(x)}{\|x - g(x)\|},$$

que es claramente una retracción de $\overline{B}_2(0)$ en $\partial B_2(0)$, en contra de 2.5. ■

Veamos ahora un enunciado que parece intuitivamente obvio, pero cuya prueba requiere de algún resultado topológico no trivial, que en nuestro caso será precisamente el teorema de Brouwer para $n = 2$ (ya demostrado). En la sección siguiente lo usaremos para demostrar el teorema de la curva de Jordan.

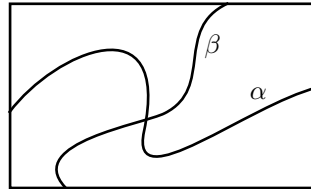
Teorema 2.6 Sean $\alpha, \beta : [-1, 1] \rightarrow [a, b] \times [c, d]$ dos arcos que conecten lados opuestos del rectángulo, es decir, tales que $\alpha_1(-1) = a$, $\alpha_1(1) = b$, $\beta_2(-1) = c$, $\beta_2(1) = d$. Entonces α y β se cortan, es decir, existen $t_1, t_2 \in [-1, 1]$ tales que $\alpha(t_1) = \beta(t_2)$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que α y β no se cortan, de modo que la función continua

$$N(t_1, t_2) = \max\{|\alpha_1(t_1) - \beta_1(t_2)|, |\alpha_2(t_1) - \beta_2(t_2)|\}$$

no se anula en ningún punto de $[-1, 1]^2$. Definimos $F : [-1, 1]^2 \rightarrow \partial[-1, 1]^2$ mediante

$$F(t_1, t_2) = \left(\frac{\beta_1(t_2) - \alpha_1(t_1)}{N(t_1, t_2)}, \frac{\alpha_2(t_1) - \beta_2(t_2)}{N(t_1, t_2)} \right).$$



Basta probar que F no tiene puntos fijos, con lo que tendremos una contradicción con el teorema de Brouwer. Supongamos que $F(t_1, t_2) = (t_1, t_2)$. Entonces $|t_1| = 1$ o bien $|t_2| = 1$. Supongamos, por ejemplo, que $t_1 = -1$. Los otros tres casos son análogos. Entonces $\alpha_1(t_1) = a$, luego $-1 = t_1 = F_1(t_1, t_2) \geq 0$, contradicción. ■

2.3 El teorema de la curva de Jordan

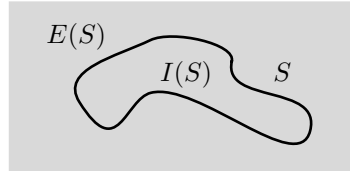
En 1887 el matemático francés Camille Jordan presentó por primera vez una prueba del teorema siguiente:

Teorema 2.7 (de la curva de Jordan) *Si $S \subset \mathbb{R}^2$ es homeomorfo a S^1 , entonces $\mathbb{R}^2 \setminus S$ consta exactamente de dos componentes conexas, ambas con frontera S .*

Durante un tiempo se consideró que la prueba de Jordan no era correcta, y que la primera prueba válida la dio Oscar Veblen en 1905. Sin embargo, estudios modernos sobre el trabajo original de Jordan sugieren que, aunque no se dan todos los detalles que serían deseables, el argumento es esencialmente correcto y no es difícil completarlo. En 1911, Lebesgue y Brouwer demostraron independientemente la versión general para dimensiones arbitrarias. Aquí vamos a probar el teorema de Jordan a partir del teorema del punto fijo de Brouwer.

En este contexto se suele llamar *curvas de Jordan* en un espacio topológico X a sus subespacios homeomorfos a S^1 .

La interpretación geométrica del teorema de Jordan es tan obvia que incluso mostrar una figura ilustrativa puede parecer superfluo:



Toda curva de Jordan divide al plano en dos componentes conexas. Podemos precisar un poco la situación si recordamos que, tal y como señalamos antes del teorema 1.60, si $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto, entonces $\mathbb{R}^n \setminus K$ tiene exactamente una componente conexa no acotada.

Esto nos permite distinguir entre el *interior* $I(S)$ y el *exterior* $E(S)$ de una curva de Jordan S en \mathbb{R}^2 , definidos como la componente conexa acotada y no acotada, respectivamente, de $\mathbb{R}^2 \setminus S$. Equivalentemente, el interior es la componente conexa cuya clausura $I(S) \cup S$ es compacta.

Para probar el teorema de Jordan nos ocupamos en primer lugar de la parte concerniente a la frontera de las componentes conexas:

Teorema 2.8 *Si $S \subset \mathbb{R}^2$ es homeomorfo a S^1 y $\mathbb{R}^2 \setminus S$ es desconexo, entonces todas sus componentes conexas tienen frontera igual a S .*

DEMOSTRACIÓN: Sea U una componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus S$. Como U es abierto y cerrado en $\mathbb{R}^2 \setminus S$, es claro que $\partial U \subset S$. Si $S \setminus \partial U \neq \emptyset$, como es abierto en S , contiene un arco abierto, cuyo complementario es un arco cerrado $A \subset S$ (homeomorfo a I) tal que $\partial U \subset A$.

Como suponemos que $\mathbb{R}^2 \setminus S$ tiene al menos dos componentes conexas, una de ellas está acotada. Tomamos un punto x_0 en una componente conexa acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus S$ y, si la propia componente U está acotada, elegimos concretamente $x_0 \in U$. Sea B una bola abierta de centro x_0 tal que $S \subset B$. Como A es homeomorfo a I , por el teorema de Tietze, la identidad $A \rightarrow A$ se extiende a una retracción $r : \bar{B} \rightarrow A$.

Definimos $q : \bar{B} \rightarrow \bar{B} \setminus \{x_0\}$ mediante

$$q(x) = \begin{cases} r(x) & \text{si } x \in \bar{U}, \\ x & \text{si } x \notin \bar{U}, \end{cases} \quad \text{o bien} \quad q(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \bar{U}, \\ r(x) & \text{si } x \notin \bar{U}, \end{cases}$$

según si U es una componente acotada (y entonces $U \subset B$) o no acotada (y entonces $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{U} \subset B$). Como $\bar{U} \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \bar{U}) = \partial U \subset A$ y r es la identidad en A , la función q está bien definida y es continua. Además fija a los puntos de ∂B , pues si U está acotada $\bar{U} \subset U \cup S \subset B$, luego la clausura es disjunta de ∂B , y si no está acotada $\partial B \subset U \subset \bar{U}$.

Sea $r' : \bar{B} \setminus \{x_0\} \rightarrow \partial B$ la retracción obvia, sea $a : \partial S \rightarrow \partial S$ la aplicación que lleva cada punto a su antípoda y sea $f : \bar{B} \rightarrow S$ la aplicación dada por $f(x) = a(r'(q(x)))$. Entonces f no tiene puntos fijos, pues si $a(r'(q(x))) = x$, tiene que ser $x \in \partial B$, luego $q(x) = x$ y queda $a(x) = x$, lo cual es absurdo. Esto contradice al teorema de Brouwer. ■

DEMOSTRACIÓN (de 2.7): Por el teorema anterior basta probar que $\mathbb{R}^2 \setminus S$ consta exactamente de dos componentes conexas.

Puesto que S es compacto, existen puntos $a, b \in S$ donde $\|a-b\|$ toma el valor máximo. Como existen homeomorfismos de \mathbb{R}^2 en sí mismo que transforman cualquier par de puntos dados en cualquier otro, no perdemos generalidad si suponemos que $a = (-1, 0)$ y $b = (1, 0)$. Entonces $S \subset R = [-1, 1] \times [-2, 2]$ y $S \cap \partial R$ se reduce a los dos puntos a y b . Sean $p = (0, 2)$ y $q = (0, -2)$.

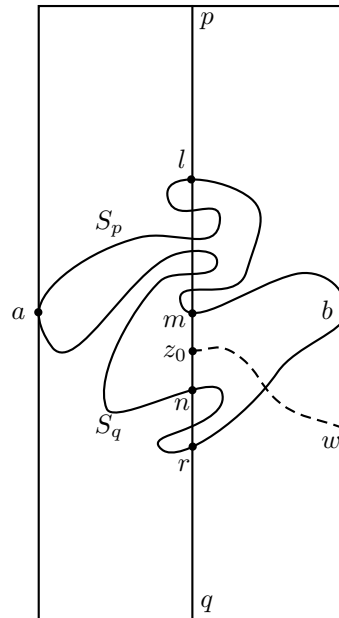
Claramente, S puede verse como la unión de dos arcos que unen a con b , luego, por el teorema 2.6, el segmento pq corta a S . Como $S \cap (\{0\} \times [-2, 2])$ es compacto, hay un punto $l = (0, y) \in S$ con el mayor valor posible para y . Sea S_p el arco en S que une a con b y que contiene a l y sea S_q el otro arco, de modo que $S = S_p \cup S_q$ y $S_p \cap S_q = \{a, b\}$.

De nuevo por el teorema 2.6, el arco pq tiene que cortar a S_p , y podemos tomar un punto $m = (0, y) \in S_p$ con el menor valor posible para y (tal vez $m = l$).

Consideremos el arco $pl \cup \alpha_{lm} \cup mq$, donde α_{lm} es el subarco de S_p que une los puntos l y m . Por el teorema 2.6 tiene que cortar a S_q , pero no puede hacerlo en pl , porque este segmento sólo corta a S en l , ni tampoco en α_{lm} , porque S_p y S_q sólo tienen en común sus extremos, luego necesariamente S_q corta a mq .

Como antes, podemos definir los puntos n y r donde S_q corta a mq con segunda coordenada máxima y mínima, respectivamente. Sea z_0 el punto medio del segmento mn . Por construcción $z_0 \notin S$, por lo que podemos considerar su componente conexa U en $\mathbb{R}^2 \setminus S$.

Vamos a probar que U está acotada y que es la única componente conexa acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus S$,



por lo que habrá exactamente dos componentes conexas. Si U fuera la componente conexa no acotada, existiría un arco en U que conectaría x_0 con un punto exterior a R . Considerando el primer valor del parámetro en ∂R y cortando el arco, podemos formar un arco $\gamma_{z_0 w}$ de origen en z_0 y contenido en el interior de R salvo por que $\gamma_{z_0 w}(1) = w \in \partial R$.

Si w está en la mitad inferior de ∂R , entonces puede unirse con q mediante un arco γ_{wq} siguiendo dicha frontera y, por consiguiente, sin cortar a S (notemos que w no puede ser a o b , porque está en $\mathbb{R}^2 \setminus S$). Entonces $pl \cup \alpha_{lm} \cup m z_0 \cup \gamma_{z_0 w} \cup \gamma_{wq}$ es un arco que une p con q sin cortar a S_q , en contradicción con el teorema 2.6. Similarmente, si w está en la mitad superior de ∂R podemos formar un arco γ_{wp} y con el otro $q z_0 \cup \gamma_{z_0 w} \cup \gamma_{wp}$ que une q con p sin cortar a S_p .

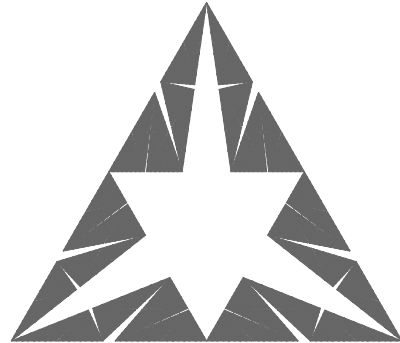
Así pues la componente U está acotada. Si existiera otra componente acotada U' , tendría que ser $U \subset R$ (pues $\mathbb{R}^2 \setminus R$ es un conexo en $\mathbb{R}^2 \setminus S$, luego está en la componente conexa no acotada).

Consideremos el arco $\beta = pl \cup \alpha_{lm} \cup mn \cup \alpha_{nr} \cup rq$, donde α_{nr} es el arco de S_q que une n con r . Entonces β une p con q sin pasar por puntos de U' . En efecto, los de pl están en la componente conexa no acotada, los de α_{lm} están en S , los de mn están en U , los de α_{nr} están en S y los de rq están de nuevo en la componente conexa no acotada. Tampoco pasa por a o b , luego podemos tomar bolas B_a y B_b de centros a y b que no contengan puntos de β . Ahora bien, por el teorema anterior $a, b \in \partial U'$, luego existen puntos $a' \in B_a \cap U'$ y $b' \in B_b \cap U'$. Tomamos un arco $\gamma_{a'b'}$ en W que una ambos puntos. Entonces $aa' \cup \gamma_{a'b'} \cup b'b$ es un arco que une a con b sin cortar a β , en contradicción con 2.6. ■

La curva de Knopp Alguien podría argumentar que el teorema de la curva de Jordan es evidente y que no requiere pararse a demostrarlo. Sin embargo, la demostración no es trivial en absoluto. En este apartado vamos a mostrar un ejemplo de curva de Jordan que sirve, entre otras cosas, para discutir la “opinión” de que el teorema de Jordan es un hecho evidente y que la demostración que daremos (o cualquier otra igual de sofisticada) no aporta realmente nada, pues es una prueba enrevesada de algo obvio. Más en general, el ejemplo muestra que el concepto formal de curva puede distar mucho de nuestra idea intuitiva.

No cabe duda de que si dibujamos una curva cerrada sin autointersecciones en un plano o una esfera con ello habremos delimitado dos regiones conexas con la propia curva como frontera, pero no podemos decir que eso “pruebe” el teorema de Jordan porque no podemos decir que la idea intuitiva que tenemos de una “curva cerrada sin autointersecciones” se corresponda con el concepto conjuntista general de curva.

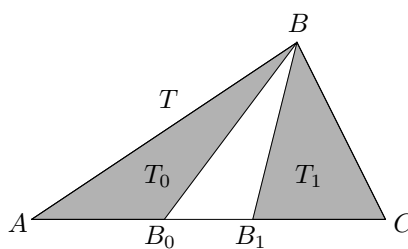
Por ejemplo, la figura muestra una curva de Jordan con la peculiaridad de que su imagen tiene área no nula, y nadie puede afirmar que su convicción inmediata de que las curvas de Jordan cumplen



el teorema de Jordan sea aplicable a un caso como éste. Quien afirme que el teorema de Jordan no necesita prueba podría afirmar con el mismo derecho que no hace falta probar que la imagen de una curva tiene que tener medida de Lebesgue nula, y en esto se equivocarías.

La curva representada en la imagen anterior es la llamada *curva de Knopp* y es un ejemplo de las llamadas *curvas de Osgood*, es decir, de un subconjunto del plano homeomorfo a una circunferencia, o al intervalo $[0, 1]$, pero con medida de Lebesgue positiva.

Fijamos un número real $0 < r < 1$ y un número natural $j \geq 1$. La operación básica que vamos a utilizar consiste en dividir un triángulo arbitrario $T = ABC$ en dos triángulos T_0 y T_1 de la misma área eliminando una cuña con la punta en el vértice B y la base en el lado opuesto b . Si requerimos además que el área de la cuña sea $(r/j)^2 S$, donde S es el área de T , el proceso de subdivisión queda completamente determinado.

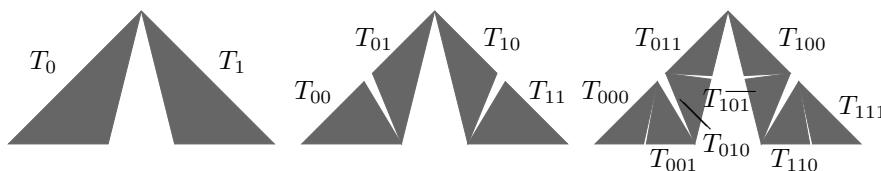


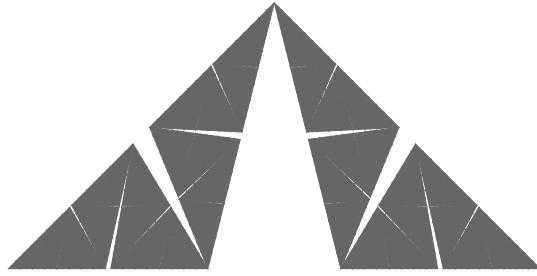
Concretamente, si h es la altura del triángulo, tenemos que $S = hb/2$, luego el área de la cuña debe ser $(r/j)^2 hb/2$, luego su base debe medir $(r/j)^2 b$. Como T_0 y T_1 tienen la misma altura y la misma área, sus bases deben ser iguales, y esto determina completamente los puntos B_0 y B_1 . Es fácil ver que son

$$B_0 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r^2}{j^2} \right) A + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{j^2} \right) C, \quad B_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{j^2} \right) A + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r^2}{j^2} \right) C.$$

En particular vemos que no dependen de B . Dado que la ordenación de los vértices es relevante a la hora de realizar la subdivisión, es importante precisar que los nuevos triángulos se ordenan en la forma $T_0 = AB_0B$ y $T_1 = BB_1C$.

Ahora partimos de un triángulo $C_0 = T$ cualquiera (que consideramos cerrado, con lo que es compacto), por ejemplo el de vértices $A = (-1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (1, 0)$, que tiene área $S = 1$. Al subdividirlo con $j = 1$ obtenemos dos triángulos, que forman un compacto $C_1 = T_0 \cup T_1$. A su vez, subdividimos estos dos triángulos con $j = 2$ para formar un nuevo compacto $C_2 = T_{00} \cup T_{01} \cup T_{10} \cup T_{11}$. Las figuras muestran los compactos C_1, C_2, C_3 y C_{11} con $r = 0.5$:





En general, C_j es un “rosario” de 2^j triángulos, cada uno de los cuales comparte únicamente un vértice con su antecesor y otro con su sucesor. Dos triángulos cualesquiera de C_j son disjuntos salvo que sean consecutivos, en cuyo caso tienen un único vértice en común. Las áreas de las cuñas que separan los triángulos decrecen cada vez más rápidamente, por lo que terminan siendo inapreciables, pero están.

Claramente $C_{j+1} \subset C_j$, pues C_{j+1} resulta de sustraer 2^j cuñas a los triángulos de C_j . Puesto que se trata de una familia decreciente de compactos, la intersección $K = \bigcap_{j=0}^{\infty} C_j$ es un compacto no vacío contenido en el triángulo inicial T . Como las cuñas terminan siendo indistinguibles, el aspecto de K es prácticamente el mismo que el de C_{11} . La diferencia consiste en que si vamos haciendo un “zoom” en K , nunca dejarán de aparecer nuevas cuñas, mientras que en C_{11} se terminan acabando.

Si el triángulo de partida tiene medida de Lebesgue $m(C_0) = m_0$, al pasar a C_1 quitamos una cuña de medida $r^2 m_0$, luego $m(C_1) = (1 - r^2)m_0$. Este conjunto consta de 2 triángulos cuya medida es la mitad de esta cantidad. Al pasar a C_2 le quitamos a cada uno una cuña de medida $(r^2/4)m(C_1)/2$, pero en total a C_1 le hemos quitado dos cuñas de esta medida, luego

$$m(C_2) = m(C_1) - \frac{r^2}{4}m(C_1) = m_0 \left(1 - \frac{r^2}{4}\right) \left(1 - \frac{r^2}{4}\right).$$

En general, la medida de Lebesgue de C_k es

$$m(C_k) = m_0 \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{r^2}{j^2}\right).$$

La medida de una intersección decreciente de conjuntos es el límite de sus medidas, luego

$$m(K) = m_0 \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{r^2}{j^2}\right).$$

Si comparamos con la factorización del seno [ITAn 8.11]:

$$\text{sen } \pi z = \pi z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{j^2}\right),$$

concluimos que

$$m(K) = m_0 \frac{\text{sen}(\pi r)}{\pi r}.$$

Así, cuando r varía en el intervalo $]0, 1[$ tenemos que $m(K)$ varía en $]0, m_0[$. Más concretamente, $m(K)$ se aproxima a m_0 a medida que r tiende a 0. Por ejemplo, la curva de Knopp que hemos dibujado (con $m_0 = 1$ y $r = 0.5$) tiene área $m(K) = 2/\pi = 0.64$.

Veamos ahora que existe un homeomorfismo $h : I \rightarrow K$. Para ello observamos que todo número real $x \in I$ no nulo admite un único desarrollo binario infinito

$$x = 0.x_1x_2x_3 \dots$$

Algunos números (rationales) admiten un desarrollo decimal finito, pero en tal caso también admiten otro (único) desarrollo infinito. Por ejemplo,

$$0.101101 = 0.1011001111 \dots$$

Por lo tanto, para cada $x \in I$ no nulo podemos considerar la sucesión decreciente de triángulos compactos

$$T_{x_1} \supset T_{x_1x_2} \supset T_{x_1x_2x_3} \supset \dots$$

Vamos a aceptar de momento que los diámetros de los triángulos de estas sucesiones tienden siempre a 0 (luego veremos cómo probarlo). Por compacidad la intersección contiene un punto de K y la condición de los diámetros implica claramente que es único, luego podemos definir $h(x)$ como el único punto de K que cumple

$$h(x) \in \bigcap_{j=1}^{\infty} T_{x_1, \dots, x_j}.$$

Notemos que si x admite un desarrollo finito

$$x = 0.x_1 \dots x_k 1 = 0.x_1 \dots x_k 0111 \dots$$

entonces, si llamamos $T^* = T_{x_1 \dots x_k 0}$, resulta que

$$h(x) \in T_1^* \cap T_{11}^* \cap T_{111}^* \cap \dots,$$

y es claro que el único punto que, al subdividir repetidas veces un triángulo T^* queda siempre en el segundo triángulo de la subdivisión es precisamente su vértice final,¹ (el vértice final tiene claramente esta propiedad y por la unicidad sólo puede tenerla un punto) en este caso el de $T_{x_1 \dots x_k 0}$, que coincide con el vértice inicial de $T_{x_1 \dots x_k 1}$. Por lo tanto, x está también en la intersección

$$x \in T_{x_1 \dots x_k 1} \cap T_{x_1 \dots x_k 10} \cap T_{x_1 \dots x_k 100} \cap \dots$$

ya que el vértice inicial de un triángulo está siempre en el primer subtriángulo de todas sus subdivisiones sucesivas.

¹Conviene pensar que, en un triángulo $T = ABC$, el vértice A es el *vértice inicial* y C es el *vértice final*, de modo que, al subdividirlo, obtenemos un triángulo T_0 con vértice inicial A y vértice final B y otro T_1 con vértice inicial B y vértice final C .

Esto significa que la condición que, cuando x admite dos desarrollos binarios, uno finito y otro infinito, la condición que define a $h(x)$ se cumple igualmente con ambas (considerando el desarrollo finito como una sucesión infinita finalmente igual a 0).

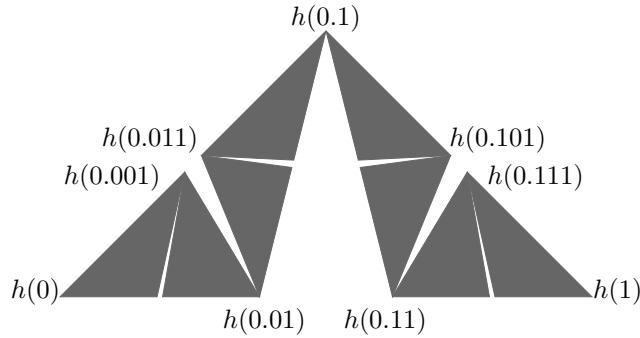
A su vez, esto vale también para $0 = 0.000\dots$ si definimos $h(0)$ como el vértice inicial del triángulo de partida, de modo que

$$h(0) \in T_0 \cap T_{00} \cap T_{000} \cap \dots$$

En resumen: si $x \in I$ admite el desarrollo decimal $x = 0.x_1x_2x_3\dots$ (único o no), resulta que $h(x)$ está determinado por la propiedad

$$h(x) \in \bigcap_{j=1}^{\infty} T_{x_1, \dots, x_j}$$

y, en el caso de que haya dos desarrollos, no importa cuál elijamos. La figura siguiente muestra algunos valores de h :



Por ejemplo, el vértice identificado como $h(0.101)$ cumple ciertamente que está en $T_1 \cap T_{10} \cap T_{101}$ y, como el el vértice inicial de T_{101} , a partir de ahí está siempre en $T_{10100\dots 0}$.

La aplicación h es suprayectiva. En efecto, pues si $p \in K$, entonces $p \in C_1$, luego existe un dígito binario x_1 tal que $p \in T_{x_1}$. A su vez, $p \in C_2$, pero necesariamente tiene que estar en una de las subdivisiones de T_1 , luego existe un dígito x_2 tal que $p \in T_{x_1x_2}$. Procediendo de esta forma obtenemos el desarrollo binario de un número real $x = 0.x_1x_2x_3\dots \in I$ tal que $h(x) = p$.

Veamos ahora que h es inyectiva. Supongamos que $h(x) = h(y) = p$ para ciertos números $x \neq y$. Entonces sus desarrollos binarios difieren en algún dígito. Digamos que

$$x = 0.a_1 \dots a_{k-1} 0 x_{k+1} x_{k+2} \dots \quad y = 0.a_1 \dots a_{k-1} 1 y_{k+1} y_{k+2} \dots$$

y sea $T^* = T_{a_1 \dots a_{k-1}}$. Entonces $p \in T_0^* \cap T_1^*$, pero esto sólo es posible si p es el punto final de T_0^* , que coincide con el punto inicial de T_1^* . Pero entonces, en todas las divisiones sucesivas de T_0^* , tenemos que p está en el triángulo

de subíndice 1 y nunca en el de índice 0, luego para $f(x) = p$ es necesario que $x = 0.a_1 \cdots a_{k+1}0111 \dots$, pues si algún x_{k+j} fuera 0 el punto $h(x)$ tendría que estar en un triángulo en el que no está p . Similarmente concluimos que $y = 0.a_1 \cdots a_{k-1}100 \dots$, pero entonces $x = y$, contradicción.

Ahora probamos que $h : I \rightarrow K$ es continua y, como I es compacto, será de hecho un homeomorfismo. Fijado $a \in I$ y $\epsilon > 0$, tomamos k tal que el diámetro de $T_{a_1 \cdots a_k}$ sea menor que ϵ . Si a admite dos desarrollos binarios, tomamos k suficientemente grande para que esto valga para ambos.²

Vamos a probar que existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in I$ cumple $|x - a| < \delta$, entonces x admite un desarrollo binario con las primeras k cifras iguales a las de un desarrollo binario de a .

En general, el conjunto de números reales cuyo desarrollo binario empieza por $0.a_0 \cdots a_k$ es el intervalo que empieza en $0.a_1 \cdots a_k$ y termina en $0.a_1 \cdots a_k 111 \dots$. Si a no es uno de estos dos extremos, podemos tomar un $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$ entonces x está en el intervalo, luego δ cumple lo requerido.

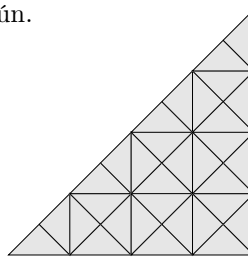
Si a es uno de los extremos, por ejemplo, el izquierdo, existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, entonces x está en el intervalo si $x \geq a$ o bien, si $x < a$ (lo que supone que $a > 0$) está en el intervalo de extremos $0.a_1 \cdots a_l 0111 \cdots 1$ (con k dígitos) y $a = 0.a_1 \cdots a_l 0111 \dots$, donde a_{l+1} es el último dígito binario no nulo de a . Claramente, este δ cumple lo pedido, pues en el primer caso x comparte los primeros k dígitos binarios del desarrollo de a finalmente nulo, y en el segundo comparte los k primeros dígitos del desarrollo binario de a finalmente igual a 1.

De este modo, si $|x - a| < \delta$, tenemos que $h(x), h(a) \in T_{a_1 \cdots a_k}$, donde los dígitos corresponden a uno de los desarrollos binarios de a , luego, por la elección de k , tenemos que $d(h(x), h(a)) < \epsilon$.

Con esto hemos probado que la curva de Knopp K es realmente una curva de Osgood, salvo por el hecho de que tenemos pendiente demostrar que los diámetros de las sucesiones de triángulos encajados tienden a 0. Concatenando tres curvas de Knopp obtenemos una curva de Jordan de área positiva como la que ilustra la primera imagen de esta sección.

Antes de ocuparnos de los diámetros de los triángulos observemos que la construcción admite una variante de interés en el caso límite en que $r = 0$. Esto significa dividir los triángulos sin eliminar ninguna cuña, de modo que los dos triángulos producto de la división tienen un lado en común.

La figura muestra el conjunto C_5 resultante. Podemos verlo igualmente como un “rosario” de triángulos que empieza en el punto $(0, 0)$ y termina en el $(1, 1)$. En este caso es inmediato comprobar que los diámetros de los triángulos tienden a 0, y todos los argumentos precedentes valen sin cambio alguno para probar que así obtenemos una aplicación continua y suprayectiva $h : [0, 1] \rightarrow T$,



²Por ejemplo, si es $a = 0.1001101$ y sirve $k = 12$, tenemos dos triángulos de diámetro menor que ϵ , a saber, $T_{100110011111}$ y $T_{100110100000}$, de modo que $h(a)$ es el vértice final del primero y el inicial del segundo.

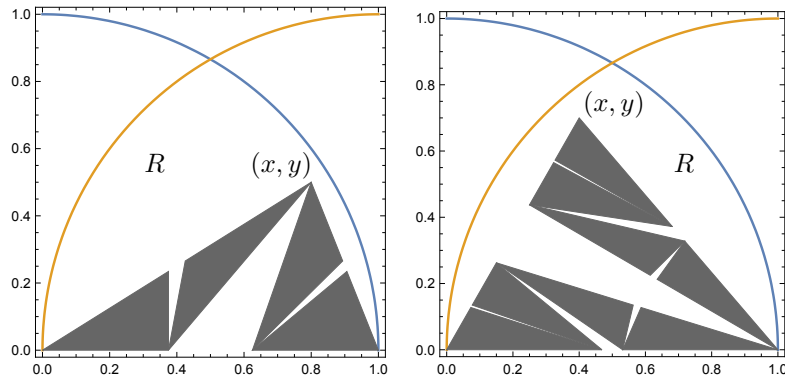
donde T es el triángulo de partida. La única parte del razonamiento que no vale ahora es la prueba de la inyectividad de h , pues es el único punto en el que hemos usado que dos triángulos consecutivos no tenían más que un vértice en común. En el ejemplo ilustrado en la figura obtenemos concretamente una curva que cumple $h(0) = (0, 0)$ y $h(1) = (1, 1)$.

Construyendo análogamente otra curva que llene el triángulo complementario en $I \times I$ pero que empiece en $(1, 1)$ y termine en $(0, 0)$, al concatenarlas obtenemos una aplicación continua y suprayectiva $h : I \rightarrow I \times I$. Obviamente, no es posible hacer que sea biyectiva, pues entonces sería un homeomorfismo, pero los espacios I e $I \times I$ no son homeomorfos.

Una construcción más directa consiste en partir del cuadrado $T = I \times I$ y realizar una primera subdivisión mediante una diagonal, de modo que T_0 sea un triángulo de vértice inicial $(0, 0)$ y vértice final $(1, 1)$ y T_1 el triángulo opuesto, de vértice inicial $(1, 1)$ y vértice final $(0, 0)$, y a partir de ahí realizar subdivisiones usuales de triángulos. Tenemos así otro ejemplo de aplicación que “evidentemente” no existe, pero que en realidad sí que existe.

Nos ocupamos finalmente de la cuestión de los diámetros. Basta probar que existe una constante $0 < C < 1$ (dependiente de r) tal que si T es un triángulo arbitrario, a, b, c son tres dígitos binarios cualesquiera y T_{abc} resulta de subdividir T partiendo usando la constante r y enteros $j, j + 1, j + 2$ arbitrarios, entonces $d(T_{ijk}) < C d(T)$. Esto implica que cada sucesión $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ de triángulos encajados por el proceso de subdivisión cumple que $d(T_{3n}) < C^n d(T)$, por lo que la subsucesión $\{d(T_{3n})\}_n$ tiende a 0 y, como la sucesión completa es decreciente, lo mismo vale para toda ella.

Es fácil ver que si dividimos dos triángulos homotéticos, los triángulos resultantes también serán homotéticos, de donde se sigue fácilmente que no perdemos generalidad si partimos de un triángulo de diámetro 1. El diámetro de un triángulo es el mayor de sus lados, luego tenemos que considerar todos los triángulos que tienen un lado de longitud 1 y los otros de longitud ≤ 1 . Tampoco perdemos generalidad si suponemos que dos de los vértices del triángulo son $(0, 0)$ y $(1, 0)$, mientras que el tercero (x, y) está en la intersección R de los círculos de centros en los otros dos vértices y radio 1, y también podemos exigir que $y > 0$. La figura muestra dos triángulos en estas condiciones.



A su vez, tenemos que contemplar dos casos, según si empezamos a subdividir considerando como vértices inicial y final los dos vértices fijos o bien uno fijo y el vértice variable. La figura de la derecha muestra dos subdivisiones en el caso de que los vértices inicial y final son los fijos, la tercera muestra tres subdivisiones en el caso en el que el vértice inicial es $(0, 0)$ y el final es (x, y) .

En el primer caso es posible probar que existe la constante deseada para dos subdivisiones (y la misma constante vale entonces si hacemos tres subdivisiones), mientras que en el segundo caso son necesarias tres subdivisiones. En definitiva, todo se reduce a probar que los 12 triángulos representados en la figura tienen diámetro menor que una constante $C_r < 1$ independiente de (x, y) (así como de los valores $j, j+1, j+2$ utilizados en el cálculo de la subdivisión). Equivalentemente, se trata de encontrar una constante $C_r < 1$ que acote las longitudes de todos sus lados.

En el primer caso, el primer triángulo de la cadena T_{00} está contenido necesariamente en el cuadrado $[0, 0.5] \times [0, 0.5]$, por lo que su diámetro está acotado por $\sqrt{2}/2 < 1$. Con el cuarto triángulo T_{11} se puede razonar igualmente.

Las coordenadas de los vértices intermedios de T_0 y T_1 son de la forma $(b_0, 0)$ y $(b_1, 0)$, donde

$$b_0 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{j^2} \right) \quad \text{y} \quad b_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r^2}{j^2} \right)$$

respectivamente.

Por consiguiente, $b_0 \in [(1-r^2)/2, 1/2]$ y es fácil ver que la distancia de un punto en este intervalo a un punto de R se hace máxima entre los puntos

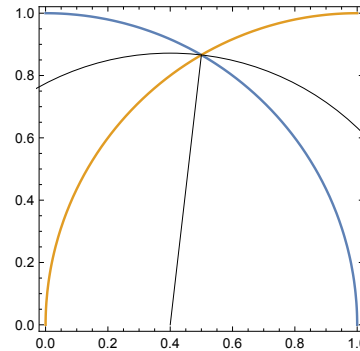
$$\left((1-r^2)/2, 0 \right), \quad \left(1/2, \sqrt{3}/2 \right)$$

y es $C_r = \sqrt{3+r^4}/2$.

Una forma rápida de justificarlo es observar la figura y tener en cuenta las propiedades de intersección entre circunferencias. Esto acota la longitud de dos de los lados de T_{01} , y la del tercero está acotada por $1/2$ (porque mide menos que la mitad de un lado del triángulo de partida). Con T_{10} se razona igual, y concluimos que en el primer caso sirve la constante C_r (que es mayor que las otras cotas que hemos encontrado).

Respecto al segundo caso, los cuatro primeros triángulos están en las condiciones del caso precedente, luego ya tenemos que sus diámetros están acotados por C_r . Claramente, T_{100} está contenido en el cuadrado $[1/2, 1] \times [0, 1/2]$, luego su diámetro está acotado por $\sqrt{2}/2$. En cuanto a T_{111} , tiene un lado menor que $1/4$ y otro menor que $1/2$, luego su diámetro está acotado por $3/4 < C_r$.

Sólo falta acotar T_{101} y T_{110} . Para ello razonamos como sigue: En primer lugar podemos simplificar ligeramente los cálculos si al efectuar la tercera subdivisión tomamos $r = 0$. Esto es lícito, porque con ello estamos reduciendo las



últimas cuñas a segmentos, con lo que todos los triángulos se hacen mayores, y una cota para sus diámetros lo es también para los triángulos “auténticos”. En segundo lugar, en vez de permitir que (x, y) varíe en la región R , consideraremos el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, que la contiene.

Las coordenadas de todos los vértices son polinomios de grado 1 en x e y , por lo que los cuadrados de las longitudes de los lados son polinomios de grado 2 que nunca toman valores negativos, luego no pueden tener máximos locales. Por consiguiente, las longitudes máximas se alcanzan cuando (x, y) está en la frontera del cuadrado unitario.

Más aún, si restringimos los cuadrados de las distancias a las aristas del cuadrado, tenemos nuevamente polinomios de grado 2 en x o en y que nunca toman valores negativos, luego los máximos se alcanzan en los extremos de las aristas, es decir, en los vértices del cuadrado. Por consiguiente, basta acotar los diámetros de T_{101} y T_{110} cuando (x, y) es uno de los cuatro vértices.



Si $(x, y) = (1, 1)$, vemos en la figura de la izquierda que todos los triángulos son subdivisiones de segundo orden de dos triángulos de diámetro 1 en las condiciones del caso 1, luego los diámetros están acotados por C_r . Dicha figura también nos permite comprender qué sucede cuando $(x, y) = (1, 0)$. Entonces ambos triángulos tienen un vértice en $[1/2, 1] \times \{(1, 0)\}$ y los otros en $(1, 0)$, por lo que su diámetro está acotado por $1/2$.

Consideramos ahora el caso en que $(x, y) = (0, 1)$. En la figura de la derecha se ve que T_{110} está contenido necesariamente en $[1/2, 1] \times [0, 1/2]$, por lo que tiene diámetro acotado por $\sqrt{2}/2$. Además, la figura permite ver también que en el caso $(x, y) = (0, 0)$ el triángulo T_{110} está contenido en $[0, 1/2] \times \{0\}$, luego tiene diámetro menor que $1/2$.

Sólo falta acotar T_{101} en los casos $(x, y) = (0, 0)$ y $(x, y) = (0, 1)$. Para ello calculamos explícitamente sus vértices (con $r = 0$ en la tercera subdivisión), que resultan ser:

$$(0, 0), \quad (1/2, 0), \quad \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{r^2}{(j+1)^2} \right), 0 \right)$$

y

$$\left(0, \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r^2}{j^2} \right) \right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \left(1 + \frac{r^2}{j^2} \right) \right), \quad \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{r^2}{(j+1)^2} \right), \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{(j+1)^2} \right) \right),$$

respectivamente. En el primer caso vemos que el diámetro está acotado por

$$\frac{r^2}{2(j+1)^2} \leq \frac{1}{4}.$$

En el segundo caso, T_{101} está contenido en el rectángulo

$$\begin{aligned} & \left[0, \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r^2}{(j+1)^2} \right) \right] \times \left[\frac{1}{4} \left(1 + \frac{r^2}{j^2} \right), \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r^2}{(j+1)^2} \right) \right] \\ & \subset \left[0, \frac{1}{2} \left(1 + \frac{r^2}{4} \right) \right] \times \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right], \end{aligned}$$

cuyo diámetro es la longitud de su diagonal:

$$\frac{1}{8} \sqrt{32 + 8r^2 + r^4} \leq \frac{\sqrt{41}}{8} < \frac{\sqrt{3}}{2} \leq C_r.$$

Concluimos que C_r cumple lo requerido. \blacksquare

2.4 La invarianza de los dominios

Cuando Cantor demostró que \mathbb{R}^m y \mathbb{R}^n pueden ser biyectados cualesquiera que sean m y n , Hilbert planteó el problema de demostrar que es imposible biyectarlos de forma continua, es decir, que \mathbb{R}^m no es homeomorfo a \mathbb{R}^n cuando $m \neq n$. Esto se conoce como el problema de la invarianza (topológica) de la dimensión, y fue uno de los problemas que ocuparon a Brouwer durante algún tiempo, hasta que en 1912 presentó una solución basada en el teorema siguiente:

Teorema 2.9 (de invarianza de los dominios) *Sea G un abierto en \mathbb{R}^n y $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación continua e inyectiva. Entonces f es abierta, luego en particular es un homeomorfismo en su imagen.*

Aquí vamos a probar el caso $n = 2$, mientras que el caso general lo demostraremos tras el teorema 10.12. No obstante, primero deduciremos algunas consecuencias del caso general, entre ellas la invarianza de la dimensión. En primer lugar demostramos lo siguiente:

Teorema 2.10 *En una variedad topológica n -dimensional, las únicas subvariedades de dimensión n son los abiertos. En particular, una variedad conexa no puede tener subvariedades compactas propias de la misma dimensión.*

DEMOSTRACIÓN: Por *subvariedad* entendemos un subespacio que también sea una variedad topológica. En primer lugar observamos que se cumple el caso particular siguiente: si $U \subset V$ son espacios topológicos homeomorfos a abiertos de \mathbb{R}^n , entonces U es abierto en V . En efecto, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{i} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ U' & \xrightarrow{f} & V' \end{array}$$

donde i es la inclusión, las flechas verticales son homeomorfismos, U' y V' son abiertos de \mathbb{R}^n y f está definida como la composición de las otras tres aplicaciones. Así $f : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$ es inyectiva y continua, luego $f[U']$ es abierto en \mathbb{R}^n , y por lo tanto en V' . La conmutatividad del diagrama implica entonces que U es abierto en V .

Pasando al caso general, sea V una variedad y W una subvariedad de la misma dimensión. Si $x \in W$, tomemos un entorno coordenado U de x en V . Entonces $W \cap U$ es un entorno de x en W , luego contiene un entorno coordenado U' de x en W . Así $U' \subset U$ son espacios topológicos homeomorfos a abiertos de \mathbb{R}^n . Por el caso ya probado U' es abierto en U , luego en V y esto prueba que W es un entorno de x en V , luego es abierta en V .

La segunda parte del teorema es inmediata: una subvariedad compacta de la misma dimensión sería abierta y cerrada, luego por conexión sería toda la variedad. ■

Notemos que una variedad topológica V de dimensión n contiene un subespacio homeomorfo a una bola abierta en \mathbb{R}^n , y esta bola contiene subespacios no abiertos homeomorfos a bolas abiertas en \mathbb{R}^m para cualquier $m < n$. Teniendo esto en cuenta es claro que V no puede contener subvariedades de dimensión mayor que n .

En particular, esto supone que la dimensión de una variedad topológica es un invariante topológico, es decir que que dos variedades homeomorfas tienen necesariamente la misma dimensión, o también, que un mismo espacio topológico no puede ser a la vez una variedad topológica de dos dimensiones distintas. Más en particular aún:

Teorema 2.11 *Si $m \neq n$, entonces ningún abierto (no vacío) de \mathbb{R}^m es homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n .*

DEMOSTRACIÓN: Ya lo hemos probado como consecuencia del hecho más general de la invarianza de la dimensión de las variedades topológicas, pero conviene particularizar el argumento, que consiste simplemente en la observación de que si, por ejemplo, $n < m$, un abierto de \mathbb{R}^n no puede contener un subespacio homeomorfo a S^n (pues \mathbb{R}^n es conexo y contendría también un subespacio S homeomorfo a S^n , luego tendría que ser $\mathbb{R}^n = S$, lo cual es absurdo, porque \mathbb{R}^n no es compacto), mientras que todo abierto no vacío de \mathbb{R}^m contiene claramente copias de S^n . ■

Pasamos ya a demostrar el teorema de invarianza de los dominios en el caso $n = 2$. Notemos que esto prueba el teorema anterior para $n = 2 < m$, es decir, prueba que ningún abierto no vacío de \mathbb{R}^2 es homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^m para $m > 2$. El caso $n = 1$ es trivial.

Necesitamos el resultado previo siguiente:

Teorema 2.12 *Sean $a, b \in S^2$, K un espacio compacto y $f : K \rightarrow S^2 \setminus \{a, b\}$ una aplicación inyectiva y continua. Si f es homotópica a una constante, entonces a y b están en la misma componente conexa de $S^2 \setminus f[K]$.*

DEMOSTRACIÓN: Como f es un homeomorfismo en su imagen es claro que la inclusión $i : f[K] \rightarrow S^2 \setminus \{a, b\}$ también es homotópica a una constante, luego no perdemos generalidad si suponemos que $K \subset S^2$ y que f es la inclusión. También podemos identificar $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ y tomar $a = \infty$, $b = 0$. Así el enunciado se reduce a:

Si $K \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es compacto y la inclusión $j : K \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es homotópica a una constante, entonces 0 está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus K$.

En efecto, sea C la componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus K$ que contiene a 0 y supongamos que está acotada. Sea D la unión de las demás componentes conexas. Así $\mathbb{R}^2 \setminus K = C \cup D$. Por el teorema 1.33, tenemos que j se extiende a una función $j^* : C \cup K \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ homotópica a una constante. Así $j^*|_K$ es la identidad. A su vez, podemos extender j^* hasta una función $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mediante $h(x) = x$ para todo $x \in D \cup K$. Como h se restringe a funciones continuas en dos cerrados, es continua.

Como la componente conexa C está acotada, podemos tomar una bola abierta $B = B_R(0)$ suficientemente grande como para que $C \cup K \subset B$. Entonces $h|_{\bar{B}} : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es la identidad en ∂B . Componiendo esta función con la retracción obvia $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \partial B$, obtenemos una retracción $\bar{B} \rightarrow \partial B$, en contradicción con (el caso $n = 2$ ya probado de) el teorema 2.5. ■

DEMOSTRACIÓN (de 2.9 para $n = 2$): Identificamos $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, de modo que $f : G \rightarrow S^2$. Veamos que si B es una bola abierta tal que $\bar{B} \subset G$, entonces $S^2 \setminus f[\bar{B}]$ es conexo. Para ello tomamos dos puntos $a, b \in S^2 \setminus f[\bar{B}]$.

El hecho de que \bar{B} sea homotópico a un punto implica que la restricción $f|_{\bar{B}} : \bar{B} \rightarrow S^2 \setminus \{a, b\}$ es homotópica a una constante, luego el teorema anterior implica que a y b están en la misma componente conexa de $S^2 \setminus f[\bar{B}]$.

Veamos ahora que $f[B]$ es abierto en S^2 . El espacio $S = f[\partial B]$ es una curva de Jordan en \mathbb{R}^2 , luego $\mathbb{R}^2 \setminus S$ tiene dos componentes conexas, y es claro que lo mismo vale para $S^2 \setminus S$ (sólo hay que añadir el punto ∞ a la componente conexa no acotada de S para tener las componentes conexas de $S^2 \setminus S$). Sea V la componente conexa de $S^2 \setminus S$ que contiene al conexo $f[B]$ y sea W la otra.

Vamos a ver que $f[B] = V$. Si, por el contrario, existe un punto $a \in V \setminus f[B]$, tomamos un punto cualquiera $b \in W$. Entonces

$$a, b \in S^2 \setminus f[\bar{B}] \subset S^2 \setminus S,$$

pues a y b no están ni en $f[B]$ ni en $f[\partial B]$, luego no están en $f[\bar{B}]$. Pero hemos probado que $S^2 \setminus f[\bar{B}]$ es conexo, luego resulta que a y b están en la misma componente conexa de $S^2 \setminus S$, en contra de la elección de b .

Para terminar, si $U \subset G$ es abierto y $x \in U$, podemos tomar una bola abierta $x \in B \subset \bar{B} \subset U$, con lo que $f(x) \in f[B] \subset f[U]$ y hemos probado que $f[B]$ es abierto, luego $f[U]$ es entorno de todos sus puntos, es decir, es abierto y por consiguiente f es una aplicación abierta. ■

2.5 El teorema de Borsuk-Ulam

Según el teorema 2.10, el espacio \mathbb{R}^n no contiene subespacios homeomorfos a S^n , lo que equivale a que ninguna aplicación continua $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ puede ser inyectiva, ya que entonces sería un homeomorfismo en su imagen. El teorema que nos ocupa ahora, conjeturado por Stanislaw Ulam, y probado por primera vez por Karol Borsuk en 1933, precisa este hecho:

Teorema 2.13 (Teorema de Borsuk-Ulam) *Si $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación continua, existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

Así pues no sólo una aplicación en las condiciones del enunciado no puede ser inyectiva, sino que, concretamente, tiene que asignar la misma imagen a dos puntos antípodas de la esfera. Aquí probaremos el caso $n = 2$, que puede parafrasearse también diciendo que si aplastamos una esfera en el plano, necesariamente dos puntos antípodas tienen que acabar superpuestos en el mismo punto.

Como es habitual en los teoremas que estamos considerando, el caso $n = 1$ es trivial y, de hecho, lo hemos demostrado en el curso de un razonamiento en la página 25.

Notemos que el teorema de Borsuk-Ulam implica trivialmente la misma consecuencia para aplicaciones $f : S^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $m \geq n$ (pues podemos considerar $S^n \subset S^m$ de modo que el antípoda de un punto de S^n es el mismo en S^n que en S^m). En estos términos podemos decir que es inmediato que toda función continua $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ toma el mismo valor en dos puntos antípodas (por un mero argumento de conexión), pero ya no es inmediato que dos funciones continuas $f_1, f_2 : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ (que es lo mismo que una función continua $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^2$) tomen el mismo valor sobre un mismo par de puntos antípodas (si $n \geq 2$), y eso es precisamente lo que vamos a demostrar.

DEMOSTRACIÓN (de 2.13 para $n = 2$): Si $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ no cumple el teorema, podemos definir $g : S^2 \rightarrow S^1$ mediante

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}.$$

Así g es continua y cumple $g(-x) = -g(x)$. Sea $\sigma : I \rightarrow S^2$ el bucle dado por $\sigma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, 0)$ y sea $\tau = \sigma \circ g : I \rightarrow S^1$, que es otro bucle con la propiedad de que $\tau(t+1/2) = -\tau(t)$, para $0 \leq t \leq 1/2$ (pues $\sigma(t+1/2) = -\sigma(t)$).

Vamos a calcular $\text{Índ}(\tau, 0)$, para lo cual hemos de considerar una determinación continua de su argumento $\tilde{\tau} : I \rightarrow \mathbb{R}$, es decir, una aplicación continua tal que

$$\tau(t) = (\cos \tilde{\tau}(t), \sin \tilde{\tau}(t)).$$

Si $0 \leq t \leq 1/2$ tenemos que $\tilde{\tau}(t)$ y $\tilde{\tau}(t+1/2)$ son argumentos de un cierto punto de S^1 y de su antípoda, luego $\tilde{\tau}(t+1/2) = \tilde{\tau}(t) + q_t\pi$, donde q_t es un entero impar. Despejando q_t vemos que es una función continua $[0, 1/2] \rightarrow \mathbb{Z}$,

luego tiene que ser constante. Así pues, existe un q impar tal que, para todo $0 \leq t \leq 1/2$ se cumple que $\tilde{\tau}(t + 1/2) = \tilde{\tau}(t) + q\pi$. En particular

$$\tilde{\tau}(1) = \tilde{\tau}(1/2 + 1/2) = \tilde{\tau}(1/2) + q\pi = \tilde{\tau}(0) + 2q\pi,$$

luego $\text{Índ}(\tau, 0) = (\tilde{\tau}(1) - \tilde{\tau}(0))/2\pi = q \neq 0$ (porque es un número impar).

Pero, por otra parte, el bucle σ es obviamente homotópico a una constante en S^2 (es un bucle que da una vuelta al ecuador de la esfera, y es fácil definir una homotopía $F : I \times I \rightarrow S^2$ que lo lleve hasta el polo norte), y componiéndola con g obtenemos una homotopía entre τ y una función constante en S^1 . Pero las funciones constantes tienen índice nulo (pues tienen elevaciones constantes), luego por 1.60 debería ser $\text{Índ}(\tau, 0) = 0$, en contradicción con el cálculo precedente. ■

Veamos varias versiones equivalentes del teorema de Borsuk-Ulam:

Teorema 2.14 *Las afirmaciones siguientes son equivalentes para cada $n \geq 1$:*

1. Si $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación continua, existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.
2. Si $m \geq n$, no existe ninguna aplicación continua $g : S^m \rightarrow S^{n-1}$ tal que $g(-x) = -g(x)$ para todo $x \in S^m$.
3. Si $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ cumple $f(-x) = -f(x)$, entonces no es homotópica a una constante.

DEMOSTRACIÓN: 1) \Rightarrow 2) Si existe g , podemos restringirla a una aplicación $g : S^n \rightarrow S^{n-1}$ con la misma propiedad, que a su vez podemos ver como aplicación $g : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, y entonces contradice a 1).

2) \Rightarrow 1) $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua, entonces la función $g(x) = f(x) - f(-x)$ tiene que tomar el valor 0, pues en caso contrario podríamos definir una aplicación continua $\bar{g} : S^n \rightarrow S^{n-1}$ mediante $\bar{g}(x) = g(x)/\|x\|$ y claramente cumple $\bar{g}(-x) = -\bar{g}(x)$.

2) \Rightarrow 3) Si f fuera homotópica a una constante, por 1.45 se podría extender a una función continua $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$. Definimos $g : S^n \rightarrow S^{n-1}$ mediante

$$g(x) = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) & \text{si } x_{n+1} \geq 0, \\ -f(-x_1, \dots, -x_n) & \text{si } x_{n+1} \leq 0. \end{cases}$$

La definición es correcta, porque si $x_{n+1} = 0$ entonces $(x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1}$ y las dos imágenes son la misma por la propiedad que suponemos en $f|_{S^{n-1}}$. Así g es continua y claramente cumple $g(-x) = -g(x)$, en contradicción con 2).

3) \Rightarrow 2) Si existe g , podemos restringirla a una aplicación $g : S^n \rightarrow S^{n-1}$ con la misma propiedad. Definimos $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$ mediante

$$f(x) = g(x, \sqrt{1 - \|x\|^2}),$$

que para $x \in S^{n-1}$ cumple $f(-x) = g(-x, 0) = -g(x, 0) = -f(x)$. Según 3), la restricción $f|_{S^{n-1}}$ no debería ser homotópica a una constante, pero lo es por el teorema 1.45. ■

En 12.32 demostraremos 2) para todo n , con lo que tendremos probado el caso general del teorema de Borsuk-Ulam.

Notemos que la identidad $1 : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ cumple la hipótesis del apartado 3) del teorema anterior, luego el teorema de Borsuk-Ulam (para n) implica que no es homotópica a una constante, pero por 1.45 esto equivale a que no exista una retracción $r : B^n \rightarrow S^{n-1}$, es decir, al teorema 2.5, que hemos visto que es equivalente al teorema del punto fijo de Brouwer. Así pues, el teorema de Borsuk-Ulam implica el teorema de Brouwer.

Veamos algunas consecuencias más:

Teorema 2.15 (Teorema del bocadillo de jamón) *Dados n subconjuntos de \mathbb{R}^n de medida de Lebesgue finita, existe un hiperplano que divide a cada uno de ellos en dos partes de igual medida.*

DEMOSTRACIÓN: Cada punto $p \in S^n$ determina un semiespacio E_p en \mathbb{R}^n , a saber, el dado por la ecuación

$$p_1x_1 + \cdots + p_nx_n + p_{n+1} > 0.$$

Fijado $D \subset \mathbb{R}^n$ de medida de Lebesgue finita, definimos $D_p = D \cap E_p$. Vamos a probar que la función $f_D : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f_D(p) = \mu(D_p)$ es continua (donde μ es la medida de Lebesgue).³

Sea χ_{D_p} la función característica de D_p . Entonces $f_D(p) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{D_p}(x) dx$. Tomemos una sucesión $\{p^k\}$ en S^n que converja a p . Es claro que si $x \in \mathbb{R}^n$ cumple $p_1x_1 + \cdots + p_nx_n + p_{n+1} > 0$ (resp. < 0) existe un natural k_0 tal que si $k > k_0$ entonces $p_1^kx_1 + \cdots + p_n^kx_n + p_{n+1}^k > 0$ (resp. < 0). Por consiguiente la sucesión $\chi_{D_{p^k}}(x)$ converge a $\chi_{D_p}(x)$. Esto vale para todo x salvo a lo sumo los pertenecientes al hiperplano $p_1x_1 + \cdots + p_nx_n + p_{n+1} = 0$. Como los hiperplanos tienen medida nula, concluimos que la sucesión $\chi_{D_{p^k}}$ converge casi por todas partes a χ_{D_p} . Por otra parte, las funciones $\chi_{D_{p^k}}$ están mayoradas por la función característica de D , que es integrable Lebesgue. Aplicando el teorema de la convergencia dominada concluimos que

$$f_D(p) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{D_p}(x) dx = \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{D_{p^k}}(x) dx = \lim_k f_D(p^k),$$

lo que prueba la continuidad de f_D .

Ahora ya es fácil probar el teorema: dados n conjuntos D_1, \dots, D_n de medida finita en \mathbb{R}^n , las funciones f_{D_k} definen una función $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Por el

³Esta demostración me la comunicó el profesor M. Valdivia, a quien agradezco sinceramente su amabilidad.

teorema anterior existe un punto $p \in S^n$ tal que $f(p) = f(-p)$, es decir, tal que $f_{D_k}(p) = f_{D_k}(-p)$ para $k = 1, \dots, n$. Ahora bien, $f_{D_k}(p)$ y $f_{D_k}(-p)$ son las medidas de las dos partes en que el hiperplano $p_1x_1 + \dots + p_nx_n + p_{n+1} = 0$ divide a D_k , luego ambas partes tienen la misma medida. ■

Teorema 2.16 (Lusternik-Schnirelmann) *Si S^n está cubierta por $n+1$ cerrados, entonces uno de ellos contiene dos puntos antípodos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea A_1, \dots, A_{n+1} un cubrimiento de S^n por conjuntos cerrados y supongamos que, para $i = 1, \dots, n$, cada A_i es disjunto del conjunto A'_i formado por sus puntos antípodos. Por el lema de Urysohn existe una función continua $f_i : S^n \rightarrow \mathbb{R}$ que toma el valor 0 sobre A_i y el valor 1 sobre A'_i .

Las funciones f_i definen una función continua $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Por el teorema de Borsuk-Ulam existe un punto $p \in S^n$ tal que $f(p) = f(-p)$. El punto p no puede estar en ningún A_i con $1 \leq i \leq n$, pues en tal caso $f_i(p) = 0$, $f_i(-p) = 1$. Similarmente, $-p$ no puede estar en ninguno de estos conjuntos. Por lo tanto, p y $-p$ están ambos en A_{n+1} . ■

2.6 El teorema de Schoenflies

El teorema de Jordan nos asegura que toda curva de Jordan divide al plano en dos componentes conexas, pero ¿cómo son estas componentes? Si consideramos el caso concreto de $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, vemos que las componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus S^1$ son la bola abierta $B_1(0)$ y $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}_1(0)$. A través de la inversión $x \mapsto x/\|x\|^2$, el segundo espacio es homeomorfo a $B_1(0) \setminus \{0\}$, pero cualquiera de estos dos espacios no es homeomorfo⁴ a $B_1(0)$.

La situación es más simétrica si, para una curva de Jordan arbitraria S , en lugar de considerar $\mathbb{R}^2 \setminus S$ identificamos $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ y consideramos $S^2 \setminus S$. Es inmediato que

$$S^2 \setminus S = I(S) \cup (E(S) \cup \{\infty\}),$$

de modo que $I(S)$ y $E(S) \cup \{\infty\}$ son las componentes conexas de $S^2 \setminus S$, ambas con frontera S y así vemos que el teorema de Jordan vale igualmente con S^2 en lugar de \mathbb{R}^2 . De hecho, en 10.10 demostraremos el teorema siguiente:

Teorema 2.17 (de Jordan-Brouwer) *Si $n \geq 1$, toda copia \tilde{S}^{n-1} de S^{n-1} contenida en S^n divide a S^n en dos componentes conexas, ambas con frontera igual a \tilde{S}^{n-1} .*

Recíprocamente, a partir de esta versión se deduce inmediatamente la que resulta de sustituir S^n por \mathbb{R}^n . Las componentes conexas de $\mathbb{R}^n \setminus \tilde{S}^{n-1}$ son las mismas que las de $S^n \setminus \tilde{S}^{n-1}$ salvo que eliminamos ∞ de la componente que lo contiene.

⁴Por ejemplo, por el teorema del punto fijo Brouwer: la aplicación $x \mapsto -x$ es una aplicación continua sin puntos fijos tanto en $B_1(0) \setminus \{0\}$ como en $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}_1(0)$.

La cuestión que nos planteamos ahora es, ¿qué podemos decir de las componentes conexas de $S^n \setminus \tilde{S}^{n-1}$, o de $\mathbb{R}^n \setminus \tilde{S}^{n-1}$? ¿Podemos decir que las primeras son homeomorfas a bolas abiertas en \mathbb{R}^n , o que, en el segundo caso, una es homeomorfa a una bola abierta y la segunda a una bola abierta menos un punto, como sucede en el caso trivial $\tilde{S}^{n-1} = S^{n-1}$?

La respuesta a esta pregunta es un tanto sorprendente: para $n = 2$ la respuesta es afirmativa, mientras que para $n \geq 3$ no lo es en general.

La respuesta en el caso $n = 2$ la proporcionó en 1906 el matemático alemán Arthur Moritz Schoenflies,⁵ que demostró lo siguiente:

Teorema 2.18 (Schoenflies) *Toda aplicación $\phi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ inyectiva y continua se extiende a un homeomorfismo $\bar{\phi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.*

Este resultado implica el teorema de la curva de Jordan, pues si $S \subset \mathbb{R}^2$ es una curva de Jordan, podemos aplicarlo a un homeomorfismo $\phi : S^1 \rightarrow S$, que se extiende así a un homeomorfismo $\bar{\phi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Como $\mathbb{R}^2 \setminus S^1$ tiene ciertamente dos componentes conexas con frontera S^1 , lo mismo es cierto para $S = \bar{\phi}[S^1]$.

Sin embargo, ahora podemos decir cómo son esas componentes conexas, pues aplicando $\bar{\phi}$ a la descomposición $\mathbb{R}^2 = B_1(0) \cup S^1 \cup (\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}_1(0))$ obtenemos la unión disjunta

$$\mathbb{R}^2 = \bar{\phi}[B_1(0)] \cup S \cup \bar{\phi}[\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}_1(0)],$$

de la que se desprende que

$$I(S) = \bar{\phi}[B_1(0)] \cong B_1(0), \quad E(S) = \bar{\phi}[\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}_1(0)] \cong \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}_1(0) \cong B_1(0) \setminus \{0\}.$$

Y de aquí se desprende que una curva de Jordan divide a S^2 en dos componentes conexas homeomorfas a bolas abiertas en \mathbb{R}^2 (alternativamente, se comprueba sin dificultad que el teorema 2.18 implica el enunciado análogo que resulta de cambiar \mathbb{R}^2 por S^2).

El teorema siguiente recoge parte de lo que hemos deducido:

Teorema 2.19 *Si $S \subset \mathbb{R}^2$ es una curva de Jordan, entonces $I(S) \cup S$ es homeomorfo a B^2 , a través de un homeomorfismo que hace corresponder S con S^1 . En particular $I(S)$ es homeomorfo a la bola unitaria abierta en \mathbb{R}^2 .*

Es fácil ver que este enunciado, que determina topológicamente el interior de una curva de Jordan, es, de hecho, equivalente al teorema de Schoenflies.

En cambio, para $n = 3$ ya no es cierto que las dos componentes conexas en que un subespacio \tilde{S}^2 homeomorfo a S^2 divide a \mathbb{R}^3 sean necesariamente homeomorfas a una bola abierta y a una bola abierta menos un punto. Por el contrario, en 8.39 presentaremos la llamada “esfera cornuda de Alexander”, que es un ejemplo de superficie $\tilde{S} \subset \mathbb{R}^3$ homeomorfa a S^2 tal que una de las

⁵En realidad su prueba tenía un pequeño error que fue corregido por Brouwer en 1909.

componentes conexas de $\mathbb{R}^3 \setminus S$ (en principio la no acotada, pero una simple manipulación hace que sea la acotada) no es homeomorfa ni a una bola abierta, ni a una bola abierta menos un punto, por lo que ningún homeomorfismo de S^2 en S puede extenderse a \mathbb{R}^3 . Esto muestra que el teorema de Schoenflies es más fuerte que el teorema de Jordan.

La prueba que vamos a dar de que toda superficie topológica es triangulable depende del teorema de Schoenflies, pero no vamos a demostrarlo aquí porque se sigue fácilmente de resultados de la teoría de funciones de variable compleja que tienen interés por sí mismos, así que remitimos al lector a [VC 3.48] para una demostración.

Dedicamos el resto de esta sección a extraer algunas consecuencias del teorema de Schoenflies que nos van a ser necesarias después.

Conviene llamar también *curvas de Jordan* en un espacio topológico X a las parametrizaciones de las curvas de Jordan propiamente dichas, es decir, a cualquier aplicación inyectiva y continua $\phi : S^1 \rightarrow X$ (que es, por consiguiente, un homeomorfismo en la imagen).

Alternativamente, podemos parametrizar una curva de Jordan mediante una aplicación continua $\gamma : I \rightarrow X$ que sea inyectiva salvo por que $\gamma(0) = \gamma(1)$. También nos referiremos a ellas como *curvas de Jordan*.

Notemos que si $\phi : S^1 \rightarrow X$ es una curva de Jordan en el primer sentido, podemos definir $\gamma(t) = \phi(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ y tenemos una curva de Jordan en el segundo sentido con la misma imagen y, recíprocamente, si $\gamma : I \rightarrow X$ es una curva de Jordan en el segundo sentido, el hecho de que $\gamma(0) = \gamma(1)$ nos permite extenderla hasta una función continua $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ con periodo 1, la cual a su vez induce una aplicación inyectiva y continua $\phi(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = \gamma(t)$, que es una curva de Jordan en el segundo sentido con la misma imagen (véase el ejemplo de la página 33).

Cuando queramos referirnos a una curva de Jordan propiamente dicha y no a su parametrización ϕ o γ usaremos la notación ϕ^* o γ^* .

Conviene definir también un *arco de Jordan* en un espacio topológico X como una aplicación inyectiva y continua $\gamma : I \rightarrow X$. Igualmente usaremos la notación $\gamma^* = \gamma[I]$.

Definición 2.20 Un *dominio de Jordan* J en un espacio topológico es un subespacio abierto tal que existe otro abierto U en X de modo que $J \subset \bar{J} \subset U$ y existe un homeomorfismo de U en una bola abierta de \mathbb{R}^2 que transforma \bar{J} en una bola cerrada y a J en el interior de ésta.

En una superficie compacta S , todo punto p tiene una base de entornos que son dominios regulares de Jordan.

En efecto, dado cualquier entorno U de p , siempre podemos tomar una carta $x : U_0 \rightarrow B_2(0)$ tal que $p \in U_0 \subset U$ y $x(p) = 0$, y considerar $J = x^{-1}[B_1(0)]$.

Otro hecho elemental es que, como una bola abierta en \mathbb{R}^2 es el interior de su clausura, lo mismo vale para cualquier dominio de Jordan.

Las superficies topológicas cumplen localmente el teorema de Jordan:

Teorema 2.21 *Sea S una superficie topológica, sea $J \subset S$ un dominio de Jordan y sea $\phi : S^1 \rightarrow J$ una curva de Jordan. Entonces $S \setminus \phi^*$ tiene dos componentes conexas, ambas con ϕ^* como frontera, una de las cuales es un dominio de Jordan y está contenida en J .*

DEMOSTRACIÓN: Observemos en primer lugar que $S \setminus J$ es conexo. En efecto, dados dos puntos $p, q \in S \setminus J$, existe un arco $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$ que los tiene por extremos. Si α^* no corta a J , tenemos que los dos puntos están en la misma componente conexa de $S \setminus J$. En caso contrario α tiene que pasar por puntos de ∂J . Como $\alpha^{-1}[\partial J]$ es compacto, tiene un mínimo y un máximo en $[0, 1]$, digamos $t_0 \leq t_1$. Si $0 < t_0 \leq t_1 < 1$, tenemos que $\alpha|_{[0, t_0]}$ y $\alpha|_{[t_1, 1]}$ son arcos que unen p con un punto $p' \in \partial J$ y otro punto $q' \in \partial J$ con q sin pasar por J . Como ∂J es arcoconexo (es homeomorfo a una circunferencia), podemos unir p' con q' mediante un arco contenido en ∂J , y así formar un otro que una p con q contenido en $S \setminus J$. Si $t_0 = 0$ o $t_1 = 1$ es que $p \in \partial J$ o bien $q \in \partial J$, y la construcción se simplifica.

Como J es homeomorfo a una bola abierta en \mathbb{R}^2 , también lo es a \mathbb{R}^2 , luego cumple el teorema de Jordan, es decir, $J \setminus \phi^*$ se descompone en dos componentes conexas cuya frontera (en J) es ϕ^* . Por el teorema 2.19, la componente conexa J' que tiene clausura compacta es homeomorfa a una bola abierta en \mathbb{R}^2 . De hecho, el homeomorfismo se extiende a todo J , luego J' es un dominio de Jordan en S .

La clausura de J' en J (al ser compacta) será también su clausura en S , luego también $\partial J'$ será la misma en J y en S , Concretamente, $\partial J' = \phi^*$. Llamemos V a la otra componente conexa de $J \setminus \phi^*$.

Como ϕ^* es compacto, podemos tomar un dominio de Jordan $\phi^* \subset J^* \subsetneq J$ y, como antes, $S \setminus J^*$ es conexo y $J \setminus J^* \subset (S \setminus J^*) \cap V \neq \emptyset$ (pues la componente conexa acotada de $J' \setminus \phi^*$ es también $J' \subset J^*$). Por consiguiente

$$V' = (S \setminus J) \cup V = (S \setminus J^*) \cup V$$

es conexo. Tenemos, pues, una descomposición $S = J' \cup \phi^* \cup V'$ en unión disjunta. Como ϕ^* es la frontera de V en J , se cumple que

$$\phi^* \subset \bar{V} \subset \bar{V}' \subset V' \cup \phi^*$$

(pues J' es abierto en S), luego $\partial V' = \phi^*$. Concluimos que J' y V' son las componentes conexas de $S \setminus \phi^*$, y ambas tienen frontera ϕ^* . ■

Nota El teorema anterior sigue siendo válido si $\phi : S^1 \rightarrow \bar{J}$, y entonces una de las componentes conexas de $S \setminus \phi^*$ está contenida en \bar{J} . Para probarlo basta usar que toda bola cerrada es la intersección de una sucesión decreciente de

bolas abiertas. A través de una carta, podemos expresar \bar{J} como intersección de una sucesión decreciente $\{J_n\}_{n=0}^\infty$ de dominios de Jordan. Aplicando el teorema a cualquiera de ellos tenemos que una de las dos componentes conexas de $S \setminus \phi^*$ está contenida en infinitos dominios J_n , luego está contenida en \bar{J} . ■

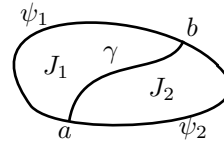
Otra consecuencia del teorema de Schoenflies es que si ϕ es una curva de Jordan en \mathbb{R}^2 entonces ϕ^* tiene interior vacío (porque esto es cierto si ϕ^* es una circunferencia).

En el teorema siguiente, la unión (o concatenación) de arcos es la definida en la sección 3.3 de [An]:

Teorema 2.22 *Sea S una variedad topológica, sea $J \subset S$ un dominio de Jordan, sea $\phi : I \rightarrow J$ una parametrización de su frontera, sean a, b puntos distintos en ϕ^* y sea $\gamma : I \rightarrow \bar{J}$ un arco de Jordan de extremos a y b tal que $\gamma^* \setminus \{a, b\} \subset J$. Entonces existen dos arcos ψ_1 y ψ_2 de extremos a y b cuya unión es ϕ , los arcos $\phi_1 = \psi_1 \cup \gamma$ y $\phi_2 = \psi_2 \cup \gamma$ son curvas de Jordan, que delimitan dos dominios de Jordan disjuntos J_1 y J_2 tales que $J_1 \cup J_2 = J \setminus \gamma^*$.*

En otras palabras, un arco de Jordan que atraviese un dominio de Jordan desde un punto de su frontera hasta otro divide a dicho dominio en dos partes, que son a su vez dos dominios de Jordan.

DEMOSTRACIÓN: Aplicando un homeomorfismo, podemos suponer que J es la bola unitaria abierta en \mathbb{R}^2 , con lo que $\phi^* = S^1$. Las primeras afirmaciones son fáciles de probar. Llamamos J_1 y J_2 a los interiores de ϕ_1 y ϕ_2 . Son dominios de Jordan por el teorema de Schoenflies.



Como el conexo $\mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)$ no corta a ϕ_i^* , está contenido en una componente conexa de $\mathbb{R}^2 \setminus \phi_i^*$, obviamente en la no acotada, luego $J_i \subset B_1(0) = J$.

Si fuera $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$, entonces $J_1 \cup J_2$ sería un abierto conexo contenido en $\mathbb{R}^2 \setminus \phi_i^*$ que contiene a J_i , luego tendría que ser $J_1 \cup J_2 = J_i$, luego $J_1 = J_2$, pero esto es imposible, porque ambos abiertos tienen fronteras distintas $\partial J_i = \phi_i^*$.

Precisamente porque $\partial J_i = \phi_i^*$ tenemos que J_i es abierto y cerrado en $J \setminus \gamma^*$ (pues en $J \setminus \gamma^*$ no hay puntos frontera de J_i), luego J_1 y J_2 son componentes conexas de $J \setminus \gamma^*$. Tenemos que probar que no hay más.

Si en $\bar{J} = B^2$ identificamos S^1 a un punto, el espacio resultante es homeomorfo a S^2 (véase el ejemplo de la página 35) y el arco de Jordan γ compuesto con la proyección $\pi : B^2 \rightarrow B^2/S^1$ es una curva de Jordan, luego determina exactamente dos componentes conexas. Como π no identifica puntos de J , tenemos que $\pi[J_1]$ y $\pi[J_2]$ son abiertos cerrados conexos disjuntos en el complementario de $(\gamma \circ \pi)^*$, luego son las dos únicas componentes conexas de este espacio. Así pues, $(B^2/S^1) \setminus (\gamma \circ \pi)^* = \pi[J_1] \cup \pi[J_2]$, luego $J \setminus \gamma^* = J_1 \cup J_2$. ■

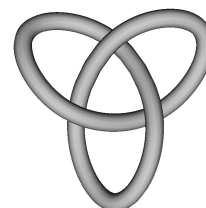
2.7 Nudos

Esto es un nudo:



Es el nudo más simple de todos, el que hacemos para atarnos los zapatos. Si estiramos de la cuerda, el nudo se tensa, no como otros falsos nudos que podríamos formar y que desaparecen al tensar la cuerda. Obviamente, todo nudo se puede desanudar si los extremos de la cuerda están libres y podemos hacerlos pasar por sus entresijos, pero, ¿y si los extremos de la cuerda están fijos? o, equivalentemente, ¿y si la cuerda es infinita? o, más terrenalmente, ¿y si unimos los extremos de la cuerda?

Si unimos los extremos de la cuerda en el nudo de la figura, obtenemos el nudo conocido como trébol. El trébol no se puede desanudar, pero ¿qué significa esto exactamente? Para precisar la pregunta, partimos de la siguiente definición de nudo:



Definición 2.23 Un *nudo* es un subespacio $S \subset \mathbb{R}^3$ homeomorfo a S^1 .

En otras palabras, un nudo es una curva de Jordan en \mathbb{R}^3 . Aquí estamos despreciando el grosor de las cuerdas, lo cual es totalmente razonable, pero también es posible no hacerlo y definir un nudo como un subespacio de \mathbb{R}^3 homeomorfo a un toro (sólido o bidimensional, también esto es irrelevante).

La *teoría de nudos* es una rama de la topología que estudia y clasifica los nudos considerando que dos nudos son *equivalentes*, no si son homeomorfos — pues todos lo son por definición— sino si uno puede transformarse en el otro a través de un homeomorfismo de \mathbb{R}^3 en sí mismo. Esto se suele expresar diciendo que son *ambientalmente homeomorfos*. Un *homeomorfismo ambiental* entre dos subespacios de un espacio topológico X es un homeomorfismo entre ellos que se extiende a un homeomorfismo de X en sí mismo que conserve la orientación.⁶

Un nudo es *trivial* o (desanudable) si es ambientalmente homeomorfo al *nudo trivial*, es decir, a S^1 identificado, por ejemplo, con $S^1 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ o, si preferimos pensar en los nudos como toros, a un toro “usual”, sin anudar, como suele representarse un toro.

En estos términos, lo que dice el teorema de Schoenflies es que la teoría de nudos en \mathbb{R}^2 es trivial, pues todos los nudos son ambientalmente homeomorfos entre sí o, dicho de otro modo, que es imposible anudar circunferencias en el plano.

La situación es muy distinta en \mathbb{R}^3 , donde el trébol es el ejemplo más sencillo de nudo no trivial, es decir, de subespacio homeomorfo a una circunferencia (o a un toro), pero que no puede transformarse en la circunferencia “desanudada” mediante un homeomorfismo que se extienda al “espacio ambiente” \mathbb{R}^3 .

⁶En 10.41 definiremos qué significa que un homeomorfismo conserve la orientación.

En este libro no tocaremos la teoría de nudos, pero mostraremos como ejemplo de las técnicas algebraicas que vamos a desarrollar que ciertamente el trébol es un nudo no trivial. Un problema con el que nos encontramos es que la única definición que hemos dado del trébol ha sido un dibujo, lo cual no es nada operativo. Para formalizar el trébol definiremos, de hecho, una clase general de nudos, los llamados *nudos toroidales*, lo cual hace referencia a que son circunferencias contenidas en la superficie de un toro.

Como sucede con las curvas de Jordan en general, podemos identificar un nudo con una parametrización continua $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ inyectiva salvo por que $\alpha(0) = \alpha(1)$.

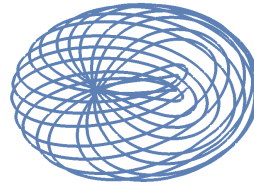
Consideremos el toro $T \subset \mathbb{R}^3$ parametrizado por el cubrimiento $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow T$ dado por

$$p(s, t) = (R \cos 2\pi s + r \cos 2\pi t \cos 2\pi s, R \sin 2\pi s + r \cos 2\pi t \sin 2\pi s, r \sin 2\pi t).$$

Así, en lugar de estudiar nudos $\alpha : I \rightarrow T$, podemos considerar sus elevaciones a \mathbb{R}^2 , con lo que tenemos aplicaciones $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$. No perdemos generalidad si exigimos $\tilde{\alpha}(0) = (0, 0)$.

Los nudos sencillos que vamos a considerar son aquellos cuya elevación es de la forma $\tilde{\alpha}(t) = (mt, nt)$, donde los coeficientes cumplen necesariamente $m, n \in \mathbb{Z}$, pues $\tilde{\alpha}(1)$ tiene que tener la misma imagen que $\alpha(0)$.

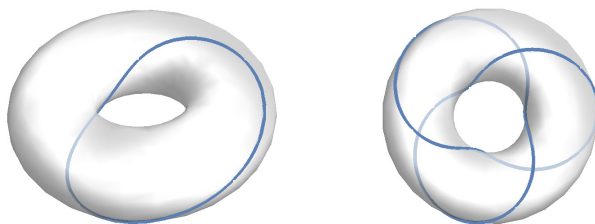
Incidentalmente, notemos que, evidentemente, una recta $\tilde{\alpha}(t) = (ut, vt)$, donde u/v es irracional da lugar al ser proyectada en el toro a una curva que nunca pasa dos veces por el mismo punto. De hecho, puede probarse que su imagen es densa en el toro. La figura muestra un fragmento de la curva correspondiente a $\tilde{\alpha}(t) = (\sqrt{2}, 1)t$.



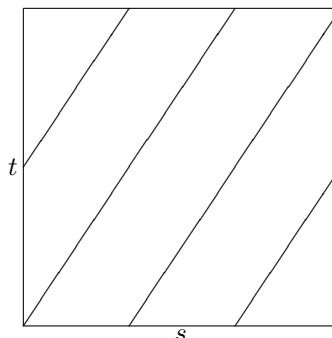
Para que α sea un nudo necesitamos que sea inyectiva salvo en sus extremos, y esto sucede si y sólo si m y n son primos entre sí. En efecto, si existen $0 \leq t < t' < 1$ tales que $\alpha(t) = \alpha(t')$, entonces $(mt', nt') = (mt + nt) + (k, l)$, con $k, l \in \mathbb{Z}$, luego $m(t' - t) = k$, $n(t' - t) = l$. Sea $t' - t = u/v$, con $u, v \in \mathbb{Z}$ primos entre sí. Entonces $mu/v = k$, $nu/v = l$, luego $v \mid m$ y $v \mid n$. Si $(m, n) = 1$, entonces $v = 1$, luego $0 < t' - t = u < 1$ tiene que ser $t' - t = 0$. Recíprocamente, si $(m, n) = d$ se cumple que $\alpha(1/d) = \alpha(0)$.

Así, para cada par de enteros (m, n) primos entre sí está definido el *nudo toroidal* de tipo (m, n) , que es determinado por la elevación $\tilde{\alpha}(t) = (mt, nt)$. Esto significa que α da m vueltas transversales y n vueltas longitudinales al toro.

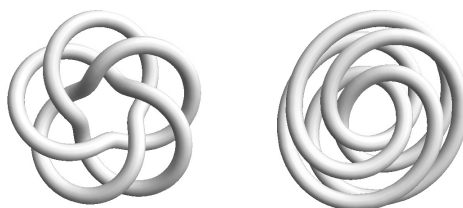
El nudo de tipo $(1, 1)$ es simplemente el nudo trivial (figura de la izquierda), de modo que el más simple de los nudos toroidales no triviales es el de tipo $(2, 3)$, que es precisamente el trébol (figura de la derecha).



Si pensamos en el toro como el cociente que resulta de identificar los lados opuestos de un cuadrado, entonces el nudo de tipo $(2, 3)$ se corresponde con el bucle que muestra la figura, que parte del vértice inferior izquierdo del cuadrado y llega hasta el vértice superior derecho (que se corresponde con el mismo punto del toro). Vemos que la coordenada s pasa por 0 tres veces (lo que significa que el bucle da tres vueltas transversales) mientras que t vale 0 dos veces (por lo que da dos vueltas longitudinales).

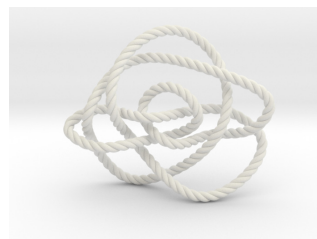


En la representación del trébol el 3 se corresponde con el hecho de que al recorrer el nudo damos tres vueltas alrededor del centro del toro, mientras que el 2 se corresponde con el hecho de que cada semiplano con frontera en el eje de rotación del toro corta al nudo en dos puntos. Por ejemplo, la figura siguiente muestra los nudos de tipo $(3, 5)$ y $(5, 3)$.



El primero da cinco vueltas alrededor del centro del toro, mientras que cada semiplano con frontera en el eje de rotación del toro corta al nudo en dos puntos. El segundo da tres vueltas alrededor del toro y cada semiplano con frontera en el eje de rotación del toro corta al nudo en cinco puntos.

Señalemos, por último que no es fácil determinar si un nudo es o no trivial. Por ejemplo, la figura muestra uno de los llamados falsos nudos de Ochiai, y “desanudarlo” es todo un pasatiempo. Podría conjeturarse que, del mismo modo que todas las circunferencias son desanudables en \mathbb{R}^2 , igualmente todas las esferas son desanudables en \mathbb{R}^3 , pero eso es precisamente lo que refuta la esfera cornuda de Alexander que ya hemos mencionado (véase 8.39). Se trata de una esfera “anudada” en \mathbb{R}^3 , en el sentido de que no es ambientalmente homeomorfa a S^2 .



2.8 Triangulaciones

Dedicamos esta última sección a demostrar un teorema fundamental en la clasificación de las superficies compactas que veremos en el capítulo siguiente. Ante todo, conviene precisar la noción de superficie:

Definición 2.24 Llamaremos *superficies topológicas* a las variedades topológicas conexas de dimensión 2 con una base numerable.

Por el teorema 1.22 la existencia de una base numerable es redundante en el caso de una variedad topológica compacta.

Llamaremos

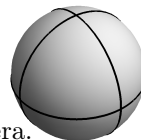
$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

al triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.

Definición 2.25 Un *triángulo* en una superficie topológica S como una aplicación $\phi : \Delta \rightarrow S$ inyectiva y continua (luego un homeomorfismo en su imagen). Las imágenes de los vértices y los lados de Δ se llaman *vértices* y *lados* del triángulo.

Cuando no haya confusión no distinguiremos entre un triángulo como aplicación y su imagen. De este modo podemos decir que un triángulo es un subespacio compacto y conexo. Cuando hablemos de la intersección de dos triángulos nos referiremos, naturalmente, a la intersección de sus imágenes. Hemos de tener presente que un triángulo como conjunto no determina sus lados y sus vértices.

Una *triangulación* de una superficie S es un conjunto localmente finito de triángulos que cubren S y de modo que la intersección de dos de ellos sea vacía, un vértice común o una arista común. Una superficie S es *triangulable* si tiene una triangulación. La figura muestra una triangulación de una esfera.



Nuestro propósito es demostrar que toda superficie topológica es triangulable. Para ello empezamos dando una condición suficiente para la existencia de triangulaciones:

Definición 2.26 Un cubrimiento abierto de una superficie compacta S formado por dominios de Jordan tiene *carácter finito* si las clausuras de los abiertos del cubrimiento forman una familia localmente finita (todo punto de S tiene un entorno que corta a un número finito de ellas) y la intersección de las fronteras de dos de ellas se cortan a lo sumo en un número finito de puntos y arcos.

Teorema 2.27 Si una superficie tiene un cubrimiento abierto formado por dominios de Jordan y de carácter finito, entonces es triangulable.

DEMOSTRACIÓN: Sea S una superficie y \mathcal{U} un cubrimiento abierto en las condiciones del enunciado. Como S tiene una base numerable, pasando a un subcubrimiento podemos suponer que \mathcal{U} es numerable, digamos $\mathcal{U} = \{J_n\}_{n=0}^\infty$, donde los J_n son distintos dos a dos.

Veamos ahora que podemos eliminar todos los J_n tales que \bar{J}_n está contenido en otro \bar{J}_m , con $m \neq n$, es decir, que al hacerlo seguimos teniendo un cubrimiento.

En efecto, en caso contrario habría un punto $x \in S$ no cubierto por los abiertos restantes. Como existe un n_0 tal que $x \in J_{n_0}$, éste tiene que ser uno de los eliminados, luego existe un $n_1 \neq n_0$ tal que $\bar{J}_{n_0} \subset \bar{J}_{n_1}$. Pero x está en el interior de \bar{J}_{n_1} , es decir, en J_{n_1} , lo cual implica que J_{n_1} es también uno de los abiertos eliminados, luego existe un $n_2 \neq n_1$ tal que $x \in J_{n_0} \subset J_{n_1} \subset \bar{J}_{n_2}$. El mismo razonamiento nos da un $n_3 \neq n_2$ tal que $x \in J_{n_0} \subset J_{n_1} \subset J_{n_2} \subset \bar{J}_{n_3}$ y, por consiguiente, obtenemos una sucesión infinita

$$x \in J_{n_0} \subset J_{n_1} \subset J_{n_2} \subset J_{n_3} \subset \dots$$

que contradice la finitud local del cubrimiento (notemos que no puede haber dos abiertos iguales en la sucesión, porque entonces habría dos consecutivos iguales, lo cual está excluido por el proceso de construcción). Así pues, podemos suponer que $\bar{J}_m \not\subset \bar{J}_n$ para todo par de índices $m \neq n$.

Llamaremos γ_n a la frontera de J_n , que es una curva de Jordan tal que $S \setminus \gamma_n^*$ tiene dos componentes conexas, una de las cuales es J_n .

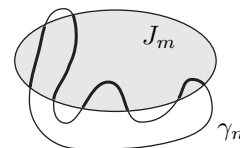
Supongamos que existen $m \neq n$ tales que $\gamma_n^* \subset \bar{J}_m$ (pero $\bar{J}_n \not\subset \bar{J}_m$).

Por el teorema 2.21 (véase la nota posterior) tenemos que $S \setminus \gamma_n^*$ tiene una componente conexa J' que es un dominio de Jordan y está contenida en \bar{J}_m . Pero sólo hay dos componentes conexas, una es J_n , pero J' tiene que ser la otra, pues J_n no está contenida en \bar{J}_m .

Tenemos así una descomposición en unión disjunta $S = J_n \cup \gamma_n^* \cup J'$, donde γ_n^* es la frontera común de J_n y J' , que son ambos dominios de Jordan en S . Por lo tanto, tenemos dos homeomorfismos $\psi_1 : \bar{J}_m \rightarrow B^2$ y $\psi_2 : \bar{J}' \rightarrow B^2$ que envían γ_n^* a S^1 . El homeomorfismo $\psi_1^{-1}|_{S^1} \circ \psi_2 : S^1 \rightarrow S^1$ se extiende a un homeomorfismo $\phi : B^2 \rightarrow B^2$ (lo hemos visto, por ejemplo, en la prueba del teorema 3.15) y cambiando ψ_1 por $\psi_1 \circ \phi : \bar{J}_m \rightarrow B^2$ podemos exigir que ψ_1 y ψ_2 coincidan en γ_n^* . Considerando además dos homeomorfismos entre B^2 y dos semiesferas opuestas en S^2 que coincidan en S^1 podemos formar un homeomorfismo entre S y S^2 , luego S es homeomorfa a una esfera y las esferas son claramente triangulables.

Así pues, a partir de aquí podemos suponer que $\gamma_n^* \not\subset \bar{J}_m$ siempre que $m \neq n$.

Si $\gamma_n^* \cap J_m \neq \emptyset$, esta intersección es abierta en γ_n^* . Un abierto en I es unión de una cantidad a lo sumo numerable de intervalos abiertos disjuntos, por lo que $\gamma_n^* \cap J_m$ es unión de una cantidad a lo sumo numerable de arcos disjuntos (a lo sumo con sus extremos en



común). Ahora bien, los extremos de estos arcos son puntos de $\gamma_n^* \cap \gamma_m^*$, y esta intersección es finita por hipótesis, luego $\gamma_n^* \cap J_m$ consta de un número finito de arcos con extremos en la frontera γ_m^* .

Sea ϕ_1 uno de estos arcos. Por el teorema 2.22 este arco divide a \bar{J}_m en la unión de las clausuras de dos dominios de Jordan disjuntos. Más concretamente, γ_m se divide en dos arcos y la frontera de cada subdominio es la unión de ϕ_1 con uno de ellos.

Si ϕ_2 es otro de los arcos, como es disjunto de ϕ_1 (salvo quizá en sus extremos), de hecho ϕ_2^* está contenido en uno de los dos subdominios que hemos formado. Aplicamos de nuevo el teorema 2.22 y éste queda dividido a su vez en otros dos subdominios. Repitiendo este proceso terminamos con un número finito de dominios de Jordan disjuntos dos a dos tales que la unión de sus clausuras es \bar{J}_m , además sus fronteras están formadas por la unión de un número finito de arcos que se cortan a lo sumo en sus extremos y están contenidos en γ_m o γ_n , y ninguno de estos recintos contiene puntos de γ_m o γ_n .

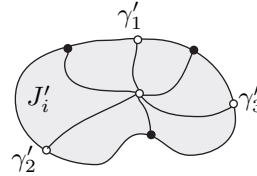
Ahora repetimos este proceso cambiando γ_n por cualquier otra curva que corte a J_m , pero no trabajando con J_m , sino con los subdominios de Jordan que hemos formado. Notemos que sigue siendo cierto que cualquier otra $\gamma_{n'}$ corta a las fronteras de estos subdominios en un número finito de puntos, pues todos los puntos de corte son puntos de corte entre $\gamma_{n'}$ y γ_m o γ_n . Al realizar esto con todos los posibles γ_n , obtenemos una descomposición de \bar{J}_m en unión de las clausuras de un número finito de dominios de Jordan disjuntos dos a dos cuyas fronteras son uniones de un número finito de subarcos de las curvas γ_n que se cortan a lo sumo en sus extremos y de modo que sus interiores no contienen puntos de ninguna curva γ_n .

Aplicamos este mismo proceso de subdivisión a todos los abiertos J_m y observamos que si un subdominio J'_m obtenido al dividir J_m tiene un punto en común con otro J'_n obtenido al dividir J'_n , entonces $J'_m = J'_n$.

En efecto, si $x \in J'_m \cap J'_n$ pero existiera un punto, digamos, $y \in J'_m \setminus J'_n$, un arco que uniera x con y sin salir de J'_m tendría que pasar por la frontera de J'_n , luego J'_m contendría un punto de una curva γ'_r (ya que la frontera de J'_n está formada por arcos de estas curvas), contradicción.

En total, tenemos un número finito de dominios de Jordan en S , digamos J'_1, \dots, J'_N , disjuntos dos a dos, cuyas clausuras cubren S , cuyas fronteras constan de un número finito de arcos de Jordan de modo que si dos de ellos no son iguales pero tienen un punto en común, éste es un extremo de ambos.

Ya podemos construir la triangulación. Para ello tomamos un dominio J'_i y fijamos un homeomorfismo $\phi_i : B^2 \rightarrow \bar{J}'_i$. Los extremos de los arcos que componen la frontera de J'_i se corresponden con un número finito de puntos en S^1 . Como en principio podría haber sólo un punto y vamos a necesitar al menos dos, consideramos también un punto intermedio en cada arco.



Los segmentos que unen $(0,0)$ con los puntos que hemos señalado en S^1 dividen a B en un número finito de sectores circulares, cada uno de los cuales

es homeomorfo al triángulo $\Delta \subset \mathbb{R}^2$. Al componer un homeomorfismo de Δ en cada sector circular con ϕ_i^{-1} obtenemos un número finito de triángulos en J'_i con un vértice en $\phi_i(0,0)$ y los otros dos en $\partial J'_i$.

Es claro que al hacer esto con todos los dominios J'_i (usando siempre el mismo punto intermedio en cada arco) obtenemos una triangulación de S . ■

Conviene observar que los triángulos que hemos construido están contenidos en los abiertos del cubrimiento dado.

A partir de aquí nos disponemos a probar que toda superficie topológica S tiene un cubrimiento en las condiciones del teorema anterior. Para ello necesitamos algunos hechos previos:

Supongamos que Γ es un conjunto localmente finito de arcos de Jordan en una superficie S , es decir, tal que todo punto de S tiene un entorno que corta a lo sumo a un número finito de ellos.

Si A es un abierto en S , la intersección con A de cada arco de Γ es un conjunto a lo sumo numerable de arcos disjuntos. Llamaremos $\Gamma \cap A$ al conjunto de todas estas intersecciones. Veamos que sigue siendo un conjunto localmente finito de arcos en A .

En efecto, fijado un punto $x \in A$, tiene un entorno $V \subset A$ que corta a un número finito de arcos de Γ . De hecho, si x no está en uno de estos arcos, podemos reducir V para que no lo corte. Podemos suponer, pues, que los arcos a los que corta V pasan por x . Si $\gamma \in \Gamma$ es uno de estos arcos, el problema es que $\gamma^* \cap A$ puede haberse dividido en infinitos subarcos, pero vamos a ver que reduciendo V podemos exigir que V sólo corte al que contiene a x , llamémoslo γ_0 . En caso contrario podríamos tomar una sucesión de puntos en γ^* , todos contenidos en subarcos distintos de γ_0 , pero que convergieran a x . Esto es imposible, porque γ_0^* es un entorno de x en γ .

Teorema 2.28 *Sea Γ un conjunto localmente finito de arcos de Jordan en una superficie S y sean p_1 y p_2 puntos en S no contenidos en ninguno de ellos. Entonces p_1 y p_2 pueden ser unidos por un arco de Jordan que corta a los arcos de Γ en un número finito de puntos.*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos un arco ϕ que una p_1 con p_2 . Podemos exigir que no pase por ningún extremo de ningún arco de Γ . En efecto, si $p \in \phi^*$, tiene un entorno que corta a un número finito de arcos de Γ . Restringiéndolo, podemos exigir que no contenga ningún extremo aparte de p . Así pues, el conjunto de extremos de arcos de Γ contenidos en ϕ^* es discreto en ϕ^* , luego finito. Cada extremo $p \in \phi^*$ tiene un entorno homeomorfo a un disco abierto, mediante el cual es fácil “desviar” ϕ para hacer que no pase por p .

Para cada $p \in \phi^*$ tomamos un entorno V_p que sea un dominio de Jordan, que corte a un número finito de arcos de Γ y que no contenga a ningún extremo. De este modo, la intersección con V_p de cada arco de Γ es una cantidad a lo sumo numerable de arcos de Jordan con extremos en la frontera. Además cada uno de estos arcos γ tiene interior vacío en V_p . En efecto, podemos suponer que V_p es un disco abierto en \mathbb{R}^2 y que los extremos de γ están en la frontera.

Podemos unir estos extremos con un arco de Jordan exterior al disco, con lo que formamos una curva de Jordan, que tiene interior vacío en \mathbb{R}^2 por el teorema de Jordan, luego γ también tiene interior vacío en V_p .

Podemos cubrir ϕ^* con un número finito de entornos V_p . Además podemos ordenarlos como V_1, \dots, V_r de manera que $p_1 \in V_1$, $p_2 \in V_r$ y $V_i \cap V_{i+1} \neq \emptyset$. Tomamos puntos $q_i \in V_i \cap V_{i+1}$ que no estén en ningún arco de Γ (lo cual es posible porque son un conjunto numerable de cerrados con interior vacío, luego su unión tiene interior vacío por el teorema de Baire [An 3.64]). Ahora basta unir p_0 con q_1 , cada q_i con q_{i+1} y q_{r-1} con p_2 mediante arcos contenidos en el correspondiente V_i que corten a los arcos de Γ en un número finito de puntos. Notemos que al unir dos arcos de Jordan no obtenemos necesariamente un arco de Jordan, pero basta cortar uno por el primer punto donde encuentra al otro.

Así pues, basta probar el teorema sustituyendo S por un dominio de Jordan y exigiendo que los arcos de Γ tengan sus extremos en la frontera. Más aún, puesto que V_i corta a un número finito de arcos de Γ , al restringirnos a V_i podemos descomponer $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$, de modo que los arcos de un mismo Γ_i sean disjuntos dos a dos (salvo quizá por sus extremos). Como antes, podemos suponer que cada arco de Γ se prolonga hasta una curva de Jordan en \mathbb{R}^2 . Teniendo todo esto en cuenta basta probar la afirmación siguiente:

Sea J un dominio de Jordan en \mathbb{R}^2 y $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$ un conjunto discreto de arcos de Jordan contenidos en Γ salvo por sus extremos (que están en la frontera) y prolongables hasta curvas de Jordan en \mathbb{R}^2 . Los arcos de cada Γ_i son disjuntos dos a dos (salvo por los extremos). Sean p_1 y p_2 dos puntos en J no contenidos en ningún arco de Γ . Entonces existe un arco de Jordan contenido en J que une p_1 con p_2 y que corta a los arcos de Γ en un número finito de puntos.

Lo demostraremos por inducción sobre n . El caso $n = 0$ (es decir, $\Gamma = \emptyset$) es trivial. Suponemos, pues, que se cumple para $n - 1 \geq 0$ y vamos a probarlo para n . En primer lugar reduciremos el problema al caso en que Γ_n tiene un solo arco. Para ello tomamos un arco cualquiera ϕ que una p_1 con p_2 en J . Para cada $p \in \phi^*$ tomamos un entorno V que corte a un número finito de arcos de Γ . Restringiéndolo más podemos hacer que sólo corte a aquellos arcos que pasan por p . A lo sumo un arco de Γ_n pasará por p . Si existe tal arco γ , el teorema 2.18 nos da que existe un homeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que lo transforma en un arco de circunferencia (porque γ se prolonga hasta una curva de Jordan). Dentro de $f[V]$ podemos tomar un disco abierto W de centro $f(p)$ que cortará a la circunferencia en una única componente conexa. Cambiando V por $f^{-1}[W]$ tenemos un dominio de Jordan entorno de p que corta a Γ en un número finito de arcos, de los cuales sólo uno está en Γ_n , a saber, γ , y además ahora $V \cap \gamma^*$ es un único arco. Además $\Gamma_i \cap V$ sigue siendo una familia de arcos disjuntos dos a dos (salvo quizá por sus extremos).

Así, al restringirnos a V tenemos las mismas hipótesis, pero ahora Γ_n tiene un único arco o es vacío. Tenemos un entorno V para cada punto del arco ϕ . Como antes, podemos extraer un subcubrimiento finito de ϕ^* y reducir el problema a cada uno de sus miembros.

Ahora, si $\Gamma_n = \emptyset$ basta aplicar la hipótesis de inducción. Si $\Gamma_n = \{\gamma\}$, por el teorema 2.22 tenemos que γ divide a J en dos componentes conexas. Los puntos p_1 y p_2 no están en γ . Pueden estar ambos en la misma componente o bien en componentes distintas. Si están en la misma componente, digamos J' , basta aplicar la hipótesis de inducción al dominio J y los arcos de $\Gamma_i \cap J$, para $i = 1, \dots, n-1$.

Supongamos por último que p_1 y p_2 están en componentes conexas distintas. La idea es tomar un punto $q \in \gamma^*$ y unir cada p_i con q mediante un arco contenido en la componente correspondiente, pero no podemos aplicar la hipótesis de inducción porque q es un punto frontera. Para llegar a la conclusión debemos elegir q adecuadamente.

Para cada $\delta \in \Gamma$ distinto de γ , sea F_δ el conjunto de los puntos frontera de $\delta^* \cap \gamma^*$ en γ^* . Se trata de un cerrado de interior vacío en γ^* (por ser la frontera de un cerrado). Como Γ es numerable, el teorema de Baire nos da que existe un punto $q \in \Gamma^*$ que no es un extremo y no pertenece a ningún F_δ . Llamemos J' a la componente conexa de $J \setminus \gamma^*$ que contiene a p_1 . Basta probar que p_1 se puede unir con q mediante un arco de Jordan contenido en J' (salvo por su extremo) y que corta a los arcos de $\Gamma \setminus \{\gamma\}$ en un número finito de puntos. Lo mismo valdrá para p_2 y uniendo los dos arcos tendremos el teorema.

Tenemos que J' es un dominio de Jordan con q en su frontera. En principio tenemos un arco de Jordan ϕ que une p_1 con q (por 2.18, pues es trivialmente cierto si J' es un disco cerrado). Por la elección de q existe un subarco ϕ' de ϕ con extremo q que no corta a ningún arco de Γ (salvo a γ en su extremo). En efecto, q tiene un entorno que sólo corta a un número finito de arcos de Γ . Si en todo entorno menor hubiera puntos de ϕ^* que estuvieran en otro arco de Γ , podríamos tomar una sucesión de tales puntos convergente a q y de modo que todos estuvieran en el mismo arco δ . Por consiguiente $q \in \delta^* \cap \gamma^*$, digamos $q = \delta(t_0)$, pero q no es un punto frontera de $\delta^* \cap \gamma^*$, luego es un punto interior. Sea $E \subset \delta^* \cap \gamma^*$ un abierto de γ^* . Podemos tomarlo homeomorfo a un intervalo abierto. Entonces $E' = \delta^{-1}[E]$ es un conexo en el intervalo unidad I , luego es un intervalo. Además t_0 lo desconecta, luego está en su interior. Sin embargo, la sucesión en ϕ^* que converge a q corresponde con una sucesión de parámetros que debe converger a t_0 pero que nunca entra en E' , lo cual es absurdo.

Así pues, tenemos un arco de Jordan ϕ' con un extremo en q y otro en un punto $q' \in J'$ que no corta a ningún arco de Γ . Por hipótesis de inducción en J' podemos encontrar un arco de Jordan ϕ'' que una p_1 con q' y que corte a las curvas de $\Gamma \setminus \{\gamma\}$ en un número finito de puntos. En principio, la unión de ϕ' y ϕ'' no tiene por qué ser un arco de Jordan, pero basta cortar ambos arcos en el primer punto en que corten y unirlos por él. ■

Finalmente podemos probar:

Teorema 2.29 *Toda superficie topológica es triangulable.*

DEMOSTRACIÓN: Sea S una superficie topológica. Hemos de probar que admite un cubrimiento formado por dominios de Jordan y con carácter finito.

Veamos en primer lugar que existen dos sucesiones finitas o infinitas $\{V_n\}$, $\{W_n\}$ de regiones de Jordan con las propiedades siguientes:

1. $\bar{V}_n \subset W_n$,
2. $\bigcup_n V_n = S$,
3. Cada punto de S pertenece a un número finito de cerrados \bar{W}_n .

Como S tiene una base numerable, existe una base numerable $\{U_i\}_{i=0}^\infty$ formada por dominios de Jordan. A su vez, cada U_i puede expresarse como unión de un conjunto numerable $\{U_{ij}\}_{j=0}^\infty$ de dominios de Jordan tales que $\bar{U}_{ij} \subset U_i$. Y nuevamente descomponemos cada U_{ij} en unión numerable de dominios de Jordan $\{U_{ijk}\}_{k=0}^\infty$ de forma que $\bar{U}_{ijk} \subset U_{ij}$.

Reordenamos los abiertos $\{U_{ijk}\}$ en una única sucesión $\{V_n\}_{n=0}^\infty$ y, si se cumple que $V_n = U_{ijk}$, llamamos $W_n = U_{ij}$. De este modo cada abierto G puede expresarse como unión de abiertos V_n tales que $V_n \subset \bar{V}_n \subset W_n \subset \bar{W}_n \subset G$. Ahora construimos como sigue una sucesión finita o infinita de números naturales n_k :

Tomamos $n_0 = 0$ y, supuestos definidos n_0, \dots, n_{k-1} , llamamos n_k al menor natural tal que

$$\bar{V}_0 \cup \dots \cup \bar{V}_{n_{k-1}} \subset V_0 \cup \dots \cup V_{n_k}.$$

Existe tal n_k porque el miembro izquierdo es compacto y los V_n forman un cubrimiento abierto de S . Notemos que $n_k > n_{k-1}$ salvo si $S = V_0 \cup \dots \cup V_{n_{k-1}}$. En efecto, si $n_k \leq n_{k-1}$, entonces

$$\bar{V}_0 \cup \dots \cup \bar{V}_{n_{k-1}} \subset V_0 \cup \dots \cup V_{n_{k-1}} \subset \bar{V}_0 \cup \dots \cup \bar{V}_{n_{k-1}},$$

luego el conjunto intermedio sería abierto y cerrado, luego, por conexión, sería igual a S . Esto sucede si y sólo si S es compacta, y en tal caso las sucesiones $\{V_n\}_{n=0}^{n_{k-1}}$ y $\{W_n\}_{n=0}^{n_{k-1}}$ cumplen lo requerido.

Si S no es compacta llamamos $G_k = V_0 \cup \dots \cup V_{n_k}$, de modo que $\bar{G}_{k-1} \subset G_k$, cada \bar{G}_k es compacto y la unión de todos ellos es S . Sea

$$H_k = \bar{G}_{k+1} \setminus G_k \subset G_{k+2} \setminus \bar{G}_{k-1}.$$

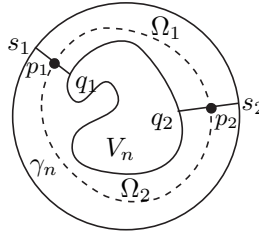
El último conjunto es abierto, luego puede expresarse como unión de abiertos $V_n \subset \bar{W}_n \subset G_{k+1} \setminus \bar{G}_{k-1}$. Como H_k es compacto, puede cubrirse por un número finito de estos abiertos, digamos V_{kl} , y sea W_{kl} el abierto correspondiente.

Si $i \leq k-3$, la clausura \bar{W}_{ij} no puede cortar a \bar{W}_{kl} , pues se cumple que $\bar{W}_{ij} \subset G_{i+2} \subset G_{k-1}$, mientras que $\bar{W}_{kl} \cap G_{k-1} = \emptyset$. Por lo tanto, cada \bar{W}_{ij} corta a un número finito de clausuras \bar{W}_{kl} . Reordenando las sucesiones $\{V_{kl}\}$ y $\{W_{kl}\}$ tenemos las sucesiones requeridas.

Vamos a construir dominios de Jordan J_n tales que $V_n \subset \bar{J}_n \subset W_n$ y de modo que sus fronteras γ_n se corten a lo sumo en un número finito de puntos. Éstos formarán claramente un cubrimiento de carácter finito.

Tomemos $J_0 = V_0$ y supongamos que ya hemos construido J_0, \dots, J_{n-1} en las condiciones indicadas. Basta construir $V_n \subset \bar{J}_n \subset W_n$ tal que su frontera γ_n corte a $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1}$ en un número finito de puntos.

Consideremos un homeomorfismo que transforme W_n en un disco cerrado en \mathbb{R}^2 . Podemos suponer que su centro se corresponde con un punto de V_n . Teniendo en cuenta que los arcos γ_i se corresponden con arcos de interior vacío en el disco, podemos encontrar dos puntos p_1 y p_2 en el disco, situados sobre radios distintos, que no estén en ninguno de los arcos. Además, podemos elegirlos de modo que el segmento de radio que los une con la circunferencia no corte a \bar{V}_n . Llamemos s_1 y s_2 a los segmentos de radio que unen la circunferencia con el primer punto donde los radios encuentran a \bar{V}_n . Si llamamos q_1 y q_2 los puntos de corte, éstos dividen la frontera de V_n en dos arcos. Consideramos las dos regiones de Jordan Ω_1 y Ω_2 descritas por la figura siguiente:



Puesto que p_1 y p_2 no están sobre ninguno de los arcos γ_i , podemos unirlos con dos segmentos a dos puntos de Ω_1 sin pasar por ningún γ_i . Por el teorema anterior, estos dos puntos pueden unirse a su vez mediante un arco de Jordan contenido en Ω_1 que corte a cada γ_i en un número finito de puntos. Al unir este arco con los dos segmentos (eliminando las posibles autointersecciones) obtenemos un arco de Jordan contenido en Ω_1 salvo por sus extremos, que son p_1 y p_2 . Hacemos lo mismo en Ω_2 y, al unir los dos arcos, conseguimos una curva de Jordan γ_n . Llamemos J_n a su interior. Puesto que $\mathbb{R}^2 \setminus W_n$ no corta a la frontera de J_n y es conexo no acotado, ha de estar en el exterior de γ_n , es decir, $J_n \subset W_n$.

Hemos de probar que $V_n \subset \bar{J}_n$. Como J_n no tiene frontera en V_n , si no se da la inclusión es que V_n está en el exterior de J_n . La frontera de Ω_1 está formada por parte de la frontera de W_n (en el exterior de γ_n), parte de la frontera de V_n (también en el exterior), y los segmentos s_1 y s_2 que, por conexión, están en el exterior excepto por los puntos p_1 y p_2 , que están en γ_n . Así, Ω_1 no tiene puntos frontera en J_n (y sí tiene puntos exteriores), lo que implica que $\Omega_1 \cap \bar{J}_n = \emptyset$, pero esto es absurdo, pues media frontera de J_n está en Ω_1 . ■

Capítulo III

Grafos, deltaedros y complejos celulares

En este capítulo vamos a estudiar varias familias de espacios topológicos que nos aparecerán a menudo en capítulos posteriores:

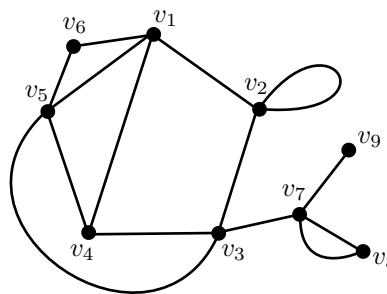
3.1 Grafos

La idea básica en torno al concepto de grafo es que un grafo consta de vértices unidos por aristas, pero esta idea general da lugar a distintas variantes según cómo la perfilamos: si requerimos que las aristas lleven especificado o no un sentido, si admitimos o no varias aristas que conecten los mismos vértices, etc.

Definición 3.1 Un *grafo* es una terna $G = (V, A, I)$, donde V es un conjunto no vacío, cuyos elementos se llaman *vértices*, A es un conjunto cuyos elementos se llaman *aristas* e I es una aplicación que a cada arista $a \in A$ le asigna un par de vértices $I(a) = \{u, v\}$ (sin excluir la posibilidad $u = v$) llamados *extremos* de la arista.

Según decíamos, podemos pensar que los vértices de un grafo finito representan puntos y sus aristas arcos que unen sus extremos. Por ejemplo, la figura representa un grafo con 9 vértices y 14 aristas.

Las aristas con ambos extremos iguales se llaman *bucles*. Una arista con los mismos extremos que otra es una *arista múltiple*. Los grafos sin bucles ni aristas múltiples se llaman *grafos simples*.¹ El grafo de la figura tiene un bucle con extremo v_2 y dos aristas múltiples con extremos v_7 y v_8 .



¹En muchos contextos se llama grafos a los grafos simples y *multigrafos* a los grafos que acabamos de definir. Aquí necesitaremos tratar con grafos en este sentido más general.

En principio, podemos pensar que la figura anterior representa un subconjunto de puntos y arcos en \mathbb{R}^2 , pero no siempre es posible entenderlo así. Por una parte, un grafo con una cantidad infinita de vértices mayor que el cardinal de \mathbb{R}^2 “no cabe” en \mathbb{R}^2 , pero incluso en el caso de un grafo finito, puede ocurrir que no sea posible representarlo en \mathbb{R}^2 de modo que sus aristas no tengan puntos en común salvo a lo sumo sus extremos. Por ejemplo, puede probarse que es imposible unir en \mathbb{R}^2 todos los vértices de un pentágono sin que al menos dos aristas se corten en un punto que no es un vértice. Todos estos inconvenientes desaparecen si asociamos a cada grafo un espacio topológico abstracto.

Definición 3.2 Dado un grafo $G = (V, A, I)$, consideramos la suma topológica

$$G_0 = V \oplus \bigoplus_{a \in A} (\{a\} \times I),$$

donde en V consideramos la topología discreta y en $\{a\} \times I$ la topología que convierte a la proyección $(a, x) \mapsto x$ en un homeomorfismo. La *representación* de G es el espacio cociente \tilde{G} que resulta de identificar en G_0 cada punto $(a, 0)$ con un vértice de $I(a)$ y $(a, 1)$ con el otro (o ambos con el mismo si es que $I(a)$ consta de un único vértice).

Vamos a analizar la topología de \tilde{G} . Llamemos $\pi : G_0 \rightarrow \tilde{G}$ a la proyección en el cociente. Como π no identifica vértices, podemos considerar que $V \subset \tilde{G}$.

Para cada arista a de extremos v_0 y v_1 (no necesariamente distintos), tenemos un arco $\gamma_a : I \rightarrow \tilde{G}$ dado por $\gamma_a(x) = \pi(a, x)$ cuyos extremos son (intercambiando los subíndices si es necesario) $\gamma_a(0) = v_0$ y $\gamma_a(1) = v_1$.

Como π no identifica puntos de $\{a\} \times]0, 1[$, tenemos que γ_a es biyectiva en $]0, 1[$, y también en I salvo si $v_0 = v_1$. Además γ_a es una aplicación abierta, pues si $U \subset I$ es abierto, entonces $\{a\} \times U$ es abierto en $\{a\} \times I$, luego en G_0 , y $\pi[\{a\} \times U]$ es abierto en \tilde{G} porque $\pi^{-1}[\pi[\{a\} \times U]] = \{a\} \times U$. En particular la restricción de γ_a a $]0, 1[$ es siempre un homeomorfismo en su imagen, y estas imágenes son disjuntas para aristas distintas.

Esto nos permite identificar cada arista a de G con $\gamma_a[]0, 1[$, y así a partir de aquí consideraremos a las aristas de G como subconjuntos abiertos $a \subset \tilde{G}$. La unión de todas las aristas de G es $\tilde{G} \setminus V$, luego V es cerrado en \tilde{G} .

Veamos ahora cómo es una base de entornos abiertos de un vértice v . Para cada arista a tal que $\gamma_a(0) = v$, consideramos un entorno $U_{a,0}$ de 0 en $I \setminus \{1\}$ y para cada arista tal que $\gamma_a(1) = v$ consideramos otro entorno $U_{a,1}$ de 1 en $I \setminus \{0\}$. Entonces

$$U_0 = \{v\} \cup \bigcup_{a,i} (\{a\} \times U_{a,i})$$

es abierto en G_0 y coincide con $\pi^{-1}[\pi[U_0]]$, por lo que $\pi[U_0]$ es abierto en \tilde{G} . Además, todo entorno U de v en \tilde{G} contiene un entorno de esta forma.

En efecto, para cada arista a tal que $\gamma_a(0) = v$, tenemos que $\gamma_a^{-1}[U]$ es un entorno de 0, luego contiene un entorno $U_{a,0}$ que no contiene a 1, e igualmente si $\gamma_a(1) = v$ podemos encontrar $1 \in U_{a,1} \subset \gamma_a^{-1}(U)$. El abierto $\pi[U_0]$ construido a partir de estos entornos cumple $v \in \pi[U_0] \subset U$.

Teniendo esto en cuenta es fácil ver que \tilde{G} es un espacio de Hausdorff (pues ahora es fácil encontrar abiertos que separen dos vértices de G). Más aún, cada vértice tiene un entorno que no contiene más vértices, por lo que V hereda la topología discreta de \tilde{G} .

Por otra parte, si a es una arista de G con extremos v_0, v_1 (no necesariamente distintos), entonces en \tilde{G} se cumple que $\bar{a} = a \cup \{v_0, v_1\}$. En efecto, la clausura de a tiene que estar contenida en el compacto $\gamma_a[I] = a \cup \{v_0, v_1\}$ y ciertamente los vértices están en la clausura, pues hemos visto que todo entorno de v debe cortar a a .

Por consiguiente, cada arista a es abierta y cerrada en $\tilde{G} \setminus V$, luego es una componente conexa de $\tilde{G} \setminus V$.

Si el grafo G es finito, entonces \tilde{G} es un espacio topológico compacto (y no es difícil probar el recíproco).

Una última propiedad notable de los grafos es que, como π es una identificación, una función $f : \tilde{G} \rightarrow X$ en un espacio topológico X es continua si y sólo si lo es $\pi \circ f$, pero como V es discreto, la restricción a V de $\pi \circ f$ siempre es continua, y la continuidad de f equivale a que sean continuas todas las composiciones $\gamma_a \circ f$, o también a que las restricciones de f a todas las clausuras de las aristas sean continuas.

Clasificación de grafos finitos Conviene observar que el espacio topológico \tilde{G} no siempre determina al grafo G del cual procede. Para precisar esta idea necesitamos introducir el concepto de isomorfismo de grafos:

Un *isomorfismo* entre dos grafos G y G' es un par (f, g) de biyecciones $f : V \rightarrow V', g : A \rightarrow A'$ entre sus conjuntos respectivos de vértices y aristas con la propiedad de que, si $I(a) = \{v_1, v_2\}$, entonces $I(g(a)) = \{f(v_1), f(v_2)\}$.

Dos grafos G y G' son *isomorfos* si existe un isomorfismo entre ellos, es decir, si se pueden biyectar sus vértices y sus aristas de modo que los extremos de la arista de G' correspondiente a una arista de G son los vértices de G' correspondientes con los sus vértices en G .

Es fácil ver que las representaciones de dos grafos isomorfos son homeomorfas. Sin embargo, hay un fenómeno por el cual grafos no isomorfos pueden tener representaciones homeomorfas, y es que si a un vértice v de un grafo G llegan exactamente dos aristas a y b de extremos $\{v_1, v\}$ y $\{v, v_2\}$, respectivamente (donde admitimos que pueda ser $v_1 = v_2$, pero $v_1 \neq v \neq v_2$), entonces el grafo que resulta de eliminar el vértice v y las aristas a y b , y de añadir una arista de extremos $\{v_1, v_2\}$ tiene una representación homeomorfa a la del grafo de partida.

Así, en el grafo que hemos puesto de ejemplo podríamos suprimir el vértice v_6 y añadir una segunda arista de extremos $\{v_1, v_5\}$ y también eliminar v_8 y añadir un bucle de extremo v_7 , de modo que pasamos a un grafo con 7 vértices y 12 aristas cuya representación es homeomorfa a la del grafo inicial.

Diremos que un grafo está *reducido* si no tiene vértices a los que llegan exactamente dos aristas. Es claro que todo grafo finito puede transformarse en

un grafo reducido cuya representación sea homeomorfa a la del grafo de partida (sin más que ir eliminando sucesivamente vértices redundantes). Por otra parte:

Teorema 3.3 *Dos grafos reducidos son isomorfos si y sólo si sus representaciones son homeomorfas.*

Para probar este hecho conviene introducir antes algunos conceptos:

Un *camino* en un grafo G es una sucesión finita de aristas a_1, \dots, a_n que no sean bucles y tal que cada una comparte un extremo con la anterior y el otro con la siguiente. Dos vértices de un grafo están *conectados* si son extremos de la primera y la última arista de un camino, respectivamente. Claramente la conexión es una relación de equivalencia en el conjunto de los vértices de G , y a las clases de equivalencia las llamaremos *componentes conexas* de G . Un grafo es *conexo* si tiene una única componente conexa.

Cada componente conexa C de un grafo G adquiere estructura de grafo sin más que considerar en ella las aristas de G con extremos en C . El hecho de que si un vértice v pertenece a una componente conexa C también pertenecen a ella todas las aristas con vértice v implica inmediatamente que la representación \tilde{C} es abierta en \tilde{G} , y como el complementario de \tilde{C} es la unión de las representaciones de las demás componentes conexas, también es cerrada. Además \tilde{C} es conexa (de hecho, es arcoconexa), por lo que concluimos que las representaciones de las componentes conexas de G son las componentes conexas de \tilde{G} .

Si es posible biyectar las componentes conexas de dos grafos G y G' de modo que cada componente conexa de G es isomorfa a su correspondiente en G' , entonces los isomorfismos entre componentes conexas se extienden a un isomorfismo entre los grafos.

Por consiguiente, si dos grafos G y G' tienen representaciones homeomorfas, un homeomorfismo $f: \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}'$ induce una biyección $C \mapsto f[C]$ entre las componentes conexas de \tilde{G} y las de \tilde{G}' , de modo que f se restringe a homeomorfismos entre cada par de componentes \tilde{C} y $f[\tilde{C}]$. Esto implica que para probar el teorema anterior no perdemos generalidad si suponemos que los grafos son conexos. (Notemos también que las componentes conexas de un grafo reducido son también grafos reducidos.)

DEMOSTRACIÓN (de 3.3): Supongamos que G y G' son grafos reducidos conexos con representaciones homeomorfas. Tenemos que probar que G y G' son isomorfos. Hay dos casos triviales que necesitamos tratar aparte:

1) Si G consta de un único vértice sin aristas, esto es equivalente a que \tilde{G} se reduzca a un punto, por lo que lo mismo vale para \tilde{G}' y, por consiguiente, G' también consta de un único vértice sin aristas y es isomorfo a G .

2) Si G consta de un único vértice con una única arista (un bucle), esto es equivalente a que $\tilde{G} \cong S^1$, luego lo mismo vale para G' y esto implica que ambos grafos son isomorfos.

En efecto, una implicación es obvia y, si \tilde{G} es homeomorfa a S^1 , pero G contiene más de un vértice, entonces podemos tomar dos vértices distintos adyacentes v_1 y v_2 , (que sean los extremos de una arista). No es posible que G

se reduzca a estos dos vértices con esta única arista, pues entonces $\tilde{G} \cong I$, y no sería homeomorfa a S^1 . Por lo tanto, como G es conexo, de uno de los dos vértices (por ejemplo, de v_1), debe salir una segunda arista (tal vez con extremo en v_1 o en v_2), pero, por definición de grafo reducido, de v_1 no pueden salir exactamente dos aristas, luego tiene que salir al menos una tercera (admitiendo el caso de que en realidad sean dos y una de ellas sea un bucle). Pero entonces, v_1 tiene en \tilde{G} un entorno conexo U (cualquiera que no contenga a otro vértice ni ninguna arista completa, en caso de que haya bucles con extremo en v_1) con la propiedad de que $U \setminus \{v_1\}$ tiene al menos tres componentes conexas (intervalos correspondientes a todas las aristas que llegan a v_1).

Sin embargo, es fácil ver que S^1 no contiene puntos en estas condiciones: si $p \in S^1$ es un punto arbitrario y $p \in U \subset S^1$ es un entorno conexo, entonces $U \setminus \{p\}$ es conexo o bien tiene dos componentes conexas.

Esto prueba que G no puede tener más de un vértice v . Si tuviera al menos dos aristas (necesariamente dos bucles), razonando como antes llegamos a un entorno conexo U de v en \tilde{G} con la propiedad de que $U \setminus \{v\}$ tiene al menos cuatro componentes conexas, lo cual es imposible en S^1 . Así pues, G consta de un único vértice con una única arista.

3) A partir de aquí suponemos que G (y, por los casos anteriores, también G') consta de más de un vértice o, en caso de tener sólo uno, que consta de más de una arista. Los mismos razonamientos precedentes muestran que todo vértice v de G tiene un entorno conexo $U \subset \tilde{G}$ tal que todo entorno conexo $v \in V \subset U \subset \tilde{G}$ cumple que el número de componentes conexas de $V \setminus \{v\}$ es o bien 1 o bien ≥ 3 (es el número de aristas que llegan a v , contando los bucles dos veces).

Por el contrario, si un punto $p \in \tilde{G}$ no es ningún vértice, es que se encuentra sobre una arista, por lo que tiene un entorno conexo $U \subset \tilde{G}$ con la propiedad de que todo entorno conexo $p \in V \subset U \subset \tilde{G}$ cumple que $V \setminus \{p\}$ tiene exactamente dos componentes conexas.

Lo mismo vale para G' , de donde se sigue que un homeomorfismo entre \tilde{G} y \tilde{G}' se restringe a una biyección $f : V \rightarrow V'$ entre los conjuntos de vértices de G y de G' .

Si a es una arista de G con extremos $\{v_1, v_2\}$ (no necesariamente distintos), entonces $f[a] \subset \tilde{G}' \setminus V'$ es un subespacio homeomorfo a un intervalo abierto, en particular, conexo, luego tiene que estar contenido en una de las componentes conexas de $\tilde{G}' \setminus V'$, es decir, en una arista a' de G' . Razonando igualmente con f^{-1} concluimos que $f[a] = a'$, luego f induce una biyección entre las aristas de G y las de G' . Además, $f(v_1)$ y $f(v_2)$ están en $\bar{a}' \setminus a'$, luego son los extremos de a' , y esto prueba que las aplicaciones inducidas por f sobre los vértices y las aristas de los grafos forman un isomorfismo de grafos. ■

Esto hace que el problema de determinar si las representaciones de dos grafos finitos son o no homeomorfas se reduce a determinar si los correspondientes grafos reducidos son o no isomorfos, lo cual es un mero problema de combinatoria finita (es decir, que, en el peor de los casos, puede resolverse teóricamente por la mera enumeración de biyecciones posibles, sin más inconveniente que el volumen

de cálculos que ello puede requerir en la práctica, pero sin que intervenga para nada la topología).

Homotopía de grafos Ahora consideramos el problema de cuándo las representaciones de dos grafos —tal vez infinitos— son homotópicas. Para ello tenemos que introducir algunos conceptos.

En primer lugar observamos que si G es un grafo conexo, entonces dos cualesquiera de sus vértices (distintos) se pueden unir por un camino que no contenga vértices repetidos, pues si un vértice aparece dos veces, podemos acortar el camino eliminando todas las aristas comprendidas entre ellos.

Un *árbol* es un grafo simple (es decir, sin bucles ni aristas múltiples), conexo y que no contiene *ciclos*, es decir, ninguna sucesión finita de aristas a_0, \dots, a_n distintas dos a dos tal que cada una tenga un vértice en común con la arista siguiente y otra con la anterior (entendiendo que a_n es la anterior de a_0 y que a_0 es la siguiente de a_n).

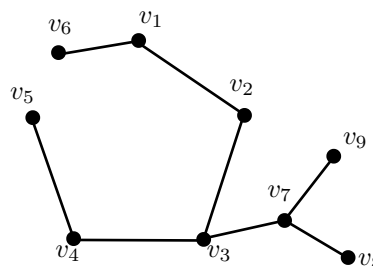
Un árbol tiene la propiedad de que no se le pueden añadir nuevas aristas sin añadir nuevos vértices con ellas, pues si tratamos de añadir una nueva arista a a un árbol G , o bien a es un bucle, con lo que el nuevo grafo ya no será un árbol, o bien conecta dos vértices distintos de G , los cuales pueden ser unidos en G por un camino con aristas distintas dos a dos, y al añadir la nueva arista formamos un ciclo, luego el nuevo grafo ya no es un árbol.

Un *subgrafo* G' de un grafo G es un grafo formado por un subconjunto de vértices y un subconjunto de aristas de G con la misma asignación de extremos. Si G' es un árbol, diremos que es un *subárbol* de G .

Si G es un grafo conexo y G' es un subárbol que no contiene a todos los vértices de G , entonces un vértice de G que no esté en G' puede unirse mediante un camino a un vértice de G' , luego en dicho camino tiene que haber una arista que una un vértice que no esté en G' con otro que sí que lo esté. Es claro que al añadirle a G' dicha arista obtenemos otro subárbol de G con un vértice más.

Así pues, todo subárbol que no contenga todos los vértices de G puede extenderse hasta un subárbol mayor. Por lo tanto, un subárbol de G será *maximal* (en el sentido de que no puede extenderse a otro subárbol mayor) si y sólo si contiene a todos los vértices de G .

Si G es un grafo finito conexo, es claro que podemos ir añadiendo aristas a cualquier subárbol dado hasta obtener un subárbol maximal. Por ejemplo, un subárbol maximal del grafo que venimos tomando como ejemplo es el que muestra la figura. Obtener subárboles maximales en un grafo finito conexo es fácil, pues basta partir de un vértice e ir formando árboles sucesivos añadiendo cada vez cualquier arista que una un vértice nuevo con uno antiguo. Vamos a probar ahora que los grafos conexos infinitos también tienen subárboles maximales.



Teorema 3.4 *Todo grafo conexo contiene un subárbol maximal.*

DEMOSTRACIÓN: Vamos a probar, de hecho, que todo subárbol de un grafo conexo está contenido en un subárbol maximal.

Sea G un grafo conexo y sea G_0 un subárbol. Si $V_0 \subsetneq V$, Definimos V_1 como la unión de V_0 y el conjunto de todos los vértices de $V \setminus V_0$ de los que parte una arista con su segundo extremo en V_0 (notemos que $V_0 \subsetneq V_1$ por la conexión de G). Para cada vértice de $V_1 \setminus V_0$ elegimos una única arista que lo conecte con un vértice de $V \setminus V_0$ y añadimos tales aristas a A_0 para formar un conjunto A_1 .

Es claro que V_1 y A_1 determinan un árbol G_1 , pues, ciertamente, al formar A_1 no hemos añadido a A_0 ningún bucle ni ninguna arista múltiple, pues todas las aristas nuevas tienen dos extremos distintos, uno en V_0 y otro en $V_1 \setminus V_0$, y no hemos añadido dos aristas con el mismo extremo de $V_1 \setminus V_0$. Además, si existiera un ciclo, una de sus aristas tendría que ser de $A_1 \setminus A_0$, ya que las de A_0 no forman ciclos, pero si v es el vértice en $V_1 \setminus V_0$ de dicha arista, la segunda arista del ciclo con extremo v también tiene que estar en $A_1 \setminus A_0$, ya que las de A_0 no tienen extremos en $V_1 \setminus V_0$, pero por construcción A_1 no contiene pares de aristas con un mismo vértice en $V_1 \setminus V_0$. Además el nuevo grafo es conexo, ya que, fijado un vértice $v \in V_0$, todos los vértices de V_0 pueden unirse a v mediante un camino formado por aristas de A_0 , por hipótesis, y cada vértice de $V_1 \setminus V_0$ se conecta a un vértice de V_0 , el cual a su vez se conecta con v , luego todos los vértices de V_1 están conectados.

Partimos, pues, de cualquier subárbol de G (por ejemplo, el formado por un único vértice y ninguna arista) y vamos obteniendo árboles G_n por el procedimiento anterior. O bien el proceso termina tras un número finito de pasos, porque algún V_n contiene ya todos los vértices de V , o bien podemos formar los conjuntos $V' = \bigcup_n V_n$ y $A' = \bigcup_n A_n$ que determinan un subgrafo G' de G .

En tal caso G' es un árbol, pues si hubiera un ciclo, una arista doble o un camino, también los habría en el grafo determinado por ciertos V_n y A_n , para n suficientemente grande. Y además cada vértice de V' está en un V_n , luego puede unirse a un vértice prefijado por un camino en A_n , luego el grafo es conexo.

Por último, tiene que ser $V' = V$, ya que en caso contrario, por conexión habría un vértice $v \in V \setminus V'$ del que saldría una arista con su otro extremo en V' , luego en un cierto V_n , pero entonces dicho vértice tendría que estar en V_{n+1} . ■

Más adelante será evidente que la representación de un grafo es contractible si y sólo si es un árbol. De momento probamos una implicación:

Teorema 3.5 *Si G es un árbol, su representación \tilde{G} es contractible.*

DEMOSTRACIÓN: A partir de G podemos llevar a cabo la construcción que hemos realizado en la prueba del teorema anterior, con la que obtenemos un subárbol G' con los mismos vértices de G . Ahora bien, A' debe contener de hecho todas las aristas de G , con lo que $G' = G$. En efecto, si hubiera una arista $a \in A \setminus A'$, no puede ser un bucle, porque G es un árbol, luego sus

extremos v_0 y v_1 son distintos. En G' tiene que haber un camino que conecte v_0 con v_1 , y podemos exigir que sus aristas sean distintas dos a dos, ya que si hay repeticiones, el camino puede acortarse para eliminar las aristas comprendidas entre un par de aristas repetidas, y repitiendo el proceso un número finito de veces llegamos a otro camino sin repeticiones. Entonces, al añadir la arista a obtenemos un ciclo en G , lo cual es imposible porque G es un árbol.

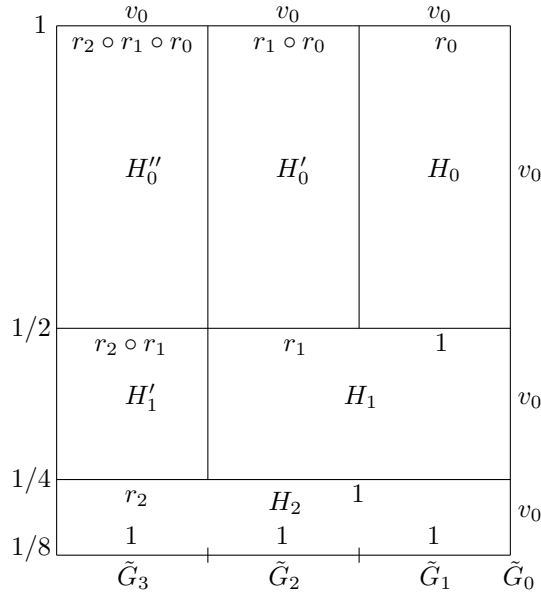
Así pues, tenemos a G descompuesto en una sucesión finita o infinita de árboles G_n , de modo que G_{n+1} se obtiene añadiendo a G_n un conjunto de aristas con un vértice en G_n y otro vértice nuevo. Además G_0 consta de un único vértice v_0 y de ninguna arista. Vamos a suponer que la sucesión es infinita, pues el argumento para el caso finito es una simplificación del argumento para el caso infinito.

Es claro que \tilde{G}_n es un retracto por deformación fuerte de \tilde{G}_{n+1} . La retracción $r_n : \tilde{G}_{n+1} \rightarrow \tilde{G}_n$ lleva cada arista incorporada a G_{n+1} a su vértice en G_n y la homotopía $F_n : I \times \tilde{G}_{n+1} \rightarrow \tilde{G}_{n+1}$ mueve simultánea y paulatinamente cada punto de cada arista nueva hacia su vértice de destino.

Es importante que tomamos F_n de modo que $F_n(0, -)$ sea la identidad y $F_n(1, -)$ sea r_n y no al revés, así como que $F_n(t, x) = x$ para todo $x \in \tilde{G}_n$.

Sea $H_n : [1/2^{n+1}, 1/2^n] \times \tilde{G}_{n+1} \rightarrow \tilde{G}_{n+1}$ la función dada por $H_n(t, x) = F_n(s(t), x)$, donde $s : [1/2^{n+1}, 1/2^n] \rightarrow [0, 1]$ es un homeomorfismo creciente entre ambos intervalos.

Veamos que podemos combinar todas estas homotopías en una sola homotopía $H : I \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ entre la identidad y la función constante v_0 . Para ello seguimos el esquema siguiente:



En $[1/2, 1] \times \tilde{G}'_1$ tenemos definida H_0 , de modo que $H_0(1/2, -) = 1$ es la identidad y $H_0(1, -) = r_0$ es la función constantemente igual a v_0 .

En $[1/2, 1] \times G_2$ definimos $H'_0(t, x) = H_0(t, r_1(x))$. Es también una función continua, extiende a H_0 y transforma r_1 en $r_1 \circ r_0$ (que es la función constante v_0). Igualmente obtenemos H''_0 que transforma $r_2 \circ r_1$ en $r_2 \circ r_1 \circ r_0$. De este modo podemos ir extendiendo H_0 sucesivamente hasta una función continua $\bar{H}_0 : [1/2, 1] \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}_1$.

La continuidad se debe a que \tilde{G} es también la unión de los interiores de los subespacios \tilde{G}_n , pues éstos constan de todo G_n excepto los vértices a los que llegan aristas de G_{n+1} , luego G_n está contenido en el interior de G_{n+1} . Si una función es continua en una sucesión de abiertos, también lo es en su unión.

Observemos que la función $\bar{H}_0(1, -)$ es constante igual a v_0 , mientras que $\bar{H}_0(1/2, -)|_{\tilde{G}_n} : \tilde{G}_n \rightarrow \tilde{G}_1$ es la composición de las retracciones sucesivas desde \tilde{G}_n hasta \tilde{G}_1 .

Ahora consideramos H_1 , definida en $[1/4, 1/2] \times \tilde{G}_2$ y la extendemos hasta $[1/4, 1/2] \times \tilde{G}_3$ mediante $H'_1(t, x) = H_1(t, r_2(x))$. Nuevamente obtenemos una sucesión de funciones continuas que se combinan para formar una función continua $\bar{H}_1 : [1/4, 1/2] \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}_2$ tal que las funciones $\bar{H}_1(1/4, -)|_{\tilde{G}_n} : \tilde{G}_n \rightarrow \tilde{G}_2$ y $\bar{H}_1(1/2, -)|_{\tilde{G}_n} : \tilde{G}_n \rightarrow \tilde{G}_1$ son las composiciones de las retracciones sucesivas desde \tilde{G}_n hasta \tilde{G}_2 y \tilde{G}_1 , respectivamente.

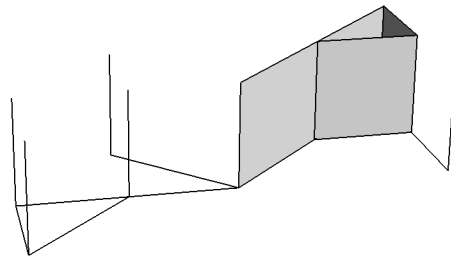
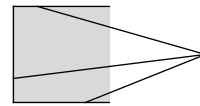
Sucede entonces que \bar{H}_0 y \bar{H}_1 coinciden en $\{1/2\} \times \tilde{G}$, por lo que ambas determinan una función continua en $[1/4, 1] \times \tilde{G}$, y de este modo vamos obteniendo una sucesión de funciones continuas que a su vez determinan una función continua $\bar{H} :]0, 1] \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$.

Para cada $x \in \tilde{G}_n$ y cada $t \leq 1/2^n$ tenemos que $\bar{H}_n(t, x) = x$, por lo que \bar{H} se extiende a una función continua $H : [0, 1] \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ mediante $H(0, x) = x$, y entonces H es una homotopía entre la identidad en \tilde{G} y la función constantemente igual a v_0 . ■

Necesitamos un último resultado:

Teorema 3.6 *Si G es un árbol y A es un subgrafo, entonces el par (\tilde{G}, \tilde{A}) tiene la propiedad de extensión de homotopías.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 1.35 basta probar que $(\{0\} \times \tilde{G}) \cup (I \times \tilde{A})$ es un retracto de $I \times \tilde{G}$. Para ello observamos primero que $(\{0\} \times I) \cup (\{0, 1\} \times I)$ es un retracto de $I \times I$. Una retracción es la proyección desde el punto $(2, 1/2)$, como muestra la figura. Combinando retracciones de este tipo obtenemos una retracción $r : I \times \tilde{G} \rightarrow (I \times V) \cup (I \times A)$:



A su vez podemos componerla con una retracción que contraiga los intervalos $I \times \{v\}$ correspondientes a los vértices de G que no estén en A , y así obtenemos la retracción deseada. ■

Definición 3.7 Si $\kappa > 0$ es un cardinal (tal vez infinito) llamamos *rosa* de κ pétalos al espacio $R_\kappa = \bigvee_{j \in J} S^1$, donde J es un conjunto de cardinal κ , es decir, a un ramo formado por κ circunferencias identificadas por un punto. Convenimos en que R_0 es el espacio formado por un único punto.

La representación de un grafo que conste de un único vértice y κ bucles es claramente homeomorfa a R_κ .

Finalmente podemos probar:

Teorema 3.8 Si G es un grafo conexo y A es un subárbol maximal, entonces la representación \tilde{G} de G es homotópica a la rosa de tantos pétalos como aristas de G no están en A .

DEMOSTRACIÓN: El teorema 1.47 nos da que \tilde{G} es homotópico a \tilde{G}/\tilde{A} , pero es claro que el cociente es homeomorfo a la representación de un grafo con un único vértice y tantos bucles como aristas de G no están en A , luego a su vez es homeomorfo a la rosa descrita en el enunciado. ■

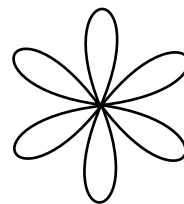
Por lo tanto, si dos grafos contienen árboles maximales que dejan fuera el mismo número de aristas, son homotópicos.

Hasta aquí podemos llegar sin la ayuda de las técnicas algebraicas. Más adelante demostraremos (véase el teorema 8.28 y la observación posterior o, alternativamente 9.36) que dos rosas son homotópicas si y sólo si tienen el mismo número de pétalos, con lo que tendremos clasificados salvo homotopía todos los grafos conexos.²

En el caso de un grafo conexo finito, es fácil saber el número de pétalos de su rosa homotópica, pues es fácil ver que si un árbol tiene v vértices y a aristas, entonces $v = a + 1$ (basta construir el árbol partiendo de un vértice y añadiendo las aristas una a una, con lo que en cada paso añadimos un nuevo vértice y una nueva arista).

Por lo tanto, si el grafo de partida tiene V vértices y A aristas, al identificar su árbol maximal a un punto estamos eliminando $V - 1$ aristas, luego quedan $A - V + 1$, que es el número de pétalos de la rosa.

Por ejemplo, ahora sabemos que el grafo que hemos tomado como ilustración es homotópico a la rosa de seis pétalos.



Terminamos con un hecho más sobre grafos que usaremos más adelante:

²Más aún, veremos que una rosa no es contractible salvo que no tenga pétalos, con lo que tendremos probado que un grafo es un árbol si y sólo si su representación es contractible, tal y como habíamos afirmado.

Teorema 3.9 Si $p : \tilde{X} \rightarrow \tilde{G}$ es un cubrimiento y \tilde{G} es la representación de un grafo G , entonces existe un grafo X cuya representación es \tilde{X} .

DEMOSTRACIÓN: Tomemos como conjunto de vértices de X el conjunto $V_X = p^{-1}[V_G]$ de las antiimágenes por p de los vértices de G . Consideremos la identificación $\pi : V_G \oplus \bigoplus_{a \in A_G} \{a\} \times I \rightarrow \tilde{G}$ que define a \tilde{G} .

Para cada arco $\gamma_a : I \rightarrow \tilde{G}$ dado por $\gamma_a(x) = \pi(a, x)$ y cada vértice $\tilde{v} \in p^{-1}[\gamma_a(0)] \in V_X$, consideramos la única elevación $\gamma_{a, \tilde{v}} : I \rightarrow \tilde{X}$ de γ_a que cumple $\gamma_{a, \tilde{v}}(0) = \tilde{v}$.

La relación $\gamma_{a, \tilde{v}} \circ p = \gamma_a$ implica que $\gamma_{a, \tilde{v}}(1) \in p^{-1}[\gamma_a(1)]$ y que γ_a no pasa por ningún otro vértice de X . Además, si elegimos dos vértices distintos $\tilde{v}, \tilde{v}' \in p^{-1}[\gamma_a(0)]$, entonces $\gamma_{a, \tilde{v}}$ y $\gamma_{a, \tilde{v}'}$ no tienen puntos en común salvo a lo sumo sus extremos.

En efecto, si se cumple $\gamma_{a, \tilde{v}}(t) = \gamma_{a, \tilde{v}'}(t)$, para cierto $t \in]0, 1[$ (notemos que tienen que coincidir en el mismo valor de t , porque ambos se proyectan en el mismo punto $\gamma_a(t)$), entonces los arcos inversos de $\gamma_{a, \tilde{v}}|_{[0, t]}$ y $\gamma_{a, \tilde{v}'}|_{[0, t]}$ serían dos elevaciones del arco inverso de $\gamma_a|_{[0, t]}$, luego también serían iguales, y en particular $v' = \gamma_{a, \tilde{v}'}(0) = \gamma_{a, \tilde{v}}(0) = \tilde{v}$.

Obviamente, si partimos de aristas distintas $a \neq a'$, los arcos γ_a y $\gamma_{a'}$ no tienen puntos en común salvo a lo sumo sus vértices, luego lo mismo sucede para cualesquiera de sus elevaciones $\gamma_{a, \tilde{v}}$ y $\gamma_{a', \tilde{v}'}$.

Definimos A_X como el conjunto de todos los arcos $\gamma_{a, \tilde{v}}$ y definimos la relación de incidencia de X mediante $I(\gamma_{a, \tilde{v}}) = \{\gamma_{a, \tilde{v}}(0), \gamma_{a, \tilde{v}}(1)\}$. (Notemos que $\gamma_{a, \tilde{v}}(0) = \tilde{v}$.) Con esto tenemos definido un grafo X . Vamos a probar que su representación \tilde{X}^* es homeomorfa a \tilde{X} . Para ello consideramos la aplicación

$$f : V_X \oplus \bigoplus_{\tilde{a} \in A_X} \{\tilde{a}\} \times I \rightarrow \tilde{X}$$

dada por $f(v) = v$ y $f(\gamma_{a, \tilde{v}}, t) = \gamma_{a, \tilde{v}}(t)$, que es continua restringida a V_X y a cada subespacio abierto y cerrado $\{\tilde{a}\} \times I$, luego es continua, y claramente es consistente con la identificación que define a \tilde{X}^* , luego induce una aplicación continua $\bar{f} : \tilde{X}^* \rightarrow \tilde{X}$ y la discusión precedente prueba que es inyectiva.

Se cumple que \bar{f} también es suprayectiva, pues si $\tilde{x} \in \tilde{X}$ y llamamos $x = p(\tilde{x})$, o bien $x \in V_G$, en cuyo caso $\tilde{x} \in V_X$ y $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$, o bien existe una arista a de G tal que $x \in a$. Sea $v = \gamma_a(0)$ y sea $t \in]0, 1[$ tal que $\gamma_a(t) = x$. Consideramos la elevación $h : [a, t] \rightarrow \tilde{X}$ de $\gamma_a|_{[0, t]}$ que cumple $h(t) = \tilde{x}$. Entonces $\tilde{v} = h(a)$ cumple $p(\tilde{v}) = v$ y la unicidad de las elevaciones implica que $\gamma_{a, \tilde{v}}|_{[0, t]} = h$, por lo que $\gamma_{a, \tilde{v}}(t) = \tilde{x}$ y $\bar{f}([\gamma_{a, \tilde{v}}, t]) = \tilde{x}$.

Veamos, por último, que \bar{f} es abierta, para lo cual basta ver que lo es $\bar{f} \circ p$. En efecto, si W es un abierto en \tilde{X}^* y $w \in W$, tomamos un entorno fundamental U de $p(\bar{f}(w))$ y llamamos U_0 a la componente conexa de $p^{-1}[U_0]$ que contiene a $\bar{f}(w)$. Sea $W_0 = W \cap \bar{f}^{-1}[U_0]$. Entonces $(\bar{f} \circ p)[W_0]$ es abierto en \tilde{G} y $\bar{f}[W_0] = p|_{U_0}^{-1}[(\bar{f} \circ p)[W_0]]$ es abierto en \tilde{X} , luego $\bar{f}[W]$ es entorno de $\bar{f}(w)$.

Para probar que $\bar{f} \circ p$ es abierta observamos que envía vértices de \tilde{X} a vértices de \tilde{G} y se restringe a homeomorfismos entre aristas de \tilde{X} y aristas de \tilde{G} (aunque

varios vértices y aristas de \tilde{X} pueden corresponderse con los mismos vértices y aristas de \tilde{G}). Además tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{X}^* & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{X} & \xrightarrow{p} & \tilde{G} \\
 \uparrow \pi & & \nearrow f & & \uparrow \pi \\
 V_X \oplus \bigoplus_{\tilde{a} \in A_X} (\{\tilde{a}\} \times I) & \xrightarrow{\tilde{f}} & V_G \oplus \bigoplus_{a \in A_G} (\{a\} \times I) & &
 \end{array}$$

donde $\tilde{f}(\tilde{v}) = p(\tilde{v})$ y $\tilde{f}(\gamma_{a,\tilde{v}}, t) = \gamma_a(t)$.

Si W es un abierto en \tilde{X} , como $f \circ p$ se restringe a homeomorfismos en las aristas y éstas son abiertas, es claro que $(f \circ p)[W]$ es un entorno de todos sus puntos que no sean vértices, pero si $\tilde{v} \in W$ es un vértice, sabemos que un entorno básico de \tilde{v} en \tilde{X} es la imagen por π de un conjunto de la forma

$$U_0 = \{\tilde{v}\} \cup \bigcup_{\tilde{a}, i} (\{\tilde{a}\} \times U_{\tilde{a}, i})$$

donde $U_{\tilde{a}, i}$, para $i = 0, 1$ es un abierto en I que, de los dos extremos del intervalo, contiene únicamente a i y sólo bajo el supuesto de que $\pi(\tilde{a}, i) = \tilde{v}$. Podemos tomar, pues, U_0 de modo que $\pi[U_0] \subset W$, pero entonces $f[U_0]$ es un conjunto de la misma forma que U_0 , luego $(f \circ p)[\pi[U_0]] = \pi[\tilde{f}[U_0]]$ es un entorno básico de $(f \circ p)(\tilde{v})$ contenido en $(f \circ p)[W]$. ■

3.2 Deltaedros

Ahora vamos a introducir lo que aproximadamente es una extensión del concepto de grafo a dos dimensiones: si un grafo consta de vértices y aristas, un deltaedro consta de vértices, aristas y caras triangulares. Antes de dar la definición introducimos algunos conceptos relacionados con triángulos:

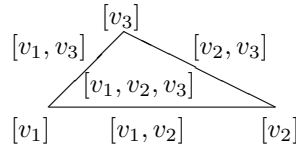
Definición 3.10 Si $v_1 \in \mathbb{R}^n$, definimos $[v_1] = \{v_1\}$. Si $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ son puntos distintos, llamaremos

$$[v_1, v_2] = \{(1 - \lambda)v_1 + \lambda v_2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

al segmento de extremos v_1 y v_2 . Si $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ son tres puntos afínmente independientes, definimos el *triángulo afín* de vértices v_1, v_2, v_3 como la envoltura convexa de $\{v_1, v_2, v_3\}$, es decir, como el conjunto

$$[v_1, v_2, v_3] = \{\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \mid \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \alpha + \beta + \gamma = 1\}.$$

Los *lados* de $[v_1, v_2, v_3]$ son los segmentos $[v_1, v_2]$, $[v_1, v_3]$ y $[v_2, v_3]$ con los extremos indicados. Notemos que $[v_1, v_2, v_3]$ no depende de la ordenación de los vértices.



Recordemos que una aplicación $f : E \rightarrow F$ entre dos espacios afines es una aplicación de la forma $f(p) = a + \vec{f}(\vec{ap})$, para cierta aplicación lineal $\vec{f} : \vec{E} \rightarrow \vec{F}$.

Dados tres puntos $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ afinmente independientes, llamando

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0, x + y \leq 1\},$$

al triángulo afín en \mathbb{R}^2 de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$, tenemos que la única aplicación afín $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ que hace corresponder $f(0, 0) = v_1$, $f(1, 0) = v_2$, $f(0, 1) = v_3$, cumple también que $f[\Delta] = [v_1, v_2, v_3]$, pues

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + \vec{f}(x, y) = f(0, 0) + x\vec{v}(1, 0) + y\vec{f}(0, 1) \\ &= f(0, 0) + x(f(1, 0) - f(0, 0)) + y(f(0, 1) - f(0, 0)) \\ &= (1 - x - y)v_1 + xv_2 + yv_3 \in [v_1, v_2, v_3]. \end{aligned}$$

Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es la variedad afín generada por v_1, v_2, v_3 , entonces $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow E$ es biyectiva (y continua), luego su restricción $f : \Delta \rightarrow [v_1, v_2, v_3]$ es un homeomorfismo.

Es inmediato comprobar que f se restringe a la única biyección afín entre cada lado de Δ y el lado correspondiente de $[v_1, v_2, v_3]$ que mantiene la correspondencia entre los vértices.

Más en general, si $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^m$ y $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}^n$ son puntos afinmente independientes, existe una única biyección afín entre las variedades tridimensionales generadas por ambas ternas de puntos tal que $f(v_i) = w_i$, la cual se restringe a un homeomorfismo $h : [v_1, v_2, v_3] \rightarrow [w_1, w_2, w_3]$ que a su vez se restringe a las únicas biyecciones afines entre cada lado del primer triángulo y el correspondiente en el segundo. (Esto puede comprobarse directamente o bien observamos que h es la composición de la biyección afín entre el primer triángulo y Δ y la biyección afín entre Δ y el segundo triángulo.)

Pasamos ya a la definición de deltaedro:

Un *deltaedro abstracto* es un conjunto numerable \mathcal{D} a cuyos elementos llamaremos *símplices* y que son subconjuntos de cardinal a lo sumo 3 de un conjunto X , de modo que se cumplen las propiedades siguientes:

1. Todo subconjunto de un símplex de \mathcal{D} es también un símplex.
2. Cada $x \in X$ pertenece como mínimo a un símplex de \mathcal{D} y como máximo a un número finito de ellos.

Los símlices de cardinal 1, 2 y 3 se llaman, respectivamente, *vértices*, *aristas* y *caras* de \mathcal{D} . Así cada cara T de \mathcal{D} contiene tres aristas, a las que llamaremos *lados* de T y cada arista a de \mathcal{D} contiene dos vértices a los que llamaremos *extremos* de a .

Además de sus vértices, aristas y caras, todo deltaedro abstracto contiene al símlice vacío \emptyset . El conjunto X está determinado por \mathcal{D} , puesto que es la unión de todos sus símlices (o simplemente de sus vértices). Lo representaremos por $X_{\mathcal{D}}$.

El *0-esqueleto* de un deltaedro abstracto es el conjunto \mathcal{D}_0 de sus vértices, el *1-esqueleto* es el conjunto \mathcal{D}_1 de sus vértices y sus aristas, y el *2-esqueleto* es $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}$.

Nota Los 1-esqueletos de los deltaedros son esencialmente lo mismo que los grafos simples, salvo por que en la definición de deltaedro hemos impuesto que el conjunto de los vértices sea numerable y que de cada vértice salga a lo sumo un número finito de aristas, mientras que en el caso de los grafos no pusimos tales restricciones. Del mismo modo que un grafo es una forma de encadenar aristas a través de sus extremos, un deltaedro es una forma de encadenar triángulos a través de sus lados. Enseguida pondremos esto de manifiesto. ■

Sea $f_0 : X_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación con la propiedad de que si v_1, v_2, v_3 son elementos de X distintos dos a dos entonces $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ son afínmente independientes. Entonces f induce una aplicación $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{P}\mathbb{R}^n$ mediante

$$f(\emptyset) = \emptyset, f(\{v_1\}) = [v_1], f(\{v_1, v_2\}) = [v_1, v_2], f(\{v_1, v_2, v_3\}) = [v_1, v_2, v_3].$$

Una *realización* de un deltaedro \mathcal{D} en \mathbb{R}^n es una aplicación $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{P}\mathbb{R}^n$ inducida por una aplicación $f_0 : X_{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de modo que:

1. Para cada par de símlices $s, t \in \mathcal{D}$, se cumple $f(s \cap t) = f(s) \cap f(t)$.
2. Cada punto $p \in \mathbb{R}^n$ tiene un entorno que corta a lo sumo a un número finito de elementos de la imagen de f .

Un *deltaedro* D en \mathbb{R}^n es una terna (D, \mathcal{D}, f) , donde \mathcal{D} es un deltaedro abstracto, f es una realización de \mathcal{D} en \mathbb{R}^n y $D = \bigcup_{s \in \mathcal{D}} f(s)$.

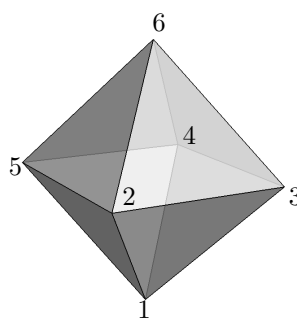
Llamaremos *vértices*, *aristas*, *caras* y *símlices* de un deltaedro a la imagen por la representación f de los vértices, aristas, caras y símlices del deltaedro abstracto que lo define.

Ejemplo Consideremos el deltaedro abstracto

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = \{ & \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \\ & \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 6\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}, \\ & \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 3, 6\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 6\}, \{2, 5, 6\} \} \end{aligned}$$

con 6 vértices, 12 aristas y 8 caras. Si hacemos corresponder los vértices de \mathcal{D} con los vértices en \mathbb{R}^3 de un octaedro regular vemos que éste es una representación de \mathcal{D} .

Lo que expresa la relación $f(s \cap t) = f(s) \cap f(t)$ es que, por ejemplo, la intersección entre las imágenes de las caras abstractas $\{1, 2, 3\}$ y $\{2, 3, 6\}$ es precisamente la imagen de la arista $\{2, 3\}$, es decir, que si dos caras abstractas tienen en común una arista abstracta, entonces sus imágenes son dos triángulos que tienen en común la imagen de dicha arista abstracta, e igualmente para símlices de cualquier dimensión. Por ejemplo, las caras abstractas $\{1, 2, 3\}$ y $\{2, 5, 6\}$ tienen únicamente el vértice $\{2\}$ en común y, consecuentemente, sus imágenes son dos triángulos con un único vértice en común. ■



En la práctica escribiremos D en lugar de (D, \mathcal{D}, f) , pero debemos recordar que un deltaedro D no es un mero subespacio topológico de \mathbb{R}^n , sino un subconjunto de \mathbb{R}^n en el que hemos especificado una descomposición en vértices, aristas y caras, de modo que un mismo espacio puede admitir distintas estructuras de deltaedro.

Definimos los *esqueletos* de dimensión 0, 1 y 2 de un deltaedro D como los subespacios $D_i = \bigcup_{s \in \mathcal{D}_i} f(s)$. Así, D_0 es el conjunto de los vértices de D , mientras que D_1 es la unión de sus vértices y sus aristas (que coincidirá con la unión de sus aristas si a todo vértice llega a una arista, que será lo usual, pero esto no lo exige la definición).

Vamos a estudiar la topología de un deltaedro $D \subset \mathbb{R}^n$:

- *La unión de cualquier cantidad finita o infinita de símlices de D es cerrada en \mathbb{R}^n . En particular todo deltaedro es cerrado.*

Esto es consecuencia de la segunda condición de la definición de representación, que sólo afecta a los deltaedros infinitos, ya que en el caso finito se cumple trivialmente. En cualquier caso, si C es un conjunto de símlices de un deltaedro y $p \notin \bigcup C$, existe un abierto U que contiene a p y sólo corta a un número finito de elementos de C , digamos S_1, \dots, S_n , y entonces $U \setminus (S_1 \cup \dots \cup S_n)$ es un entorno de p contenido en $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup C$.

- *Si $p \in D$, la unión E de todos los símlices de D que contienen a p es un entorno de p en D .*

En efecto, la unión de todos los símlices que no lo contienen es cerrada, y su complementario está contenido en E .

- *El esqueleto D_0 , es decir, el conjunto de los vértices de D , es cerrado y discreto en \mathbb{R}^n .*

En efecto, hemos visto que es cerrado y, si $v \in D_0$, entonces $D_0 \setminus \{v\}$ también es cerrado, luego $\{v\}$ es abierto en D_0 .

- *Un deltaedro es compacto si y sólo si tiene un número finito de vértices.*

En efecto, si tiene un número finito de vértices, también tiene un número finito de símplexes (porque cada vértice sólo puede pertenecer a un número finito de símplexes), luego es compacto por ser unión finita de compactos. Si el deltaedro es compacto, también lo es su conjunto de vértices, pero, como es discreto, tiene que ser finito.

- Si una función $h : D_1 \rightarrow X$ en un espacio topológico X se restringe a una función continua en cada lado de D , entonces es continua.

En efecto, todo $p \in D_1$ tiene un entorno U que corta a un número finito de aristas de D , luego $D_1 \cap U$ es unión de un número finito de aristas (cerradas en $D_1 \cap U$) y tal vez de vértices aislados. Por [An 2.49], si una función es continua en un número finito de cerrados, también es continua en su unión, luego h es continua en $D_1 \cap U$, luego en p .

- Si una función $h : D \rightarrow X$ se restringe a una función continua en D_1 y en cada cara de D , entonces es continua en D .

El razonamiento es el mismo.

Esta última propiedad se aplica en especial a las funciones naturales entre deltaedros:

Una función $h : D \rightarrow D'$ entre dos deltaedros es *afín a trozos* si h se restringe a una aplicación inyectiva $h|_{D_0} : D_0 \rightarrow D'_0$ de modo que si T es una cara de D de vértices v_1, v_2, v_3 , entonces D' tiene una cara T' de vértices $h(v_1), h(v_2), h(v_3)$ y $h|_C : C \rightarrow C'$ es la única biyección afín que hace corresponder cada vértice v_i con $h(v_i)$, y lo mismo con aristas en vez de caras.

Tenemos que toda aplicación afín a trozos entre deltaedros es continua, pues lo es sobre cada lado de D (porque restringida a cada lado es afín), lo que prueba que es continua en el 1-esqueleto D_1 , y a su vez esto implica que lo es en D porque es continua sobre cada cara de D (de nuevo porque es afín).

En el caso de los grafos hemos definido la realización de un grafo como un espacio topológico abstracto obtenido identificando tantas copias de puntos y tantas copias de intervalos como vértices y aristas tiene el grafo. Podríamos definir del mismo modo un concepto de realización abstracta de un deltaedro, ahora como cociente de copias de puntos, segmentos y triángulos, pero con las restricciones que hemos impuesto siempre podemos realizar tal espacio abstracto como subespacio de \mathbb{R}^n :

Teorema 3.11 *Todo deltaedro abstracto admite una realización en \mathbb{R}^5 .*

DEMOSTRACIÓN: Veamos que existe una sucesión $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ de puntos de \mathbb{R}^5 distintos dos a dos tal que:

1. Cada conjunto de seis puntos de la sucesión es afínmente independiente.
2. Si $K \subset \mathbb{R}^5$ es compacto, existe un k_0 tal que K es disjunto de cualquier triángulo de vértices en puntos x_k de la sucesión con $k \geq k_0$.

En efecto, consideramos los semiespacios $H_k = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 \geq k\}$, tomamos $x_0 \in H_0$ y, supuestos definidos x_0, \dots, x_k , tomamos $x_{k+1} \in H_{k+1}$ que no esté en ninguna de las variedades afines generadas por cada subconjunto de a lo sumo cinco puntos de entre x_0, \dots, x_k . Esto es posible porque se trata de un número finito de variedades afines, que son cerrados de interior vacío en \mathbb{R}^5 , luego su unión tiene interior vacío (esto es equivalente a que la intersección de un número finito de abiertos densos es un abierto denso), luego podemos tomar $x_{k+1} \in H_{k+1}$ que cumpla lo requerido.

Así obtenemos una sucesión infinita que obviamente cumple la primera condición. Si $K \subset \mathbb{R}^5$ es compacto, existe un k_0 tal que $K \cap H_{k_0} = \emptyset$ y, como cada $x_k \in H_k$ y H_k es convexo, cualquier triángulo con vértices en puntos x_k con $k \geq k_0$ está contenido en H_k , luego es disjunto de K .

Sea $C = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Para cada $s \subset C$, sea V_s la variedad proyectiva generada por s . Si $|s| = n \leq 6$, entonces los puntos de s son afinmente independientes, luego $\dim V_s = n - 1$. Si tenemos dos subconjuntos de cardinales $|s| = n \leq 3$, $|t| = m \leq 3$ y $|s \cap t| = r$, entonces $|s \cup t| = n + m - r$ y, por otra parte,

$$\dim V_{s \cup t} = \dim(V_s + V_t) = \dim V_s + \dim V_t - \dim(V_s \cap V_t),$$

de donde $\dim(V_s \cap V_t) = r - 1$, pero $V_{s \cap t} \subset V_s \cap V_t$, luego tiene que cumplirse que $V_{s \cap t} = V_s \cap V_t$. (Notemos que si $s \cap t = \emptyset$, queda $\dim(V_s \cap V_t) = -1$, lo que significa que $V_s \cap V_t = \emptyset$.)

Si ahora llamamos T_s al punto, segmento o triángulo generado por s (según cuál sea su cardinal), tenemos que $T_s \cap T_t \subset V_s \cap V_t = V_{s \cap t}$, pero claramente $T_s \cap V_{s \cap t} = T_{s \cap t}$, pues con esto estamos diciendo que la intersección de un triángulo con la recta que prolonga a uno de sus lados es dicho lado, o que la intersección de un segmento con uno de sus vértices es el vértice (más otros casos aún más triviales), luego $T_s \cap T_t = T_{s \cap t}$.

Ahora, dado un deltaedro abstracto \mathcal{D} , consideramos una aplicación inyectiva $f_0 : X_{\mathcal{D}} \rightarrow \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Trivialmente tenemos que las imágenes de tres puntos cualesquiera son afinmente independientes, por lo que f_0 induce una aplicación $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{P}\mathbb{R}^5$.

El razonamiento precedente prueba que si $s, t \in \mathcal{D}$, entonces se cumple la relación $f(s \cap t) = f(s) \cap f(t)$, tal y como exige la definición de representación. Por otra parte, si $p \in \mathbb{R}^5$, tomamos un entorno compacto K , de modo que existe un conjunto finito $F \subset C$ tal que, si $s \in \mathcal{D}$ no tiene ningún vértice en F , se cumple que $f(s) \cap K = \emptyset$ y, como cada vértice pertenece a un número finito de simplices, resulta que sólo hay un número finito de simplices en \mathcal{D} con algún vértice en F , luego K es disjunto de todos los simplices de \mathcal{D} salvo a lo sumo de un número finito de ellos. ■

Ejercicio: Adaptar la prueba anterior para demostrar que la representación de todo grafo numerable es homeomorfa a un subespacio de \mathbb{R}^3 . (Demostrarlo primero para grafos simples.)

Teorema 3.12 *Si dos deltaedros $D \subset \mathbb{R}^m$ y $D' \subset \mathbb{R}^n$ son realizaciones de un mismo deltaedro abstracto \mathcal{D} , existe un homeomorfismo $h : D \rightarrow D'$ afín a trozos tal que, para cada $s \in \mathcal{D}$, se cumple que $h[f(s)] = f'(s)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $h_0 : D_0 \rightarrow D'_0$ la aplicación dada por $h(f(v)) = f'(v)$, para cada $v \in \mathcal{D}_0$. Como los conjuntos de vértices de los deltaedros son cerrados y discretos en \mathbb{R}^m y \mathbb{R}^n , respectivamente, tenemos que h_0 es un homeomorfismo.

Para cada arista $s = v \cup w$ de \mathcal{D} , tenemos que $f(s)$ es un segmento en \mathbb{R}^m de extremos $f(v)$ y $f(w)$ y $f'(s)$ es un segmento en \mathbb{R}^n de extremos $f'(v)$ y $f'(w)$, luego podemos extender h_0 a una aplicación $h_1 : D_1 \rightarrow D'_1$ que se restrinja a la única biyección afín que existe entre cada par de segmentos $f(s)$ y $f'(s)$ que sobre sus extremos actúa como f_0 .

Como h_1 es continua sobre cada lado de D_1 , es continua en todo D_1 , y lo mismo se aplica a su inversa, luego es un homeomorfismo.

Igualmente, para cada cara $s \in \mathcal{D}$ podemos considerar la única biyección afín $h_s : f(s) \rightarrow f'(s)$ determinada por que, sobre los vértices de $f(s)$, actúa como f_0 . Entonces la restricción de h_s a cada lado de $f(s)$ es f_1 , luego las aplicaciones h_s definen una extensión $h : D \rightarrow D'$ de h_1 que es un homeomorfismo sobre cada cara de D , luego es continua y, razonando igualmente con su inversa, es un homeomorfismo. ■

Recordemos que en 2.24 hemos definido las superficies topológicas como las variedades topológicas bidimensionales conexas con una base numerable. Ahora podemos caracterizar los deltaedros que son superficies topológicas (notemos que todos tienen una base numerable, pues son subespacios de \mathbb{R}^n):

Teorema 3.13 *Un deltaedro D es una superficie topológica si y sólo si cumple las propiedades siguientes:*

1. *es conexo,*
2. *cada arista está contenida exactamente en dos caras,*
3. *las aristas que confluyen en un vértice dado pueden ordenarse en la forma a_1, \dots, a_n de modo que a_i y a_{i+1} (así como a_n y a_1) forman parte de una cara común.*

DEMOSTRACIÓN: Las condiciones son suficientes: si $p \in D$ no pertenece a ninguna arista, entonces pertenece a una cara C y existe un homeomorfismo $h : C \rightarrow \Delta$ que hace corresponder los lados de C con el interior de Δ . Como p no está en ninguna arista, la restricción de h a C menos sus lados es una carta de D definida en un entorno de p .

Supongamos ahora que p está en una arista a , pero no en un vértice. Por hipótesis existen exactamente dos caras C_1 y C_2 que tienen arista a , con lo que $C_1 \cup C_2$ es la unión de todos los símlices de D que contienen a p , y es un entorno de p .

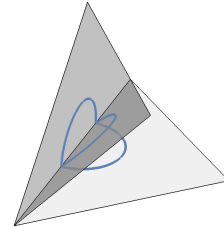
Partimos I^2 en dos triángulos rectángulos y, consideramos una biyección afín a trozos entre $C_1 \cup C_2$ e I^2 que envíe la arista común (y en particular a p) a la

diagonal del cuadrado. Así tenemos un homeomorfismo que se restringe a una carta alrededor de p .

Por último, si p es un vértice de D , sean a_1, \dots, a_n las aristas con vértice p , ordenadas según la condición 3). Entonces las caras con vértice p serán precisamente C_1, \dots, C_n , donde C_i tiene por aristas a a_i y a_{i+1} (salvo C_n , que tiene por aristas a a_n y a_1). Sabemos que $C_1 \cup \dots \cup C_n$ es un entorno de p y es fácil construir un homeomorfismo afín a trozos entre dicha unión y un polígono regular de n lados, de modo que la imagen de p sea su centro. Dicho homeomorfismo se restringe a una carta alrededor de p .

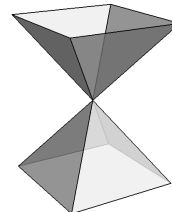
Veamos ahora que las condiciones son necesarias. La primera lo es por hipótesis. Sea a una arista de D y sea $p \in a$ un punto que no sea un vértice. Si a no pertenece a ninguna cara, entonces a es un entorno de p , luego debería contener un entorno U de p homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^2 , pero eso es imposible, porque $a \setminus \{p\}$ es disconexo, y lo mismo le sucedería a $U \setminus \{p\}$, mientras que, obviamente, ningún abierto de \mathbb{R}^2 se vuelve disconexo al quitarle un punto.

Si a estuviera contenida en más de dos caras, todo entorno abierto de p suficientemente pequeño debería ser homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^2 , luego esto se aplicaría a la intersección U de D con una bola de centro p y radio suficientemente pequeño, que estará formada por más de dos semicírculos unidos por el diámetro de su frontera. Ahora bien, la unión U_0 de sólo dos de los semicírculos es homeomorfa a una bola abierta en \mathbb{R}^2 , pero no es abierta en U , ya que los puntos del diámetro común están en su frontera, debido a la presencia de los otros semicírculos. Esto contradice al teorema 2.10 (concretamente, al caso $n = 2$ que es el único que tenemos demostrado). Si a está sólo en una cara pasa algo similar: un cierto entorno de p sería a la vez homeomorfo a un abierto en \mathbb{R}^2 y a un semicírculo con su diámetro frontera incluido.



Si v es un vértice, sea a_1 una arista de extremo v (si no hubiera ninguna, v sería un punto aislado y D no sería conexo). Existen dos caras A_0 y A_1 que comparten la arista a_1 . Sea a_2 la otra arista del triángulo A_1 con vértice v . Sea A_2 la otra cara que tiene a a_2 por arista. No puede ocurrir que $A_2 = A_0$, pues dos caras no pueden tener dos aristas en común. Sea a_3 la otra arista de A_2 con vértice v . Puede ocurrir que $a_3 = a_1$. Si no es así, existirá otra cara A_3 con arista a_3 . Puesto que el número de aristas es finito, este proceso tiene que terminar. Así llegamos a que existe un número finito de caras A_0, \dots, A_n con vértice v de modo que cada una comparte una arista con la siguiente, al igual que A_n con A_0 . Falta probar que no hay más caras (o aristas) con vértice v .

Si las hubiera, podríamos generar otro ciclo de caras A_1^1, \dots, A_m^1 con aristas comunes. Siguiendo así, las caras con vértice v se dividen en grupos en las condiciones de 3), pero si hubiera más de un grupo, tendríamos que v tiene un entorno en D que se vuelve disconexo al quitar v , y ningún abierto de \mathbb{R}^2 tiene esa propiedad. Esto prueba 3). ■



Notemos que las condiciones dadas por el teorema anterior son condiciones sobre el deltaedro abstracto \mathcal{D} que define a D , sin ningún elemento topológico (la conexión es equivalente a que todo par de vértices pueda conectarse por un camino de aristas).

La clasificación de las superficies compactas se apoyará en el resultado siguiente:

Teorema 3.14 *Todo deltaedro compacto que sea una superficie topológica es homeomorfo a un cociente obtenido a partir de un polígono regular de $2n$ lados identificando éstos dos a dos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea D un deltaedro compacto. Tomemos una cara C_1 de D y consideremos una de sus aristas. Por el teorema anterior, ésta debe ser también la arista de otra cara C_2 . Consideremos, por otra parte, un cuadrado dividido por una diagonal en dos triángulos T_1 y T_2 . Así tenemos un deltaedro $P_2 \subset \mathbb{R}^2$ y podemos definir una aplicación afín a trozos $\phi_2 : P_2 \rightarrow D$ que hace corresponder los dos triángulos de P_2 con las caras C_1 y C_2 y es un homeomorfismo en su imagen.

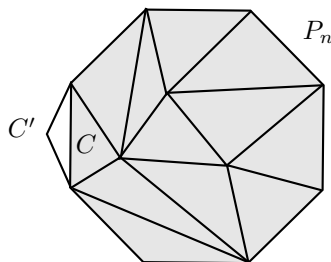
Supongamos ahora que tenemos construido un deltaedro $P_n \subset \mathbb{R}^2$ y una aplicación afín a trozos $\phi_n : P_n \rightarrow D$ de modo que se cumplan las condiciones siguientes:

1. P_n es un polígono convexo de $2n$ lados tal que dos lados consecutivos no están alineados.
2. Cada arista de P_n que no esté en la frontera de P_n en \mathbb{R}^2 está exactamente en dos caras de P_n .
3. Cada arista fronteriza de P_n (es decir, cada lado del polígono) pertenece únicamente a una cara de P_n .
4. La restricción de ϕ_n al interior de P_n es un homeomorfismo en su imagen.

Si a es una arista fronteriza de P_n , contenida en la cara C , entonces $\phi_n[a]$ es una arista de D . Puede ocurrir que coincida con la imagen de otra arista b de P_n . En tal caso, b ha de ser una arista fronteriza, ya que, si fuera interior, b estaría compartida por dos caras de P_n , digamos C_1 y C_2 , ninguna de las cuales puede ser C , ya que ϕ_n no puede identificar dos aristas de una misma cara (pues la imagen de una cara tiene que ser una cara). Entonces $\phi_n[a] = \phi_n[b]$ estaría compartida por las imágenes de las tres caras C , C_1 y C_2 , lo cual contradice el teorema 3.13. Además ϕ_n no puede identificar a con más de una arista, pues sus caras correspondientes en P_n han de ser distintas y al aplicar ϕ obtendríamos de nuevo una arista compartida por más de dos caras.

De este modo, puede haber un grupo de aristas fronterizas de P_n identificadas a pares por ϕ_n y otras no identificadas. Vamos a ver que mientras haya aristas sin identificar podemos extender ϕ_n a un polígono con más lados que cubra más aristas de D . En efecto, sea a una arista fronteriza de P_n sin identificar. Sea C la cara de P_n a la que pertenece. Entonces $\phi_n[a]$ es una arista de D compartida

por dos caras. Una ha de ser $\phi_n[C]$, llamemos T a la segunda. No puede ocurrir que T sea la imagen de una cara C' de P_n , pues entonces ϕ_n estaría identificando a con una arista de C' . Como P_n es convexo, queda a un lado de la recta que prolonga a a . Esto nos permite construir un triángulo C' en \mathbb{R}^2 que comparta con P_n el lado a únicamente. Del hecho de que los lados consecutivos de P_n no estén alineados se sigue que C' puede tomarse de modo que $P_n \cup C'$ siga siendo un polígono convexo en las mismas condiciones que P_n .



Llamemos P_{n+1} al deltaedro que resulta de añadir a P_n la cara C' con su nuevo vértice y sus dos nuevas aristas. La biyección afín que hace corresponder los vértices de C' con los de T (de modo que los de a se correspondan con sus imágenes por ϕ_n) se restringe a un homeomorfismo de C' en T que coincide con ϕ_n sobre a . Por lo tanto, puede combinarse con ϕ_n para formar una aplicación $\phi_{n+1} : P_{n+1} \rightarrow D$. Es fácil ver que P_{n+1} y ϕ_{n+1} cumplen todas las propiedades que cumplen P_n y ϕ_n , pero ahora ϕ_{n+1} cubre una cara más del complejo D .

Puesto que D tiene un número finito de caras, tras un número finito de pasos hemos de llegar a un complejo P_n cuyas aristas fronterizas estén todas identificadas dos a dos. Ahora falta probar que la aplicación correspondiente $\phi_n : P_n \rightarrow D$ es suprayectiva, pues entonces D será homeomorfo al cociente que resulta de identificar en P_n los pares de aristas con la misma imagen por ϕ_n .

Llamemos D' a la imagen de ϕ_n y supongamos que en D hay caras que no están en D' . Llamemos D'' al subcomplejo de D formado por las caras que no están en D junto con sus aristas y vértices. Como D es conexo, $D' \cap D'' \neq \emptyset$. La intersección ha de ser un deltaedro, pero no puede contener ninguna cara (por definición de D'') ni tampoco una arista. En efecto, cada arista de D' está compartida por dos caras de D' , y por 3.13 no puede formar parte de otra cara en D'' . Por consiguiente, $D' \cap D''$ está formado por un conjunto (finito) de vértices de D . De este modo, si a D le quitamos sus vértices obtenemos un espacio disconexo, pero esto es imposible: es fácil probar que si a una superficie le quitamos un conjunto finito de puntos obtenemos un espacio conexo.

Por último, en el enunciado del teorema hemos exigido que el polígono sea regular, mientras que en la prueba hemos obtenido únicamente un polígono convexo. El teorema 1.4 nos permite transformarlo en un disco cerrado. Por conexión, cada lado del polígono se ha de transformar en un arco de circunferencia. Es fácil ver que podemos aplicar un homeomorfismo al disco (definido radialmente) para que las imágenes de los vértices resulten equiespaciadas, y a partir de ahí es fácil pasar a un polígono regular, de modo que los arcos que hay que identificar se convierten en sus lados. ■

Ahora usamos por primera vez —y última en la prueba del teorema de clasificación— el teorema 2.29, según el cual toda superficie compacta es triangulable:

Teorema 3.15 *Toda superficie topológica es homeomorfa a un deltaedro.*

DEMOSTRACIÓN: Sea S una superficie topológica. Por el teorema 2.29 tiene una triangulación \mathcal{T} . Por definición es localmente finita, es decir, que cada punto tiene un entorno que corta sólo a un número finito de triángulos. Esto nos da un cubrimiento abierto de S y, por la existencia de la base numerable, podemos extraer un subcubrimiento numerable, y de ello deducimos que \mathcal{T} es numerable.

Definimos el 0-esqueleto de S (respecto de la triangulación dada) como el conjunto S_0 de los vértices de los triángulos, mientras que el 1-esqueleto S_1 es la unión de todos los lados de los triángulos.

Exactamente igual que hemos razonado con los deltaedros, el hecho de que los triángulos sean una familia localmente finita de compactos se traduce en que la unión de cualquier cantidad de triángulos, o de vértices o lados de triángulos, es cerrada en S y el conjunto de todos los vértices de los triángulos es cerrado y discreto.

A su vez, esto implica que toda función $f : S_1 \rightarrow X$ de S_1 en un espacio topológico X que sea continua sobre cada lado de cada triángulo, es continua, y si $f : S \rightarrow X$ cumple que $f|_{S_1}$ es continua y también lo es restringida a cada triángulo, entonces es continua.

Podemos formar un deltaedro abstracto que tenga por vértices los vértices de los triángulos de \mathcal{T} , por aristas los pares de vértices que son extremos de algún lado de algún triángulo de \mathcal{T} y por caras las ternas de vértices de cada uno de los triángulos de \mathcal{T} . Sea D una realización de dicho poliedro.

La biyección $h_0 : D_0 \rightarrow S_0$ que hace corresponder cada vértice de D_0 con el vértice de S del que es imagen (recordemos que los vértices del deltaedro abstracto que define a D son precisamente los vértices de S) es un homeomorfismo, porque ambos espacios son discretos.

A cada lado de un triángulo de \mathcal{T} le corresponde una arista en S , y como ambos son espacios homeomorfos al intervalo I , podemos tomar un homeomorfismo entre ambos que en los extremos coincida con h_0 , y así obtenemos un homeomorfismo $h_1 : D_1 \rightarrow S_1$.

Por último, si T es un triángulo de \mathcal{T} y T' es la cara que le corresponde en D , tenemos que h_1 se restringe a un homeomorfismo $\partial T' \rightarrow \partial T$, donde las fronteras son las uniones de los lados respectivos de los triángulos. Tanto T como T' son homeomorfos a Δ , mediante homeomorfismos que llevan $\partial\Delta$ a las fronteras respectivas. En otros términos, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} T' & \xrightarrow{h_1} & T \\ f' \uparrow & & \uparrow f \\ \Delta & \xrightarrow{\tilde{h}_1} & \Delta \end{array}$$

en el que las flechas verticales son homeomorfismos, mientras que la superior sólo está definida en $\partial T'$ con valores en ∂T y, por consiguiente, la inferior sólo está definida en $\partial \Delta$ con valores en $\partial \Delta$. Si probamos que h_1 se extiende a un homeomorfismo $h : T' \rightarrow T$, entonces dichas extensiones determinarán un homeomorfismo $h : D \rightarrow S$, y el teorema quedará probado. Pero para ello basta probar que todo homeomorfismo $\tilde{h}_1 : \partial \Delta \rightarrow \partial \Delta$ se extiende a un homeomorfismo $\tilde{h} : \Delta \rightarrow \Delta$ o, teniendo en cuenta que, por 1.4, sabemos que Δ es homeomorfo a B^2 , y que el homeomorfismo transforma $\partial \Delta$ en S^1 , basta probar que todo homeomorfismo $h_1 : S^1 \rightarrow S^1$ se extiende a un homeomorfismo $h : B^2 \rightarrow B^2$. Ahora bien, basta definir

$$h(x) = \begin{cases} \|x\|f_1(x/\|x\|) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

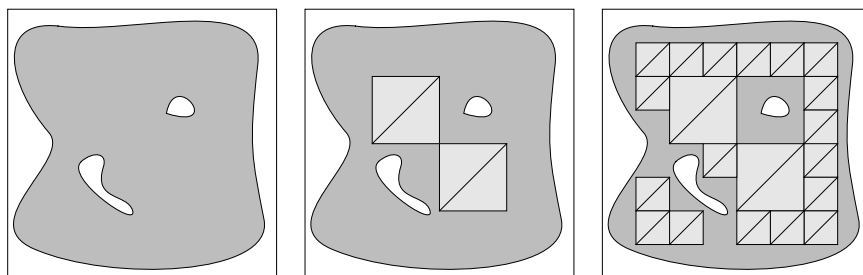
Claramente h es biyectiva, y es continua en 0 porque deja invariante a cada bola de centro 0. ■

La prueba de que toda superficie es triangulable es complicada, por lo que conviene observar que hay un caso de interés en el que es posible obtener fácilmente una triangulación:

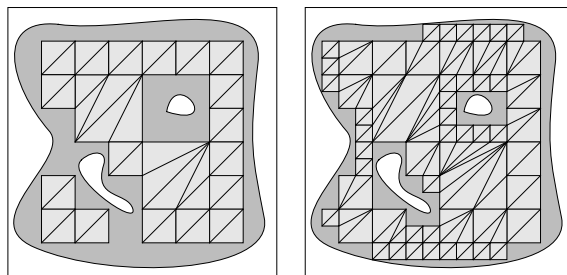
Teorema 3.16 *Todo abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ es triangulable.*

DEMOSTRACIÓN: No perdemos generalidad si suponemos que $U \subset [-2, 2]^2$. Triangulamos U mediante el proceso siguiente:

Consideramos los 16 cuadrados (cerrados) de vértices con coordenadas enteras contenidos en $[-2, 2]^2$ y nos quedamos con los que están contenidos en U y los dividimos en dos triángulos (cerrados) como indica la segunda figura. Seguidamente consideramos cuadrados de coordenadas semienteras, nos quedamos con los que están contenidos en U sin estar contenidos en los anteriores, los dividimos en dos triángulos y los añadimos a la triangulación que estamos construyendo, como indica la tercera figura.



Ahora bien, esto puede hacer que algunos de los triángulos del paso anterior tengan un vértice de los nuevos triángulos en el punto medio de una o varias de sus aristas. Si se da el caso, dividimos cada triángulo las veces que haga falta uniendo uno de estos puntos medios con su vértice opuesto, como indica la cuarta figura.



De este modo conseguimos que dos triángulos cualesquiera sean disjuntos o bien tengan un vértice o una arista completa en común. Igualmente añadimos todos los cuadrados posibles de lado $1/4$ divididos en dos triángulos y subdividimos los triángulos precedentes si tienen vértices de los nuevos triángulos en sus aristas, como indica la quinta figura.

Procediendo de este modo obtenemos una descomposición de U en unión numerable de triángulos cerrados. Es importante observar que cualquier triángulo incorporado a la triangulación en un paso dado termina completamente rodeado de triángulos tras un número finito de pasos. Esto se debe a que la distancia del triángulo a $\mathbb{R}^2 \setminus U$ es positiva, por lo que, a partir del momento en que pasemos a considerar cuadrados suficientemente pequeños, todos los fragmentos de lado del triángulo que no estén ya rodeados pasarán a estarlo. Y a partir del momento en que un triángulo queda completamente rodeado, ya no será necesario subdividirlo nunca más, por lo que sus subdivisiones pasan a pertenecer definitivamente a la triangulación.

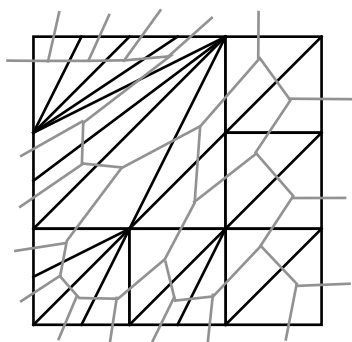
También es claro que todo punto de U está contenido en algún cuadrado con vértices de coordenadas de la forma $1/2^k$, por lo que siempre acaba incorporado a alguno de los triángulos de la triangulación. Por último observamos que el conjunto de triángulos que hemos definido es localmente finito, pues cada punto de U pertenece a un número finito de triángulos y tiene un entorno que sólo corta a ese número finito.³ ■

Terminamos esta sección con un ejemplo de teorema que se apoya en la triangulación de las superficies:

Teorema 3.17 *Si S es una superficie topológica no compacta, existe un grafo $X \subset S$ que es un retracto por deformación fuerte de S .*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos una triangulación \mathcal{T} de S . Notemos que tiene que contener infinitos triángulos, porque en otro caso S sería compacta. Sea G_0 el grafo cuyos vértices son un punto del interior de cada triángulo y de modo que dos vértices están unidos por una arista si y sólo si sus triángulos tienen una arista en común.

³Sin embargo, la triangulación no es localmente finita en \mathbb{R}^2 , pues todo entorno de todo punto de ∂U corta a infinitos triángulos. Esto significa que U no es un deltaedro en \mathbb{R}^2 (para eso tendría que ser cerrado), sino meramente homeomorfo a un deltaedro.



El grafo G_0 es conexo, pues, dados dos de sus vértices, siempre pueden unirse por un arco, y es fácil modificarlo para convertirlo en otro formado por aristas de G_0 . Además, de cada vértice salen exactamente tres aristas.

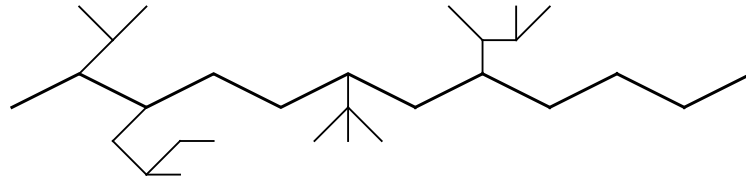
Un *rayo* en un grafo es un subgrafo formado por una cadena infinita de vértices v_0, v_1, v_2, \dots distintos dos a dos y de modo que cada uno esté conectado con el siguiente por una arista.

Todo grafo conexo infinito de cuyos vértices sale un número finito de aristas contiene un rayo. En efecto, tomando un subárbol maximal, podemos suponer que el grafo es un árbol. Fijado un vértice v_0 , alguna de las aristas que salen de él tiene que conectarlo con infinitos vértices. Tomamos una de ellas y pasamos a su otro extremo v_1 . Alguna de las aristas que salen de v_1 distintas de la que lleva a v_0 tienen que conectarlo con infinitos vértices (o de lo contrario no se cumpliría el criterio con el que hemos elegido v_1). Elegimos una y pasamos a un vértice v_2 . El proceso puede continuar indefinidamente y, como el árbol es un grafo, no es posible que se repitan vértices en el proceso.

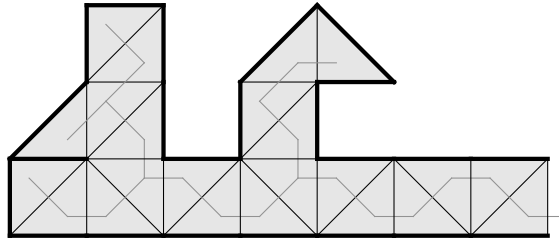
El lema de Zorn nos da un subgrafo B_0 de G_0 cuyas componentes conexas son rayos y que es maximal respecto a la inclusión, es decir, tal que no existe ningún otro rayo en G_0 que pueda añadirse a B_0 como una nueva componente conexa.

Entonces, el grafo G_0^* formado por los vértices de G_0 que no están en B_0 y por las aristas que los unen tiene que tener componentes conexas finitas, pues si una fuera infinita contendría un rayo que podría añadirse a B_0 . Sean $\{A_j\}_{j \in J}$ esas componentes conexas (puede haber un número finito o infinito, o incluso no haber ninguna). Sea A'_j un subárbol maximal en A_j . No hay aristas que conecten a A'_j con ningún otro $A'_{j'}$ (porque entonces A_j y $A_{j'}$ no serían componentes conexas de G_0^*), pero como A'_j no puede ser una componente conexa de G_0 , que es conexo, tiene que haber un vértice en A'_j que pueda unirse con una arista a un vértice de B_0 .

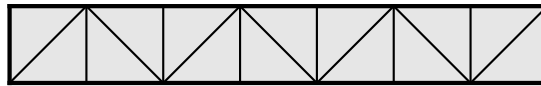
Pero de cada vértice de B_0 sale únicamente una arista hacia otro vértice que no esté en B_0 (o dos, si se trata del primer vértice de un ramo). Por lo tanto, si llamamos B al árbol que resulta de añadir a B_0 cada árbol A'_j junto con una arista que lo conecte a B_0 , tenemos que B contiene a todos los vértices de G_0 y cada una de sus componentes conexas es la unión de un rayo y árboles finitos unidos a éste por un único vértice:



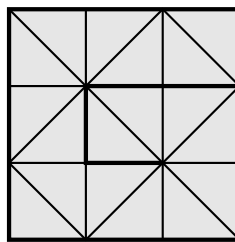
Sea ahora G el grafo formado por los vértices de los triángulos de la triangulación y en el que dos vértices están unidos si son los extremos de un lado de un triángulo no atravesado por una arista de B . La figura siguiente muestra en gris una componente conexa de B y en trazo grueso las aristas en G de los triángulos por los que pasa. El rayo es la línea que zigzaguea horizontalmente y que se extiende indefinidamente hacia la derecha. Vamos a probar que la unión de los triángulos por los que pasa una componente conexa de B puede retraerse a las aristas de B que la rodean (mediante un retracto por deformación fuerte). Puesto que las componentes conexas de B cubren toda la triangulación de S , con esto habremos probado que el grafo B es un retracto por deformación fuerte de S .



Para ello consideramos el deltaedro $D \subset \mathbb{R}^2$ que muestra la figura siguiente:

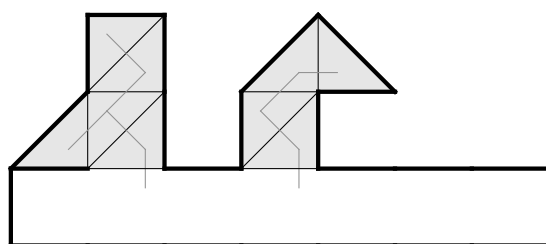


Si llamamos R a la unión de los triángulos en S por los que pasa el rayo de una componente conexa de B , podemos construir, triángulo a triángulo, una aplicación continua $f : D \rightarrow R$ que se restringe a un homeomorfismo en el interior de D , aunque puede identificar aristas de la frontera. Esto sucede, por ejemplo, si R tiene el aspecto siguiente:

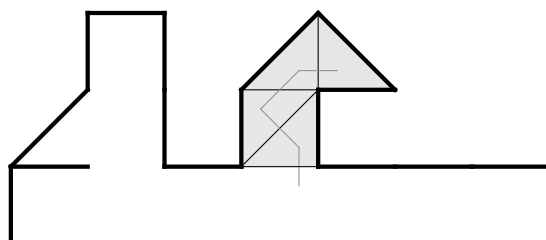


En este caso f identifica, entre otras, las dos aristas fronterizas del primer triángulo de D con otras del octavo y del undécimo.

Claramente, D puede contraerse hasta un cuadrado menos uno de sus lados, y los otros tres lados son un retracto por deformación fuerte del cuadrado completo (lo hemos visto en la prueba del teorema 3.6). Tenemos así que la frontera de D es un retracto por deformación fuerte de D y, como la homotopía entre la retracción y la identidad deja invariantes a los puntos identificados por f , induce a su vez una homotopía en R que prueba que R se retrae por deformación fuerte hasta las aristas de B más las que sirven de enlace con los árboles finitos adjuntos. Extendiendo la retracción como la identidad sobre estos árboles, concluimos que R se retrae por deformación fuerte hasta el subespacio formado por las aristas de B que rodean el rayo más los triángulos por los que pasan los árboles finitos adjuntos, como muestra la figura:



Ahora bien, es claro que dos lados de un triángulo son un retracto por deformación del triángulo (en realidad es, salvo homeomorfismo, el mismo caso que el del cuadrado), por lo que un número finito de retracciones sucesivas “vacían” cada grupo de triángulos residual:



Puede haber una cantidad numerable de grupos residuales, pero podemos encadenar una cantidad numerable de retracciones (y de homotopías entre las retracciones y la identidad) teniendo en cuenta que cada punto queda invariante por todas ellas salvo a lo sumo por una. Esto termina la prueba. ■

3.3 La clasificación de las superficies compactas

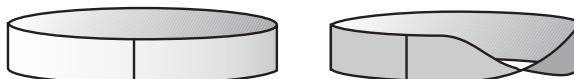
Abordamos ahora el problema de la clasificación de las superficies compactas. Vamos a probar que toda superficie compacta es homeomorfa a una de entre una lista de superficies que vamos a construir seguidamente. La construcción consistirá en identificar lados de polígonos. Para ello conviene considerar

primero algunos ejemplos que ayuden a entender el procedimiento y la notación que vamos a emplear.

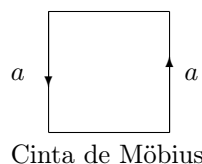
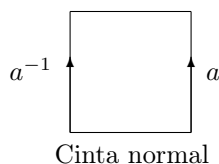
Consideremos el rectángulo de la figura:



Si identificamos los puntos del lado izquierdo con los del derecho obtenemos una cinta. Ahora bien, hay dos formas esencialmente distintas de realizar esta identificación: si a cada punto del lado izquierdo le hacemos corresponder el que está a su misma altura en el lado derecho obtenemos una cinta “normal”, una superficie cilíndrica; pero si identificamos los lados de modo que el vértice superior izquierdo se corresponda con el inferior derecho y viceversa, obtenemos una cinta de Möbius, con una sola cara y un solo borde, homeomorfo a una circunferencia:

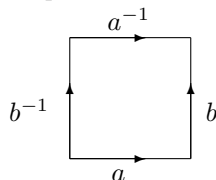


Para distinguir ambas formas de identificar los los lados del rectángulo usaremos la notación siguiente:

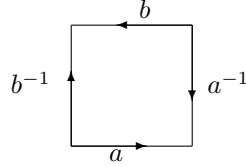


Las flechas indican que, en el cuadrado de la izquierda, identificamos los lados de modo que recorrer el izquierdo de abajo hacia arriba equivale a recorrer el derecho también de abajo hacia arriba, mientras que en el cuadrado de la derecha al recorrer el lado derecho de abajo hacia arriba estamos recorriendo el izquierdo de arriba hacia abajo. En el primer caso los recorridos tienen sentidos opuestos (horario en el lado izquierdo, antihorario en el derecho), mientras que en el segundo ambos tienen el mismo sentido. Por eso también usaremos la notación $a^{-1}a$ para la primera identificación y aa para la segunda. El exponente negativo indica el cambio de sentido.

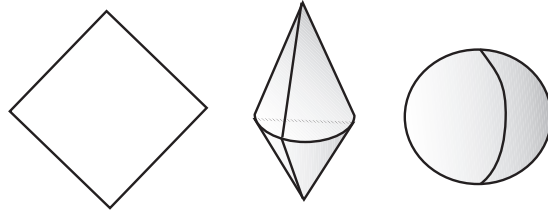
Con estos convenios podemos representar sin ambigüedad cualquier identificación de los lados de un polígono. Por ejemplo, en la sección anterior hemos visto que identificando los lados opuestos de un cuadrado obtenemos un toro. Dicho así, esto es ambiguo, pues hay que especificar la forma en que identificamos los lados. Con la notación que acabamos de introducir la identificación se representa así:



Podemos representar más brevemente la identificación sin más que escribir $aba^{-1}b^{-1}$. Veamos ahora el resultado que producen otros tipos de identificación. Por ejemplo:



Gráficamente, al identificar los lados contiguos obtenemos dos conos unidos por la base. “Hinchando” el resultado obtenemos una esfera:



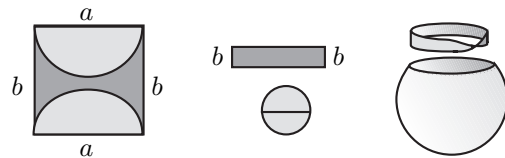
No es difícil obtener expresiones explícitas para el homeomorfismo. Partamos, por ejemplo, del cuadrado C de vértices $(\pm 1, 0)$ y $(0, \pm 1)$. La aplicación $f : C \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x, z) = \left((1 - |z|) \cos \frac{\pi x}{1 - |z|}, (1 - |z|) \sin \frac{\pi x}{1 - |z|}, z \right), \quad f(0, \pm 1) = (0, 0, \pm 1),$$

es un homeomorfismo entre el cuadrado y los conos (es biyectiva y continua, y C es compacto). Componiendo con la aplicación $x \mapsto x/\|x\|$ tenemos un homeomorfismo en la esfera.

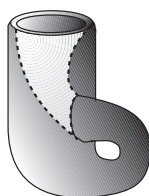
Consideremos ahora la identificación $abab$. Es fácil ver que el espacio cociente P es homeomorfo al que se obtiene al identificar los puntos opuestos de la frontera de un disco cerrado, por lo que P es homeomorfo al plano proyectivo real $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Vamos a describirlo gráficamente a partir de esta representación.

En primer lugar cortamos dos semicírculos del cuadrado de partida. De este modo, P es el espacio que se obtiene al identificar las tres piezas por los lados a y b y por las dos semicircunferencias, ahora bien, es fácil ver que no importa el orden en que hacemos las identificaciones. Si empezamos identificando los dos semicírculos por el lado a obtenemos un círculo, cuya frontera es una circunferencia que ha de unirse a la otra pieza. También podemos verlo como una esfera truncada. La otra pieza es homeomorfa a un rectángulo, y al identificar los lados b obtenemos una cinta de Möbius, cuya frontera es una circunferencia que hemos de pegar a la esfera.

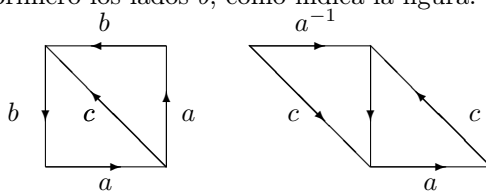


Así, P puede verse como el espacio que se obtiene al hacer un agujero a una esfera y cerrarlo “cosiéndole” el borde completo de una cinta de Möbius. Esta operación no puede hacerse en \mathbb{R}^3 , pues la superficie esférica corta necesariamente a la cinta en puntos no fronterizos.

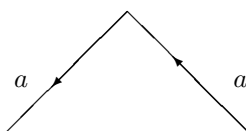
Pensemos ahora en el cociente $aba^{-1}b$. Al identificar los lados a obtenemos un cilindro, pero ahora hemos de identificar sus dos extremos “al revés” de como haríamos para formar un toro, es decir, un extremo ha de pegarse al otro “por dentro” en lugar de por fuera. Esto no puede hacerse tampoco⁴ en \mathbb{R}^3 , sino que la única forma de llegar “por dentro” a un extremo sin cortar la superficie es doblando el cilindro en la cuarta dimensión. La figura muestra una aproximación tridimensional al resultado: se trata de la *botella de Klein*, una superficie sin borde y con una sola cara.



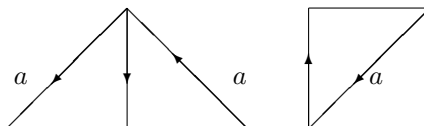
Consideremos seguidamente el caso $aabb$. Resulta que este espacio es homeomorfo a la botella de Klein. Para probarlo partimos el cuadrado por la diagonal e identificamos primero los lados b , como indica la figura:



El resultado es ciertamente una botella de Klein. Esta nueva representación nos proporciona una nueva imagen de este espacio. Para llegar a ella hemos de observar este hecho: si realizamos la identificación siguiente en un triángulo:

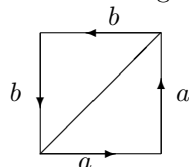


el resultado es una cinta de Möbius. En efecto, basta dividir el triángulo por la mitad e identificar primero los lados a , como indica el esquema siguiente:

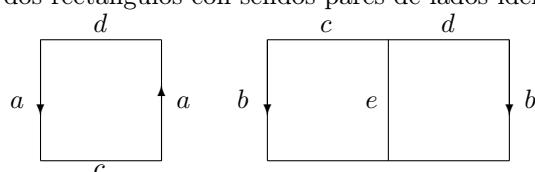


⁴En 12.36 probaremos que, en efecto, ni el plano proyectivo real ni la botella de Klein pueden sumergirse en \mathbb{R}^3 .

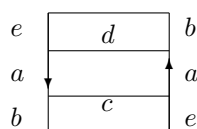
Ahora, si partimos de la botella de Klein en la forma $aabb$, podemos partir el cuadrado por la diagonal como indica la figura:



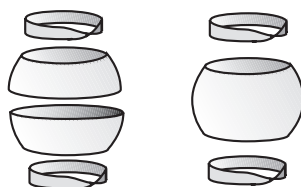
Vemos así que tenemos dos cintas de Möbius identificadas por su único borde. Podemos hacernos una idea más clara del resultado si observamos un hecho más: si a un cilindro le pegamos una cinta de Möbius por un extremo, el resultado es homeomorfo a una cinta de Möbius. Para comprobarlo representamos el cilindro y la cinta como dos rectángulos con sendos pares de lados identificados:



Si partimos el rectángulo por la mitad e identificamos primero los lados c y d obtenemos el esquema siguiente:



Por consiguiente estamos ante una cinta de Möbius. En lugar de un cilindro podemos pensar en una semiesfera truncada, lo que nos da la siguiente representación de la botella de Klein:



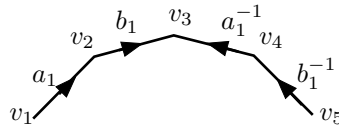
Se trata de dos cintas de Möbius identificadas por su borde o, equivalentemente, de dos cintas de Möbius identificadas a dos semiesferas truncadas identificadas por su ecuador o, equivalentemente, de una esfera a la que hemos hecho dos agujeros circulares y les hemos cosido dos cintas de Möbius. Teniendo en cuenta que una esfera con una cinta de Möbius es un plano proyectivo, la botella de Klein se obtiene también al agujerear dos planos proyectivos e identificar los bordes de los agujeros.

Después de esto queda claro que el problema de si dos espacios cociente son o no homeomorfos no es trivial. Pasamos ya a definir los ejemplos de superficies compactas que nos llevarán a su clasificación:

Definición 3.18 Para cada número natural $g \geq 1$ definimos M_g como el espacio topológico que se obtiene al identificar los lados de un polígono de $4g$ lados en la forma $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$. Convenimos también que M_0 es el espacio obtenido a partir de un cuadrado mediante la identificación $aa^{-1}bb^{-1}$, es decir, la esfera.

Para cada número natural $h \geq 2$ definimos N_h como el cociente obtenido a partir de un polígono de $2h$ lados identificando sus lados en la forma $a_1 a_1 \cdots a_h a_h$. Llamaremos N_1 al espacio obtenido a partir de un cuadrado por la identificación $abab$, es decir, al plano proyectivo.

Enseguida interpretaremos geoméricamente estos espacios, pero antes conviene que observemos algunos hechos elementales sobre ellos. En primer lugar, todos los vértices del polígono se identifican a un único punto. En efecto, (véase la figura) en el caso de M_g , la identificación $a_1 a_1^{-1}$ hace que $v_1 = v_4$ y $v_2 = v_3$. La identificación $b_1 b_1^{-1}$ hace que $v_2 = v_5$ y $v_3 = v_4$, de donde los cinco vértices (cuatro si $v_1 = v_5$) se correspondan con el mismo punto. Si hay más vértices razonamos con el siguiente bloque de cuatro identificaciones que hace que v_5 se identifique con los cuatro vértices siguientes, etc. Con N_h se razona análogamente.



Como consecuencia obtenemos que los espacios M_g y N_h son espacios de Hausdorff. Basta tener presente qué forma tienen los entornos básicos de cada punto. Si consideramos un punto x interior del polígono, sus entornos básicos son los discos abiertos de centro x y radio suficientemente pequeño. Si x está en un lado (pero no es un vértice), entonces x está identificado con un único punto y de otro lado. Un entorno básico de x está formado por dos semidisos, uno de centro x y otro de centro y , de radio suficientemente pequeño. Su imagen por la proyección en el cociente es abierta y es homeomorfa a un disco abierto en \mathbb{R}^2 (el que resulta de identificar los dos semidisos).

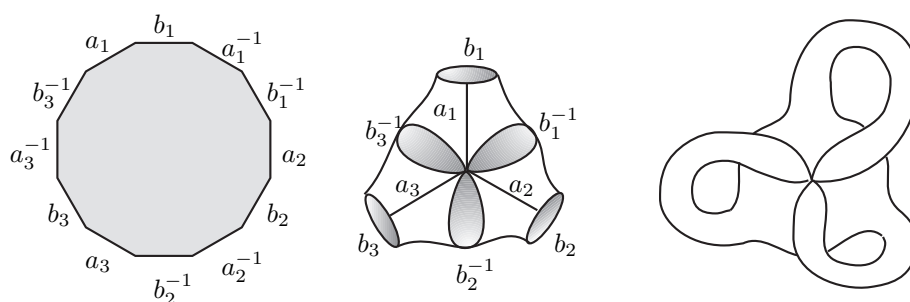


Por último, los entornos básicos del único punto que se corresponde con los vértices del polígono (digamos de n lados) son los que resultan de identificar n sectores circulares de radio suficientemente pequeño, que se pegan formando un disco completo.

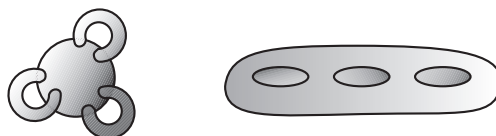
Teniendo en cuenta esta descripción, es fácil ver que dos puntos distintos tienen entornos disjuntos. Más aún, hemos probado que todo punto de M_g y N_h tiene un entorno homeomorfo a un disco abierto en \mathbb{R}^2 , es decir, son superficies topológicas.

Los espacios M_g y N_h son imágenes continuas de polígonos (compactos y conexos), luego son superficies compactas. Veamos ya qué aspecto tienen. Por definición M_0 es la esfera y es claro que M_1 es el toro. Para hacernos una idea general de los espacios M_g consideremos el caso $g = 3$.

Partimos de un polígono de 12 lados. Al identificar los lados a_1 , a_2 y a_3 formamos tres tubos que acaban en tres agujeros correspondientes a los lados b_1 , b_2 y b_3 . Si unimos los vértices que quedan al extremo opuesto de los tubos se forman otros tres agujeros, correspondientes a b_1^{-1} , b_2^{-1} y b_3^{-1} . Ahora “estiramos” los tubos para realizar las identificaciones que faltan. El resultado es una esfera con tres asas:

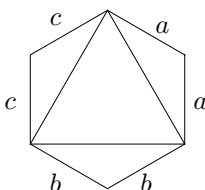


La figura siguiente muestra otras imágenes de este espacio:



Observemos que el hecho de que en la construcción que hemos realizado los tres tubos se toquen en un punto es anecdótico: dicho punto tiene un entorno homeomorfo a un disco (o a un casquete esférico), que en nuestra construcción aparece “ondulado”. Sin más que “aplanarlo” estamos separando los puntos de conexión de las asas con la esfera. (Más en general, las variedades topológicas son homogéneas, por lo que no hay ningún punto que se distinga topológicamente de los demás.) La figura de la derecha puede verse como una esfera con tres agujeros o como tres toros pegados (es decir, como la suma conexa de tres toros). La topología algebraica nos proporcionará técnicas para justificar formalmente todos estos homeomorfismos. En general, es claro que M_g es una esfera con g asas, o con g agujeros, o bien g toros pegados. Esto justifica que hayamos convenido llamar M_0 a la esfera sin agujeros.

Consideremos ahora los espacios N_h . Por definición N_1 es el plano proyectivo, que puede verse como una esfera a la que hemos “cosido” una cinta de Möbius, y N_2 es la botella de Klein, que puede verse como una esfera con dos cintas de Möbius. En general, N_h es una esfera con h cintas de Möbius. Para convencernos de ello pensemos en N_3 :



Al identificar los vértices del triángulo interior obtenemos una esfera con tres agujeros en los que hemos de pegar el resultado de identificar los tres triángulos exteriores. Ahora bien, éstos dan lugar a tres cintas de Möbius, luego, efectivamente, tenemos una esfera con tres cintas.

Alternativamente, se cumple que N_h es la suma conexa de una esfera y h planos proyectivos. En efecto, sabemos que el plano proyectivo se obtiene haciendo un agujero a una esfera (con lo que obtenemos un espacio homeomorfo a un disco cerrado) y cosiéndole una cinta de Möbius, pero esto mismo puede interpretarse al revés: si a un plano proyectivo le quitamos un disco cerrado obtenemos una cinta de Möbius, luego la suma conexa de una superficie topológica y un plano proyectivo se obtiene agujereando la superficie y pegándole una cinta de Möbius (el resultado de agujerear también el plano proyectivo).⁵

Podría pensarse en definir superficies más complicadas que éstas, por ejemplo combinando asas y cintas de Möbius, sin embargo no dan lugar a nuevos espacios. A continuación demostramos que toda superficie compacta (triangulable) es homeomorfa a una de las superficies M_g o N_h . Para completar la clasificación todavía faltará demostrar que estas superficies no son homeomorfas dos a dos, cosa que probaremos en 8.33 y también en la sección 10.3.

El punto de partida de la clasificación son los teoremas 3.14 y 3.15, que nos aseguran que toda superficie compacta (triangulable) es homeomorfa a un cociente obtenido a partir de un polígono regular de $2n$ lados identificando éstos dos a dos.

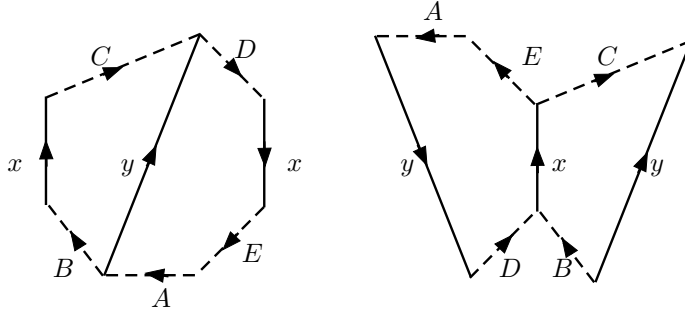
Tal y como venimos haciendo, podemos representar estos cocientes mediante sucesiones de letras repetidas a pares, con exponentes ± 1 que indiquen el sentido en que recorremos las aristas al identificarlas. Las letras mayúsculas A, B, C, \dots representarán sucesiones de aristas. Si A representa a a_1, \dots, a_n , entonces A^{-1} representará la sucesión $a_n^{-1} \dots a_1^{-1}$.

Teorema 3.19 *Las operaciones siguientes transforman un cociente de un polígono en otro homeomorfo:*

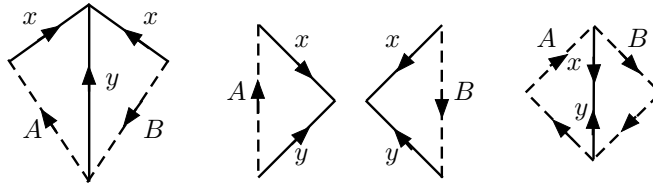
1. Reemplazar $ABxCDxE$ por $AyDB^{-1}yC^{-1}E$.
2. Reemplazar $ABxCDxE$ por $AyDCy^{-1}BE$.
3. Reemplazar $Axx^{-1}B$ o $Ax^{-1}xB$ por AB , supuesto que AB contiene al menos dos pares de letras.

⁵No merece la pena justificar esto formalmente, pues más adelante (véase el ejemplo tras el teorema 12.6) será inmediato que la suma topológica de una esfera y h planos proyectivos es homeomorfa a N_h .

DEMOSTRACIÓN: 1) Basta observar la figura:



Observemos que el polígono resultante no es convexo, pero es fácil ver que es homeomorfo a un polígono convexo. La prueba de 2) es similar. Respecto a 3) tenemos:



■

Con esto tenemos todo lo necesario para probar el teorema principal:

Teorema 3.20 *Toda superficie compacta es homeomorfa a una de las superficies M_g o N_h definidas en 3.18.*

DEMOSTRACIÓN: Por 3.14 tenemos que toda superficie topológica es homeomorfa a un cociente de un polígono de $2n$ lados identificados dos a dos. Diremos que un par de aristas identificadas es *similar* si es de la forma x, x o x^{-1}, x^{-1} . Diremos que es *inverso* si es de la forma x, x^{-1} o x^{-1}, x . Veamos en primer lugar que la identificación puede tomarse de la forma AB , donde A es de la forma $x_1x_1 \cdots x_r x_r$ y B contiene únicamente pares inversos (admitiendo que A o B sea vacío).

Notemos que, sin más que cambiar la notación, todo par similar puede tomarse de la forma x, x . Si la identificación es $CDxExF$, donde C ya es de la forma $x_1x_1x_2x_2 \cdots$, dos aplicaciones de la operación 1) del teorema anterior nos dan

$$CDxExF \rightarrow CyD^{-1}yE^{-1}F \rightarrow Cz z DE^{-1}F.$$

De este modo agrupamos todos los pares similares que hubiera en la identificación original.

En segundo lugar, veamos que podemos reemplazar AB por ACD , donde C es de la forma $y_1z_1y_1^{-1}z_1^{-1} \cdots y_s z_s y_s^{-1} z_s^{-1}$ y D no contiene ningún par de pares de aristas de la forma $\cdots y \cdots z \cdots y^{-1} \cdots z^{-1} \cdots$ así como tampoco pares de aristas similares.

Suponiendo que E ya es de la forma requerida, aplicamos varias veces la operación 2) del teorema anterior, tomando como x las aristas a , b , c y d respectivamente:

$$\begin{aligned} EFaGbHa^{-1}Ib^{-1}J &\rightarrow EcGbHc^{-1}FIb^{-1}J \rightarrow EcGdFIHc^{-1}d^{-1}J \\ &\rightarrow EeFIHGde^{-1}d^{-1}J \rightarrow Eefe^{-1}f^{-1}FIHGJ. \end{aligned}$$

Así agrupamos todos los pares de la forma considerada.

Suponiendo que A sea no vacío, veamos que podemos reemplazar ACD por ED , donde E es de la forma $x_1x_1x_2x_2\cdots$. Para ello usamos 1) al revés:

$$\begin{aligned} Fxxaba^{-1}b^{-1}G &\leftarrow Fyb^{-1}a^{-1}ya^{-1}b^{-1}G \leftarrow Fyay^{-1}accG \\ &\leftarrow FyyddccG. \end{aligned}$$

De este modo reducimos todos los pares de pares de C en pares x_ix_i . Con esto tenemos una sucesión ED , con E de la forma $x_1x_1x_2x_2\cdots$ o bien de la forma $x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1}\cdots$ y D no contiene pares de pares de este tipo ni pares de aristas similares.

Veamos finalmente que podemos eliminar D . Consideremos el par $x\cdots x^{-1}$ más cercano a E . No puede haber aristas entre x y x^{-1} , pues si hubiera un par completo $y\cdots y^{-1}$, sería un par más cercano a E , y si hubiera una arista y , con su inversa formaría un par de pares $x\cdots y\cdots x^{-1}\cdots y^{-1}$. Así pues, tenemos un par xx^{-1} en D , que puede eliminarse por la operación 3) del teorema anterior. De este modo podemos eliminar todos los pares de D salvo en el caso en que E sea vacío o conste de un único par xx . En el primer caso obtenemos $xx^{-1}yy^{-1}$ o bien $xyy^{-1}x^{-1}$; en el segundo $xyyy^{-1}$.

De estos tres, el primero es la esfera, M_0 y el tercero es el plano proyectivo N_1 . El espacio $xyy^{-1}x^{-1}$ es el mismo que $x^{-1}xyy^{-1}$ (podemos permutar cíclicamente las aristas) y también el mismo que $xx^{-1}yy^{-1}$, o sea, la esfera de nuevo.

Dejando aparte estos casos, podemos eliminar por completo el bloque D , con lo que llegamos a uno de los espacios

$$M_g = x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1}\cdots x_gy_gx_g^{-1}y_g^{-1}, \quad N_h = x_1x_1\cdots x_hx_h.$$

■

Como ya hemos señalado, en 8.33 o, alternativamente, en la sección 10.3 probaremos que las superficies M_g y N_h no son homeomorfas entre sí.

3.4 Complejos celulares

Introducimos ahora una familia de espacios topológicos que, en toda su generalidad, incluiría tanto a los grafos como a los deltaedros que ya hemos estudiado, pues es la clase de los espacios que pueden descomponerse en vértices, aristas, caras, celdas tridimensionales, celdas cuatridimensionales, etc. Sin embargo, por simplicidad vamos a restringirla al caso de espacios con un número finito de celdas. Necesitamos algunas consideraciones previas sobre cocientes.

Adjunciones Definiremos los complejos celulares como los espacios que pueden construirse mediante un proceso finito de adjunción de celdas. Empezaremos introduciendo y estudiando este concepto de adjunción. En la sección 1.7 vimos cómo pegar dos espacios topológicos a través de un subespacio cerrado (lo que hemos llamado suma amalgamada de dos espacios). Ahora conviene generalizar esta noción para permitir que la identificación se haga a través de una aplicación continua arbitraria, no necesariamente un homeomorfismo:

Definición 3.21 Sean X e Y espacios compactos, $A \subset X$ un subespacio cerrado y $f : A \rightarrow Y$ una aplicación continua. Llamaremos *adjunción* de X a Y a través de f al espacio cociente $X \oplus_f Y$ obtenido a partir de la suma topológica $X \oplus Y$ mediante la relación de equivalencia R dada por

$$u R v \iff (u, v \in A \text{ y } f(u) = f(v)) \text{ o } (u \in A, v \in Y \text{ y } f(u) = v) \\ \text{ o } (u \in Y, v \in A \text{ y } f(v) = u) \text{ o } u = v.$$

Notemos que si f es un homeomorfismo entre cerrados en X e Y , la definición se reduce a la de suma amalgamada que ya conocemos.

Por el teorema 1.43, tenemos que $X \oplus_f Y$ es un espacio de Hausdorff. En efecto, basta ver que la relación R es cerrada en $(X \oplus Y)^2$, pero R es la unión de cuatro conjuntos cerrados: la antiimagen de la diagonal por la aplicación $f \times f : A \times A \rightarrow Y \times Y$; la imagen de A por las aplicaciones $u \mapsto (u, f(u))$ y $u \mapsto (f(u), u)$; y la diagonal en $(X \oplus Y)^2$. Así pues, R es cerrada.

Obviamente, entonces, $X \oplus_f Y$ es compacto. Sea $\pi : X \oplus Y \rightarrow X \oplus_f Y$ la proyección canónica. La inclusión de Y en $X \oplus Y$ seguida de π es inyectiva y continua, luego es un homeomorfismo. Esto nos permite identificar a Y con un subespacio cerrado de $X \oplus_f Y$. No podemos decir lo mismo de X . Concretamente, si llamamos $g : X \rightarrow X \oplus_f Y$ a la composición de la inclusión con π , ciertamente tenemos que es continua, pero no es inyectiva. Sí lo es restringida a $X \setminus A$, donde de hecho es abierta y, por consiguiente, un homeomorfismo en la imagen. Para probarlo tomamos un abierto $U \subset X \setminus A$, con lo que también es abierto en X , luego en $X \oplus Y$ y $\pi^{-1}[\pi[U]] = U$, luego $g[U] = \pi[U]$ es abierto en $X \oplus_f Y$.

En particular podemos identificar a $X \setminus A$ con un subespacio abierto de $X \oplus_f Y$. A través de la identificación $Y \subset X \oplus_f Y$, es claro que $g|_A = f$ y $g[X] \cap Y = f[A]$. En resumen:

Si X e Y son espacios compactos, $A \subset X$ es un subespacio cerrado y $f : A \rightarrow Y$ es continua, entonces $X \oplus_f Y$ es un espacio compacto que contiene a $X \setminus A$ como subespacio abierto, a Y como subespacio cerrado y existe $g : X \rightarrow X \oplus_f Y$ continua tal que $g|_A = f$ y $g[X] \cap Y = f[A]$.

En realidad no estamos interesados en construir espacios mediante este proceso de adjunción, sino más bien en describir espacios dados como homeomorfos a espacios construidos así. Nos basaremos en el teorema siguiente:

Teorema 3.22 Sean X e Y espacios compactos, $A \subset X$ un subespacio cerrado y $f : A \rightarrow Y$ continua. Sea $h : X \oplus Y \rightarrow W$ una aplicación continua y suprayectiva tal que para todo $w \in W$ la antiimagen $h^{-1}[w]$ sea un punto de $X \setminus A$ o bien un punto $y \in Y$ junto con $f^{-1}[y]$. Entonces el espacio W es homeomorfo a $X \oplus_f Y$.

DEMOSTRACIÓN: De las hipótesis del enunciado se sigue que, para todo par de puntos $u, v \in X \oplus Y$, se cumple $u R v \iff h(u) = h(v)$. Esto nos permite definir $k([u]) = h(u)$, de modo que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X \oplus Y & \xrightarrow{h} & W \\ \pi \downarrow & \nearrow k & \\ X \oplus_f Y & & \end{array}$$

Claramente, k es biyectiva. Además es continua, pues si U es abierto en W , entonces $k^{-1}[U]$ es abierto en $X \oplus_f Y$, pues esto equivale a que $\pi^{-1}[k^{-1}[U]] = h^{-1}[U]$ sea abierto en $X \oplus Y$. ■

El caso más importante de adjunción que vamos a considerar es aquel en que $X = B^n$ es una bola cerrada y $f : S^{n-1} \rightarrow Y$. En tal caso escribiremos Y_f en lugar de $X \oplus_f Y$, y diremos que Y_f es la *adjunción* a Y de una *celda* n -dimensional a través de f .

Ejemplo Sea $Y = \{\infty\}$ un espacio con un punto y sea $f : S^{n-1} \rightarrow Y$ la función constante. Entonces Y_f un espacio compacto en el que $Y_f \setminus \{\infty\}$ es homeomorfo a una bola abierta de dimensión n . Por consiguiente Y_f es homeomorfo a S^n . ■

Los espacios proyectivos reales La inclusión $i : S^n \rightarrow S^{n+1}$ dada por $x \mapsto (x, 0)$ induce un homeomorfismo en la imagen $i : P^n(\mathbb{R}) \rightarrow P^{n+1}(\mathbb{R})$, lo que nos permite identificar a $P^n(\mathbb{R})$ con un subespacio de $P^{n+1}(\mathbb{R})$. Llamemos $g : B^{n+1} \rightarrow P^{n+1}(\mathbb{R})$ a la composición de $x \mapsto (x, \sqrt{1 - \|x\|^2})$ con la proyección $S^{n+1} \rightarrow P^{n+1}(\mathbb{R})$.

Así g es una aplicación continua y suprayectiva, su restricción a la bola abierta es inyectiva, y su imagen en $P^{n+1}(\mathbb{R}) \setminus P^n(\mathbb{R})$, mientras que su restricción a S^n es la proyección canónica $p : S^n \rightarrow P^n(\mathbb{R})$.

Aplicando el teorema anterior a $g \oplus i : B^{n+1} \oplus P^n(\mathbb{R}) \rightarrow P^{n+1}(\mathbb{R})$ concluimos que $P^{n+1}(\mathbb{R})$ se obtiene de $P^n(\mathbb{R})$ por adjunción de una celda de dimensión $n+1$ a través de la proyección $S^n \rightarrow P^n(\mathbb{R})$. ■

Los espacios proyectivos complejos Con los espacios proyectivos complejos sucede algo similar. Consideremos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} S^{2n-1} & \longrightarrow & B^{2n} \\ f \downarrow & & \downarrow \bar{f} \\ P^{n-1}(\mathbb{C}) & \xrightarrow{i} & P^n(\mathbb{C}) \end{array}$$

donde f es la proyección canónica,

$$i(z_0, \dots, z_{n-1}) = (z_0, \dots, z_{n-1}, 0),$$

$$\bar{f}(z_0, \dots, z_{n-1}) = (z_0, \dots, z_{n-1}, \sqrt{1 - |z|^2}).$$

La aplicación i es inyectiva, lo que nos permite identificar a $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ con un subespacio de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Si se cumple $|z| < 1$, $|w| \leq 1$, $\bar{f}(z) = \bar{f}(w)$, entonces

$$(z_0, \dots, z_{n-1}, \sqrt{1 - |z|^2}) = \lambda(w_0, \dots, w_{n-1}, \sqrt{1 - |w|^2}).$$

Como la última componente del miembro derecho es un número real positivo, necesariamente $\lambda = 1$, luego $z = w$. Esto prueba que \bar{f} es inyectiva sobre el interior de B^{2n} y claramente su imagen es $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$. Además \bar{f} es cerrada por compacidad, luego su restricción es un homeomorfismo en la imagen. Ahora es inmediato que $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ se obtiene a partir de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ adjuntando una celda de dimensión $2n$ a través de la proyección canónica $f : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. ■

En realidad nos va a interesar el proceso de adjunción simultánea a un espacio topológico de un número finito de celdas n -dimensionales en el sentido que precisa la definición siguiente:

Definición 3.23 Sean B_1^n, \dots, B_r^n bolas disjuntas de dimensión n , con fronteras $S_1^{n-1}, \dots, S_r^{n-1}$. Sean $f_i : S_i^{n-1} \rightarrow Y$ continuas. Éstas inducen una aplicación continua $f : S_1^{n-1} \oplus \dots \oplus S_r^{n-1} \rightarrow Y$. Definimos $Y_{f_1, \dots, f_r} = (B_1^n \oplus \dots \oplus B_r^n) \oplus_f Y$. Diremos que Y_{f_1, \dots, f_r} es el espacio obtenido a partir de Y por la *adjunción* (simultánea) de r celdas n -dimensionales a través de las aplicaciones f_i .

Conviene usar la notación $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ para indicar que $f : X \rightarrow Y$ cumple $f[A] \subset B$.

Diremos que una aplicación $g : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ entre pares de espacios compactos es un *homeomorfismo relativo* si la restricción $g|_{X \setminus U} : X \setminus U \rightarrow Y \setminus V$ es un homeomorfismo

En la situación de la definición anterior tenemos un homeomorfismo relativo

$$g : (B_1^n \oplus \dots \oplus B_r^n, S_1^{n-1} \oplus \dots \oplus S_r^{n-1}) \rightarrow (Y_{f_1, \dots, f_r}, Y).$$

Recíprocamente, si $Y \subset W$ son espacios compactos y

$$g : (B_1^n \oplus \dots \oplus B_r^n, S_1^{n-1} \oplus \dots \oplus S_r^{n-1}) \rightarrow (W, Y)$$

es un homeomorfismo relativo, entonces W es homeomorfo a la adjunción a Y de r bolas n -dimensionales a través de las funciones $f_i = g|_{S_i^{n-1}}$. En efecto, podemos construir

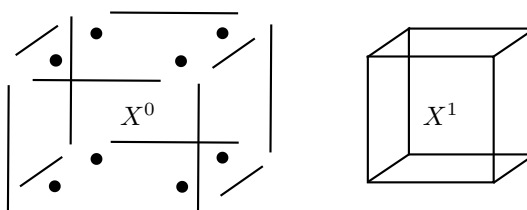
$$h = g \oplus i : (B_1^n \oplus \dots \oplus B_r^n) \oplus Y \rightarrow W,$$

que es continua, suprayectiva y satisface las hipótesis del teorema 3.22.

Ejemplo Consideremos el cubo $X^3 = I^3$, llamemos X^0 al conjunto de sus ocho vértices, X^1 a la unión de sus aristas y X^2 a la unión de sus caras (es decir, a su frontera topológica). Podemos definir una aplicación

$$f_1 : (B_1^1 \oplus \cdots \oplus B_{12}^1, S_1^0 \oplus \cdots \oplus S_{12}^0) \longrightarrow (X^1, X^0)$$

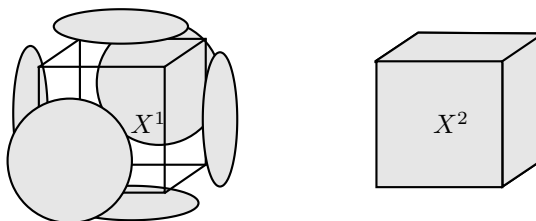
que restringida a cada intervalo $B_i^1 \cong I$ sea un homeomorfismo en cada una de las aristas del cubo. Si eliminamos los extremos de los intervalos, f_1 es un homeomorfismo en su imagen, que es la unión de las aristas del cubo sin sus vértices. En otras palabras, f_1 es un homeomorfismo relativo, y por la observación precedente concluimos que X^1 es la adjunción a X^0 de 12 celdas de dimensión 1.



Similarmente, el teorema 1.4 nos da que cada una de las seis caras del cubo es homeomorfa a B^2 y el homeomorfismo hace corresponder S^1 con la frontera de la cara, por lo que podemos definir una aplicación

$$f_2 : (B_1^2 \oplus \cdots \oplus B_6^2, S_1^1 \oplus \cdots \oplus S_6^1) \longrightarrow (X^2, X^1)$$

que restringida a cada bola cerrada sea un homeomorfismo en cada una de las caras del cubo. Claramente f_2 se restringe a un homeomorfismo de la suma de las bolas abiertas en $X^2 \setminus X^1$, por lo que concluimos que X^2 es la adjunción a X^1 de seis celdas de dimensión 2.



El teorema 1.4 nos da también un homeomorfismo $f_3 : (B^3, S^2) \longrightarrow (X^3, X^2)$, que justifica que X^3 es la adjunción a X^2 de una celda tridimensional. ■

Complejos celulares El ejemplo anterior muestra que un cubo es un complejo celular en el sentido que definimos a continuación:

Definición 3.24 Un *complejo celular* es un espacio compacto X junto con una sucesión $X^0 \subset X^1 \subset \cdots \subset X^n = X$ de subespacios cerrados tales que X^0 es finito y cada X^k se obtiene de X^{k-1} por adjunción de un número finito de celdas k -dimensionales.

Según hemos visto, existen homeomorfismos relativos

$$g_k : (B_1^k \oplus \dots \oplus B_{r_k}^k, S_1^{k-1} \oplus \dots \oplus S_{r_k}^{k-1}) \longrightarrow (X^k, X^{k-1}),$$

de modo que la diferencia $X^k \setminus X^{k-1}$ es la unión de r_k subespacios abiertos disjuntos $C_1^k, \dots, C_{r_k}^k$ homeomorfos a bolas abiertas de dimensión k . Los llamaremos k -celdas de X . El subespacio X^k se llama k -esqueleto de X . El mayor n tal que $X^n \setminus X^{n-1} \neq \emptyset$ se llama *dimensión* del complejo celular X .

Si X es un complejo celular, es claro que se cumplen los hechos siguientes:

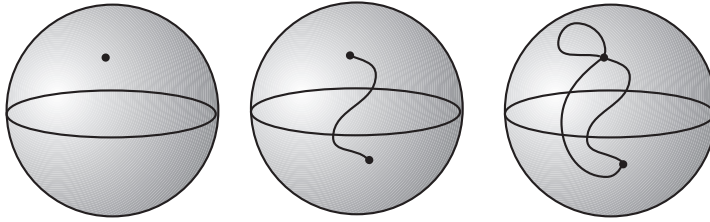
1. $X = \bigcup_{j,k} C_j^k$ es una partición de X en conjuntos disjuntos.
2. Para cada j, k , el conjunto $\overline{C}_j^k \setminus C_j^k$ está contenido en la unión de las celdas de dimensión menor que k .
3. Para cada j, k , existe un homeomorfismo relativo

$$g : (B^k, S^{k-1}) \longrightarrow (\overline{C}_j^k, \overline{C}_j^k \setminus C_j^k).$$

4. $X^k = \bigcup_{r \leq k} C_j^r$.

Recíprocamente, si X es un espacio compacto, una descomposición 1) que cumpla 2) y 3) induce una estructura de complejo celular mediante 4).

Un mismo espacio compacto puede admitir distintas estructuras de complejo celular. Por ejemplo, la figura muestra tres complejos distintos sobre una esfera: uno con un vértice, ninguna arista y una cara; otro con dos vértices, una arista y una cara; y otro con dos vértices, tres aristas y tres caras.



Por otra parte, los ejemplos tras el teorema 3.22 muestran que la sucesión

$$P^0(\mathbb{R}) \subset P^1(\mathbb{R}) \subset \dots \subset P^n(\mathbb{R})$$

determina una estructura de complejo celular n -dimensional en $P^n(\mathbb{R})$ con una única celda de cada dimensión.

Similarmente, el espacio $P^n(\mathbb{C})$ es un complejo celular de dimensión $2n$ con una única celda de cada dimensión par y ninguna de dimensión impar.

Teorema 3.25 *El producto de complejos celulares es un complejo celular cuyas celdas son los productos de celdas de los factores.*

DEMOSTRACIÓN: Sean X e Y complejos celulares. Representaremos por C_i^k a las celdas de X y C_j^l a las de Y . Entonces los productos $C_i^k \times C_j^l$ son una partición de $X \times Y$. Vamos a probar que constituyen una descomposición en celdas, entendiendo que $C_i^k \times C_j^l$ tiene dimensión $k + l$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{C_i^k \times C_j^l} \setminus C_i^k \times C_j^l &= (\overline{C_i^k} \times \overline{C_j^l}) \setminus (C_i^k \times C_j^l) \\ &= (\overline{C_i^k} \setminus C_i^k) \times \overline{C_j^l} \cup \overline{C_i^k} \times (\overline{C_j^l} \setminus C_j^l), \end{aligned}$$

y este último espacio está contenido en la unión de las celdas de dimensión menor que $k + l$. Se cumple, pues, la condición 2).

Para probar la condición 3) notemos que, por el teorema 1.4 podemos sustituir las bolas por cubos. De este modo, tenemos homeomorfismos relativos

$$f : (I^k, \partial I^k) \longrightarrow (\overline{C_i^k}, \overline{C_i^k} \setminus C_i^k), \quad f' : (I^l, \partial I^l) \longrightarrow (\overline{C_j^l}, \overline{C_j^l} \setminus C_j^l).$$

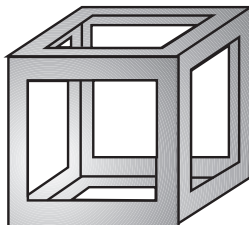
Con ellos podemos construir un homeomorfismo relativo:

$$(f \times f') : (I^{k+l}, \partial I^{k+l}) \longrightarrow (\overline{C_i^k \times C_j^l}, (\overline{C_i^k} \times \overline{C_j^l}) \setminus (C_i^k \times C_j^l)).$$

Esto prueba 3). ■

Más adelante necesitaremos el teorema siguiente sobre complejos celulares:

Teorema 3.26 *Sea X un complejo celular de dimensión $n > 0$. Entonces X^{n-1} es un retracts por deformación fuerte de un entorno compacto en X .*



DEMOSTRACIÓN: Consideremos el homeomorfismo relativo

$$g : (B_1^n \oplus \dots \oplus B_r^n, S_1^{n-1} \oplus \dots \oplus S_r^{n-1}) \longrightarrow (X, X^{n-1}).$$

Llamemos $U_i = \{x \in B_i^n \mid \|x\| \geq 1/2\}$, $U = \bigoplus_i U_i$, $V = g[U] \cup X^{n-1}$. Observemos que V es un entorno (compacto) de X^{n-1} . En efecto, si consideramos un punto $x \in g[U] \cap X^{n-1}$, entonces, de hecho, $x \in g[\overset{\circ}{U}] \cup X^{n-1}$, que es abierto en X , pues su complementario es la imagen del compacto $\bigoplus_i B_i^n \setminus \overset{\circ}{U}_i$. Por lo tanto, V es un entorno de x . Si, por el contrario, $x \in X^{n-1} \setminus g[U]$, entonces

$$x \in X \setminus g[\bigoplus_i B_i^n] \subset X^{n-1} \subset V,$$

luego V también es un entorno de x en este caso.

Es claro que S_i^{n-1} es un retracto por deformación fuerte de U_i (la retracción es $x \mapsto x/\|x\|$). De aquí se sigue inmediatamente que $\bigoplus_i S_i^{n-1}$ es un retracto por deformación fuerte de U . Sea $H : I \times U \rightarrow U$ la homotopía. Definimos ahora

$$\tilde{H} : I \times V \rightarrow V.$$

Para ello distinguimos dos casos: si $x \in V \setminus X^{n-1}$, entonces x tiene una única antiimagen y por g , que de hecho está en U , luego podemos definir $\tilde{H}_t(x) = g(H_t(y)) \in V$. Si $x \in X^{n-1}$, entonces $\tilde{H}_t(x) = x$. Claramente, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} I \times U & \xrightarrow{H} & U \\ 1 \times g \downarrow & & \downarrow g \\ I \times V & \xrightarrow{\tilde{H}} & V \end{array}$$

De aquí se sigue que \tilde{H} es continua, pues si $C \subset V$ es cerrado, entonces $\tilde{H}^{-1}[C] = (1 \times g)[H^{-1}[g^{-1}[C]]] \cup (C \cap X^{n-1})$ es cerrado en $I \times V$.

Es fácil ver que \tilde{H} es una homotopía entre la identidad en V y una retracción de V en X^{n-1} , que es, por tanto, un retracto por deformación fuerte de V . ■

Del mismo modo que podemos obtener superficies topológicas compactas identificando los lados de un polígono, también podemos obtener variedades tridimensionales compactas identificando caras de un poliedro (y, más en general, de un complejo celular). No vamos a abordar sistemáticamente el análisis de las variedades que se obtienen de este modo, pero presentaremos un par de ejemplos.

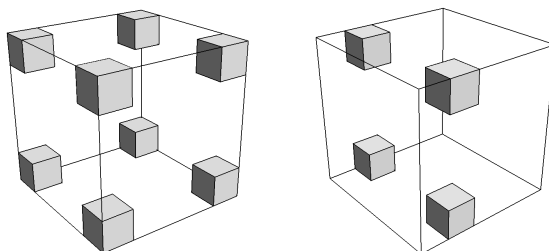
Identificación de las caras de un cubo Consideremos el espacio topológico cociente \mathcal{C} que resulta de identificar cada punto de la superficie de un cubo C con el que tiene enfrente en la cara opuesta. Hay que entender que C incluye a sus puntos interiores, sólo que sobre estos no se realiza ninguna identificación. Sea $\pi : C \rightarrow \mathcal{C}$ la proyección canónica en el cociente.

Observemos que, para que la identificación sea una relación de equivalencia entre los puntos de C , además de identificar las caras opuestas es necesario realizar algunas identificaciones adicionales. Concretamente:

- Los ocho vértices de C se tienen que identificar a un único punto $v \in \mathcal{C}$. Equivalentemente, cada vértice de C se identifica exactamente con los otros siete vértices, y con ningún punto más.
- Las doce aristas de C se tienen que identificar en grupos de cuatro. Concretamente, si p es un punto en una arista de C que no sea un vértice, entonces se identifica con los tres puntos situados en el plano perpendicular a la arista en las otras tres aristas paralelas.
- Los puntos interiores de C no se identifican con ningún otro.

Es fácil ver que \mathcal{C} es un espacio de Hausdorff. En efecto, sea U el abierto en C formado por ocho cubos abiertos (en C) con la misma arista y situados sobre cada vértice de C como muestra la figura. Entonces $\pi^{-1}[\pi[C]] = C$, de donde se sigue que $\pi[C]$ es un entorno de v en \mathcal{C} .

Similarmente, si tomamos cuatro cubos abiertos situados sobre cuatro puntos de cuatro aristas que se identifiquen en \mathcal{C} su imagen por π es un entorno de la imagen común de dichos puntos en \mathcal{C} .



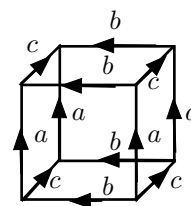
Por último, la imagen por π de cualquier entorno de un punto interior $p \in C$ disjunto de la frontera es un entorno de $\pi(p)$ en \mathcal{C} , y es fácil ver que los entornos considerados bastan para separar cualquier par de puntos de \mathcal{C} . Así pues, \mathcal{C} es un espacio de Hausdorff compacto.

Más aún, si llamamos K a la unión de ocho cubos compactos de arista a situados sobre los vértices, podemos definir $f : K \rightarrow [-a, a]^3$ como la aplicación que lleva cada uno de los cubos a uno de los ocho cubos de arista a que resultan de partir en dos cada intervalo $[-a, a]$ de modo que f identifica exactamente los mismos puntos que π . Es fácil ver entonces que f induce una biyección continua, luego un homeomorfismo, $\pi[K] \rightarrow [-a, a]^3$, lo que prueba que $\pi[K]$ contiene un entorno de v homeomorfo a un cubo abierto en \mathbb{R}^3 .

Análogamente se razona que las imágenes de los puntos de las aristas tienen entornos homeomorfos a abiertos de \mathbb{R}^3 , y para las imágenes de los puntos interiores es trivial, luego \mathcal{C} es una variedad topológica compacta tridimensional.

Podemos dotar a \mathcal{C} de estructura de complejo celular tridimensional. Como única célula 0-dimensional tomamos el punto v .

Si componemos con π un homeomorfismo de I en una de las aristas de C obtenemos un homeomorfismo relativo $(I, \{0, 1\}) \rightarrow (\bar{a}_i, \{v\})$, donde a_i es la imagen del intervalo abierto, con lo que obtenemos tres aristas disjuntas a_1, a_2, a_3 según a qué grupo de aristas paralelas hayamos enviado a I . De este modo, el espacio $X_1 = \{v\} \cup a \cup b \cup c$ es un complejo celular unidimensional. Claramente en \bar{a}_i los extremos de I se han identificado a un punto, por lo que $\bar{a}_i \cong S^1$ y X_1 es una rosa de tres pétalos.



Ahora componemos con π un homeomorfismo de B^2 en una de las caras de C , y así obtenemos un homeomorfismo relativo $(B^2, S^2) \rightarrow (\bar{A}_i, \bar{A}_i \setminus A_i)$, donde A_i es la imagen de la bola abierta, con lo que obtenemos tres caras disjuntas según a qué par de caras paralelas hayamos enviado a B^2 .

Observemos que la identificación de la frontera de cada cara corresponde a un toro. Por ejemplo, la cara frontal de la figura tiene su frontera identificada en la forma $aba^{-1}b^{-1}$. Así pues, las clausuras \bar{A}_i son toros.

En definitiva, $X_2 = X_1 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3$ es un complejo simplicial bidimensional con un vértice, tres aristas en forma de circunferencia y tres caras en forma de toro.

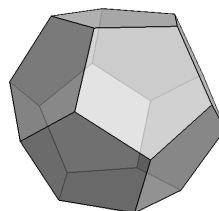
Por último, componiendo con π un homeomorfismo entre B^3 y C obtenemos un homeomorfismo relativo $(B^3, S^2) \rightarrow (\bar{D} \setminus D)$, donde D es la imagen de la bola abierta y que tomamos como única celda tridimensional de \mathcal{C} . Así $\mathcal{C} = X_3 = X_2 \cup D$ resulta ser un complejo celular con 1 vértice, 3 aristas, 3 caras y 1 celda tridimensional.

Una manera de visualizar esta superficie es considerando el cubrimiento $p_6 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{C}$ dado por $p_6(x, y, z) = [(E[x], E[y], E[z])]$. La prueba de que ciertamente es un cubrimiento es formalmente idéntica a la que vimos al final de la sección 1.7 para el cubrimiento p_4 del toro visto como cociente del cuadrado I^2 en el que se identifican los lados opuestos.

Ahora tenemos que pensar que el espacio \mathbb{R}^3 es un mapa de la variedad \mathcal{C} , de modo que cada vez que avanzamos una unidad en cualquiera de las tres direcciones espaciales estamos regresando al punto de partida tras haber dado una vuelta. ■

Identificación de las caras de un dodecaedro Un ejemplo más sofisticado, pero también más interesante desde un punto de vista teórico, es la llamada *esfera homológica de Poincaré*. El nombre ya sugiere que es un ejemplo interesante, pero de momento no estamos en condiciones de explicar a qué se debe.

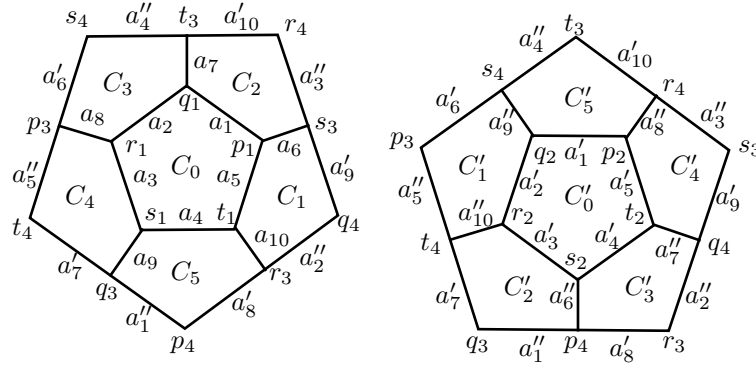
Se trata del cociente \mathcal{C} que resulta de identificar las caras opuestas de un dodecaedro regular D . No podemos identificarlas mediante la proyección ortogonal, como en el caso del cubo, porque cada cara se diferencia en un giro de 36° respecto de la proyección de su opuesta. Por lo tanto, realizamos las identificaciones a través de proyecciones ortogonales seguidas de giros. Todavía podemos elegir el sentido del giro, y lo único que exigimos es que sea el mismo para las seis identificaciones.



En la figura siguiente hay que entender que el esquema de la izquierda representa la parte exterior de seis de las caras del dodecaedro vistas desde arriba, mientras que el de la derecha representa la parte interior de las otras seis, vistas también desde arriba. Las caras identificadas llevan el mismo subíndice.

Si llamamos, por ejemplo, p_1 al vértice de la cara C_0 indicado en la figura, la identificación de C_0 con C'_0 hace que p_0 se identifique con el vértice que hemos llamado p_2 , mientras que la identificación de C_1 con C'_1 lo identifica con p_3 y la de C_2 con C'_2 lo identifica con p_4 . El lector puede comprobar que, del mismo modo, todos los vértices representados con la misma letra se identifican. Vemos que cada vértice está en tres caras y eso hace que se identifique con

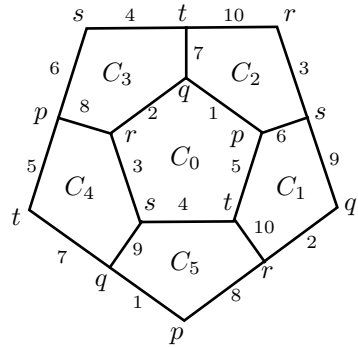
otros tres, luego en total los 20 vértices del dodecaedro se identifican en cinco grupos de cuatro vértices cada uno. Los vértices de una misma cara no resultan identificados.



Similarmente, como cada arista está en dos caras, se identifica con otras dos aristas, por lo que las 30 aristas del dodecaedro se identifican en 10 grupos de tres. Por ejemplo, la arista p_1q_1 se identifica con p_2q_2 por la identificación entre C_0 y C'_0 y con p_4q_3 por la identificación entre C_2 y C'_2 . Las aristas de una misma cara no se identifican entre sí. Omitimos los detalles de la comprobación de que el cociente \mathcal{D} es un espacio de Hausdorff, una variedad topológica compacta y un complejo celular, pues son análogas a las que hemos realizado para el cubo, pero mucho más laboriosas de detallar.

El resultado es que \mathcal{D} es un complejo celular con 5 vértices, 10 aristas, 6 caras y 1 celda tridimensional.

Las 10 aristas conectan vértices distintos, luego sus clausuras son homeomorfas a I . De hecho, conectan los 5 vértices de todas las formas posibles sin formar bucles. Tampoco se identifican puntos en la frontera de una misma cara, luego las caras son pentagonales. En la figura vemos cada arista representada dos veces y cada vértice tres veces. De las 10 aristas del pentágono exterior, 5 se identifican con las del pentágono interior y otras 5 con las radiales. ■



Segunda parte

Álgebra

Capítulo IV

Homología de complejos

Las dos primeras secciones de este capítulo contienen los preliminares algebraicos necesarios para seguir los cuatro primeros capítulos de la tercera parte de este libro. De hecho, podríamos incluso haber pospuesto la primera sección sobre categorías, pero, dado que el uso del lenguaje categórico puede requerir un cierto proceso de familiarización por parte del lector que no esté habituado a él, consideramos que es más conveniente iniciarlo desde el principio. La última sección contiene algunos resultados adicionales que necesitaremos más adelante.

4.1 Categorías

La teoría de categorías es un marco diseñado para tratar simultáneamente con distintas estructuras algebraicas, y ayuda a concebir resultados aparentemente desconexos como casos particulares de un mismo hecho abstracto, lo que proporciona un nivel de comprensión más profundo de los mismos.

Definición 4.1 Una *categoría* \mathcal{C} está determinada por:

1. Una clase, a cuyos elementos llamaremos *objetos* de \mathcal{C} ,
2. Una función que a cada par de objetos X, Y de \mathcal{C} les asigna un conjunto $\text{hom}(X, Y)$, a cuyos elementos llamaremos *morfismos* (en \mathcal{C}) de X en Y . Escribiremos $f : X \rightarrow Y$ para indicar que $f \in \text{hom}(X, Y)$.
3. Una función que a cada par de morfismos $f \in \text{hom}(X, Y)$, $g \in \text{hom}(Y, Z)$ les asigna un morfismo $f \circ g \in \text{hom}(X, Z)$ de modo que se cumplan las propiedades siguientes:
 - (a) Asociatividad: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, para todos los morfismos f, g, h para los que la composición tenga sentido.
 - (b) Para cada objeto X , existe un morfismo $1_X \in \text{hom}(X, X)$ de manera que $1_X \circ f = f$ para todo $f \in \text{hom}(X, Y)$ y $g \circ 1_X = g$ para todo $g \in \text{hom}(Y, X)$.

Observemos que si X es un objeto de una categoría, el morfismo 1_X que satisface la definición está unívocamente determinado. En efecto, si hubiera otro $1'_X$ tendríamos que $1_X = 1_X \circ 1'_X = 1'_X$.

Diremos que un morfismo $f : X \rightarrow Y$ en una categoría es un *isomorfismo* si existe un morfismo $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g = 1_X$ y $g \circ f = 1_Y$.

En tal caso g es único, pues si h cumple lo mismo, entonces

$$h = h \circ 1_X = h \circ f \circ g = 1_Y \circ g = g.$$

Por ello, lo llamaremos *morfismo inverso* de f y lo representaremos por f^{-1} . Es obvio que f^{-1} también es un isomorfismo, así como que la composición de isomorfismos es un isomorfismo y $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Es importante tener presente que la definición de categoría no exige que los morfismos sean aplicaciones, aunque en todos los ejemplos que nos van a interesar serán ciertamente aplicaciones o familias de aplicaciones.

Veamos algunos ejemplos:

- El ejemplo más elemental de categoría es la categoría \mathcal{V} cuyos objetos son todos los conjuntos y cuyos morfismos son las aplicaciones entre conjuntos, es decir, que $\text{hom}(X, Y)$ es el conjunto de todas las aplicaciones de X en Y (y la composición de morfismos es la composición usual de aplicaciones). Es inmediato que cumple todas las condiciones de la definición de categoría, de modo que el morfismo 1_X es la identidad en el conjunto X . Además, los isomorfismos coinciden con las aplicaciones biyectivas.
- Otros ejemplos típicos de categorías son aquellos en los que los objetos son conjuntos con una determinada estructura y los morfismos son las aplicaciones que conservan dicha estructura (con la composición usual de aplicaciones). Por ejemplo, la categoría de los grupos con los homomorfismos de grupos, la de los anillos con los homomorfismos de anillos, la de los espacios vectoriales sobre un cuerpo prefijado con las aplicaciones lineales, la de los espacios topológicos con las aplicaciones continuas, la de las variedades diferenciales con las aplicaciones diferenciables, etc. En estos casos los isomorfismos en el sentido categórico son los isomorfismos, homeomorfismos, difeomorfismos, etc.

No obstante, hay muchas categorías de interés que no son del tipo que acabamos de describir. De hecho, la potencia de la teoría de categorías se debe en parte a que es posible considerar categorías cuyos objetos y morfismos se ajusten con precisión a un contexto determinado. Veamos algunos ejemplos:

- El *producto* de dos categorías \mathcal{C} y \mathcal{C}' es la categoría que tiene por objetos a los pares (X, X') formados por un objeto X de \mathcal{C} y un objeto X' de \mathcal{C}' y por morfismos $(f, f') : (X, X') \rightarrow (Y, Y')$ a los pares de morfismos entre sus componentes (con la composición definida componente a componente). Igualmente podemos definir la categoría producto de cualquier familia de categorías.

- Una categoría similar a la que acabamos de describir y que es útil en el estudio de la homología es la de los *pares de espacios topológicos*, es decir, la categoría cuyos objetos son pares (X, U) , donde X es un espacio topológico y U es un subespacio de X , y cuyos morfismos $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ son las aplicaciones continuas $f : X \rightarrow Y$ que cumplen $f[U] \subset V$, con la composición usual. Es claro que los isomorfismos son los homeomorfismos que además cumplen $f[U] = V$.

La formalización de la teoría de categorías Todas las categorías descritas en los ejemplos precedentes tienen en común que la clase de sus objetos no es un conjunto. Cuando la clase de los objetos de una categoría es un conjunto se dice que es una categoría *pequeña*, pero no es el caso de la mayoría de categorías de interés. Esto hace que a veces no sea inmediato cómo pueden formalizarse en las teorías de conjuntos usuales algunos de los enunciados y demostraciones que involucran categorías, pero esto es un mero problema técnico de la teoría axiomática de conjuntos que puede resolverse de muchas formas. Una es simplemente ser cuidadoso. Otra es restringirse a categorías menores, como, por ejemplo, la categoría de todos los anillos de cardinal hereditariamente menor que un cierto cardinal regular κ . Así tenemos una categoría pequeña y, puesto que κ es arbitrario, todos los resultados que obtengamos se aplicarán a anillos arbitrarios. Hay más posibilidades, pero no vamos a discutir las aquí. El lector que sepa la suficiente teoría de conjuntos para comprender realmente el problema también sabrá resolverlo sin dificultad (por lo menos, a la hora de formalizar los resultados relativamente elementales que vamos a exponer). ■

Observaciones Es frecuente definir una categoría indicando únicamente cuáles son sus objetos, pues en general es fácil sobrentender cuáles serán los morfismos correspondientes y cuál es la composición de morfismos considerada. Así, por ejemplo, si hablamos de la categoría de los A -módulos, para un anillo fijo A , se sobrentiende que los morfismos son los homomorfismos de módulos, y que la composición es la composición usual de aplicaciones. No obstante, a veces puede ser necesaria alguna precisión. Por ejemplo, al considerar la categoría de los anillos unitarios, podemos tomar como morfismos los homomorfismos de anillos o bien los homomorfismos de anillos que transforman la identidad (el elemento neutro del producto) en la identidad. Al considerar la categoría de los espacios métricos podemos tomar como morfismos las aplicaciones continuas, o las uniformemente continuas, o las isometrías, etc. ■

En el mismo sentido en que podemos decir que el concepto de espacio topológico es sólo el marco necesario para definir la continuidad, que es el “auténtico” objeto de estudio de la topología, podemos decir que el concepto de categoría simplemente proporciona el marco necesario para definir el concepto de funtor, que es (junto con el de transformación natural, que veremos a continuación) el auténtico objeto de estudio de la teoría de categorías.

Definición 4.2 Un *functor covariante* $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ entre dos categorías es una aplicación que a cada objeto X de \mathcal{C} le asigna un objeto $F(X)$ de \mathcal{C}' y a cada

morfismo $f : X \rightarrow Y$ un morfismo $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ de modo que se cumplan las propiedades siguientes:

1. $F(1_X) = 1_{F(X)}$.
2. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ (siempre que la composición tiene sentido).

Un *funtor contravariante* se define del mismo modo, salvo que a cada morfismo $f : X \rightarrow Y$ le hace corresponder un morfismo $F(f) : F(Y) \rightarrow F(X)$ y la propiedad 2) hay que modificarla de forma obvia.

Es inmediato que los funtores transforman isomorfismos en isomorfismos.

Veamos algunos ejemplos:

- En toda categoría \mathcal{C} podemos definir el funtor identidad $I : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, que deja invariantes a todos los objetos y a todos los morfismos.
- Si A es un anillo unitario, un funtor covariante $F : \text{Mód}(A) \rightarrow \text{Mód}(\mathbb{Z})$ de la categoría de los A -módulos en la categoría de los grupos abelianos es el que a cada A -módulo M le asigna el propio M , pero considerado únicamente como grupo abeliano, y deja invariantes a los homomorfismos de módulos. A este tipo de funtores que eliminan parte de la estructura de un objeto (o toda ella) se les llama “*funtores de olvido*”.
- Si \mathcal{C} y \mathcal{C}' son dos categorías cualesquiera, la proyección $p_1 : \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ dada por $p_1(X, Y) = X$ y $p_1(f_1, f_2) = f_1$ es claramente un funtor covariante, e igualmente puede definirse la proyección en la segunda componente.
- Si \mathcal{C} es la categoría de los espacios topológicos punteados y \mathcal{G} es la categoría de los grupos, un funtor covariante $\pi_1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{G}$ entre ambas es el que a cada par (X, x) le asigna el grupo fundamental $\pi_1(X, x)$, y a cada morfismo $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ le asigna el homomorfismo de grupos

$$\pi_1(f) = f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y).$$

- Un funtor contravariante $*$: $\text{Mód}(A) \rightarrow \text{Mód}(A)$ de la categoría de los A -módulos en sí misma es la que a cada A -módulo M le asigna su *módulo dual* M^* formado por todos los homomorfismos de M en A , con las operaciones definidas puntualmente. (Si el anillo A no es conmutativo y M es un A -módulo por la izquierda, entonces M^* es un A -módulo por la derecha con el producto dado por $(fa)(x) = f(x)a$. Si tratáramos de definir af , el resultado no sería un homomorfismo de módulos.) Si $f : M \rightarrow N$ es un homomorfismo de módulos, entonces $f^* : N^* \rightarrow M^*$ se define como $f^*(g) = f \circ g$.
- Si \mathcal{C} es la categoría de las variedades diferenciales y \mathcal{C}' es la categoría de las \mathbb{R} -álgebras, un funtor contravariante $\Lambda : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ entre ambas es el que a cada variedad V le asigna su álgebra de Grassmann $\Lambda(V)$ y a cada aplicación diferenciable $f : V \rightarrow W$ le asigna la retracción $\Lambda(f) = f^* : \Lambda(W) \rightarrow \Lambda(V)$ (véase la sección [GD 3.2]).

En realidad, un funtor contravariante puede verse como funtor covariante. Para ello definimos la *categoría opuesta* de una categoría \mathcal{C} como la categoría \mathcal{C}^{op} cuyos objetos son los mismos que los de \mathcal{C} , pero en la que el conjunto de los morfismos de X en Y es $\text{hom}(Y, X)$ (y $f \circ g$ para \mathcal{C}^{op} es $g \circ f$ para \mathcal{C}).

Es claro que un funtor contravariante $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ es lo mismo que un funtor covariante $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}'$. Más en general, un funtor definido sobre un producto de categorías $\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_n$ covariante en los p primeros argumentos y contravariante en los siguientes es un funtor (covariante) definido sobre el producto $\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_p \times \mathcal{C}_{p+1}^{\text{op}} \times \cdots \times \mathcal{C}_n^{\text{op}}$.

Así, todos los resultados válidos para funtores covariantes definidos sobre una categoría arbitraria valen trivialmente para funtores contravariantes sin más que aplicarlos al mismo funtor visto como funtor covariante sobre la categoría opuesta.

Notemos que si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ y $G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$ son dos funtores, podemos definir su *composición* $F \circ G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}''$ estableciendo que

$$(F \circ G)(X) = G(F(X)), \quad (F \circ G)(f) = G(F(f)).$$

Los funtores pueden ser covariantes o contravariantes indistintamente. Por ejemplo, la composición de dos funtores contravariantes es covariante.

Ejemplo Si A es un anillo unitario y $*$: $\text{Mód}(A) \rightarrow \text{Mód}(A)$ es el funtor contravariante que a módulo M le asigna su módulo dual M^* , la composición de este funtor consigo mismo es el funtor covariante que a cada módulo M le hace corresponder su bidual M^{**} . ■

El lenguaje básico de la teoría de categorías se completa con el concepto de transformación natural:

Definición 4.3 Sean $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ dos funtores covariantes entre dos categorías. Una *transformación natural* $\phi : F \rightarrow G$ es una aplicación que a cada objeto X de \mathcal{C} le asigna un morfismo $\phi(X) : F(X) \rightarrow G(X)$, de modo que, para todo morfismo $f : X \rightarrow Y$, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \phi(X) \downarrow & & \downarrow \phi(Y) \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

Las transformaciones naturales entre funtores contravariantes se definen análogamente, invirtiendo el sentido de las flechas horizontales en el diagrama.

Un *isomorfismo natural* es una transformación natural $\phi : F \rightarrow G$ tal que, para cada objeto X de \mathcal{C} , se cumple que $\phi(X)$ es un isomorfismo en \mathcal{C}' . En tal caso los funtores F y G se dicen *naturalmente equivalentes*.

Ejemplo Sea A un anillo unitario y $F : \text{Mód}(A) \rightarrow \text{Mód}(A)$ el funtor que a cada A -módulo le hace corresponder su bidual. Entonces, una transformación natural $\delta : I \rightarrow F$ es la que a cada módulo M le hace corresponder la inmersión canónica $\delta_M : M \rightarrow M^{**}$ dada por $\delta_M(m)(f) = f(m)$. Si nos restringimos a la categoría de los espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo K , entonces se trata de un isomorfismo natural. ■

Si $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ es un funtor entre dos categorías, siempre podemos definir sobre él la *transformación natural identidad* $1 : F \rightarrow F$ que a cada objeto X le asigna el morfismo identidad $1(X) = 1_{F(X)} : F(X) \rightarrow F(X)$.

Si $\phi : F \rightarrow G$ y $\psi : G \rightarrow H$ son transformaciones naturales, podemos definir su *composición* como la transformación natural $(\phi \circ \psi) : F \rightarrow H$ dada por $(\phi \circ \psi)(X) = \phi(X) \circ \psi(X)$.

Si $\phi : F \rightarrow G$ es un isomorfismo natural, podemos definir el isomorfismo inverso $\phi^{-1} : G \rightarrow F$ como el dado por $\phi^{-1}(X) = \phi(X)^{-1}$.

Observaciones A menudo se dice que una asignación es *funtorial* para indicar que define un funtor o, incluso, que puede completarse hasta definir un funtor mediante una asignación oportuna de morfismos a morfismos.

Por ejemplo, podemos decir que el producto cartesiano de conjuntos es funtorial, en el sentido de que define un funtor $\times : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, a saber, el que a cada par de conjuntos (A, B) les asigna $A \times B$, pero además, a cada par de morfismos $f : A \rightarrow A'$, $g : B \rightarrow B'$ les asigna el morfismo $f \times g : A \times B \rightarrow A' \times B'$ dado por $(f \times g)(a, b) = (f(a), g(b))$.

Igualmente, el dual de un módulo dado es funtorial, pues no sólo podemos asignar un módulo dual a cada módulo, sino también (contravariantemente) un homomorfismo dual a cada homomorfismo de módulos, de modo que se cumplen los requisitos de la definición de funtor.

Similarmente, se dice que un homomorfismo entre dos objetos asignados a un mismo objeto es un homomorfismo natural cuando las dos asignaciones son funtoriales y la asignación del homomorfismo determina una transformación natural entre los funtores correspondientes.

Por ejemplo, hemos visto que el “homomorfismo natural” de un módulo en su bidual es natural en el sentido categórico, porque determina una transformación natural entre el funtor identidad y el funtor bidual, y que el isomorfismo entre un espacio vectorial de dimensión finita y su bidual es natural.

Igualmente podemos decir que las proyecciones de un producto cartesiano son naturales, en el sentido de que definen transformaciones naturales entre los funtores \times , $P_i : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, donde P_i es la proyección $(A_1, A_2) \mapsto A_i$. Explícitamente, esto significa que cada morfismo $(f_1, f_2) : (A_1, A_2) \rightarrow (B_1, B_2)$

determina un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A_1 \times A_2 & \xrightarrow{f_1 \times f_2} & B_1 \times B_2 \\ p_i(A_1, A_2) \downarrow & & \downarrow p_i(B_1, B_2) \\ A_i & \xrightarrow{f_i} & B_i \end{array}$$

En general, cuando se define una asignación de un objeto matemático a otro de modo que ésta no depende de ninguna elección arbitraria, la asignación suele ser funtorial, y cuando se define un morfismo entre dos funtores sin hacer referencia a ninguna elección arbitraria, la elección suele ser natural. ■

4.2 Complejos

Presentamos aquí la teoría algebraica básica sobre grupos de homología. No damos ejemplos porque esta sección está pensada para ser leída simultáneamente con las secciones 9.2 y siguientes, donde construimos los grupos de homología singular de un espacio topológico, de modo que dicho desarrollo concreto sirva de motivación para cada uno de los conceptos que tratamos aquí.

Definición 4.4 Sea \mathbb{A} un anillo unitario. Un \mathbb{A} -módulo graduado es una suma directa de \mathbb{A} -módulos $C = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C_p$. Los elementos de cada \mathbb{A} -submódulo C_p se llaman elementos *homogéneos* de grado p . Un *submódulo graduado* de C es un módulo D expresable en la forma $D = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} D_p$, donde $D_p = C_p \cap D$.

Un *homomorfismo graduado*¹ $f : C \rightarrow D$ (de grado d) entre dos \mathbb{A} -módulos graduados es un homomorfismo tal que $f_p = f|_{C_p} : C_p \rightarrow D_{p+d}$ para todo entero p .

Definición 4.5 Un *complejo directo* es un par $\mathcal{C} = (\bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C_p, \partial)$ cuya primera componente es un \mathbb{A} -módulo graduado y ∂ es un homomorfismo de grado -1 tal que $\partial \circ \partial = 0$, que recibe el nombre de *operador frontera* del complejo. Equivalentemente, las restricciones de ∂ cumplen

$$\cdots \rightarrow C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1} \xrightarrow{\partial_{p-1}} C_{p-2} \rightarrow \cdots$$

de manera que $\partial_p \circ \partial_{p-1} = 0$.

Un *homomorfismo de complejos directos* $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ es un homomorfismo² de grado 0 tal que $\phi \circ \partial' = \partial \circ \phi$ o, equivalentemente, tal que los diagramas

¹Observemos que los \mathbb{A} -módulos graduados forman una categoría si tomamos como morfismos los homomorfismos graduados de grado 0. La aplicación $C \mapsto C_p$ es un funtor covariante de esta categoría en la categoría de los \mathbb{A} -módulos.

²Observemos que los complejos directos de \mathbb{A} -módulos forman también una categoría.

siguientes conmutan:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow \phi_{p+1} & & \downarrow \phi_p & & \downarrow \phi_{p-1} & & \\
 \cdots & \longrightarrow & C'_{p+1} & \xrightarrow{\partial'_{p+1}} & C'_p & \xrightarrow{\partial'_p} & C'_{p-1} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Diremos que un complejo $\mathcal{D} = \bigoplus_p D_p$ es un *subcomplejo* de otro complejo $\mathcal{C} = \bigoplus_p C_p$ si para cada p se cumple que D_p es un submódulo de C_p y el operador frontera de \mathcal{D} es la restricción del operador frontera de \mathcal{C} .

Si \mathcal{D} es un subcomplejo de \mathcal{C} , entonces el módulo cociente $\mathcal{C}/\mathcal{D} = \bigoplus_p C_p/D_p$ es un módulo graduado y el operador frontera de \mathcal{C} induce un operador frontera en \mathcal{C}/\mathcal{D} mediante $\partial[c] = [\partial c]$. De este modo, todo cociente de complejos adquiere estructura de complejo de forma natural.

Definición 4.6 Sea $\mathcal{C} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C_p$ un complejo de \mathbb{A} -módulos. Los elementos de C_p se llaman *cadena* de dimensión p . Los elementos del núcleo $Z_p = N(\partial_p)$ se llaman *ciclos* de dimensión p . Los elementos de $F_p = \text{Im } \partial_{p+1}$ se llaman *fronteras* de dimensión p . La condición $\partial_{p+1} \circ \partial_p = 0$ implica que $F_p \subset Z_p$.

El módulo $H_p(\mathcal{C}) = Z_p/F_p$ se llama *grupo de homología* de dimensión p de \mathcal{C} . Dos ciclos son *homólogos* si pertenecen a la misma clase de homología.

Podemos definir $H(\mathcal{C}) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H_p(\mathcal{C})$, y así reunimos todos los grupos de homología de \mathcal{C} en un único \mathbb{A} -módulo graduado.

Si $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ es un homomorfismo de complejos, es claro que envía ciclos a ciclos y fronteras a fronteras, luego induce homomorfismos

$$\bar{\phi}_p : H_p(\mathcal{C}) \rightarrow H_p(\mathcal{C}')$$

que a su vez determinan un homomorfismo $\bar{\phi} : H(\mathcal{C}) \rightarrow H(\mathcal{C}')$ de grado 0.

Si $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ y $\psi : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$ son homomorfismos de complejos, es inmediato comprobar que $\overline{\phi \circ \psi}_p = \bar{\phi}_p \circ \bar{\psi}_p$, luego a su vez $\overline{\phi \circ \psi} = \bar{\phi} \circ \bar{\psi}$, y también es obvio que si ϕ es la identidad, entonces $\bar{\phi}$ también lo es.³

Homotopías Hay una condición suficiente que resulta muy útil a la hora de determinar si dos homomorfismos de complejos inducen el mismo homomorfismo entre los grupos de homología:

³Esto significa que H es un funtor de la categoría de los complejos de \mathbb{A} -módulos en la categoría de los \mathbb{A} -módulos graduados. Cada H_p es también un funtor en la categoría de los \mathbb{A} -módulos.

Definición 4.7 Diremos que dos homomorfismos de complejos $\phi, \psi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ son *homotópicos*, si existe un homomorfismo $P : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ de grado 1 tal que $\phi - \psi = P\partial' + \partial P$ o, equivalentemente, tal que $\phi_p - \psi_p = P_p\partial'_{p+1} + \partial_p P_{p-1}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & C_p & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & \searrow^{P_p} & \downarrow^{\phi_p - \psi_p} & \swarrow_{P_{p-1}} & & & \\
 \cdots & \longrightarrow & C'_{p+1} & \xrightarrow{\partial'_{p+1}} & C'_p & \xrightarrow{\partial'_p} & C'_{p-1} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Entonces $\phi - \psi$ envía p -ciclos a p -fronteras, por lo que se cumple $\overline{\phi}_p = \overline{\psi}_p$ para todo entero p . Diremos que P es una *homotopía* entre ϕ y ψ .

Sucesiones exactas Introducimos ahora un concepto elemental, pero que representa un papel central en el álgebra homológica:

Definición 4.8 Una cadena de homomorfismos de módulos

$$\cdots \longrightarrow P \xrightarrow{\alpha} Q \xrightarrow{\beta} R \longrightarrow \cdots$$

es *exacta* en Q si cumple $\text{Im } \alpha = \text{N}(\beta)$. La sucesión completa es *exacta* si lo es en todos sus módulos.

Notemos que una sucesión $0 \rightarrow P \xrightarrow{\alpha} Q$ es exacta en P si y sólo si α es inyectiva, mientras que una sucesión $Q \xrightarrow{\beta} R \rightarrow 0$ es exacta en R si y sólo si α es suprayectiva.

Las sucesiones exactas de la forma

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow Q \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

se llaman *sucesiones exactas cortas*. Las sucesiones exactas infinitas (por ambos lados) se llaman *sucesiones exactas largas*.

Todas las definiciones precedentes se adaptan a sucesiones de módulos graduados o de complejos sin más que exigir en tal caso que los homomorfismos sean de hecho homomorfismos de grado 0 u homomorfismos de complejos, respectivamente.

Vamos a demostrar que cada sucesión exacta corta entre complejos determina una sucesión exacta larga entre sus grupos de homología. Para ello necesitamos un resultado auxiliar:

Teorema 4.9 Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de módulos y supongamos que sus filas son exactas.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & Z'_1 & \xrightarrow{\phi'} & Z'_2 & \xrightarrow{\psi'} & Z'_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \partial_1 & & \downarrow \partial_2 & & \downarrow \partial_3 & & \\
 0 & \longrightarrow & Z_1 & \xrightarrow{\phi} & Z_2 & \xrightarrow{\psi} & Z_3 & &
 \end{array}$$

Entonces existe un homomorfismo $\delta_* : N(\partial_3) \rightarrow Z_1 / \text{Im } \partial_1$ tal que la sucesión

$$N(\partial_1) \xrightarrow{\phi''} N(\partial_2) \xrightarrow{\psi''} N(\partial_3) \xrightarrow{\delta_*} Z_1 / \text{Im } \partial_1 \xrightarrow{\bar{\phi}} Z_2 / \text{Im } \partial_2 \xrightarrow{\bar{\psi}} Z_3 / \text{Im } \partial_3$$

es exacta, donde ϕ'' y ψ'' son las restricciones de ϕ' y ψ' a $N(\partial_1)$ y $N(\partial_2)$ y $\bar{\phi}$, $\bar{\psi}$ son los homomorfismos inducidos de forma natural.

DEMOSTRACIÓN: Es fácil comprobar que las aplicaciones ϕ'' , ψ'' , $\bar{\phi}$ y $\bar{\psi}$ están bien definidas, así como la exactitud de la sucesión en $N(\partial_2)$ y $Z_2 / \text{Im } \partial_2$.

Para definir δ_* tomamos $c'_3 \in N(\partial_3)$. Entonces existe $c'_2 \in Z'_2$ tal que $c'_3 = \psi'(c'_2)$. Como $\psi(\partial_2 c'_2) = \partial_3(\psi'(c'_2)) = \partial_3 c'_3 = 0$, existe un $c_1 \in Z_1$ tal que $\phi(c_1) = \partial_2 c'_2$.

Es claro que c'_2 es único módulo $N(\psi') = \text{Im } \phi'$, luego $\partial_2 c'_2$ es único módulo $\phi[\text{Im } \partial_1]$, luego c_1 es único módulo $\text{Im } \partial_1$.

Por lo tanto podemos definir $\delta_*(c'_3) = c_1 + \text{Im } \partial_1$. Es claro que, así definido, es un homomorfismo de G -módulos. (Observar que en definitiva δ_* se calcula eligiendo una antiimagen por ψ' , su imagen por ∂_2 y una antiimagen por ψ .)

Es claro que $\text{Im } \psi'' \subset N(\delta_*)$. Si $c'_3 \in N(\delta_*)$ entonces $c_1 = \partial_1 c'_1$, para un cierto $c'_1 \in Z'_1$, luego $\partial_2 c'_2 = \phi(c_1) = \phi(\partial_1 c'_1) = \partial_2(\phi'(c'_1))$, con lo que tenemos $c'_2 - \phi'(c'_1) \in N(\partial_2)$ y así

$$c'_3 = \psi'(c'_2) = \psi'(c'_2 - \phi'(c'_1)) + \psi'(\phi'(c'_1)) = \psi'(c'_2 - \phi'(c'_1)) \in \text{Im } \psi''.$$

También es claro que $\text{Im } \delta_* \subset N(\bar{\phi})$. Si $c_1 + \text{Im } \partial_1 \in N(\bar{\phi})$ entonces tenemos que $\phi(c_1) \in \text{Im } \partial_2$, digamos $\phi(c_1) = \partial_2(c'_2)$, con $c'_2 \in Z'_2$. Sea $c'_3 = \psi'(c'_2)$. Es claro que $c'_3 \in N(\partial_3)$ y por construcción $\delta_*(c'_3) = c_1 + \text{Im } \partial_1$, luego concluimos que $c_1 + \text{Im } \partial_1 \in \text{Im } \delta_*$. ■

De aquí deducimos el resultado principal de este apartado:

Teorema 4.10 Si $0 \rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B} \xrightarrow{\psi} \mathcal{C} \rightarrow 0$ es una sucesión exacta de complejos entonces existen homomorfismos

$$\delta_{*p} : H_p(\mathcal{C}) \rightarrow H_{p-1}(\mathcal{A})$$

tales que la sucesión siguiente es exacta:

$$\dots \rightarrow H_p(\mathcal{A}) \xrightarrow{\bar{\phi}_p} H_p(\mathcal{B}) \xrightarrow{\bar{\psi}_p} H_p(\mathcal{C}) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\bar{\phi}_{p-1}} H_{p-1}(\mathcal{B}) \rightarrow \dots$$

DEMOSTRACIÓN: La hipótesis significa que las sucesiones

$$0 \rightarrow C_p(\mathcal{A}) \xrightarrow{\phi_p} C_p(\mathcal{B}) \xrightarrow{\psi_p} C_p(\mathcal{C}) \rightarrow 0,$$

son exactas para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Basta comprobar que el diagrama siguiente se encuentra en las hipótesis del teorema anterior.

$$\begin{array}{ccccccc}
 C_p(\mathcal{A})/F_p(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\phi_p} & C_p(\mathcal{B})/F_p(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\psi_p} & C_p(\mathcal{C})/F_p(\mathcal{C}) & \longrightarrow & 0 \\
 \partial_p \downarrow & & \partial_p \downarrow & & \partial_p \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & Z_{p-1}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\phi_{p-1}} & Z_{p-1}(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\psi_{p-1}} & Z_{p-1}(\mathcal{C})
 \end{array}$$

(donde Z y F representan los grupos de ciclos y fronteras de los complejos.)

Ciertamente la fila superior está bien definida, ψ_p es suprayectiva y se cumple $\text{Im } \phi_p \subset N(\psi_p)$.

Si $\psi_p(u + F_p(\mathcal{B})) = 0$ entonces $\psi_p(u) \in F_p(\mathcal{C})$, luego $\psi_p(u) = \partial_{p-1}v$, para un cierto $v \in C_{p-1}(\mathcal{C})$, que a su vez es de la forma $v = \psi_{p-1}(w)$ con $w \in C_{p-1}(\mathcal{B})$. Así pues, $\psi_p(u) = \partial_{p-1}(\psi_{p-1}(w)) = \psi_p(\partial_{p-1}w)$, con lo que $u - \partial_{p-1}w \in N(\psi_p)$. Por tanto hay un $x \in C_p(\mathcal{A})$ tal que $u - \partial_{p-1}w = \phi_p(x)$, luego $u + F_p(\mathcal{B}) = \phi_p(x + F_p(\mathcal{A}))$.

Esto prueba la exactitud de la fila superior. Es obvio que el diagrama conmuta, que ϕ_{p-1} es inyectiva y que $\text{Im } \phi_{p-1} \subset N(\psi_{p-1})$.

Supongamos por último que $x \in N(\psi_{p-1})$. Entonces $x = \phi_{p-1}(y)$ para un $y \in C_{p-1}(\mathcal{A})$ y hay que probar que $y \in Z_{p-1}(\mathcal{A})$. Ahora bien, $\phi_{p-2}(\partial_{p-1}y) = \partial_{p-1}(\phi_{p-1}(y)) = \partial_{p-1}x = 0$ (pues x es un ciclo). Como ϕ_{p-2} es inyectiva resulta que $\partial_{p-1}y = 0$, luego y es un ciclo. ■

Los homomorfismos δ_{*p} reciben el nombre de *homomorfismos de conexión* de la sucesión exacta dada. Conviene recordar cómo actúan: dado un ciclo de \mathcal{C} de dimensión $p-1$, tomamos cualquier antiimagen por ψ , calculamos la frontera de ésta, calculamos su antiimagen por ϕ y la clase del ciclo resultante es la imagen por δ_{*p} de la clase del ciclo de partida.

Teorema 4.11 *Consideremos el siguiente diagrama de complejos y homomorfismos de complejos*

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{i} & \mathcal{B} & \xrightarrow{j} & \mathcal{C} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}' & \xrightarrow{i'} & \mathcal{B}' & \xrightarrow{j'} & \mathcal{C}' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

donde las filas son exactas y cada cuadrado es conmutativo.

Entonces en el diagrama siguiente

$$\begin{array}{cccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & H_p(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\bar{i}} & H_p(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\bar{j}} & H_p(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\delta_{*p}} & H_{p-1}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow \bar{g} & & \downarrow \bar{h} & & \downarrow \bar{f} & & \\
 \cdots & \longrightarrow & H_p(\mathcal{A}') & \xrightarrow{\bar{i}'} & H_p(\mathcal{B}') & \xrightarrow{\bar{j}'} & H_p(\mathcal{C}') & \xrightarrow{\delta_{*p}} & H_{p-1}(\mathcal{A}') & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

cada cuadrado es conmutativo.

DEMOSTRACIÓN: Probaremos únicamente la conmutatividad del cuadrado de la derecha. Los otros son inmediatos. Tomemos una clase $[c] \in H_p(\mathcal{C})$. Para calcular $\delta_*([c])$ tomamos $b \in C_p(\mathcal{B})$ tal que $c = j(b)$ y $a \in Z_{p-1}(\mathcal{A})$ tal que $i(a) = \partial b$. Entonces $\delta_*([c]) = [a]$. Por consiguiente $\bar{f}(\delta_*([c])) = [f(a)]$.

Por otra parte, calculamos $\delta_*(\bar{h}([c])) = \delta_*([h(c)])$. Necesitamos $b' \in C_p(\mathcal{B}')$ tal que $j'(b') = h(c)$, pero sirve $b' = g(b)$. Ahora necesitamos un $a' \in Z_{p-1}(\mathcal{A}')$ tal que $i'(a') = \partial g(b) = g(\partial b)$, pero sirve $a' = f(a)$, luego $\delta_*(\bar{h}([c])) = [f(a)]$. ■

Nota Conviene destacar la interpretación categórica de los dos teoremas anteriores: las sucesiones exactas cortas de complejos de \mathbb{A} -módulos forman una categoría (técnicamente, sus objetos son quintuplas ordenadas formadas por tres complejos y dos homomorfismos entre ellos), tomando como morfismos las ternas (f, g, h) en las condiciones del teorema anterior. Igualmente, las sucesiones exactas largas de \mathbb{A} -módulos forman otra categoría con los morfismos definidos de forma obvia, y lo que afirman los dos teoremas anteriores es que la asignación que a cada sucesión exacta corta de complejos le asigna su sucesión exacta larga de homología es funtorial.

Más aún, tanto \bar{i}_p , como \bar{j}_p como cada homomorfismo de conexión δ_{*p} pueden verse como transformaciones naturales entre los funtores correspondientes, por ejemplo, en el caso de δ_{*p} son el que a cada sucesión exacta corta de complejos le asigna $H_p(\mathcal{C})$ y el que le asigna $H_{p-1}(\mathcal{A})$. ■

Probamos ahora un resultado elemental sobre sucesiones exactas que necesitaremos en varias ocasiones:

Teorema 4.12 (Lema de los cinco) *Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccccccccc} M_5 & \xrightarrow{f_5} & M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_1 \\ h_5 \downarrow & & h_4 \downarrow & & h_3 \downarrow & & h_2 \downarrow & & h_1 \downarrow \\ N_5 & \xrightarrow{g_5} & N_4 & \xrightarrow{g_4} & N_3 & \xrightarrow{g_3} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_1 \end{array}$$

donde las filas son exactas. Si h_1, h_2, h_4 y h_5 son isomorfismos, entonces h_3 también lo es.

DEMOSTRACIÓN: Es una comprobación rutinaria. Supongamos primero que $h_3(m_3) = 0$. Entonces $h_2(f_3(m_3)) = g_3(h_3(m_3)) = 0$, luego $f_3(m_3) = 0$, luego existe un $m_4 \in M_4$ tal que $f_4(m_4) = m_3$. Entonces $g_4(h_4(m_4)) = h_3(f_4(m_4)) = h_3(m_3) = 0$, luego existe un $n_5 \in N_5$ tal que $h_4(m_4) = g_5(n_5)$. Sea $m_5 \in M_5$ tal que $n_5 = h_5(m_5)$. Así $h_4(f_5(m_5)) = h_4(m_4)$, luego $f_5(m_5) = m_4$ y concluimos que $m_3 = f_4(f_5(m_5)) = 0$. Esto prueba que h_3 es inyectivo.

Tomemos ahora $n_3 \in N_3$. Existe $m_2 \in M_2$ tal que $h_2(m_2) = g_3(n_3)$. Entonces $h_1(f_2(m_2)) = g_2(h_2(m_2)) = g_2(g_3(n_3)) = 0$, luego $f_2(m_2) = 0$. Por consiguiente existe un $m_3 \in M_3$ tal que $f_3(m_3) = m_2$. Ahora, $g_3(n_3 - h_3(m_3)) = 0$, luego existe un $n_4 \in N_4$ tal que $g_4(n_4) = n_3 - h_3(m_3)$. Sea $m_4 \in M_4$ tal que $h_4(m_4) = n_4$. Entonces $h_3(m_3 + f_4(m_4)) = h_3(m_3) + g_4(n_4) = n_3$. Con esto tenemos que h_3 es suprayectivo. ■

4.3 Complementos

En esta sección recogemos algunos hechos adicionales sobre homología de complejos que no son necesarios para la lectura de los cuatro primeros capítulos de la tercera parte de este libro, pero que nos harán falta más adelante.

Equivalencias homotópicas Para que un homomorfismo de complejos de \mathbb{A} -módulos $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ induzca isomorfismos $\bar{f}_p : H_p(\mathcal{C}) \rightarrow H_p(\mathcal{D})$ entre los grupos de homología no es necesario que él mismo sea un isomorfismo. Una condición suficiente es que sea una equivalencia homotópica en el sentido que definimos a continuación:

Definición 4.13 Un homomorfismo de complejos $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es una *equivalencia homotópica* si existe un homomorfismo $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que los homomorfismos $f \circ g$ y $g \circ f$ son homotópicos a las respectivas identidades.

Ciertamente (por la observación tras la definición 4.7), en estas condiciones $\bar{f}_p \circ \bar{g}_p = 1$ y $\bar{g}_p \circ \bar{f}_p = 1$, luego \bar{f}_p es un isomorfismo para todo p .

Diremos que un complejo \mathcal{C} es *libre* si lo son todos sus módulos C_p de elementos homogéneos.

Ahora probaremos que si los complejos \mathcal{C} y \mathcal{D} son libres y \mathbb{A} es un dominio de ideales principales, entonces que f sea una equivalencia homotópica es también una condición necesaria para que induzca isomorfismos entre los grupos de homología. Conviene introducir algunos conceptos:

Diremos que un complejo es *acíclico* si sus módulos de homología son triviales. Diremos que \mathcal{C} es *contractible* si la identidad en \mathcal{C} es homotópica al homomorfismo nulo.

En tal caso, tenemos que $\bar{1}_p = \bar{0}_p : H_p(\mathcal{C}) \rightarrow H_p(\mathcal{C})$, de donde se sigue que $H_p(\mathcal{C}) = 0$. Así pues, todo complejo contractible es acíclico.

Vamos a probar un recíproco parcial, para lo cual probamos antes un resultado sobre módulos libres que nos va a aparecer en diversas ocasiones:

Teorema 4.14 (Propiedad proyectiva de los módulos libres) *Consideremos tres \mathbb{A} -módulos L, P, Q , donde L es libre, y dos homomorfismos α y β como indica la figura siguiente y de modo que $\text{Im } \alpha \subset \text{Im } \beta$:*

$$\begin{array}{ccc}
 & L & \\
 \gamma \swarrow & & \downarrow \alpha \\
 P & \xrightarrow{\beta} & Q
 \end{array}$$

Entonces existe un homomorfismo γ que hace el diagrama conmutativo.

DEMOSTRACIÓN: Tomamos una base X de L . Para cada $x \in X$ definimos $\gamma(x)$ como una antiimagen por β de $\alpha(x)$ y extendemos la aplicación por linealidad. Así $\beta(\gamma(x)) = \alpha(x)$ para todo $x \in X$ y, en consecuencia, para todo $x \in L$. ■

Recordemos [Al 4.41] que si \mathbb{A} es un dominio de ideales principales, entonces todo submódulo de un \mathbb{A} -módulo libre es libre. Usamos este hecho en el teorema siguiente:

Teorema 4.15 *Si \mathcal{C} es un complejo libre sobre un dominio de ideales principales, entonces \mathcal{C} es acíclico si y sólo si es contractible.*

DEMOSTRACIÓN: Si \mathcal{C} es acíclico, entonces $\partial_p : C_p \rightarrow F_{p-1}(\mathcal{C}) = Z_{p-1}(\mathcal{C})$ es un epimorfismo. Como C_{p-1} es libre, también lo es su submódulo $Z_{p-1}(\mathcal{C})$, luego por el teorema anterior existe un homomorfismo $s_{p-1} : Z_{p-1}(\mathcal{C}) \rightarrow C_p$ tal que $s_{p-1} \circ \partial_p = 1$. Es fácil ver entonces que $1 - \partial_p s_{p-1} : C_p \rightarrow Z_p(\mathcal{C})$.

Definimos $D_p = (1 - \partial_p s_{p-1})s_p : C_p \rightarrow C_{p-1}$. Se cumple que

$$D\partial + \partial D = (1 - \partial s)s\partial + \partial(1 - \partial s)s = 1 = 1 - 0,$$

luego D es una homotopía entre los homomorfismos 1 y 0 . ■

Definición 4.16 Si $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ es un homomorfismo de complejos, definimos su *cono* como el complejo $\bar{\mathcal{C}}$ dado por $\bar{C}_p = C_{p-1} \oplus C'_p$ con el operador frontera

$$\bar{\partial}_p(c, c') = (-\partial_{p-1}c, f(c) + \partial'_p c').$$

Es fácil comprobar que $\bar{\partial}'$ es ciertamente un operador frontera.

Teorema 4.17 *Si $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ es un homomorfismo de complejos, existe una sucesión exacta*

$$\cdots \rightarrow H_p(\mathcal{C}) \xrightarrow{\bar{f}} H_p(\mathcal{C}') \rightarrow H_p(\bar{\mathcal{C}}) \rightarrow H_{p-1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\bar{f}} H_{p-1}(\mathcal{C}') \rightarrow \cdots$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\alpha : \mathcal{C}' \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$ el homomorfismo definido mediante $\alpha(c') = (0, c')$. Se comprueba inmediatamente que α es un homomorfismo de complejos. Definimos el complejo $\tilde{\mathcal{C}}$ como el dado por $\tilde{C}_p = C_{p-1}$ con el operador frontera $\tilde{\partial}_p = -\partial_{p-1}$. Entonces, la aplicación $\pi : \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ dada por $\pi(c, c') = c$ es también un homomorfismo de complejos. Tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{C}' \xrightarrow{\alpha} \bar{\mathcal{C}} \xrightarrow{\pi} \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow 0.$$

Teniendo en cuenta que $H_p(\tilde{\mathcal{C}}) = H_{p-1}(\mathcal{C})$, de esta sucesión obtenemos una sucesión exacta de homología

$$\cdots \rightarrow H_p(\mathcal{C}') \rightarrow H_p(\bar{\mathcal{C}}) \rightarrow H_{p-1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\delta_*} H_{p-1}(\mathcal{C}') \rightarrow \cdots$$

Sólo hemos de comprobar que el homomorfismo de conexión es \bar{f} . En efecto, si partimos de $[z] \in H_{p-1}(\mathcal{C})$, tomamos una antiimagen (z, c') de z por π , calculamos su frontera $(0, f(z) + \partial' c')$ y tomamos una antiimagen por α , con lo que $\delta_*([z]) = [f(z) + \partial' c'] = [f(z)] = \bar{f}([z])$. ■

En particular, si \bar{f} es un isomorfismo, la sucesión exacta del teorema se reduce a $0 \rightarrow H_p(\bar{\mathcal{C}}) \rightarrow 0$, luego concluimos que el cono $\bar{\mathcal{C}}$ es acíclico. Con esto ya podemos probar:

Teorema 4.18 *Sea $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un homomorfismo entre complejos libres sobre un dominio de ideales principales. Entonces f es una equivalencia homotópica si y sólo si induce isomorfismos sobre los grupos de homología.*⁴

DEMOSTRACIÓN: Ya sabemos que una implicación es cierta en general. Si f induce isomorfismos, acabamos de probar que el cono $\bar{\mathcal{C}}$ es acíclico, luego, según hemos probado también, es contractible. Sea $\bar{D} : \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$ una homotopía entre 1 y 0, es decir, un homomorfismo de grado 1 tal que $\bar{D}\bar{\partial} + \bar{\partial}\bar{D} = 1$. Definimos los homomorfismos

$$g : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}, \quad D' : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}, \quad D : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$$

mediante $\bar{D}(0, c') = (g(c'), -D'(c'))$, $\bar{D}(c, 0) = (D(c), -)$.

Evaluando la igualdad $\bar{D}\bar{\partial} + \bar{\partial}\bar{D} = 1$ sobre $(0, c')$ obtenemos las relaciones $g\partial = \partial g$ y $gf - 1 = D'\partial + \partial D'$. Evaluando sobre $(c, 0)$ queda $fg - 1 = D\partial + \partial D$. Así pues, g es un homomorfismo de complejos y D, D' son homotopías que muestran que fg y gf son homotópicos a la identidad. ■

Aproximaciones libres El resultado del apartado anterior es un ejemplo de cómo los complejos libres son más manejables que los complejos arbitrarios. Ahora vamos a probar que todo complejo puede sustituirse por un complejo libre sin alterar su homología:

Teorema 4.19 *Si \mathbb{A} es un dominio de ideales principales y \mathcal{C} es un complejo de \mathbb{A} -módulos, existe un complejo libre $\bar{\mathcal{C}}$ y un epimorfismo $\phi : \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$ que induce isomorfismos $\bar{\phi}_p : H_p(\bar{\mathcal{C}}) \rightarrow H_p(\mathcal{C})$.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada índice p , sea $\alpha_p : L_p \rightarrow Z_p(\mathcal{C})$ un epimorfismo de un \mathbb{A} -módulo libre L_p en el módulo de los ciclos de C_p . Como \mathbb{A} es un dominio de ideales principales, la antiimagen $L'_p = \alpha_p^{-1}[F_p(\mathcal{C})]$ es también un \mathbb{A} -módulo libre. El teorema 4.14 nos da un homomorfismo β_p que hace conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} & & L'_p \\ & \swarrow \beta_p & \downarrow \alpha_p \\ C_{p+1} & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & F_p(\mathcal{C}) \end{array}$$

Definimos $\bar{C}_p = L_p \oplus L'_{p-1}$, y con estos módulos formamos el complejo libre $\bar{\mathcal{C}}$ considerando el operador frontera $\partial_p(a, b) = (b, 0)$ (que obviamente cumple $\partial_p \circ \partial_{p-1} = 0$). Es claro que $Z_p(\bar{\mathcal{C}}) = L_p$, $F_p(\bar{\mathcal{C}}) = L'_p$.

⁴En particular este teorema se aplica al caso de los homomorfismos entre complejos de cadenas singulares sobre dominios de ideales principales, pues los módulos de cadenas (absolutas o relativas) son libres.

Definimos $\phi_p : \bar{C}_p \rightarrow C_p$ mediante $\phi_p(a, b) = \alpha_p(a) + \beta_{p-1}(b)$. Se comprueba inmediatamente que los ϕ_p son homomorfismos que determinan un homomorfismo de complejos $\phi : \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$.

Veamos que ϕ_p es un epimorfismo. Para ello observamos en primer lugar que $Z_p(\mathcal{C}) \subset \text{Im } \phi_p$ (basta considerar las imágenes de las cadenas $(a, 0)$), y que

$$\partial_p[\phi_p[\bar{C}_p]] = \alpha_{p-1}[L'_{p-1}] = F_{p-1}[\mathcal{C}].$$

Por lo tanto, si $x \in C_p$, tenemos que $\partial_p x = \partial_p y$, para cierto $y \in \text{Im } \phi_p$, luego $x - y \in Z_p(\mathcal{C}) \subset \text{Im } \phi_p$, luego $x \in \text{Im } \phi_p$.

Por último, se cumple que $\bar{\phi}_p : H_p(\bar{\mathcal{C}}) \rightarrow H_p(\mathcal{C})$ es un isomorfismo. En efecto, como $\phi_p[Z_p(\bar{\mathcal{C}})] = \alpha_p[L_p] = Z_p(\mathcal{C})$ se trata de un epimorfismo, y si $\phi_p([a, 0]) = 0$, entonces $\alpha_p(a) \in F_p(\mathcal{C})$, luego $a \in L'_p = F_p(\bar{\mathcal{C}})$, luego $[a, 0] = 0$. ■

Definición 4.20 A los epimorfismos $\phi : \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$ en las condiciones del teorema anterior los llamaremos *aproximaciones libres* del complejo \mathcal{C} .

Teorema 4.21 Si \mathbb{A} es un dominio de ideales principales, $\phi : \bar{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$ es una aproximación libre de un complejo \mathcal{C} y $\phi' : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ es un homomorfismo con \mathcal{C}' libre, existe otro homomorfismo $\psi : \mathcal{C}' \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$ tal que $\psi \circ \phi = \phi'$, y dos cualesquiera son homotópicos.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \tilde{\mathcal{C}} \xrightarrow{i} \bar{\mathcal{C}} \xrightarrow{\phi} \mathcal{C} \rightarrow 0,$$

donde $\tilde{\mathcal{C}}$ es el núcleo de ϕ . La sucesión exacta larga de homología prueba que $\tilde{\mathcal{C}}$ es acíclico, luego por el teorema 4.15 es contractible. Sea $D : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ una homotopía entre la identidad y el homomorfismo nulo, de modo que

$$1_p = D_p \tilde{\partial}_{p+1} + \tilde{\partial}_p D_{p-1}.$$

Como C'_p es libre, por la propiedad proyectiva existe un homomorfismo α_p que hace conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} & C'_p & \\ \alpha_p \swarrow & \downarrow \phi'_p & \\ \bar{C}_p & \xrightarrow{\phi_p} & C_p \end{array}$$

Sea ahora $r_p = \alpha_p \circ \bar{\partial}_p - \partial'_p \circ \alpha_{p-1}$

$$\begin{array}{ccc} C'_p & \xrightarrow{\alpha_p} & \bar{C}_p \\ \partial'_p \downarrow & \searrow r_p & \downarrow \bar{\partial}_p \\ C'_{p-1} & \xrightarrow{\alpha_{p-1}} & \bar{C}_{p-1} \end{array}$$

que cumple

$$r_p \circ \phi_{p-1} = \alpha_p \circ \phi_p \circ \partial_{p-1} - \partial'_p \circ \phi'_{p-1} = \phi'_p \circ \partial_{p-1} - \partial'_p \circ \phi'_{p-1} = 0.$$

Por lo tanto, en realidad $r_p : C'_p \rightarrow \tilde{C}_p$, y podemos definir $\psi_p = \alpha_p - r_p \circ D_{p-1}$.

$$\begin{array}{ccc} C'_p & \xrightarrow{\alpha_p} & \bar{C}_p \\ & \searrow \psi_p & \uparrow D_{p-1} \\ & & \tilde{C}_{p-1} \\ & \swarrow r_p & \end{array}$$

Veamos que los homomorfismos ψ_p determinan un homomorfismo de complejos. Para ello observamos en primer lugar que

$$r_p \circ \bar{\partial}_{p-1} + \partial'_p \circ r_{p-1} = -\partial'_p \circ \alpha_{p-1} \circ \bar{\partial}_{p-1} + \partial'_p \circ \alpha_{p-1} \circ \bar{\partial}_{p-1} = 0.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \psi_p \circ \bar{\partial}_p &= \alpha_p \circ \bar{\partial}_p - r_p \circ D_{p-1} \circ \tilde{\partial}_p = \alpha_p \circ \bar{\partial}_p - r_p(1_{p-1} - \tilde{\partial}_{p-1} \circ D_{p-2}) \\ &= \partial'_p \circ \alpha_{p-1} + r_p \circ \tilde{\partial}_{p-1} \circ D_{p-2} = \partial'_p \circ \alpha_{p-1} - \partial'_p \circ r_{p-1} \circ D_{p-2} = \partial'_p \circ \psi_{p-1}. \end{aligned}$$

Además

$$\psi_p \circ \phi_p = \alpha_p \circ \phi_p - r_p \circ D_{p-1} \circ \phi_p = \phi'_p,$$

pues la imagen de D_{p-1} es el núcleo de ϕ_p .

Con esto tenemos probado que ϕ cumple lo requerido. Si $\psi' : \mathcal{C}' \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$ es otro homomorfismo de complejos tal que $\psi' \circ \phi = \phi' = \psi \circ \phi$, entonces $(\psi' - \psi) \circ \phi = 0$, luego $\psi' - \psi : \mathcal{C}' \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$, y podemos definir $\bar{D} = (\psi' - \psi) \circ D : \mathcal{C}' \rightarrow \bar{\mathcal{C}}$, que es un homomorfismo de grado 1 y cumple que

$$\begin{aligned} \bar{D}_p \bar{\partial}_{p+1} + \partial'_p \bar{D}_{p-1} &= (\psi_p - \psi'_p) \circ D_p \circ \tilde{\partial}_{p+1} + \partial'_p(\psi_{p-1} - \psi'_{p-1}) \circ D_{p-1} \\ &= (\psi_p - \psi'_p) \circ (1_p - \tilde{\partial}_p \circ D_{p-1}) + \partial'_p(\psi_{p-1} - \psi'_{p-1}) \circ D_{p-1} = \psi_p - \psi'_p, \end{aligned}$$

luego \bar{D} es una homotopía entre ψ y ψ' . \blacksquare

De aquí se sigue en particular que dos aproximaciones libres de un mismo complejo son homotópicamente equivalentes.

Complejos inversos Más adelante necesitaremos tratar con complejos inversos en el sentido siguiente:

Definición 4.22 Un *complejo inverso* es un par $\mathcal{C} = (\bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C^p, d)$, donde la primera componente es un \mathbb{A} -módulo graduado y d es un homomorfismo de grado 1 tal que $d \circ d = 0$, que recibe el nombre de *operador cofrontera* u *operador diferencial* del complejo. Equivalentemente, las restricciones de d cumplen

$$\dots \rightarrow C^p \xrightarrow{d_p} C^{p+1} \xrightarrow{d_{p+1}} C^{p+2} \rightarrow \dots$$

de manera que $d_p \circ d_{p+1} = 0$.

Los elementos del módulo C^p se llaman *cocadenas* de dimensión p . El módulo Z^p de los *cociclos* de \mathcal{C} se define como el núcleo de d_p , mientras que el módulo de las *cofronteras* es la imagen F^p de d_{p-1} . De este modo, tenemos que $F^p \subset Z^p$ y podemos definir el *grupo de cohomología* de dimensión p de \mathcal{C} como el módulo cociente $H^p(\mathcal{C}) = Z^p/F^p$.

Según esto, la única diferencia entre un complejo y un complejo inverso es que en los primeros el operador frontera tiene grado -1 , mientras que en los segundos tiene grado 1 . Es claro entonces que definiendo $C_p = C^{-p}$ y $\partial_p = d^{-p}$ obtenemos un complejo directo a partir de un complejo inverso, y similarmente al revés. Esto hace que todos los conceptos que hemos definido y todos los teoremas que hemos demostrado para complejos directos son válidos para complejos inversos sin más que reajustar los subíndices (que, además, en el caso de los complejos inversos es costumbre escribir como superíndices).

Por ejemplo, un *homomorfismo* $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ entre complejos inversos es un homomorfismo de grado 0 que conmuta con el operador cofrontera, es decir, tal que $\phi^p \circ d^p = d^p \circ \phi^{p+1}$. Claramente ϕ induce homomorfismos $\bar{\phi}^p : H^p \rightarrow H'^p$ entre los grupos de cohomología. La definición de *homotopía* entre homomorfismos se adapta de forma obvia (y ahora pedimos que sea un homomorfismo de grado -1) y sigue siendo cierto que homomorfismos homotópicos inducen los mismos homomorfismos entre los grupos de cohomología.

4.4 Límites inductivos

Definición 4.23 Un *conjunto dirigido* es un conjunto parcialmente ordenado I tal que si $i_1, i_2 \in I$ existe un $i \in I$ de modo que $i_1 \leq i, i_2 \leq i$. Un *sistema inductivo* (o *directo*) en una categoría es una familia de objetos $\{M_i\}_{i \in I}$, donde I es un conjunto dirigido, junto con una familia de morfismos $\iota_{ij} : M_i \rightarrow M_j$, definidos cuando $i \leq j$, tales que ι_{ii} es la identidad y si $i \leq j \leq k$ entonces $\iota_{ij} \circ \iota_{jk} = \iota_{ik}$.

Un *límite inductivo* (o *directo*) de un sistema inductivo es un objeto M junto con una familia de morfismos $\iota_i : M_i \rightarrow M$ para cada $i \in I$ tales que si $i \leq j$ entonces $\iota_{ij} \circ \iota_j = \iota_i$ y con la propiedad adicional de que si otro objeto N y otros morfismos $\phi_i : M_i \rightarrow N$ cumplen también $\iota_{ij} \circ \phi_j = \phi_i$, entonces existe un único morfismo $\phi : M \rightarrow N$ tal que $\iota_i \circ \phi = \phi_i$ para todo $i \in I$.

De la definición se sigue inmediatamente que si un sistema inductivo tiene un límite inductivo, entonces éste es único salvo equivalencia. Lo representaremos por

$$M = \varinjlim M_i.$$

Similarmente, el morfismo ϕ de la definición lo representaremos por $\varinjlim \phi_i$.

Teorema 4.24 *Todo sistema inductivo de módulos tiene límite inductivo.*

DEMOSTRACIÓN: Dado un sistema inductivo $\{M_i\}_{i \in I}$, sea \tilde{M} la suma directa de los módulos M_i . Llamamos $\tilde{\iota}_i : M_i \rightarrow \tilde{M}$ al monomorfismo canónico (es decir, el que lleva un $x \in M_i$ al elemento de \tilde{M} cuya componente i -ésima es x y las restantes son nulas). Definimos M como el cociente de \tilde{M} respecto al submódulo generado por los elementos

$$\tilde{\iota}_j(\iota_{ij}(x)) - \tilde{\iota}_i(x), \quad i \leq j, \quad x \in M_i. \quad (4.1)$$

Sea $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ la proyección canónica y $\iota_i = \tilde{\iota}_i \circ \pi$. Entonces M y los homomorfismos ι_i forman un límite inductivo del sistema dado.

En efecto, tomando clases en (4.1) obtenemos que $\iota_j(\iota_{ij}(x)) = \iota_i(x)$. Por otra parte, dados un módulo N y unos homomorfismos $\phi_i : M_i \rightarrow N$ según la definición de límite inductivo, sea $\tilde{\phi} : \tilde{M} \rightarrow N$ su suma directa. Las condiciones sobre los homomorfismos ϕ_i hacen que $\tilde{\phi}$ se anule sobre todos los elementos de la forma (4.1), por lo que induce un homomorfismo $\phi : M \rightarrow N$ que cumple claramente lo requerido. La unicidad se sigue de que todo $x \in M$ es de la forma $x = \iota_{i_1}(x_{i_1}) + \cdots + \iota_{i_n}(x_{i_n})$. ■

De la construcción del teorema anterior se sigue una propiedad técnica de utilidad sobre los límites inductivos de módulos:

Teorema 4.25 *Sea $M = \varinjlim_i M_i$ un límite inductivo de módulos. Si un $x \in M_i$ cumple $\iota_i(x) = 0$, entonces existe un $j \geq i$ tal que $\iota_{ij}(x) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que podemos suponer que M es concretamente el límite inductivo construido en el teorema anterior. Entonces

$$\tilde{\iota}_i(x) = \sum_{uv} a_{uv} (\tilde{\iota}_v(\iota_{uv}(x_{uv})) - \tilde{\iota}_u(x_{uv})),$$

para ciertos pares $(u, v) \in I \times I$ con $u \leq v$, $x_{uv} \in M_u$, a_{uv} escalares. Por definición de $\tilde{\iota}_i$ esto significa que

$$x = \sum_{v=i} a_{vi} \iota_{vi}(x_{vi}) - \sum_{u=i} a_{iu} x_{iu} \quad (4.2)$$

$$0 = \sum_{v=k} a_{vk} \iota_{vk}(x_{vk}) - \sum_{u=k} a_{ku} x_{ku} \quad \text{para } k \neq i. \quad (4.3)$$

Tomemos un índice $j \in I$ mayor que i y que todos los que aparecen en las ecuaciones anteriores. Aplicamos ι_{ij} a (4.2), ι_{kj} a (4.3) y sumamos:

$$\iota_{ij}(x) = \sum_{uv} a_{uv} (\iota_{vj}(\iota_{uv}(x_{uv})) - \iota_{uj}(x_{uv})) = 0. \quad \blacksquare$$

Otro resultado útil es el siguiente:

Teorema 4.26 *Si $\{M_i\}_{i \in I}$ es un sistema inductivo de módulos, entonces*

$$\varinjlim_i M_i = \bigcup_{i \in I} \iota_i[M_i].$$

DEMOSTRACIÓN: Sea M el módulo de la derecha. Entonces el homomorfismo

$$\phi = \varinjlim \iota_i : \varinjlim M_i \longrightarrow M$$

cumple $\iota_i \circ \phi = \iota_i$, pero, viendo a ϕ como aplicación $\phi : \varinjlim M_i \longrightarrow \varinjlim M_i$, tenemos que tanto ϕ como la identidad cumplen la definición de límite inductivo. Así pues, ϕ es la identidad, lo que implica la igualdad del enunciado. ■

En general, si $\{M_i\}_{i \in I}$ y $\{N_i\}_{i \in I}$ son dos sistemas inductivos en una cierta categoría y $f_i : M_i \longrightarrow N_i$ son morfismos tales que $\iota_{ij} \circ f_j = f_i \circ \iota_{ij}$, entonces podemos aplicar la definición de límite inductivo (supuesto que ambos sistemas lo tengan) a los morfismos $g_i = f_i \circ \iota_i$, con lo que obtenemos un único morfismo $f : \varinjlim M_i \longrightarrow \varinjlim N_i$ tal que $\iota_i \circ f = f_i \circ \iota_i$. Lo representaremos por $\varinjlim f_i$.

Teorema 4.27 *Todo sistema directo de complejos tiene límite inductivo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{C_i\}_{i \in I}$ un complejo inverso de módulos con homomorfismos ι_{ij} (el teorema vale igualmente para complejos directos, pero lo vamos a usar para complejos inversos). Entonces, $\{C_i^p\}_{i \in I}$ es un complejo directo de módulos con los homomorfismos ι_{ij}^p , luego existe su límite inductivo C^p . Sea d^p el límite inductivo de las cofronteras d_i^p . Tenemos que $\iota_i^p \circ d = d_i \circ \iota_i^{p+1}$.

Se cumple que el módulo graduado de los límites inductivos es un complejo con d como operador cofrontera. En efecto, si $x \in C^p$, entonces $x = \iota_i^p(x_i)$, para un cierto $i \in I$ y un cierto $x_i \in C_i^p$, luego $d(d(x)) = d(\iota_i^{p+1}(d_i(x_i))) = \iota_i^{p+2}(d_i(d_i(x_i))) = 0$. Además es claro que los homomorfismos ι_i^p determinan homomorfismos de complejos $\iota_i : C_i \longrightarrow C$.

Si C' es otro complejo con homomorfismos $\phi_i : C_i \longrightarrow C'$ tales que $\iota_{ij} \circ \phi_j = \phi_i$, entonces lo mismo se cumple restringido a los submódulos de dimensión p , luego existe un único $\phi^p : C^p \longrightarrow C'^p$ tal que $\iota_i^p \circ \phi^p = \phi_i^p$.

Estos homomorfismos definen un homomorfismo de complejos $\phi : C \longrightarrow C'$. En efecto, si $x \in C^p$, entonces $x = \iota_i^p(x_i)$, para un cierto $i \in I$ y $x_i \in C_i^p$, luego

$$\begin{aligned} \phi^{p+1}(d(x)) &= \phi^{p+1}(d(\iota_i^p(x_i))) = \phi^{p+1}(\iota_i^{p+1}(d(x_i))) \\ &= \phi_i^{p+1}(d(x_i)) = d(\phi_i^p(x_i)) = d(\phi^p(\iota_i^p(x_i))) = d(\phi^p(x)). \end{aligned}$$

Es fácil ver que ϕ es único. ■

Teorema 4.28 *El funtor de homología (o cohomología) conmuta con los límites inductivos de complejos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $C = \varinjlim C_i$ un límite inductivo de complejos inversos.

Es claro que los homomorfismos inducidos $\bar{\iota}_{ij}^p : H^p(C_i) \longrightarrow H^p(C_j)$ determinan un sistema inductivo de módulos (para un p fijo). Lo que hemos de probar es que el módulo $H^p(C)$ con los homomorfismos $\bar{\iota}_i : H^p(C_i) \longrightarrow H^p(C)$ es el límite

inductivo de este sistema. Obviamente los homomorfismos conmutan según la definición.

Veamos ahora que $H^p(C)$ cumple los teoremas 4.25 y 4.26, es decir, en primer lugar probamos que si $\alpha_i \in H^p(C_i)$ cumple $\bar{\iota}_i(\alpha_i) = 0$, entonces existe un $j \geq i$ tal que $\bar{\iota}_{ij}(\alpha_i) = 0$.

En efecto, sea $\alpha_i = [z_i]$. Tenemos que $\iota_i(z_i) = d(c)$, para cierto $c \in C^{p-1}$. Por el teorema 4.26, $c = \iota_j(c_k)$, para cierto $k \in I$ (podemos tomar $k \geq i$) y cierto $c_k \in C_k^{p-1}$. Entonces $\iota_k(\iota_{ik}(z_i) - d(c_k)) = 0$, luego por 4.25 existe un índice $j \geq k$ tal que $\iota_{kj}(\iota_{ik}(z_i) - d(c_k)) = 0$, es decir, $\iota_{ij}(z_i) = d(\iota_{kj}(c_k))$. Por consiguiente $\bar{\iota}_{ij}(\alpha_i) = 0$.

Ahora veamos que todo $\alpha \in H^p(C)$ es de la forma $\bar{\iota}_i(\alpha_i)$, para un $i \in I$ y un $\alpha_i \in H^p(C_i)$.

En efecto, si $\alpha = [z]$, con $z \in Z^p(C)$, existe un $j \in I$ y un $z_j \in C_j^p$ tal que $z = \iota_j(z_j)$. Entonces $\iota_j(d(z_j)) = d(\iota_j(z_j)) = d(z) = 0$. Por el teorema 4.25, existe un $i \geq j$ tal que $z_i = \iota_{ji}(z_j)$ cumple $d(z_i) = \iota_{ji}(d(z_j)) = 0$, luego z_i es un cociclo y $z = \iota_i(z_i)$. Por consiguiente $\alpha = \bar{\iota}_i([z_i])$.

Supongamos que tenemos homomorfismos $\phi_i : H^p(C_i) \rightarrow N$, para un cierto módulo N , tales que $\bar{\iota}_{ij} \circ \phi_j = \phi_i$. Entonces definimos $\phi : H^p(C) \rightarrow N$ mediante $\phi(\alpha) = \phi_i(\alpha_i)$, donde $\alpha_i \in H^p(C_i)$ cumple $\alpha = \iota_i(\alpha_i)$.

La definición es correcta, pues si $\bar{\iota}_j(\alpha_i) = \bar{\iota}_j(\alpha'_j)$, podemos tomar un índice $k \in I$ tal que $k \geq i, j$, y entonces $\phi_i(\alpha_i) = \phi_k(\iota_{ik}(\alpha_i))$, $\phi_j(\alpha'_j) = \phi_k(\iota_{jk}(\alpha'_j))$. Por consiguiente podemos suponer que $i = j$, es decir, tenemos que $\bar{\iota}_i(\alpha_i) = \bar{\iota}_i(\alpha'_i)$ y hemos de probar que $\phi_i(\alpha_i) = \phi_i(\alpha'_i)$. Equivalentemente, hemos de probar que si $\alpha_i \in H^p(C_i)$ cumple $\bar{\iota}_i(\alpha_i) = 0$, entonces $\phi_i(\alpha_i) = 0$. Ahora bien, sabemos que existe un $j \in I$ tal que $\bar{\iota}_{ij}(\alpha_i) = 0$, con lo que $\phi_i(\alpha_i) = \phi_j(\bar{\iota}_{ij}(\alpha_i)) = 0$.

Es claro que ϕ cumple la definición de límite inductivo y así mismo es fácil probar la unicidad. ■

Observemos que una sucesión exacta de módulos se puede identificar con un complejo acíclico, es decir, con un complejo cuyos grupos de (co)homología son triviales. Teniendo esto en cuenta es inmediato el teorema siguiente:

Teorema 4.29 *El límite inductivo de un sistema de sucesiones exactas es una sucesión exacta.*

Notemos que el teorema vale tanto para sucesiones exactas finitas como infinitas, pues toda sucesión exacta finita se puede prolongar hasta una sucesión exacta infinita. En particular tenemos que un límite inductivo de monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos es monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo, respectivamente.

También es fácil probar que la suma directa de límites inductivos es el límite inductivo de las sumas directas. Concretamente:

Teorema 4.30 Sea $\{\{M_{ij}\}_{i \in I}\}_{j \in J}$ una familia de sistemas inductivos sobre un mismo conjunto dirigido I . Entonces $\{\bigoplus_{j \in J} M_{ij}\}_{i \in I}$ es un sistema inductivo con los homomorfismos

$$\iota_{i,i'} = \bigoplus_{j \in J} \iota_{ij,i'j} : \bigoplus_{j \in J} M_{ij} \longrightarrow \bigoplus_{j \in J} M_{i'j}.$$

Además, los homomorfismos $p_j : \varinjlim_{i \in I} \bigoplus_{j \in J} M_{ij} \longrightarrow \varinjlim_{i \in I} M_j$ inducidos por las proyecciones $p_{ij} : \bigoplus_{j \in J} M_{ij} \longrightarrow M_{ij}$ determinan un isomorfismo

$$\varinjlim_{i \in I} \bigoplus_{j \in J} M_{ij} \cong \bigoplus_{j \in J} \varinjlim_{i \in I} M_{ij}.$$

Veamos un último resultado sobre límites inductivos. Si I es un conjunto dirigido y $J \subset I$, diremos que J es *cofinal* en I si para todo $i \in I$ existe un $j \in J$ tal que $j \geq i$. Si $\{M_i\}_{i \in I}$ es un sistema inductivo, entonces $\{M_i\}_{i \in J}$ (con los homomorfismos ι_{ij} , para $i, j \in J$) es también un sistema inductivo. El teorema siguiente se prueba sin dificultad:

Teorema 4.31 Si $\{M_i\}_{i \in I}$ es un sistema inductivo de módulos y $J \subset I$ es cofinal, entonces existe un isomorfismo natural

$$\varinjlim_{i \in I} M_i \cong \varinjlim_{i \in J} M_i.$$

Capítulo V

Módulos y haces de módulos

En el capítulo siguiente presentaremos una potente teoría del álgebra homológica que aquí emplearemos en la segunda parte en el estudio de la cohomología de los espacios topológicos, pero que tiene aplicaciones no sólo a la topología algebraica, sino también al álgebra conmutativa y a otras partes del álgebra.

En los textos de álgebra conmutativa es frecuente que la teoría de funtores derivados se presente particularizada a la categoría de los módulos sobre un anillo, pero para nuestros fines esto resulta excesivamente restrictivo. En el extremo opuesto, es posible presentarla en el contexto de las categorías abelianas, que resulta ser innecesariamente abstracto, al precio de complicar sustancialmente las demostraciones. Nosotros hemos optado por el término medio de trabajar en el contexto de la categoría de haces de módulos sobre un espacio topológico, que incluye como caso particular a la de módulos sobre un anillo.

Dedicamos las primeras secciones a exponer algunos conceptos y resultados sobre módulos que van más allá de los contenidos en [A1], y luego los generalizaremos al contexto de los haces de módulos.

5.1 Módulos inyectivos y proyectivos

Vamos a estudiar dos clases de módulos que representarán un papel destacado en la teoría de funtores derivados que desarrollaremos en el capítulo siguiente. Para introducirlas conviene considerar primero un concepto categórico y algunos resultados relacionados:

Funtores exactos Si A y B son dos anillos, diremos que un funtor covariante $F : \text{Mód}(A) \rightarrow \text{Mód}(B)$ de la categoría de los A -módulos en la de los B -módulos es *exacto* si cuando

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta de A -módulos, entonces

$$0 \rightarrow F(M') \xrightarrow{Ff} F(M) \xrightarrow{Fg} F(M'') \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta de B -módulos. La exactitud de un funtor contravariante se define análogamente, sin más que corregir el sentido de las flechas.

En realidad los functores exactos cumplen mucho más de lo que exige la definición:

Teorema 5.1 Sea $F : \text{Mód}(A) \rightarrow \text{Mód}(B)$ un funtor exacto covariante y sea

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

una sucesión de homomorfismos de A -módulos tal que $\text{Im } f \subset \text{N}(g)$. Entonces $\text{Im}(Ff) \subset \text{N}(Fg)$ y

$$\text{N}(Fg)/\text{Im}(Ff) \cong F(\text{N}(g)/\text{Im}(f)).$$

Lo mismo vale para functores contravariantes sin más que invertir en sentido de las flechas.

DEMOSTRACIÓN: Como toda sucesión exacta $0 \rightarrow M' \xrightarrow{\quad} M \xrightarrow{\quad} M/\text{Im } f \rightarrow 0$ puede prolongarse a otra

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M/\text{Im } f \rightarrow 0,$$

tenemos que un funtor exacto transforma monomorfismos en monomorfismos. Igualmente se prueba que transforma epimorfismos en epimorfismos.

Veamos ahora que si la sucesión del enunciado es exacta en M , lo sigue siendo al aplicarle F . Para ello consideramos el diagrama siguiente, cuyas filas y columnas son exactas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & M'/\text{N}(f) & \longrightarrow & M & \longrightarrow & \text{Im } g \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow & \nearrow f & \searrow \beta & \downarrow & \\
 & & M' & & & & M''
 \end{array}$$

Al aplicar F obtenemos un diagrama con las mismas características. El diagrama implica que la imagen de Ff y el núcleo de Fg son los mismos que los de los homomorfismos de la sucesión exacta horizontal, lo que prueba la exactitud de la sucesión del enunciado.

Antes de probar el caso general observamos que al aplicar la definición de funtor exacto a la sucesión

$$0 \rightarrow 0 \xrightarrow{1} 0 \xrightarrow{1} 0 \rightarrow 0$$

obtenemos la exactitud de

$$0 \rightarrow F0 \xrightarrow{1} F0 \xrightarrow{1} F0 \rightarrow 0$$

La exactitud en el $F0$ central implica que $F0$ es el núcleo de la identidad en $F0$, luego $F0 = 0$.

Por consiguiente, si $f \circ g = 0$, al aplicar F obtenemos que $Ff \circ Fg = 0$, luego $\text{Im}(Ff) \subset \text{N}(Fg)$. Aplicando F al diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow & \nearrow i & \\ \text{Im } f & & \end{array}$$

se conserva la suprayectividad de la flecha vertical y la inyectividad de i , lo que implica que $F_i : F(\text{Im } f) \rightarrow \text{Im}(Ff)$ es un isomorfismo. Por otra parte, al aplicar F a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{N } g \xrightarrow{j} M \xrightarrow{g} M''$$

obtenemos el isomorfismo $Fj : F(\text{N } g) \rightarrow \text{N}(Fg)$. Finalmente, al aplicar F al diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Im } f & \xrightarrow{k} & \text{N } g \\ \downarrow i & \nearrow j & \\ M & & \end{array}$$

obtenemos un diagrama conmutativo que puede descomponerse en

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F(\text{Im } f) & \xrightarrow{Fk} & F(\text{N}(g)) & \longrightarrow & F(\text{N } g / \text{Im } f) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow Fi & & \downarrow Fj & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Im}(Ff) & \longrightarrow & \text{N}(Fg) & \longrightarrow & \text{N}(Fg) / \text{Im}(Ff) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Como las filas son exactas, los isomorfismos Fj y Fi inducen el isomorfismo buscado. ■

En particular, si aplicamos un funtor exacto F a un complejo de A -módulos, los grupos de homología del complejo resultante¹ son isomorfos a las imágenes por F de los grupos de homología del complejo dado.

La exactitud de funtores la estudiaremos en la sección 5.4 en un contexto algo más general. Aquí hemos introducido la definición únicamente como preparación del ejemplo siguiente:

¹Si F es un funtor contravariante, el funtor resultante será un complejo inverso, en el sentido de la definición 4.22.

El functor Hom Sean A y \mathbb{A} dos anillos unitarios, M un A -módulo por la izquierda y N un A - \mathbb{A} -bimódulo.² Definimos $\text{Hom}_A(M, N)$ como el conjunto de todos los homomorfismos de A -módulos $f : M \rightarrow N$, que se convierte en un \mathbb{A} -módulo por la derecha con la suma y el producto dados por

$$(f + g)(m) = f(m) + g(m), \quad (f\alpha)(m) = f(m)\alpha.$$

Es claro que todo A -módulo N admite una estructura natural de A - \mathbb{Z} -bimódulo, por lo que siempre podemos tomar $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$ y no perdemos generalidad al suponer que N es un bimódulo.

Si $f : M' \rightarrow M$ es un homomorfismo de A -módulos y $g : N \rightarrow N'$ es un homomorfismo de A - \mathbb{A} -bimódulos, podemos definir

$$\text{Hom}_A(f, g) : \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(M', N')$$

mediante

$$\text{Hom}_A(f, g)(h) = f \circ h \circ g.$$

Claramente es un homomorfismo de \mathbb{A} -módulos, y es inmediato comprobar que esto convierte a Hom_A en un functor covariante

$$\text{Hom}_A : \text{Mód}(A)^{\text{op}} \times \text{Mód}(A, \mathbb{A}) \rightarrow \text{Mód}(\mathbb{A}),$$

es decir, en un functor contravariante en su primera componente y covariante en la segunda. En particular, cada A -módulo M define un functor covariante

$$\text{Hom}_A(M, -) : \text{Mód}(A, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Mód}(\mathbb{A})$$

y cada A - \mathbb{A} -bimódulo N define un functor contravariante

$$\text{Hom}_A(-, N) : \text{Mód}(A) \rightarrow \text{Mód}(\mathbb{A}).$$

Es fácil probar el teorema siguiente:

Teorema 5.2 *Sea A un anillo unitario.*

1. Si $0 \rightarrow N' \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} N''$ es una sucesión exacta de A -módulos, también es exacta la sucesión

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, N') \rightarrow \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(M, N'').$$

2. Si $M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \rightarrow 0$ es una sucesión exacta de A -módulos, también es exacta la sucesión

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M'', N) \rightarrow \text{Hom}_A(M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(M', N).$$

²Un A - \mathbb{A} -bimódulo N es un A -módulo por la izquierda con una estructura adicional de \mathbb{A} -módulo por la derecha tal que $(an)\alpha = a(n\alpha)$, para todo $n \in N$, $a \in A$ y $\alpha \in \mathbb{A}$. Representaremos por $\text{Mód}(A, \mathbb{A})$ a la categoría de los A - \mathbb{A} -bimódulos, donde los morfismos se definen de forma obvia.

Esto se expresa diciendo que los funtores $\text{Hom}_A(M, -)$ y $\text{Hom}_A(-, N)$ son *exactos por la izquierda*, pero sucede que en general no son exactos, de manera que aunque las hipótesis del teorema anterior pusiéramos sucesiones exactas cortas, no podríamos probar que al aplicar los funtores se obtienen también sucesiones exactas cortas.

Es fácil aislar la propiedad que deben cumplir los módulos M y N para que los funtores correspondientes sean exactos:

Definición 5.3 Un A -módulo M es *proyectivo* si cuando β y h son homomorfismos de módulos en las condiciones del diagrama siguiente, con β suprayectivo, existe un homomorfismo g que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} N & \xrightarrow{\beta} & N'' & \longrightarrow & 0 \\ & \nearrow g & \uparrow h & & \\ & & M & & \end{array}$$

Un A -módulo N es *inyectivo* si cuando α y g son homomorfismos de módulos en las condiciones del diagrama siguiente, con α inyectivo, existe un homomorfismo h que hace conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\alpha} & M \\ & & \downarrow g & \nearrow h & \\ & & N & & \end{array}$$

Equivalentemente, M es proyectivo si y sólo si el functor $\text{Hom}_A(M, -)$ es exacto, y N es inyectivo si y sólo si el functor $\text{Hom}_A(-, N)$ es exacto.

Estas propiedades están relacionadas con la escisión de sucesiones exactas:

Definición 5.4 Diremos que una sucesión exacta de módulos

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{g} R \longrightarrow 0$$

se *escinde* si $P' = \text{Im } f$ está complementado en Q , es decir, si existe un submódulo R' de Q tal que $Q = P' \oplus R'$. Es claro que entonces g se restringe a un isomorfismo entre R' y R , con lo que tenemos que $Q \cong P \oplus R$.

Teorema 5.5 Para una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{g} R \longrightarrow 0,$$

las condiciones siguientes son equivalentes:

1. La sucesión se escinde.
2. Existe un homomorfismo $f' : Q \longrightarrow P$ tal que $f \circ f' = 1$.
3. Existe un homomorfismo $g' : R \longrightarrow Q$ tal que $g' \circ g = 1$.

DEMOSTRACIÓN: Es claro que 1) implica 2) y 3). Supuesto 2), consideremos el submódulo $R' = \{q - f(f'(q)) \mid q \in Q\}$ y sea $P' = f[P]$. Es claro que $Q = P' + R'$ y la suma es directa, pues si $f(p) = q - f(f'(q))$, aplicando f' queda $p = f'(q) - f'(q) = 0$.

Supuesto 3), llamamos $R' = g'[R]$ y, como antes, $P' = f[P]$. De nuevo se cumple que $Q = P' \oplus R'$, pues si $q \in Q$ entonces $q - g'(g(q)) \in N(g) = P'$, y si $g'(r) = f(p)$, aplicando g queda $r = 0$. ■

Por consiguiente:

Teorema 5.6 *Una condición suficiente para que la sucesión exacta del teorema anterior se escinda es que R sea proyectivo o que P sea inyectivo.*

Conviene observar también que los funtores $\text{Hom}_A(M, -)$ y $\text{Hom}_A(-, N)$ conservan la exactitud de las sucesiones que se escinden. Dejamos la prueba al lector, pues no ofrece dificultad:

Teorema 5.7 *Si $0 \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow 0$ es una sucesión exacta de A -módulos que se escinde y N es un A - \mathbb{A} -bimódulo, entonces la sucesión*

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(R, N) \rightarrow \text{Hom}_A(Q, N) \rightarrow \text{Hom}_A(P, N) \rightarrow 0$$

es exacta y se escinde.

Análogamente, si la sucesión dada es de A - \mathbb{A} -bimódulos y M es un A -módulo, también es exacta y se escinde la sucesión

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, P) \rightarrow \text{Hom}_A(M, Q) \rightarrow \text{Hom}_A(M, R) \rightarrow 0.$$

La idea subyacente es que, como también es fácil comprobar, existen isomorfismos naturales

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A\left(\bigoplus_{i \in I} M_i, N\right) &\cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_A(M_i, N), \\ \text{Hom}_A\left(M, \prod_{i \in I} N_i\right) &\cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_A(M, N_i). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Pasamos ahora a estudiar la existencia de módulos proyectivos e inyectivos. En el caso de los módulos proyectivos, la existencia la tenemos ya probada por el teorema 4.14, que afirma que los módulos libres son proyectivos. El teorema siguiente caracteriza los módulos proyectivos y su relación con los módulos libres:

Teorema 5.8 *Sea A un anillo y M un A -módulo. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. M es proyectivo.
2. Toda sucesión exacta de módulos $0 \rightarrow C \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\alpha} M \rightarrow 0$ se escinde.
3. Existe un A -módulo M' tal que $M \oplus M'$ es libre.

DEMOSTRACIÓN:

1) \Rightarrow 2) aplicamos la proyectividad a la identidad $M \rightarrow M$. Esto nos da un homomorfismo $\gamma : M \rightarrow N$ que prueba que la sucesión se escinde, en virtud del teorema 5.5.

2) \Rightarrow 3) Podemos formar una sucesión exacta como la de 2) con N libre. Como se escinde, $N \cong M \oplus M'$.

3) \Rightarrow 1) Consideremos un epimorfismo $\alpha : N \rightarrow P$ y un homomorfismo $\beta : M \rightarrow P$. Extendemos trivialmente β a $M \oplus M'$. Consideramos una base de este módulo y a cada uno de sus elementos le asignamos una antiimagen en N de su imagen en P . Esta asignación se extiende a un homomorfismo γ , el cual se restringe a su vez a un homomorfismo sobre M que cumple lo requerido. ■

En la prueba del teorema anterior se ve que si M es un módulo proyectivo finitamente generado, entonces el módulo M' tal que $M \oplus M'$ es libre se puede tomar también finitamente generado. También es obvio que la suma directa de módulos proyectivos es proyectiva y que todo sumando directo de un módulo proyectivo es proyectivo. En particular, es evidente que todo A -módulo M es imagen de un A -módulo proyectivo, pues todo A -módulo M es imagen de un módulo libre.

Cuando el anillo es un dominio de ideales principales la situación es especialmente simple:

Teorema 5.9 *Si A es un dominio de ideales principales, los A -módulos proyectivos coinciden con los libres.*

DEMOSTRACIÓN: Si M es un A -módulo proyectivo, por el teorema anterior es un sumando directo de un A -módulo libre, pero todos los submódulos de un A -módulo libre son libres. ■

La existencia de A -módulos inyectivos cuesta más de probar, pero es fácil probarla en el caso de los \mathbb{Z} -módulos:

Definición 5.10 Diremos que un \mathbb{Z} -módulo M es *divisible* si para todo $m \in M$ y todo $a \in \mathbb{Z}$ no nulo existe un $n \in M$ tal que $m = an$.

Teorema 5.11 *Un \mathbb{Z} -módulo M es inyectivo si y sólo si es divisible.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos en primer lugar que M es inyectivo. Sea $m \in M$ y $a \in \mathbb{Z}$ no nulo. Consideremos el homomorfismo $f_0 : (a) \rightarrow M$ dado por $f_0(ba) = bm$ y extendámoslo a $f : \mathbb{Z} \rightarrow M$. Entonces

$$m = f_0(a) = f(a) = af(1).$$

Supongamos ahora que M es divisible, sea $I = (a)$ un ideal de \mathbb{Z} y sea $f_0 : (a) \rightarrow M$ un homomorfismo. Existe un $x \in M$ tal que $f_0(a) = ax$. Definimos $f : \mathbb{Z} \rightarrow M$ mediante $f(b) = bx$, de modo que $f(a) = ax = f_0(a)$, luego $f|_{(a)} = f_0$. ■

Ahora ya tenemos ejemplos de \mathbb{Z} -módulos inyectivos. Por ejemplo, \mathbb{Q} es claramente divisible, luego es inyectivo. Más en general:

Teorema 5.12 *Para todo \mathbb{Z} -módulo M existe un monomorfismo $M \rightarrow N$ con N inyectivo.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos representar $M = L/N$, donde L es un \mathbb{Z} -módulo libre. Entonces L es suma directa de copias de \mathbb{Z} , luego puede sumergirse en una suma directa de copias de \mathbb{Q} , que claramente es divisible. En definitiva, tenemos $L \subset D$, con D divisible. Entonces $M = L/N \subset D/N$, y es claro que D/N también es divisible. ■

Para anillos arbitrarios tenemos lo siguiente:

Teorema 5.13 *Si D es un \mathbb{Z} -módulo divisible y A es un anillo arbitrario, entonces $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D)$ es un A -módulo inyectivo con el producto $(af)(b) = f(ab)$.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos que, en general, un A -módulo M es inyectivo si, cuando $N \subset P$ son A -módulos, la restricción $\text{hom}_A(P, M) \rightarrow \text{hom}_A(N, M)$ es un epimorfismo. En nuestro caso, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_A(P, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D)) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(N, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, D) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, D) \end{array}$$

donde las flechas verticales son isomorfismos de \mathbb{Z} -módulos, por ejemplo, la primera es la dada por

$$\phi(f)(p) = f(p)(1)$$

y su inverso es $\psi(f)(p)(a) = f(ap)$. Como D es un \mathbb{Z} -módulo inyectivo, el homomorfismo horizontal inferior es un epimorfismo, luego el superior también. ■

Ahora podemos generalizar 5.12:

Teorema 5.14 *Si A es un anillo, para todo A -módulo M existe un monomorfismo $M \rightarrow N$ con N inyectivo.*

DEMOSTRACIÓN: Considerando a M como \mathbb{Z} -módulo, tenemos un monomorfismo $f : M \rightarrow D$, donde D es un \mathbb{Z} -módulo divisible. Consideramos el homomorfismo $\phi : M \rightarrow \text{hom}_{\mathbb{Z}}(A, D)$ dado por $\phi(m)(a) = f(am)$. Es inyectivo, pues si $\phi(m) = 0$ entonces $\phi(m)(1) = f(m) = 0$, luego $m = 0$. Es fácil ver que ϕ es un homomorfismo de A -módulos. ■

Aunque no la vamos a necesitar, es interesante observar que la inyectividad de módulos admite la siguiente caracterización más débil:

Teorema 5.15 *Un A -módulo M es inyectivo si y sólo si para todo ideal I de A se cumple que todo homomorfismo $I \rightarrow M$ se extiende a A .*

DEMOSTRACIÓN: Una implicación es evidente. Lo que hemos de probar es que si P es un A -módulo arbitrario y N es un submódulo de P , entonces todo homomorfismo $N \rightarrow M$ se extiende a P . Sea \mathcal{M} el conjunto de todos los pares (T, α) , donde T es un submódulo $N \subset T \subset P$ y $\alpha : T \rightarrow M$ es un homomorfismo que extiende al dado. Consideramos en \mathcal{M} el orden parcial dado por $(T_1, \alpha_1) \leq (T_2, \alpha_2)$ si y sólo si $T_1 \subset T_2$ y $\alpha_1 = \alpha_2|_{T_1}$. Por el lema de Zorn \mathcal{M} tiene un elemento maximal (T_0, α_0) . Basta probar que $T_0 = P$.

En caso contrario, existe $x \in P \setminus T_0$. Sea $I = \{a \in A \mid ax \in T_0\}$, que es claramente un ideal de A . Sea $f_0 : I \rightarrow M$ dada por $f_0(a) = \alpha_0(ax)$. Claramente f_0 es un homomorfismo y por hipótesis se extiende a un homomorfismo $f : A \rightarrow M$. Llamemos $T_1 = T_0 + Ax$ y definimos $\alpha_1 : T_1 \rightarrow M$ mediante $\alpha_1(t + ax) = \alpha_0(t) + af(1)$.

En primer lugar, α_1 está bien definido, pues si $t + ax = t' + a'x$, entonces $t - t' = (a' - a)x \in T_0$, luego

$$\alpha_0(t) - \alpha_0(t') = \alpha_0((a' - a)x) = f_0(a' - a) = f(a') - f(a) = a'f(1) - af(1).$$

Por lo tanto $\alpha_0(t) + af(1) = \alpha_0(t') + a'f(1)$. Es claro que α_1 es un homomorfismo y que extiende a α_0 , luego $(T_1, \alpha_1) \in \mathcal{M}$ contradice la maximalidad de (T_0, α_0) . Esto prueba que $T_0 = P$ y α_0 es la extensión buscada. ■

5.2 Productos tensoriales

El producto tensorial es una construcción algebraica que resulta útil en contextos muy diversos. En este libro nos interesará principalmente para comparar los grupos de homología de un mismo espacio respecto de anillos diferentes.

Definición 5.16 Sea A un anillo, M un A -módulo derecho y N un A -módulo izquierdo. Sea L un grupo abeliano libre con base $M \times N$. Llamaremos *producto tensorial* de M por N al grupo cociente de L sobre el subgrupo generado por los elementos de la forma

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n), & \quad m_1, m_2 \in M, n \in N, \\ (m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2), & \quad m \in M, n_1, n_2 \in N, \\ (ma, n) - (m, an), & \quad m \in M, n \in N, a \in A. \end{aligned}$$

Lo representaremos por $M \otimes_A N$. La clase de equivalencia del par (m, n) en $M \otimes_A N$ la representaremos por $m \otimes n$ (el símbolo \otimes se lee “tensor”).

Así pues, $M \otimes_A N$ es un grupo abeliano generado por los elementos $m \otimes n$, que obviamente cumplen las relaciones

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \otimes n &= m_1 \otimes n + m_2 \otimes n, & m_1, m_2 \in M, n \in N, \\ m \otimes (n_1 + n_2) &= m \otimes n_1 + m \otimes n_2, & m \in M, n_1, n_2 \in N, \\ ma \otimes n &= m \otimes an, & m \in M, n \in N, a \in A. \end{aligned}$$

Es claro que el producto tensorial está unívocamente determinado salvo isomorfismo. En particular no depende de la elección del grupo libre con el que

se construye. De todos modos, esto lo obtendremos explícitamente en breve. Observemos que un elemento genérico de $M \otimes_A N$ no es de la forma $m \otimes n$, sino una suma finita de elementos de esta forma.

Una consecuencia inmediata es que $0 \otimes n = m \otimes 0 = 0$ (por ejemplo $0 \otimes n = (0 + 0) \otimes n = 0 \otimes n + 0 \otimes n$, luego $0 \otimes n = 0$).

En las condiciones de la definición anterior, si G es un grupo abeliano, una aplicación $f : M \times N \rightarrow G$ es *balanceada* si cumple

$$\begin{aligned} f(m_1 + m_2, n) &= f(m_1, n) + f(m_2, n), & m_1, m_2 \in M, n \in N, \\ f(m, n_1 + n_2) &= f(m, n_1) + f(m, n_2), & m \in M, n_1, n_2 \in N, \\ f(ma, n) &= f(m, an). & m \in M, n \in N, a \in A. \end{aligned}$$

Obviamente, la aplicación $i : M \times N \rightarrow M \otimes_A N$ dada por $i(m, n) = m \otimes n$ es balanceada. Se llama *aplicación balanceada canónica*.

El teorema siguiente caracteriza los productos tensoriales:

Teorema 5.17 *Sea A un anillo, M un A -módulo derecho, N un A -módulo izquierdo, G un grupo abeliano y $f : M \times N \rightarrow G$ una aplicación balanceada. Entonces existe un único homomorfismo de grupos $g : M \otimes_A N \rightarrow G$ tal que $g(m \otimes n) = f(m, n)$ para todo $m \in M, n \in N$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $M \otimes_A N = L/R$ según la definición, como $M \times N$ es una base de L tenemos que f se extiende a un homomorfismo $f^* : L \rightarrow G$ y del hecho de que f es balanceada se sigue inmediatamente que R está contenido en el núcleo de f^* (sus generadores lo están). En consecuencia la aplicación $g([x]) = f^*(x)$ está bien definida y es un homomorfismo de grupos. En particular $g(m \otimes n) = f^*(m, n) = f(m, n)$.

Como los tensores $m \otimes n$ generan el producto $M \otimes_A N$, dos homomorfismos que coincidan sobre ellos son iguales, luego g es único. ■

En particular dos productos tensoriales $(M \otimes_A N)_1$ y $(M \otimes_A N)_2$ cumplen el teorema anterior, y las respectivas aplicaciones balanceadas canónicas se extienden a dos homomorfismos entre ellos mutuamente inversos, luego ambos grupos son isomorfos.

En la práctica usaremos la misma notación para las aplicaciones balanceadas y los homomorfismos que inducen. Este es un buen momento para notar que los productos tensoriales pueden ser más extraños de lo que podría pensarse:

Ejemplo Si A es un \mathbb{Z} -módulo de torsión y K es un cuerpo de característica 0, entonces $A \otimes_{\mathbb{Z}} K = 0$, pues si $a \in A$ es no nulo y tiene orden $n > 0$, entonces

$$a \otimes r = a \otimes n(r/n) = an \otimes (r/n) = 0 \otimes (r/n) = 0. \quad \blacksquare$$

Veamos ahora cómo convertir en módulos a los productos tensoriales:

Teorema 5.18 *Sean dos anillos A y B , sea M un A - B -bimódulo y N un B -módulo izquierdo. Entonces $M \otimes_B N$ se convierte en un A -módulo izquierdo mediante una operación caracterizada por la relación $a(m \otimes n) = (am) \otimes n$, para $a \in A, m \in M, n \in N$.*

DEMOSTRACIÓN: Dado $a \in A$, el teorema anterior nos permite construir un homomorfismo $f_a : M \otimes_B N \rightarrow M \otimes_B N$ determinado por $f_a(m \otimes n) = (am) \otimes n$.

Para cada $x \in M \otimes_B N$ definimos $ax = f_a(x)$. Así tenemos definida una ley externa sobre $M \otimes_B N$ que evidentemente distribuye a la suma. Esta distributividad reduce la comprobación de los axiomas restantes al caso de tensores $m \otimes n$, donde la comprobación es inmediata. Por ejemplo:

$$a \left(b \sum_{i=1}^r m_i \otimes n_i \right) = \sum_{i=1}^r a(b(m_i \otimes n_i)) = \sum_{i=1}^r (ab)m_i \otimes n_i = (ab) \sum_{i=1}^r m_i \otimes n_i.$$

Este mismo tipo de razonamiento justifica la unicidad de la operación externa. ■

Dejamos al lector el enunciado y la demostración de un teorema similar que confiera a $M \otimes_B N$ una estructura de módulo derecho. Más aún, si M es un A - B -bimódulo y N es un B - C -bimódulo entonces $M \otimes_B N$ es un A - C -bimódulo.

Observemos que todo B -módulo izquierdo es un B - \mathbb{Z} -bimódulo y todo A -módulo derecho es un \mathbb{Z} - A -bimódulo, luego no perdemos generalidad si trabajamos sólo con bimódulos, ya que particularizando a \mathbb{Z} todo vale para módulos izquierdos o derechos. La prueba del teorema siguiente es inmediata:

Teorema 5.19 Sean tres anillos A, B, C , sea M un A - B -bimódulo y N un B - C -bimódulo. Entonces la aplicación canónica $i : M \times N \rightarrow M \otimes_B N$ es bilineal, o sea, cumple $i(am, nc) = ai(m, n)c$. Además, toda aplicación bilineal y balanceada $f : M \times N \rightarrow R$ en un A - C -bimódulo R induce un único homomorfismo de bimódulos de $M \otimes_B N$ en R tal que $g(m \otimes n) = f(m, n)$.

Este teorema justifica la definición siguiente:

Definición 5.20 Sean tres anillos A, B, C , sean M, M' dos A - B -bimódulos y N, N' dos B - C -bimódulos. Sea $f : M \rightarrow M'$ un homomorfismo de A - B -bimódulos y $g : N \rightarrow N'$ un homomorfismo de B - C -bimódulos. Llamaremos $f \otimes g : M \otimes_B N \rightarrow M' \otimes_B N'$ al (único) homomorfismo de A - C -módulos determinado por $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$.

Nota Ahora es inmediato que el producto tensorial define un funtor covariante

$$\otimes : \text{Mod}(A, B) \times \text{Mod}(B, C) \rightarrow \text{Mod}(A, C),$$

donde $\text{Mod}(A, B)$ es la categoría de los A - B -bimódulos. ■

Pasamos a ocuparnos de las propiedades algebraicas de los productos tensoriales. En primer lugar la asociatividad. Para abreviar no indicaremos explícitamente los anillos sobre los que están definidos los módulos cuando se pueda deducir del contexto. También sobrentenderemos que las letras A, B, C, D denotan anillos y las letras M, N, R, S , módulos.

Teorema 5.21 Se cumple $(M \otimes_B N) \otimes_C R \cong M \otimes_B (N \otimes_C R)$ (isomorfismo de A - D -bimódulos). El isomorfismo hace corresponder los tensores $(m \otimes n) \otimes r$ y $m \otimes (n \otimes r)$.

DEMOSTRACIÓN: Para cada $r \in R$ sea $f_r : M \otimes_B N \longrightarrow M \otimes_B (N \otimes_C R)$ el homomorfismo de A -módulos determinado por $f_r(m \otimes n) = m \otimes (n \otimes r)$. La aplicación $(M \otimes_B N) \times R \longrightarrow M \otimes_B (N \otimes_C R)$ dada por $(x, r) \mapsto f_r(x)$ es balanceada, luego induce un homomorfismo de grupos

$$f : (M \otimes_B N) \otimes_C R \longrightarrow M \otimes_B (N \otimes_C R)$$

que cumple $f((m \otimes n) \otimes r) = f_r(m \otimes n) = m \otimes (n \otimes r)$.

De igual modo se construye un homomorfismo en sentido contrario que claramente es el inverso de éste, luego f es en realidad un isomorfismo de grupos, y obviamente también de A - D -bimódulos. ■

Consecuentemente podemos suprimir los paréntesis y hablar del producto tensorial $M \otimes_B N \otimes_C R$, generado por los tensores de la forma $m \otimes n \otimes r$. Más en general, el número de factores puede ser cualquiera. Los teoremas siguientes se demuestran sin dificultad de forma similar al anterior:

Teorema 5.22 *Se cumple $A \otimes_A N \cong N$ (isomorfismo de A - B -bimódulos). El isomorfismo hace corresponder los tensores $1 \otimes n$ y n . Igualmente $M \otimes_B B \cong M$.*

Teorema 5.23 *Se cumple*

$$\begin{aligned} \left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) \otimes_B N &\cong \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_B N), \\ M \otimes_B \left(\bigoplus_{i \in I} N_i \right) &\cong \bigoplus_{i \in I} (M \otimes_B N_i). \end{aligned}$$

Nota Los isomorfismos de los teoremas anteriores son naturales. Por ejemplo, 5.21 puede precisarse mostrando que existe un isomorfismo natural entre funtor $(M, N, R) \mapsto (M \otimes_B N) \otimes_C R$ y el funtor $(M, N, R) \mapsto M \otimes_B (N \otimes_C R)$ ■

La estructura de los productos tensoriales de módulos libres es muy sencilla. Notemos primeramente que un A -módulo libre es una suma directa de copias de A y, como A es un A - A -bimódulo, todo A -módulo libre tiene estructura de A - A -bimódulo.

Teorema 5.24 *Si M y N son B -módulos libres con bases $\{u_i\}$ y $\{v_j\}$ entonces el producto $M \otimes_B N$ es un B -módulo libre de base $\{u_i \otimes v_j\}$.*

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que $M = \bigoplus_i \langle u_i \rangle$ y $N = \bigoplus_j \langle v_j \rangle$, luego por el teorema anterior $M \otimes_B N \cong \bigoplus_{i,j} (\langle u_i \rangle \otimes_B \langle v_j \rangle)$.

Además $\langle u_i \rangle \otimes_B \langle v_j \rangle \cong B \otimes_B B \cong B$ y el isomorfismo hace corresponder el tensor $u_i \otimes v_j$ con 1. Así pues, $M \otimes_B N \cong \bigoplus_{i,j} B$, y los tensores $\{u_i \otimes v_j\}$ se corresponden con la base canónica del último módulo, luego son una base de $M \otimes_B N$. ■

Este teorema se generaliza obviamente al caso de cualquier número finito de factores.

Ejemplo: Los tensores del álgebra multilineal Si V es un espacio vectorial y $\mathcal{T}_s^r(V)$ es el espacio de tensores definido en [GD A.1], es inmediato comprobar que la aplicación

$$V^r \times V^{*s} \longrightarrow \mathcal{T}_s^r(V)$$

dada por $(v_1, \dots, v_r, \omega^1, \dots, \omega^s) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes \omega^1 \otimes \dots \otimes \omega^s$ (donde el término de la derecha es el elemento de $\mathcal{T}_s^r(V)$ definido en [GD]) es balanceada, por lo que define una aplicación lineal

$$V \otimes \dots \otimes V \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^* \longrightarrow \mathcal{T}_s^r(V)$$

que hace corresponder los tensores definidos aquí con los definidos en [GD]. Teniendo en cuenta el teorema anterior y [GD A.2], resulta que hace corresponder bases de ambos espacios, por lo que es un isomorfismo. ■

A menudo consideraremos productos tensoriales donde sólo uno de los factores es libre, pero en este caso tenemos un teorema similar al anterior:

Teorema 5.25 *Si M es un B -módulo y N es un B -módulo libre de base $\{v_i\}$, todo elemento de $M \otimes_B N$ se expresa de forma única como $\sum_i m_i \otimes v_i$, con $m_i \in M$. (La expresión es única salvo sumandos con $m_i = 0$).*

DEMOSTRACIÓN: De forma análoga al caso anterior vemos que

$$M \otimes_B N \cong \bigoplus_i (M \otimes_B \langle v_i \rangle),$$

con $M \otimes_B \langle v_i \rangle \cong M \otimes_B B \cong M$, luego $M \otimes_B N \cong \bigoplus_i M$, donde el isomorfismo hace corresponder $m \otimes v_i$ con m (en el i -ésimo sumando). La unicidad que hay que probar es la de la suma directa traspasada a $M \otimes_B N$ a través de este isomorfismo. ■

En particular, si aplicamos el teorema anterior con un anillo A en lugar de M , lo que tenemos es que $A \otimes_B N$ es un A -módulo libre con base $\{1 \otimes v_i\}$. De este modo el producto tensorial permite extender el anillo de coeficientes de un espacio módulo libre sin alterar el rango (el rango de $A \otimes_B N$ como A -módulo es el mismo que el de N como B -módulo).

Si aplicamos este proceso de extensión de coeficientes a \mathbb{Z} -módulos finitamente generados para convertirlos en espacios vectoriales, se conserva el rango y se elimina la parte de torsión:

Ejemplo Si M es un \mathbb{Z} -módulo finitamente generado de rango r y K es un cuerpo de característica 0, entonces $M \otimes_{\mathbb{Z}} K \cong K^r$.

En efecto, tenemos que $M \cong M_t \oplus \mathbb{Z}^r$, con lo que

$$M \otimes_{\mathbb{Z}} K \cong (M_t \otimes_{\mathbb{Z}} K) \oplus (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} K)^r \cong K^r,$$

donde hemos tenido en cuenta el ejemplo de la página 172. ■

Observemos ahora lo que puede suceder al aplicar un producto de torsión a una sucesión exacta:

Ejemplo Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

dada por $f(n) = 2n$ y $g(n) = n + 2\mathbb{Z}$.

Si multiplicamos sus aplicaciones por la identidad en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ obtenemos una sucesión

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{f \otimes 1} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{g \otimes 1} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

que no es exacta porque $f \otimes 1$ no es inyectiva. En efecto,

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \neq 0,$$

pero $f \otimes 1 = 0$, ya que $f(n \otimes [m]) = 2n \otimes [m] = n \otimes [2m] = 0$. ■

En términos de la teoría de categorías, este ejemplo muestra que el funtor $\otimes_A M$ no es exacto en general, pero vamos a probar que es exacto por la derecha. En primer lugar:

Teorema 5.26 *El producto tensorial de dos epimorfismos es un epimorfismo.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $f : M \longrightarrow M'$ y $g : N \longrightarrow N'$ dos epimorfismos de módulos. Entonces la imagen de $f \otimes g$ contiene a todos los tensores $m' \otimes n'$, con $m' \in M$ y $n' \in N'$ y, como estos tensores generan $M' \otimes_A N'$, concluimos que $f \otimes g$ es suprayectiva. ■

Para probar que también se conserva la exactitud en el segundo módulo de una sucesión exacta corta necesitamos el resultado siguiente:

Teorema 5.27 *Si $f : M \longrightarrow M'$ y $g : N \longrightarrow N'$ son epimorfismos, entonces el núcleo de $f \otimes g$ está generado por los tensores $m \otimes n$ tales que $m \in N(f)$ o $n \in N(g)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea D el submódulo generado por los tensores indicados y sea $p : M \otimes_A N \longrightarrow (M \otimes_A N)/D$ la proyección. Podemos definir una aplicación bilineal

$$M' \times N' \longrightarrow (M \otimes_A N)/D$$

mediante $(m', n') \mapsto p(m \otimes n)$, donde $f(m) = m'$ y $g(n) = n'$. Es fácil ver que esta bien definida, y se extiende a un homomorfismo

$$\psi : M' \otimes_A N' \longrightarrow (M \otimes_A N)/D.$$

Claramente, $p = (f \otimes g) \circ \psi$, de donde se sigue inmediatamente que el núcleo de $f \otimes g$ está contenido en D . La otra inclusión es obvia. ■

Con esto podemos probar:

Teorema 5.28 Si $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ es una sucesión exacta de A -módulos derechos y N es un A - B -bimódulo, entonces

$$M' \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes_A N \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta de bimódulos.

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 5.26 tenemos que $g \otimes 1$ es suprayectiva. Igualmente, la imagen de $f \otimes 1$ es $(\text{Im } f) \otimes_A N$. Como $\text{Im } f$ es también el núcleo de g , el teorema anterior nos da que el núcleo de $g \otimes 1$ es precisamente este producto tensorial, luego la sucesión es exacta. ■

El producto tensorial conserva, no obstante, la exactitud en algunos casos:

Teorema 5.29 Si una sucesión exacta de A -módulos

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0,$$

se escinde y N es un A - A -bimódulo, entonces

$$0 \rightarrow M' \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes_A N \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta de bimódulos y se escinde.

DEMOSTRACIÓN: Sea $f' : M \rightarrow M'$ tal que $f \circ f' = 1$. Entonces tenemos que $(f \otimes 1) \circ (f' \otimes 1) = 1$, luego $f \otimes 1$ es inyectiva. Esto, junto con el teorema 5.28, nos da que la sucesión es exacta, y a su vez el teorema anterior implica que se escinde. ■

Módulos planos Conviene dar nombre a los módulos que conservan la exactitud de sucesiones arbitrarias:

Definición 5.30 Si A es un anillo, un A -módulo N es *plano* si cuando

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta de A -módulos, entonces

$$0 \rightarrow M' \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes_A N \rightarrow 0$$

también lo es.

Por el teorema 5.28, esto equivale a que si $f : M' \rightarrow M$ es un monomorfismo de A -módulos, entonces $f \otimes 1 : M' \otimes N \rightarrow M \otimes N$ también lo es. (Notemos que todo monomorfismo puede completarse hasta una sucesión exacta corta.)

El resultado más elemental es el siguiente:

Teorema 5.31 Si A es un anillo, todo A -módulo libre es plano.

DEMOSTRACIÓN: Si $f : M' \rightarrow M$ es un monomorfismo de A -módulos y N es un A -módulo libre, el teorema 5.25 implica que $f \otimes 1 : M' \otimes N \rightarrow M \otimes N$ también es inyectiva. ■

La comprobación de que un módulo es plano puede simplificarse bastante:

Teorema 5.32 *Un A -módulo N es plano si y sólo si para todo ideal I de A el homomorfismo $I \otimes_A N \rightarrow IN$ es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN: Si N es plano, la inclusión $I \rightarrow A$ induce el monomorfismo $I \otimes_A N \rightarrow A \otimes_A N = N$, cuya imagen es IN .

Veamos ahora que la condición es necesaria. Sea $M' \rightarrow M$ un monomorfismo de módulos. Supongamos en primer lugar que M es libre de rango n y vamos a probar que $M' \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A N$ es inyectiva por inducción sobre n . Si $n = 1$ entonces $M \cong A$ y M' se corresponde con un ideal de A . La conclusión es inmediata.

Si $n \geq 2$ descomponemos $M = M_1 \oplus M_2$, donde los dos sumandos son libres de rango $< n$. Sea $M'_1 = M' \cap M_1$, y sea M'_2 la imagen de M' en $M_2 = M/M_1$. Tenemos el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{array}{ccccccc} M'_1 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M'_2 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ M_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde las filas son exactas y las columnas inyectivas. De aquí obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} M'_1 \otimes_A N & \longrightarrow & M' \otimes_A N & \longrightarrow & M'_2 \otimes_A N & \longrightarrow & 0 \\ \beta \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \gamma & & \\ M_1 \otimes_A N & \xrightarrow{\alpha} & M \otimes_A N & \longrightarrow & M_2 \otimes_A N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

en el que las filas son también exactas. Además α es inyectivo porque M_1 es un sumando directo de M y β, γ son inyectivos por hipótesis de inducción. Esto implica la inyectividad de la flecha central.

Supongamos ahora que M es libre de rango infinito. Un elemento $x \in M' \otimes N$ se expresa como suma de tensores $m \otimes n$, con $m \in M'$. Cada m es combinación de un número finito de elementos de una base de M , luego podemos encontrar un submódulo $M_0 \subset M$ libre de rango finito tal que x está en la imagen del homomorfismo $(M' \cap M_0) \otimes_A N \rightarrow M' \otimes_A N$.

Por la parte ya probada sabemos que $(M' \cap M_0) \otimes_A N \rightarrow M_0 \otimes_A N$ es inyectiva, luego también lo es $(M' \cap M_0) \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A N$, pues M_0 es un

sumando directo de M . El diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (M' \cap M_0) \otimes_A N & \longrightarrow & M \otimes_A N \\ \downarrow & \nearrow & \\ M' \otimes_A N & & \end{array}$$

nos da que si x está en el núcleo de $M' \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A N$ entonces $x = 0$, luego este homomorfismo es inyectivo.

Sea finalmente M un A -módulo arbitrario y consideremos un epimorfismo $p : L \rightarrow M$, donde L es un A -módulo libre. Sea $L' = p^{-1}[M']$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} N(p) & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ N(p) & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

De él obtenemos a su vez el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} N(p) \otimes_A N & \longrightarrow & L' \otimes_A N & \longrightarrow & M' \otimes_A N & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ N(p) \otimes_A N & \longrightarrow & L \otimes_A N & \longrightarrow & M \otimes_A N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Las filas son también exactas y las dos primeras flechas verticales son monomorfismos (la primera es la identidad y la segunda por la parte ya probada). De aquí se sigue que la tercera también es un monomorfismo. ■

Como aplicación obtenemos el resultado siguiente:

Teorema 5.33 *Si A es un dominio de ideales principales, un A -módulo N es plano si y sólo si es libre de torsión.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior, N es plano si y sólo si para todo $a \in A$ el homomorfismo $f_a : (a) \otimes_A N \rightarrow aN$ es biyectivo. Sean $t_a : A \rightarrow (a)$ y $u_a : N \rightarrow aN$ la multiplicación por a . Entonces t_a es un isomorfismo para todo $a \neq 0$ y tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} N = A \otimes_A N & \xrightarrow{u_a} & aN \\ t_a \otimes 1 \downarrow & \nearrow f_a & \\ (a) \otimes_A N & & \end{array}$$

Vemos que f_a es un isomorfismo si y sólo si lo es u_a , y los u_a son isomorfismos si y sólo si N es libre de torsión. ■

Producto tensorial de complejos Observemos que si C y C' son dos A -módulos graduados, entonces

$$C \otimes_A C' = \bigoplus_{i,j} (C_i \otimes_A C'_j).$$

Podemos dotar a este producto tensorial de estructura de módulo graduado con el criterio de que el grado de un producto tensorial de elementos homogéneos $c \otimes c'$ es la suma de los grados de los factores. Equivalentemente, definimos

$$(C \otimes_A C')_p = \bigoplus_{i+j=p} C_i \otimes_A C'_j,$$

con lo que obtenemos la graduación

$$C \otimes_A C' = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} (C \otimes_A C')_p.$$

En lo sucesivo supondremos siempre esta graduación en los productos tensoriales de módulos graduados. Si los factores son complejos directos, podemos definir un operador frontera en el producto tensorial sin más que exigir que sea una antiderivación:

Teorema 5.34 *Si $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ son complejos de A -módulos, entonces $\mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C}'$ adquiere estructura de complejo con el operador frontera dado por*

$$\partial_p(c \otimes c') = \partial_i c \otimes c' + (-1)^i c \otimes \partial_j c', \quad c \in C_i, \quad c' \in C'_j.$$

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar, es fácil ver que ∂_p es un homomorfismo bien definido sobre cada producto $C_i \otimes_A C'_j$ con $i + j = p$, luego se extiende de forma única a un homomorfismo en cada módulo $(C \otimes_A C')_p$ y, por consiguiente a un homomorfismo graduado en $C \otimes_A C'$. Claramente tiene grado -1 . Falta probar que $\partial^2 = 0$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \partial_p(\partial_{p+1}(c \otimes c')) &= \partial_p(\partial_i c \otimes c' + (-1)^i c \otimes \partial_j c') \\ &= (-1)^{i-1} \partial_i c \otimes \partial_j c' + (-1)^i \partial_i c \otimes \partial_j c' = 0. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

En lo sucesivo consideraremos a los productos tensoriales de complejos con la estructura de complejo dada por el teorema anterior. La prueba muestra la necesidad del signo $(-1)^i$ en la definición de la frontera del producto.

Es fácil ver que dos homomorfismos de complejos $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, $g : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D}'$ inducen un homomorfismo de complejos $f \otimes g : \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D} \otimes_A \mathcal{D}'$ de forma natural, de modo que el producto tensorial de complejos es functorial.

Un caso particular de interés se da cuando \mathcal{C}' es el complejo dado por

$$C'_p = \begin{cases} M & \text{si } p = 0, \\ 0 & \text{si } p \neq 0, \end{cases}$$

donde M es un cierto A -módulo y el operador frontera es trivial, entonces el producto $\mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C}'$ se representa por

$$\mathcal{C} \otimes_A M = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} (C_p \otimes_A M),$$

y el operador frontera es simplemente $\partial \otimes 1$.

La definición de producto tensorial de complejos se adapta trivialmente al caso de complejos inversos. ■

5.3 Haces

Representaremos por \mathbb{K} el cuerpo \mathbb{R} o \mathbb{C} . Si X es un espacio topológico, para cada abierto U de X podemos considerar el conjunto $C_X(U, \mathbb{K})$ de las funciones continuas $U \rightarrow \mathbb{K}$, que tiene una estructura de \mathbb{K} -álgebra con las operaciones definidas puntualmente. Estas álgebras están relacionadas entre sí: cuando $U \subset V \subset X$ son abiertos, la restricción $\rho_U^V : C_X(V, \mathbb{K}) \rightarrow C_X(U, \mathbb{K})$ es un homomorfismo de \mathbb{K} -álgebras.

Éste es sólo uno de los muchos ejemplos en los que es posible asignar consistentemente de forma natural a cada abierto de un espacio topológico (tal vez dotado de estructuras más fuertes) un objeto algebraico (una \mathbb{K} -álgebra, un espacio vectorial, un grupo abeliano, etc.). Pensemos, por ejemplo, en álgebras de funciones C^∞ , u holomorfas, o espacios de tensores o formas diferenciales, o de grupos de cohomología de De Rham, etc.

La noción de haz axiomatiza este tipo de situaciones:

Definición 5.35 Un *prehaz* sobre un espacio topológico X (no necesariamente de Hausdorff) es un par (\mathcal{F}, ρ) , donde \mathcal{F} es una aplicación que a cada abierto U de X le asigna un grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$ y ρ es una aplicación que a cada par de abiertos $U \subset V$ de X les asigna una homomorfismo $\rho_U^V : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ (que llamaremos restricción) de modo que se cumplan las propiedades siguientes:

1. $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$,
2. ρ_U^U es la identidad en $\mathcal{F}(U)$,
3. si $U \subset V \subset W$ son abiertos de X , entonces $\rho_V^W \circ \rho_U^V = \rho_U^W$.

Si los grupos $\mathcal{F}(U)$ son anillos o módulos, etc. y las restricciones son homomorfismos de anillos, módulos, etc., entonces tenemos un *prehaz de anillos, módulos, etc.*

Normalmente, si $f \in \mathcal{F}(V)$ y $U \subset V$ escribiremos $f|_U = \rho_U^V(f)$.

Un *haz* sobre un espacio topológico X es un prehaz tal que si U es un abierto en X y $U = \bigcup_i U_i$ es un cubrimiento abierto de U , entonces

1. Si $f \in \mathcal{F}(U)$ cumple que $f|_{U_i} = 0$ para todo i , entonces $f = 0$.
2. Para cada familia de elementos $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tales que $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ para todos los índices i, j , existe un $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $f|_{U_i} = f_i$ para todo índice i .

Notemos que el elemento f cuya existencia se afirma en la propiedad 2) es único por la propiedad 1).

Ejemplos Al principio de la sección hemos definido el haz C_X de las funciones (reales o complejas) continuas sobre un espacio topológico X , que es, concretamente, un haz de \mathbb{K} -álgebras. Es obvio que cumple las condiciones de la definición. Similarmente podemos definir el haz C_X^∞ de las funciones de clase C^∞ sobre los abiertos de una variedad diferencial, o el haz \mathcal{H}_X de las funciones holomorfas definidas sobre los abiertos de una variedad analítica.

Consideremos un espacio topológico arbitrario X , un grupo abeliano arbitrario A y fijemos punto $p \in X$. Llamaremos A_X^p al haz que a cada abierto $U \subset X$ le hace corresponder el grupo

$$A_X^p(U) = \begin{cases} A & \text{si } p \in U, \\ 0 & \text{si } p \notin U, \end{cases}$$

y en el que ρ_V^U es la identidad si $p \in V$ y el homomorfismo nulo en caso contrario. Es fácil comprobar que se trata ciertamente de un haz. Los haces de esta forma se llaman *rascacielos*.

Veamos ahora un ejemplo de prehaz que no es un haz:

Sea X un espacio topológico y sea A un grupo abeliano. Definimos el *prehaz constante* A_X^- como el dado por

$$A_X^-(U) = \begin{cases} A & \text{si } U \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } U = \emptyset, \end{cases}$$

en el que ρ_V^U es la identidad en A salvo si $V = \emptyset$. Obviamente A_X^- es un prehaz de grupos, pero es claro que no es un haz si $A \neq 0$ y X contiene dos abiertos disjuntos. ■

Los haces permiten relacionar las propiedades globales y locales de los espacios sobre los que están definidos. La herramienta clave para ello es el concepto siguiente:

Definición 5.36 Si \mathcal{F} es un prehaz sobre un espacio topológico X y $P \in X$, definimos el *grupo de gérmenes* o *grupo local* de \mathcal{F} en P como el grupo \mathcal{F}_P formado por las clases de equivalencia de pares (U, f) con $P \in U$, U abierto en X , y $f \in \mathcal{F}(U)$, respecto de la relación dada por $(U, f) \sim (V, g)$ si y sólo si existe un abierto $W \subset U \cap V$ tal que $P \in W$ y $f|_W = g|_W$. La operación de grupo es la dada por

$$[(U, f)] + [(V, g)] = [(U \cap V, f|_{U \cap V} + g|_{U \cap V})].$$

Si $f \in \mathcal{F}(U)$ y $P \in U$, representaremos por $f_P = [(U, f)] \in \mathcal{F}_P$. Es claro que la aplicación $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_P$ dada por $f \mapsto f_P$ es un homomorfismo de grupos.

Si \mathcal{F} es un prehaz de anillos o módulos, etc., los grupos de gérmenes \mathcal{F}_P adquieren la misma estructura de forma natural. En lo sucesivo omitiremos este tipo de observaciones, que siempre serán triviales.

Si \mathcal{F} es un prehaz en un espacio topológico X y $U \subset X$ es un abierto, definimos la *restricción* de \mathcal{F} a U como el prehaz $\mathcal{F}|_U$ que a cada abierto $V \subset U$ le asigna el grupo $\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(V)$ y respecto al que las restricciones entre abiertos son las mismas que las de \mathcal{F} . Es obvio que si \mathcal{F} es un haz su restricción a cualquier abierto también lo es. Si $P \in U$, tenemos un isomorfismo natural $(\mathcal{F}|_U)_P \rightarrow \mathcal{F}|_P$ dado por $[(V, f)] \mapsto [(V, f)]$.

Ejemplos Si X es un espacio topológico y $p \in X$ es un punto cerrado (en particular, si X es un espacio de Hausdorff), entonces, para todo punto $q \in X$, el haz rascacielos A_X^p cumple que

$$A_{X,q}^p = \begin{cases} A & \text{si } q = p, \\ 0 & \text{si } q \neq p. \end{cases}$$

(Esta propiedad ha sugerido el nombre de “rascacielos”).

Por otra parte, el prehaz constante A_X^- cumple que $A_{X,q}^- = A$ para todo punto $q \in X$.

Los espacios de gérmenes diferenciables definidos en [GD 2.1] para una variedad diferencial V son precisamente los grupos de gérmenes asociados al haz C^∞ de funciones diferenciables en V . ■

Veamos un primer ejemplo elemental de cómo un hecho global se puede probar localmente:

Teorema 5.37 *Sea \mathcal{F} un haz sobre un espacio topológico X , sea U un abierto en X y sean $f, g \in \mathcal{F}(U)$ tales que $f_P = g_P$ para todo $P \in U$. Entonces $f = g$.*

DEMOSTRACIÓN: La hipótesis significa que todo punto $P \in U$ tiene un entorno $V_P \subset U$ donde $f|_{V_P} = g|_{V_P}$. Equivalentemente, $(f - g)|_{V_P} = 0$. La definición de haz implica que $f - g = 0$. ■

Definición 5.38 Sea X un espacio topológico y \mathcal{F} un prehaz en X . Un *subprehaz* de \mathcal{F} es un prehaz \mathcal{G} en X tal que, para todo abierto $U \subset X$, se cumple que $\mathcal{G}(U)$ es un subgrupo de $\mathcal{F}(U)$ y las restricciones de \mathcal{G} son las restricciones de las restricciones correspondientes de \mathcal{F} (o, en otras palabras, que si $V \subset U$ y $f \in \mathcal{G}(U)$, entonces $f|_V$ es el mismo tanto si lo calculamos en \mathcal{F} o en \mathcal{G}). Si \mathcal{G} es un haz diremos que es un *subhaz* de \mathcal{F} .

Observemos que si \mathcal{G} es un subprehaz de \mathcal{F} y $P \in X$, tenemos un monomorfismo natural $\mathcal{G}_P \rightarrow \mathcal{F}_P$ dado por $[(U, f)] \mapsto [(U, f)]$, el cual nos permite identificar a \mathcal{G}_P con un subgrupo de \mathcal{F}_P .

Ejemplo Si X es una variedad diferencial, es claro que el haz C_X^∞ de las funciones diferenciables en X es un subhaz del haz C_X de las funciones continuas. ■

Un subhaz está determinado por sus grupos de gérmenes:

Teorema 5.39 *Sea X un espacio topológico, sea \mathcal{F} un haz en X y sea \mathcal{G} un subhaz. Si $U \subset X$ es un abierto y $f \in \mathcal{F}(U)$, entonces $f \in \mathcal{G}(U)$ si y sólo si $f_P \in \mathcal{G}_P$ para todo $P \in U$.*

DEMOSTRACIÓN: Una implicación es obvia. Si se cumple la condición local, cada punto $P \in U$ tiene un entorno $V_P \subset U$ tal que $f|_{V_P} = g_P$, para cierto $g_P \in \mathcal{G}(V_P)$. Como \mathcal{G} es un haz, existe un $g \in \mathcal{G}(U)$ tal que $g|_{V_P} = g_P = f|_{V_P}$ para todo P y, como \mathcal{F} es un haz, esto implica que $f = g \in \mathcal{G}(U)$. ■

Definición 5.40 Si \mathcal{F} y \mathcal{G} son dos prehaces sobre un espacio topológico X , un *homomorfismo de prehaces* (o de haces, si es que \mathcal{F} y \mathcal{G} son haces) $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es una aplicación que a cada abierto U de X le asigna un homomorfismo de grupos $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ tal que si $U \subset V \subset X$, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\alpha_V} & \mathcal{G}(V) \\ \rho_U^V \downarrow & & \downarrow \rho_U^V \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\alpha_U} & \mathcal{G}(U) \end{array}$$

Es claro que α induce homomorfismos $\alpha_P : \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{G}_P$ entre los grupos de gérmenes, dados por $\alpha_P([(U, f)]) = [(U, \alpha_U(f))]$, de modo que si U es un abierto y $P \in U$, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\alpha_U} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_P & \xrightarrow{\alpha_P} & \mathcal{G}_P \end{array}$$

La composición de homomorfismos de prehaces se define de forma obvia, al igual que el homomorfismo identidad $1_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$.

Nota Ahora es inmediato que los haces sobre un espacio topológico constituyen una categoría, al igual que los prehaces. La definición siguiente de isomorfismo se corresponde con la definición general en una categoría. ■

Un homomorfismo de prehaces $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es un *isomorfismo* si existe un homomorfismo $\beta : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ tal que $\alpha \circ \beta = 1$ y $\beta \circ \alpha = 1$. Esto equivale a que todos los homomorfismos $\alpha_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ sean isomorfismos. El teorema siguiente nos da otra caracterización:

Teorema 5.41 *Un homomorfismo de haces $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ sobre un espacio topológico X es un isomorfismo si y sólo si para todo $P \in X$ los homomorfismos $\alpha_P : \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{G}_P$ son isomorfismos.*

DEMOSTRACIÓN: Una implicación es obvia. Supongamos que los homomorfismos α_P son isomorfismos. Sea U un abierto en X y sea $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $\alpha_U(s) = 0$. Entonces, para cada $P \in U$ tenemos que $\alpha_P(s_P) = \alpha_U(s)_P = 0$. Por consiguiente $s_P = 0$ para todo $P \in U$, y el teorema 5.37 nos da que $s = 0$. Esto prueba que α_U es un monomorfismo.

Tomemos ahora $t \in \mathcal{G}(U)$. Para cada $P \in U$ existe un $f \in \mathcal{F}_P$ tal que $\alpha_P(f) = t_P$. Esto significa que existe un abierto $P \in U_P \subset U$ de forma que $f = [(U_P, s_P)]$ y $t|_{U_P} = \alpha_{U_P}(s_P)$. Entonces

$$\alpha_{U_P \cap U_Q}(s_P|_{U_P \cap U_Q}) = t|_{U_P \cap U_Q} = \alpha_{U_P \cap U_Q}(s_Q|_{U_P \cap U_Q}).$$

Ya hemos probado que $\alpha_{U_P \cap U_Q}$ es inyectiva, luego s_P y s_Q coinciden en $U_P \cap U_Q$. Por la definición de haz existe un $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{U_P} = s_P$ para todo $P \in U$. Ahora $\alpha_U(s)|_{U_P} = \alpha_{U_P}(s_P) = t|_{U_P}$, con lo que $\alpha_U(s) = t$. ■

Definición 5.42 Diremos que un homomorfismo de haces $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ sobre un espacio topológico X es un *monomorfismo* (resp. un *epimorfismo*) si para todo $P \in X$ se cumple que α_P es un monomorfismo (resp. un epimorfismo).

En la prueba del teorema anterior se muestra que α es un monomorfismo en este sentido si y sólo si α_U es un monomorfismo para todo abierto U de X . En cambio el ejemplo siguiente muestra que, aunque α sea un epimorfismo, los homomorfismos α_U no tienen por qué ser epimorfismos:

Ejemplo Sea X una variedad diferencial y sea Λ_X^1 el haz de las formas diferenciales de grado 1 sobre X , es decir, para cada abierto $U \subset X$ definimos $\Lambda_X^1(U)$ como el espacio vectorial de las formas diferenciales definidas sobre U , y las restricciones son las naturales. La diferencial exterior induce un homomorfismo de haces

$$d : C_X^\infty \rightarrow \Lambda_X^1.$$

Concretamente, para cada abierto $U \subset X$, el homomorfismo

$$d_U : C_X^\infty(U) \rightarrow \Lambda_X^1(U)$$

es el que a cada función f le asigna su diferencial.

Si X tiene dimensión 1, entonces d es un epimorfismo. En efecto, si $P \in X$, un elemento de $\Lambda_{X,P}^1$ está determinado por una forma diferencial ω definida en un entorno V de P , que podemos tomar arbitrariamente pequeño y, en particular, contractible. Esto hace que el grupo de cohomología de De Rham $H^1(V)$ sea nulo [GD 5.44] y, como la dimensión de V es 1, toda forma ω cumple que $d\omega = 0$, (pues $\Lambda^2(V) = 0$), por lo que existe $f \in C_X^\infty(V)$ tal que $df = \omega$. El germen de f en P es, entonces una antiimagen para el germen de ω .

Sin embargo, el homomorfismo $d_X : C_X^\infty(X) \rightarrow \Lambda_X^1(X)$ será suprayectivo si y sólo si $H^1(X) = 0$, lo cual no tiene por qué ser cierto. (No lo es, por ejemplo, si X es la circunferencia S^1 .) ■

Nos encontramos así por primera vez con un fenómeno que está en el núcleo de la teoría de haces. Es el que hace que ésta no sea trivial y es la principal razón de ser del álgebra homológica sobre haces, que desarrollaremos más adelante.

Todo prehaz puede “completarse” hasta un haz:

Teorema 5.43 *Si \mathcal{F} es un prehaz sobre un espacio topológico X , existe un haz \mathcal{F}^+ sobre X y un homomorfismo $i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ de modo que si \mathcal{G} es un haz en X y $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es un homomorfismo de prehaces, entonces existe un único homomorfismo $\alpha^+ : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$ tal que $\alpha = i \circ \alpha^+$. Además, los homomorfismos $i_P : \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{F}_P^+$ son isomorfismos.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada abierto U en X definimos $\mathcal{F}^+(U)$ como el conjunto de todas las funciones $f : U \rightarrow \bigoplus_{P \in U} \mathcal{F}_P$ que cumplan lo siguiente:

Para cada $P \in U$ existe un entorno abierto V de P en U y un $s \in \mathcal{F}(V)$ de modo que para todo $Q \in V$ se cumple que $f(Q) = s_Q$.

Claramente $\mathcal{F}^+(U)$ es un grupo con la suma definida puntualmente. Como restricciones tomamos las restricciones usuales de aplicaciones. Es inmediato entonces que \mathcal{F}^+ es un haz en X . Definimos $i_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}^+(U)$ mediante $i_U(s)(P) = s_P$. Claramente es un homomorfismo de prehaces.

Si $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es un homomorfismo de prehaces, podemos definir un homomorfismo $\alpha_U^+ : \mathcal{F}^+(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ de la forma siguiente: dado $f \in \mathcal{F}^+(U)$, consideramos pares (V, s) que cumplen la definición de $\mathcal{F}^+(U)$ para f y de modo que los abiertos V cubran U . Entonces los elementos $\alpha_V(s) \in \mathcal{G}(V)$ se extienden a un elemento $\alpha_U^+(f) \in \mathcal{G}(U)$. Este elemento está caracterizado por que $\alpha_U^+(f)_P = \alpha_P(f(P))$, luego no depende del cubrimiento elegido para calcularlo. Es claro entonces que α_U^+ es un homomorfismo de haces.

Si $s \in \mathcal{F}(U)$, entonces $\alpha_U^+(i_U(s)) = \alpha_U(s)$ (pues podemos calcularlo a partir del par (U, s)), luego $\alpha = i \circ \alpha^+$.

Si $\alpha' : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ cumple también que $\alpha = i \circ \alpha'$, entonces, para cada $f \in \mathcal{F}(U)$ y cada par (V, s) según la definición de $\mathcal{F}^+(U)$, tenemos que $\alpha'_U(f)|_V = \alpha'_V(f|_V) = \alpha'_V(i_V(s)) = \alpha_V(s) = \alpha^+(i_V(s)) = \alpha^+(f|_V) = \alpha^+(f)|_V$. Así pues, $\alpha'_U(f) = \alpha_U^+(f)$.

Veamos ahora que i_P es un isomorfismo. Si $i_P([(U, s)]) = [(U, i_U(s))] = 0$, entonces existe un entorno V de P tal que $i_U(s)|_V = 0$. Así $s_P = 0$ para todo $P \in V$, luego $s|_V = 0$ y $[(U, s)] = 0$. Esto prueba que i_P es inyectiva.

Dado $[(U, f)] \in \mathcal{F}_P^+$, tomamos un entorno V de P en U según la definición de $\mathcal{F}^+(U)$, y entonces $i_P([(V, s)]) = [(U, f)]$. ■

La propiedad de \mathcal{F}^+ implica en particular que es único salvo isomorfismo. Además, si \mathcal{F} es un haz, entonces $i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ es un isomorfismo (por el teorema 5.41). También se sigue de la construcción que si \mathcal{F} es un prehaz de anillos, álgebras, etc., entonces \mathcal{F}^+ también lo es.

Ejemplo Sea X un espacio topológico y sea A un grupo abeliano. Definimos el haz constante A_X como la completación del prehaz constante A_X^- definido en la

página 182. Analizando la demostración del teorema anterior se ve fácilmente que, para cada abierto $U \subset X$ no vacío, $A_X(U)$ está formado por las funciones $U \rightarrow A$ que son localmente constantes. Al igual que el prehaz, cumple que $A_{X,P} \cong A$ para todo punto $P \in X$.

Ahora podemos dar un ejemplo muy simple que muestra que la suprayectividad de un homomorfismo de haces no implica la suprayectividad de los homomorfismos que lo definen:

Consideremos un espacio topológico conexo X y fijemos dos puntos cerrados distintos $p_1, p_2 \in X$. Sea A un grupo abeliano y $\mathcal{F} = A_X^{p_1} \oplus A_X^{p_2}$, donde la suma directa tiene el significado obvio: para cada abierto $U \subset X$ definimos $\mathcal{F}(U) = A_X^{p_1}(U) \oplus A_X^{p_2}(U)$, y las restricciones son los homomorfismos inducidos de forma natural sobre la suma por las restricciones de los dos haces rascacielos. Es fácil ver entonces que, para cada punto $q \in X$, se tiene que

$$\mathcal{F}_q = A_{X,q}^{p_1} \oplus A_{X,q}^{p_2} \cong \begin{cases} A & \text{si } q \in \{p_1, p_2\}, \\ 0 & \text{si } q \notin \{p_1, p_2\}. \end{cases}$$

Definimos un homomorfismo $f^- : A_X^- \rightarrow \mathcal{F}$ mediante

$$f_U^-(a) = \begin{cases} (a, a) & \text{si } p_1, p_2 \in U, \\ (a, 0) & \text{si } p_1 \in U, p_2 \notin U, \\ (0, a) & \text{si } p_1 \notin U, p_2 \in U, \\ (0, 0) & \text{si } p_1, p_2 \notin U. \end{cases}$$

Es inmediato que los homomorfismos f_U^- conmutan con las restricciones, por lo que definen ciertamente un homomorfismo de prehaces f^- , de modo que, para cada $q \in X$, el homomorfismo $f_q^- : A_{X,q}^- \rightarrow \mathcal{F}_q$ es la identidad en A si $q \in \{p_1, p_2\}$ y el homomorfismo nulo en caso contrario. Por el teorema anterior f^- se extiende a un homomorfismo de haces $f : A_X \rightarrow \mathcal{F}$ para el que los homomorfismos f_q son los mismos que los homomorfismos f_q^- , luego todos son epimorfismos.

Esto significa que f es un epimorfismo de haces, mientras que el homomorfismo $f_X : A_X(X) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ no puede ser suprayectivo (si A es razonable, por ejemplo si es un cuerpo), porque, al ser X conexo, $A_X(X) \cong A$, mientras que $\mathcal{F}(X) \cong A \oplus A$. ■

Sea X un espacio topológico, sea \mathcal{F} un haz en X y sea \mathcal{G} un subhaz de \mathcal{F} . Entonces podemos definir un prehaz $(\mathcal{F}/\mathcal{G})^-(U) = \mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$ tomando como restricciones los homomorfismos inducidos por las restricciones de \mathcal{F} . En general no se trata de un haz, pero definimos $\mathcal{F}/\mathcal{G} = (\mathcal{F}/\mathcal{G})^{-+}$. Es fácil ver que, para todo $P \in U$, se cumple que $(\mathcal{F}/\mathcal{G})_P \cong (\mathcal{F}/\mathcal{G})_P^- \cong \mathcal{F}_P/\mathcal{G}_P$.

La proyección canónica $\pi^- : \mathcal{F} \rightarrow (\mathcal{F}/\mathcal{G})^-$ dada por $\pi_U^-(f) = [f]$ se extiende a un epimorfismo $\pi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{G}$ tal que, si $P \in X$, entonces $\pi_P : \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{F}_P/\mathcal{G}_P$ es la proyección canónica.

El teorema 5.39 implica ahora que $\mathcal{F}/\mathcal{G} = 0$ si y sólo si $\mathcal{G} = \mathcal{F}$.

Si $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es un homomorfismo de haces sobre un espacio topológico X , podemos definir su núcleo $N(f)$ como el subhaz de \mathcal{F} dado por $(Nf)(U) = Nf_U$. Es claro que $(Nf)_P = Nf_P$.

En cambio, el subprehaz $(\text{Im } f)^-$ de \mathcal{G} dado por $(\text{Im } f)^-(U) = \text{Im } f_U$ no es en general un haz. Definimos $\text{Im } f = (\text{Im } f)^{-+}$. Observemos que la inclusión $j : (\text{Im } f)^- \rightarrow \mathcal{G}$ se extiende a un homomorfismo $j^+ : \text{Im } f \rightarrow \mathcal{G}$ de modo que $j = i \circ j^+$ (donde $i : (\text{Im } f)^- \rightarrow \text{Im } f$). En particular, si $P \in X$ tenemos que $j_P = i_P \circ j_P^+$, de donde se sigue que j_P^+ es inyectivo. Por lo tanto los homomorfismos $j_U^+ : (\text{Im } f)(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ son inyectivos. Esto nos permite considerar a $\text{Im } f$ como un subhaz de \mathcal{G} . Esta identificación nos lleva a su vez a identificar $\text{Im } f_P = (\text{Im } f)_P^-$ con $(\text{Im } f)_P$.

El teorema 5.39 nos determina entonces a $\text{Im } f$ como subhaz de \mathcal{G} : si $U \subset X$ es un abierto, el grupo $(\text{Im } f)(U)$ está formado por los $s \in \mathcal{G}(U)$ tales que $s_P \in \text{Im } f_P$ para cada $P \in U$, es decir, por los elementos de $\mathcal{G}(U)$ que localmente tienen antiimagen por f .

Ejemplos Cualquiera de los ejemplos que hemos dado de homomorfismos de haces $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ que son suprayectivos sin que todos los homomorfismos ϕ_U lo sean, sirve como ejemplo de que $(\text{Im } \phi)^-$ no es necesariamente un haz. En efecto, si $g \in \mathcal{G}(U)$ no está en la imagen de ϕ_U , entonces podemos cubrir U con abiertos V tales que $g|_V \in (\text{Im } \phi)^-(V)$, y estos elementos son consistentes entre sí, pero no se extienden a ningún elemento de $(\text{Im } \phi)^-(U)$. ■

Es evidente que un homomorfismo de haces $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es inyectivo si y sólo si Nf es el subhaz nulo de \mathcal{F} , y es suprayectivo si y sólo si $\text{Im } f = \mathcal{G}$. Definimos el *conúcleo* de f como $\text{CN}(f) = \mathcal{G}/\text{Im } f$. Así, f es inyectivo si y sólo si $Nf = 0$ y es suprayectivo si y sólo si $\text{CN}(f) = 0$.

Las propiedades elementales sobre grupos abelianos tienen su análogo para haces sobre un espacio topológico, y las demostraciones son elementales, aunque requieren cierta familiaridad con las técnicas de trabajo con haces (manejo de compleciones y localizaciones). Veamos algunos ejemplos como ilustración:

En primer lugar demostramos el teorema de isomorfía: un homomorfismo $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ puede descomponerse como

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\pi} \mathcal{F}/Nf \xrightarrow{\bar{f}} \text{Im } f \xrightarrow{i} \mathcal{G},$$

donde el primer homomorfismo es suprayectivo (la proyección canónica), el segundo es un isomorfismo y el tercero un monomorfismo (la inclusión).

En efecto, para cada abierto $U \subset X$ definimos de forma natural el isomorfismo $\bar{f}_U : \mathcal{F}(U)/Nf_U \rightarrow \text{Im } f_U$. Estos isomorfismos definen un isomorfismo $\bar{f}^- : (\mathcal{F}/Nf)^- \rightarrow (\text{Im } f)^-$. Para cada $P \in X$, se comprueba inmediatamente que $\bar{f}_P^- : (\mathcal{F}/Nf)_P^- \rightarrow \text{Im } f_P$ se corresponde con el isomorfismo natural $\mathcal{F}_P/Nf_P \rightarrow \text{Im } f_P$. La composición

$$(\mathcal{F}/Nf)^- \rightarrow (\text{Im } f)^- \rightarrow \text{Im } f$$

se extiende a un homomorfismo de haces $\bar{f} : \mathcal{F}/Nf \rightarrow \text{Im } f$ tal que, para cada $P \in X$, el homomorfismo \bar{f}_P se corresponde con el isomorfismo natural $\bar{f}_P : \mathcal{F}_P/Nf_P \rightarrow \text{Im } f_P$. Por lo tanto \bar{f} es un isomorfismo y, puesto que $\pi_P \circ \bar{f}_P \circ i_P = f_P$, se cumple que $\pi \circ \bar{f} \circ i = f$. ■

Observemos ahora que si $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$ son dos homomorfismos de haces, entonces $f \circ g = 0$ si y sólo si $\text{Im } f$ es un subhaz de Ng . En efecto, $f \circ g = 0$ equivale a que $f_P \circ g_P = 0$ para todo $P \in X$, lo que equivale a que $\text{Im } f_P \subset Ng_P$ y esto a su vez equivale a que $\text{Im } f \subset Ng$ (por 5.39).

Diremos que la sucesión anterior es *exacta* en \mathcal{G} si cumple que $\text{Im } f = N\mathcal{G}$, lo cual claramente equivale a que todas las sucesiones $\mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{G}_P \rightarrow \mathcal{H}_P$ sean exactas.

Ejemplo Ahora podemos ver ejemplos en los que los prehaces $(\mathcal{F}/\mathcal{G})^-$ no son haces. Si $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es un epimorfismo de haces, entonces

$$(\mathcal{F}/N\phi)^-(X) = \mathcal{F}(X)/N\phi_X \cong \text{Im } \phi_X,$$

mientras que $(\mathcal{F}/N\phi)(X) \cong \mathcal{G}(X)$, y estos isomorfismos forman el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{F}/N\phi)(X) & \longrightarrow & \mathcal{G}(X) \\ \uparrow & \nearrow & \\ (\mathcal{F}/N\phi)^-(X) & & \end{array}$$

Si $(\mathcal{F}/N\phi)^-$ es un haz, la flecha vertical es un isomorfismo, luego los otros dos isomorfismos tendrían la misma imagen, $\text{Im } \phi_X = \mathcal{G}(X)$. Así pues, si ϕ_X no es suprayectivo, entonces $(\mathcal{F}/N\phi)^-$ no es un haz. ■

Espacios anillados Un espacio anillado es un espacio topológico en el que hemos fijado un haz de anillos:

Definición 5.44 Un *espacio anillado* es un par (X, \mathcal{O}_X) , donde X es un espacio topológico y \mathcal{O}_X es un haz de anillos sobre X . Habitualmente escribiremos X en lugar de (X, \mathcal{O}_X) . Si los anillos de X son —de hecho— A -álgebras, para un cierto anillo A , diremos que el espacio anillado X está *definido sobre* A .

Si X es un espacio anillado, un \mathcal{O}_X -módulo es un haz \mathcal{M} en X tal que, para cada abierto U de X , el grupo $\mathcal{M}(U)$ tiene una estructura adicional de $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo compatible con las restricciones, en el sentido de que, para cada $a \in \mathcal{O}_X(U)$, cada $m \in \mathcal{M}(U)$ y cada abierto $V \subset U$, se satisface la relación $(am)|_V = (a|_V)(m|_V)$.

Es claro entonces que para cada $P \in X$ tenemos una estructura natural de $\mathcal{O}_{X,P}$ -módulo en \mathcal{M}_P .

Un *homomorfismo* de \mathcal{O}_X -módulos $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ es un homomorfismo de haces tal que para cada abierto $U \subset X$ se cumple que $f_U : \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{N}(U)$ es un homomorfismo de $\mathcal{O}_X(U)$ -módulos. Es claro que la composición de homomorfismos de \mathcal{O}_X -módulos es un \mathcal{O}_X -módulo.

Nota Si X es un espacio anillado, es claro que la clase $\text{Mód}(\mathcal{O}_X)$ de los \mathcal{O}_X -módulos forma una categoría tomando como morfismos los homomorfismos de \mathcal{O}_X -módulos que acabamos de definir.

Observemos que si A es un anillo arbitrario, podemos considerar el espacio topológico $P = \{0\}$ considerado como espacio anillado con el haz constante A_P , que obviamente consta únicamente de los anillos $A_P(\emptyset) = 0$ y $A_P(P) = A$, con las restricciones obvias. Es claro entonces que la aplicación que a cada A_P -módulo \mathcal{M} le asigna el A -módulo $\mathcal{M}(P)$ es biyectiva, como también lo es la aplicación que a cada homomorfismo $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ de A_P -módulos le asigna el homomorfismo de A -módulos $\phi_P : \mathcal{M}(P) \rightarrow \mathcal{N}(P)$, de modo que todas las nociones definidas para A_P -módulos se corresponden con sus análogas para A -módulos (cocientes, núcleos, imágenes, sumas directas, etc.).

Esto significa que podemos identificar la categoría $\text{Mod}(A_P)$ de los A_P -módulos con la categoría $\text{Mod}(A)$ de los A -módulos, de modo que todo lo que digamos para módulos sobre un espacio anillado será válido en particular para módulos sobre un anillo. ■

Aparentemente, los \mathcal{O}_X -módulos tienen una estructura algebraica más rica que los haces cualesquiera, pero esto es más aparente que real:

Teorema 5.45 *Sea X un espacio topológico, sea A un anillo y sea A_X el haz constante asociado. Entonces los haces en X definidos sobre A se corresponden con los A_X -módulos. En particular, todos los haces en X son \mathbb{Z}_X -módulos.*

DEMOSTRACIÓN: Si $U \subset X$ es un abierto no vacío, los elementos de $A_X(U)$ son las funciones $U \rightarrow A$ localmente constantes. En particular podemos considerar que $A \subset A_X(U)$ identificando los elementos de A con las funciones constantes. Esto hace que todo A_X -módulo sea en particular un haz en X definido sobre A . Recíprocamente, si \mathcal{M} es un haz en X definido sobre A y $U \subset X$ es un abierto no vacío, podemos definir como sigue un producto $A_X(U) \times \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}(U)$. Tomamos $a \in A_X(U)$ y $m \in \mathcal{M}(U)$, tomamos un cubrimiento abierto $\{U_i\}_i$ de U de modo que $a|_{U_i}$ sea constante, lo que nos permite definir $a|_{U_i}m|_{U_i} \in \mathcal{M}(U_i)$. Es claro que estos elementos se extienden a un único $am \in \mathcal{M}(U)$, de modo que $\mathcal{M}(U)$ es un $A_X(U)$ -módulo con este producto.

Puesto que un grupo abeliano es lo mismo que un \mathbb{Z} -módulo, todo haz en X está definido sobre \mathbb{Z} , luego puede verse como \mathbb{Z}_X -módulo. ■

Se define de forma natural la *restricción* de un \mathcal{O}_X -módulo a un abierto de X y la noción de *submódulo* de un \mathcal{O}_X -módulo.

Es fácil ver que la compleción de un prehaz de módulos sobre \mathcal{O}_X (esto es, de un prehaz que cumpla la definición de \mathcal{O}_X -módulo salvo por el hecho de que no es necesariamente un haz) es un \mathcal{O}_X -módulo. En particular, si \mathcal{N} es un \mathcal{O}_X -submódulo de un \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} , el cociente \mathcal{M}/\mathcal{N} tiene estructura natural de \mathcal{O}_X -módulo. Igualmente, el núcleo y la imagen de un homomorfismo de \mathcal{O}_X -módulos son también \mathcal{O}_X -módulos.

Se definen de forma natural el producto y la suma directa de una familia arbitraria de \mathcal{O}_X -módulos.

Producto tensorial de \mathcal{O}_X -módulos Si \mathcal{M} y \mathcal{N} son dos \mathcal{O}_X -módulos, los productos $\mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}(U)$, con las restricciones obvias, forman un prehaz $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N})^-$, aunque no necesariamente un haz. Definimos el producto tensorial $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$ como la completación de dicho prehaz. Para cada $P \in X$ se cumple que

$$(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N})_P \cong \mathcal{M}_P \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} \mathcal{N}_P.$$

En efecto: para cada $P \in X$ y cada abierto $P \in U \subset X$, los homomorfismos $\mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}(U) \rightarrow \mathcal{M}_P \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} \mathcal{N}_P$ dado por $m \otimes n \mapsto m_P \otimes n_P$ inducen un homomorfismo $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N})_P^- \rightarrow \mathcal{M}_P \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} \mathcal{N}_P$, cuyo inverso se define de forma similar. ■

Dos homomorfismos $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ y $g : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}'$, definen de forma natural un homomorfismo de prehaces $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N})^- \rightarrow (\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}')^-$ que, compuesto con $(\mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}')^- \rightarrow \mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}'$, se extiende a un homomorfismo de haces

$$f \otimes g : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}'.$$

Se prueba fácilmente que $(f \otimes g)_P = f_P \otimes g_P$ para cada $P \in X$.

Veamos que $(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P} \cong (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}) \oplus (\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P})$. En efecto, es fácil definir homomorfismos de prehaces

$$(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P})^- \rightarrow ((\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P})^-, \quad (\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P})^- \rightarrow ((\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P})^-,$$

que se extienden a homomorfismos de haces

$$\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P} \rightarrow (\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}, \quad \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P} \rightarrow (\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P},$$

los cuales a su vez determinan un homomorfismo

$$(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}) \oplus (\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P}) \rightarrow (\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{P},$$

que localizado a cada $P \in X$ es el isomorfismo natural

$$(\mathcal{M}_P \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} \mathcal{P}_P) \oplus (\mathcal{N}_P \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} \mathcal{P}_P) \rightarrow (\mathcal{M}_P \oplus \mathcal{N}_P) \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} \mathcal{P}_P. \quad \blacksquare$$

5.4 Funtores exactos

Generalizamos ahora al caso de los \mathcal{O}_X -módulos el concepto de functor exacto que hemos definido para funtores definidos en categorías de A -módulos.

Nota Por simplicidad a partir de aquí nos restringimos a \mathcal{O}_X -módulos formados exclusivamente por anillos conmutativos, con lo que no necesitamos distinguir entre módulos por la izquierda o por la derecha. ■

Definición 5.46 Sean X e Y dos espacios anillados. Un funtor covariante $F : \text{Mod}(X) \rightarrow \text{Mod}(Y)$ es *exacto* si para toda sucesión exacta corta de \mathcal{O}_X -módulos

$$0 \rightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{N} \xrightarrow{\beta} \mathcal{P} \rightarrow 0,$$

también es exacta la sucesión

$$0 \rightarrow F\mathcal{M} \xrightarrow{F\alpha} F\mathcal{N} \xrightarrow{F\beta} F\mathcal{P} \rightarrow 0.$$

Análogamente se define la exactitud de un funtor contravariante, sin más que invertir el sentido en la sucesión transformada. Claramente esta definición generaliza a la que hemos dado para módulos sobre un anillo y todos los resultados que vamos a probar aquí serán válidos en particular para ese caso.

La prueba del teorema 5.1 vale literalmente para demostrar el resultado análogo para \mathcal{O}_X -módulos:

Teorema 5.47 Sean X e Y dos espacios anillados y $F : \text{Mod}(X) \rightarrow \text{Mod}(Y)$ un funtor covariante exacto. Sea $\mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{N} \xrightarrow{\beta} \mathcal{P}$ una sucesión de homomorfismos de \mathcal{O}_X -módulos tal que $\text{Im } \alpha \subset \text{N } \beta$. Entonces $F\mathcal{M} \xrightarrow{F\alpha} F\mathcal{N} \xrightarrow{F\beta} F\mathcal{P}$ cumple lo mismo y además

$$\text{N}(F\beta) / \text{Im}(F\alpha) \cong F(\text{N } \beta / \text{Im } \alpha).$$

En particular, los funtores exactos conservan la exactitud de cualquier sucesión. Por lo tanto, los funtores exactos covariantes conservan la inyectividad y la suprayectividad de los homomorfismos, mientras que los contravariantes las intercambian.

La teoría de funtores derivados que pretendemos desarrollar tiene como finalidad estudiar la no exactitud de los funtores a los que les falta poco para ser exactos:

Definición 5.48 Sean X e Y dos espacios anillados. Un funtor covariante $F : \text{Mod}(X) \rightarrow \text{Mod}(Y)$ es *exacto por la izquierda* si para toda sucesión exacta corta de \mathcal{O}_X -módulos

$$0 \rightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{N} \xrightarrow{\beta} \mathcal{P} \rightarrow 0,$$

también es exacta la sucesión

$$0 \rightarrow F\mathcal{M} \xrightarrow{F\alpha} F\mathcal{N} \xrightarrow{F\beta} F\mathcal{P}.$$

El funtor es *exacto por la derecha* si proporciona sucesiones exactas

$$F\mathcal{M} \xrightarrow{F\alpha} F\mathcal{N} \xrightarrow{F\beta} F\mathcal{P} \rightarrow 0.$$

Si el funtor es contravariante, diremos que es exacto por la izquierda o por la derecha si da lugar, respectivamente, a sucesiones exactas

$$0 \rightarrow F\mathcal{P} \xrightarrow{F\beta} F\mathcal{N} \xrightarrow{F\alpha} F\mathcal{M}$$

o

$$F\mathcal{P} \xrightarrow{F\beta} F\mathcal{N} \xrightarrow{F\alpha} F\mathcal{M} \rightarrow 0.$$

Notemos que en realidad no necesitamos suponer la exactitud de la sucesión inicial en el extremo que no se va a conservar. Por ejemplo, si F es un funtor covariante exacto por la izquierda y

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{N} \xrightarrow{\beta} \mathcal{P}$$

es una sucesión exacta, aplicando la exactitud de F a la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{N} \xrightarrow{\beta} \text{Im } \beta \longrightarrow 0$$

obtenemos igualmente la exactitud que exige la definición de funtor exacto por la izquierda, y lo mismo sucede en los otros tres casos.

Ejemplo El funtor más importante en la aplicación que vamos a ver del álgebra homológica a la topología algebraica es el funtor covariante

$$\Gamma(X, -) : \text{Mod}(X) \longrightarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_X(X))$$

dado por $\Gamma(X, \mathcal{M}) = \mathcal{M}(X)$ y que a cada homomorfismo de funtores $\phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ le asigna el homomorfismo $\phi_X : \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{N}(X)$. Vamos a probar que es exacto por la izquierda. Esto significa que si

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{N} \xrightarrow{\beta} \mathcal{P}$$

es una sucesión exacta de \mathcal{O}_X -módulos, entonces

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}(X) \xrightarrow{\alpha_X} \mathcal{N}(X) \xrightarrow{\beta_X} \mathcal{P}(X)$$

es una sucesión exacta de $\mathcal{O}_X(X)$ -módulos.

En efecto, la parte menos obvia es que si $s \in \mathcal{N}(X)$ cumple que $\beta_X(s) = 0$, entonces $s \in \text{Im}(\alpha)(X)$, lo que significa que cada $P \in X$ tiene un entorno V_P tal que $s|_{V_P}$ tiene una antiimagen por $\alpha|_{V_P}$, pero la inyectividad de α permite extender estas antiimágenes locales a un $t \in \mathcal{M}(X)$ tal que $\alpha_X(t) = s$, luego la sucesión es exacta en el centro.

El hecho de que $\Gamma(X, -)$ no sea, en general, exacto, no es sino otra forma de expresar que un epimorfismo β no tiene por qué cumplir que β_X sea suprayectivo. ■

Los funtores exactos por la izquierda satisfacen muchas propiedades:

Teorema 5.49 Sean X e Y dos espacios anillados y $F : \text{Mod}(X) \longrightarrow \text{Mod}(Y)$ un funtor exacto por la izquierda. Entonces:

1. Si 0 es el \mathcal{O}_X -módulo nulo, se cumple que $F0 = 0$.
2. Si $0 : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ es el homomorfismo nulo entre dos \mathcal{O}_X -módulos, entonces $F0 : F\mathcal{M} \longrightarrow F\mathcal{N}$ es el homomorfismo nulo.

3. Si \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 son dos \mathcal{O}_X -módulos, entonces $F(\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2) = F\mathcal{M}_1 \oplus F\mathcal{M}_2$. Además F transforma las proyecciones $\pi_i : \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_i$ en las proyecciones $\bar{\pi}_i : F\mathcal{M}_1 \oplus F\mathcal{M}_2 \rightarrow F\mathcal{M}_i$ y las inyecciones $\iota_i : \mathcal{M}_i \rightarrow \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ en las inyecciones $\bar{\iota}_i : F\mathcal{M}_i \rightarrow F\mathcal{M}_1 \oplus F\mathcal{M}_2$.
4. Si $f_i : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}_i$, para $i = 1, 2$ son homomorfismos de \mathcal{O}_X -módulos y $(f_1, f_2) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2$ es el homomorfismo definido de forma natural, entonces $F(f_1, f_2) = (Ff_1, Ff_2)$.
5. Si $f_i : \mathcal{M}_i \rightarrow \mathcal{N}$, para $i = 1, 2$, son dos homomorfismos de \mathcal{O}_X -módulos y $f_1 + f_2 : \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{N}$ es el homomorfismo definido de forma natural, entonces $F(f_1 + f_2) = Ff_1 + Ff_2$.
6. Si $f_i : \mathcal{M}_i \rightarrow \mathcal{N}_i$, para $i = 1, 2$ son dos homomorfismos de \mathcal{O}_X -módulos y $(f_1, f_2) : \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2$ es el homomorfismo definido de forma natural, entonces $F(f_1, f_2) = (Ff_1, Ff_2)$.
7. Si $f_i : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, para $i = 1, 2$, son dos homomorfismos de \mathcal{O}_X -módulos, entonces $F(f_1 + f_2) = Ff_1 + Ff_2$.

DEMOSTRACIÓN: 1) Consideramos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow 0 \xrightarrow{1} 0 \xrightarrow{1} 0 \rightarrow 0,$$

de la que obtenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow F0 \xrightarrow{1} F0 \xrightarrow{1} F0$$

La exactitud en el $F0$ central implica que $F0 = 0$.

2) Podemos descomponer el homomorfismo 0 como $\mathcal{M} \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{N}$, luego $F0$ se descompone como $F\mathcal{M} \rightarrow 0 \rightarrow F\mathcal{N}$, luego necesariamente $F0$ es el homomorfismo nulo.

3) Consideramos las sucesiones exactas

$$0 \rightarrow \mathcal{M}_1 \xrightarrow{\iota_1} \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \xrightarrow{\pi_2} \mathcal{M}_2 \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \mathcal{M}_2 \xrightarrow{\iota_2} \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{M}_1 \rightarrow 0,$$

que se transforman en las sucesiones exactas

$$0 \rightarrow F\mathcal{M}_1 \xrightarrow{\bar{\iota}_1} F(\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2) \xrightarrow{\bar{\pi}_2} F\mathcal{M}_2,$$

$$0 \rightarrow F\mathcal{M}_2 \xrightarrow{\bar{\iota}_2} F(\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2) \xrightarrow{\bar{\pi}_1} F\mathcal{M}_1.$$

(Entendemos que $\bar{\iota}_i$ y $\bar{\pi}_i$ son, por definición, las imágenes por F de ι_i y π_i .)

Claramente $\bar{\iota}_1\bar{\pi}_2 = 0$, $\bar{\iota}_2\bar{\pi}_1 = 0$, $\bar{\iota}_1\bar{\pi}_1 = 1$, $\bar{\iota}_2\bar{\pi}_2 = 1$. Sea $U \subset Y$ un abierto y tomemos un $m \in F(\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2)(U)$. Entonces

$$\bar{\pi}_{2U}(m - \bar{\iota}_{2U}(\bar{\pi}_{2U}(m))) = \bar{\pi}_{2U}(m) - \bar{\pi}_{2U}(m) = 0,$$

luego $m - \bar{\iota}_{2U}(\bar{\pi}_{2U}(m)) \in N \bar{\pi}_{2U} = \text{Im } \bar{\iota}_{1U}$, por la exactitud izquierda del funtor $\Gamma(U, -)$. Así, existe un $m' \in (F\mathcal{M}_1)(U)$ tal que $m = \bar{\iota}_{2U}(\bar{\pi}_{2U}(m)) + \bar{\iota}_{1U}(m')$. Aplicando $\bar{\pi}_{1U}$ concluimos que $m' = \bar{\pi}_{1U}(m)$, luego hemos obtenido que

$$\bar{\pi}_1 \bar{\iota}_1 + \bar{\pi}_2 \bar{\iota}_2 = 1.$$

Ahora es fácil comprobar que $\bar{\iota}_1 + \bar{\iota}_2 : F\mathcal{M}_1 \oplus F\mathcal{M}_2 \rightarrow F(\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2)$ es un isomorfismo, a través del cual las inyecciones y proyecciones de la suma directa se corresponden con los homomorfismos $\bar{\iota}_i$ y $\bar{\pi}_i$.

4) (f_1, f_2) está completamente determinado por el hecho de que $(f_1, f_2) \circ \pi_i = f_i$, y esto implica que $F(f_1, f_2) \circ \pi_i = Ff_i$, luego $F(f_1, f_2) = (Ff_1, Ff_2)$.

La prueba de 5) y 6) es similar a la de 4), y 7) se debe a que $f_1 + f_2$ puede descomponerse como

$$\mathcal{M} \xrightarrow{(f_1, f_2)} \mathcal{N} \oplus \mathcal{N} \xrightarrow{(1, 1)} \mathcal{N},$$

y basta aplicar 4) y 5). ■

El teorema también es válido para funtores exactos por la derecha, así como para funtores contravariantes, aunque en este caso con las modificaciones obvias (por ejemplo, los funtores contravariantes exactos por la izquierda o por la derecha intercambian las proyecciones con las inyecciones en una suma directa, etc.).

Módulos inyectivos La definición de A -módulo inyectivo se generaliza trivialmente al contexto de los \mathcal{O}_X -módulos:

Definición 5.50 Si X es un espacio anillado, un \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{N} es *inyectivo* si todo homomorfismo $g : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{N}$ en un subhaz \mathcal{M}' de un haz \mathcal{M} puede extenderse hasta un homomorfismo $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$.

Ahora generalizamos el teorema 5.12:

Teorema 5.51 Si X es un espacio anillado y \mathcal{M} es un \mathcal{O}_X -módulo, entonces existe un monomorfismo $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ con \mathcal{N} inyectivo.

DEMOSTRACIÓN: Para cada $P \in X$, el $\mathcal{O}_{X,P}$ -módulo \mathcal{M}_P puede sumergirse en un $\mathcal{O}_{X,P}$ -módulo inyectivo N_P . Fijemos un monomorfismo $\alpha_P : \mathcal{M}_P \rightarrow N_P$ y para cada abierto $U \subset X$ definimos

$$\mathcal{N}(U) = \prod_{P \in U} N_P.$$

Es fácil ver que \mathcal{N} , así definido (con las restricciones y las operaciones obvias), es un \mathcal{O}_X -módulo. Definimos $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ mediante $\phi_U(f) = (\alpha_P(f_P))_{P \in U}$. Claramente los homomorfismos ϕ_U son inyectivos, luego ϕ también lo es. Ahora falta probar que \mathcal{N} es inyectivo.

Observemos que las proyecciones $\pi_{U,P} : \mathcal{N}(U) \rightarrow N_P$ inducen homomorfismos $\pi_P : N_P \rightarrow N_P$ independientes de U . Cada $f \in \mathcal{N}(U)$ cumple obviamente que $f = (\pi_P(f_P))_{P \in U}$.

Supongamos un monomorfismo $\psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ y un homomorfismo $\alpha : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{N}$. Para cada $P \in X$, el homomorfismo

$$\mathcal{P}_P \xrightarrow{\alpha_P} \mathcal{N}_P \xrightarrow{\pi_P} N_P$$

se extiende a un homomorfismo $\chi_P : \mathcal{Q}_P \rightarrow N_P$, que a su vez determina un homomorfismo $\chi : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{N}$ mediante $\chi_U(f) = (\chi_P(f_P))_{P \in U}$. Veamos que $\psi \circ \chi = \alpha$. En efecto, si U es un abierto en X y $f \in \mathcal{P}(U)$,

$$\chi_U(\psi_U(f)) = (\chi_P(\psi_P(f_P)))_{P \in U} = (\pi_P(\alpha_P(f_P)))_{P \in U} = \alpha_U(f).$$

■

La inyectividad se conserva al restringir:

Teorema 5.52 *Sea X un espacio anillado y $U \subset X$ un abierto. Si \mathcal{J} es un \mathcal{O}_X -módulo inyectivo, entonces $\mathcal{J}|_U$ es un \mathcal{O}_U -módulo inyectivo.*

DEMOSTRACIÓN: En general, si \mathcal{F} es un \mathcal{O}_U -módulo, definimos \mathcal{F}^X como la completación del prehaz dado por

$$\mathcal{F}^{X-}(V) = \begin{cases} \mathcal{F}(V) & \text{si } V \subset U, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Es claro que $\mathcal{F}_P^X = \mathcal{F}_P$ si $P \in U$ y $\mathcal{F}_P^X = 0$ si $P \in X \setminus U$. Todo homomorfismo de \mathcal{O}_U -módulos $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ se extiende a un homomorfismo de \mathcal{O}_X -módulos $\alpha^X : \mathcal{F}^X \rightarrow \mathcal{G}^X$ tal que $\alpha_P^X = \alpha_P$ para todo $P \in U$. También es fácil ver que $\mathcal{F}^X|_U = \mathcal{F}$.

Pasemos ya a la demostración del teorema: supongamos dados un monomorfismo de \mathcal{O}_U -módulos $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$ y un homomorfismo $\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{J}|_U$. Entonces tenemos un monomorfismo de \mathcal{O}_X -módulos $\mathcal{N}^X \rightarrow \mathcal{P}^X$ y un homomorfismo $\mathcal{N}^X \rightarrow (\mathcal{J}|_U)^X$. Pero es fácil definir un monomorfismo de \mathcal{O}_X -módulos $(\mathcal{J}|_U)^X \rightarrow \mathcal{J}$ que restringido a U es la identidad. Así tenemos un homomorfismo $\mathcal{N}^X \rightarrow \mathcal{J}$, y podemos aplicar la inyectividad de \mathcal{J} , que nos permite extender este homomorfismo a un homomorfismo $\mathcal{P}^X \rightarrow \mathcal{J}$. Restringiendo a U tenemos un homomorfismo $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{J}|_U$ que extiende al dado sobre \mathcal{N} . ■

Los \mathcal{O}_X -módulos inyectivos escinden las sucesiones exactas:

Teorema 5.53 *Si X es un espacio anillado y $0 \rightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{N} \xrightarrow{\beta} \mathcal{P} \rightarrow 0$ es una sucesión exacta de \mathcal{O}_X -módulos en la que \mathcal{M} es inyectivo, entonces la sucesión se escinde, es decir, se cumple que $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\beta) \oplus \text{CN}(\alpha) \cong \mathcal{M} \oplus \mathcal{P}$.*

DEMOSTRACIÓN: Existe un homomorfismo $\gamma : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ tal que $\alpha \circ \gamma = 1$. Para cada $P \in X$ tenemos que $\alpha_P \circ \gamma_P = 1$ (y la sucesión localizada sigue siendo exacta), luego $\mathcal{N}_P = \mathcal{N}(\beta)_P \oplus \text{CN}(\alpha)_P$. Para cada abierto U de X , si $f \in \mathcal{N}(\beta)(U) \cap \text{CN}(\alpha)(U)$, entonces $f_P = 0$ para todo $P \in U$, luego $f = 0$.

Por otra parte, si $f \in \mathcal{N}(U)$ y $P \in U$, entonces $f_P = u_P + v_P$, para ciertos $u_P \in \mathcal{N}(\beta)_P$, $v_P \in \text{CN}(\alpha)_P$, que serán localizaciones de elementos

$u_V \in N(\beta)(V)$, $v_V \in CN(\alpha)(V)$, para cierto abierto $P \in V \subset U$. Podemos cubrir U con abiertos V en estas condiciones, y la unicidad de la descomposición en suma directa hace que los elementos $\{u_V\}_V$ y $\{v_V\}_V$ determinen unos $u \in N(\beta)(U)$, $v \in CN(\alpha)(U)$ tales que $f = u + v$. Por lo tanto $N(U) = N(\beta)(U) \oplus CN(\alpha)(U)$, luego $N = N(\beta) \oplus CN(\alpha)$. ■

Módulos proyectivos Es fácil generalizar la definición de A -módulo proyectivo al caso de los \mathcal{O}_X -módulos, pero no nos sirve de mucho hacerlo, ya que no es cierto el teorema “dual” de 5.51, es decir, que todo \mathcal{O}_X -módulo sea imagen de un \mathcal{O}_X -módulo proyectivo, y esto hará que los \mathcal{O}_X -módulos proyectivos no puedan usarse en la construcción de funtores derivados que veremos en el capítulo siguiente, salvo en el caso particular de los módulos sobre un anillo A , pues en ese caso sí que es cierto que todo A -módulo es la imagen de un A -módulo libre, en particular proyectivo. ■

Capítulo VI

Funtores derivados

Supongamos que $F : \text{Mód}(\mathcal{O}_X) \rightarrow \text{Mód}(\mathcal{O}_X)$ es, por ejemplo, un funtor covariante exacto por la izquierda. Esto significa que si tenemos una sucesión exacta de \mathcal{O}_X -módulos

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B} \xrightarrow{\psi} \mathcal{C} \longrightarrow 0,$$

al aplicar F obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow F(\mathcal{A}) \xrightarrow{F\phi} F(\mathcal{B}) \xrightarrow{F\psi} F(\mathcal{C}).$$

En este capítulo vamos a asociar a F una sucesión $\{D^n F\}_{n=0}^\infty$ de funtores derivados con la propiedad de que $D^0 F$ es naturalmente equivalente a F y que dan lugar a una sucesión exacta natural

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow F(\mathcal{A}) \xrightarrow{F\phi} F(\mathcal{B}) \xrightarrow{F\psi} F(\mathcal{C}) \xrightarrow{\delta_{*0}} D^1 F(\mathcal{A}) \xrightarrow{D^1 F\phi} D^1 F(\mathcal{B}) \xrightarrow{D^1 F\psi} D^1 F(\mathcal{C}) \\ \xrightarrow{\delta_{*1}} D^2 F(\mathcal{A}) \xrightarrow{D^2 F\phi} D^2 F(\mathcal{B}) \xrightarrow{D^2 F\psi} D^2 F(\mathcal{C}) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Quizá el lector no se sienta especialmente impresionado por este hecho, pero a continuación veremos que los funtores derivados son una herramienta potentísima con muchas aplicaciones a la topología algebraica (y también a diversas ramas del álgebra).

6.1 Complejos

Las nociones de *complejo directo* y *complejo inverso* dadas en 4.5 y 4.22 para complejos de A -módulos valen literalmente para \mathcal{O}_X -módulos, al igual que las de homomorfismo de complejos. Es claro que los complejos directos / inversos de \mathcal{O}_X -módulos (para \mathcal{O}_X fijo) forman una categoría.

Diremos que una sucesión de homomorfismos de complejos

$$0 \longrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{\phi} \mathcal{D} \xrightarrow{\psi} \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

es *exacta* si lo son todas las sucesiones

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_i \xrightarrow{\phi_i} \mathcal{D}_i \xrightarrow{\psi_i} \mathcal{E}_i \longrightarrow 0.$$

Los *grupos de homología* de un complejo directo \mathcal{C} se definen como los \mathcal{O}_X -módulos

$$H_i(\mathcal{C}) = \mathcal{N}(\partial_{i-1}) / \text{Im } \partial_i.$$

Similarmente, los *grupos de cohomología* de un complejo inverso \mathcal{C} se definen como los \mathcal{O}_X -módulos

$$H^i(\mathcal{C}) = \mathcal{N}(d_i) / \text{Im } d_{i-1}.$$

Si $\alpha, \beta : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ son dos homomorfismos de complejos inversos de \mathcal{O}_X -módulos. Una *homotopía* Δ entre α y β es una sucesión de homomorfismos de \mathcal{O}_X -módulos $\Delta^n : \mathcal{C}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{D}_n$ tal que

$$\alpha^n - \beta^n = \Delta^{n-1} d_{n-1} + d_n \Delta^n.$$

Si existe una homotopía entre α y β se dice que son homomorfismos *homotópicos*. Las homotopías entre homomorfismos de complejos directos se definen análogamente, sin más que invertir la ordenación de los índices.

Puesto que la única diferencia entre los complejos directos y los inversos es la ordenación de los índices, todo concepto o resultado general sobre complejos directos puede reformularse en términos de complejos inversos, y viceversa. En lo sucesivo enunciaremos y probaremos los resultados únicamente para complejos inversos.

Teorema 6.1 *Si X es un espacio anillado, todo homomorfismo de complejos inversos de \mathcal{O}_X -módulos $\alpha : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ induce homomorfismos*

$$\bar{\alpha}^n : H^n(\mathcal{C}) \longrightarrow H^n(\mathcal{C}')$$

determinados por que, para cada $P \in X$, el homomorfismo

$$\bar{\alpha}_P : (\mathcal{N} d_n)_P / (\text{Im } d_{n-1})_P \longrightarrow (\mathcal{N} d'_n)_P / (\text{Im } d'_{n-1})_P$$

es el inducido por la restricción $\alpha_P|_{(\mathcal{N} d_n)_P} : (\mathcal{N} d_n)_P \longrightarrow (\mathcal{N} d'_n)_P$. Dos homomorfismos homotópicos inducen los mismos homomorfismos sobre los grupos de cohomología.

DEMOSTRACIÓN: Sea $U \subset X$ un abierto y tomemos $s \in (\mathcal{N} d_n)(U)$. Es claro entonces que $\alpha_U^n(s) \in (\mathcal{N} d'_n)(U)$, luego podemos considerar su clase de equivalencia $[\alpha_U^n(s)] \in (\mathcal{N} d'_n)(U) / (\text{Im } d'_{n-1})(U)$.

Tomemos ahora $s \in (\text{Im } d_{n-1})(U)$. La única complicación que hace que el teorema no sea trivial es que esto no implica que s esté en la imagen de $d_{n-1,U}$. Lo que sabemos es que, para cada $P \in U$, se cumple que $s_P \in \text{Im } d_{n-1,P}$, por lo que $\alpha_U^n(s)_P \in \text{Im } d'_{n-1,P}$, lo que a su vez implica que $\alpha_U^n(s) \in (\text{Im } d'_{n-1})(U)$.

Esto nos permite definir un homomorfismo de $\mathcal{O}_X(U)$ -módulos:

$$(\mathbb{N} d_n)(U)/(\text{Im } d_{n-1})(U) \longrightarrow (\mathbb{N} d'_n)(U)/(\text{Im } d'_{n-1})(U).$$

Estos homomorfismos definen un homomorfismo de prehaces

$$(\mathbb{N} d_n/\text{Im } d_{n-1})^- \longrightarrow (\mathbb{N} d'_n/\text{Im } d'_{n-1})^-,$$

que a su vez se extiende a un homomorfismo de haces $H^n(\mathcal{C}) \longrightarrow H^n(\mathcal{C}')$. Claramente cumple lo pedido. La última afirmación del enunciado es inmediata. ■

Ahora es claro que podemos considerar a cada H^n como un funtor de la categoría de complejos inversos de \mathcal{O}_X -módulos en la categoría de los \mathcal{O}_X -módulos.

Vamos a probar que cada sucesión exacta corta de complejos determina una sucesión exacta larga de cohomología. Para ello necesitamos la generalización de 4.9:

Teorema 6.2 *Sea X un espacio anillado, consideremos el siguiente diagrama conmutativo de \mathcal{O}_X -módulos y supongamos que sus filas son exactas.*

$$\begin{array}{ccccccc} & & Z'_1 & \xrightarrow{\phi'} & Z'_2 & \xrightarrow{\psi'} & Z'_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d_1 & & \downarrow d_2 & & \downarrow d_3 & & \\ 0 & \longrightarrow & Z_1 & \xrightarrow{\phi} & Z_2 & \xrightarrow{\psi} & Z_3 & & \end{array}$$

Entonces existe un homomorfismo $\delta_* : \mathbb{N}(d_3) \longrightarrow Z_1/\text{Im } d_1$ tal que la sucesión

$$\mathbb{N}(d_1) \xrightarrow{\phi''} \mathbb{N}(d_2) \xrightarrow{\psi''} \mathbb{N}(d_3) \xrightarrow{\delta_*} Z_1/\text{Im } d_1 \xrightarrow{\bar{\phi}} Z_2/\text{Im } d_2 \xrightarrow{\bar{\psi}} Z_3/\text{Im } d_3$$

es exacta, donde ϕ'' y ψ'' son las restricciones de ϕ' y ψ' a $\mathbb{N}(d_1)$ y $\mathbb{N}(d_2)$ y $\bar{\phi}$, $\bar{\psi}$ son los homomorfismos inducidos de forma natural.

DEMOSTRACIÓN: Los homomorfismos $\bar{\phi}$ y $\bar{\psi}$ son los construidos como en el teorema anterior. Para construir δ_* fijamos un abierto $U \subset X$ y un elemento $s'_3 \in Z'_3(U)$. Entonces $s'_3 \in \text{Im } \psi'$, lo que significa que, para cada $P \in U$, $s'_{3P} \in \text{Im } \psi'_P$. Existe un abierto $P \in V_P \subset U$ y un $s'_2 \in Z'_2(V_P)$ tal que $\psi'_{V_P}(s'_2) = s'_{3P}$. Sea $s_2 = d_{2V_P}(s'_2) \in Z_2(V_P)$. Entonces $s_2 \in (\mathbb{N} \psi)(V_P) = (\text{Im } \phi)(V_P)$. Por consiguiente, podemos tomar otro abierto $P \in W_P \subset V_P$ y un $s_1 \in Z_1(W_P)$ de modo que $\phi_{W_P}(s_1) = s_2|_{W_P}$.

En resumen: para cada $P \in U$ existe un abierto $P \in W_P \subset U$ tal que $s'_3|_{W_P}$ tiene una antiimagen $s'_2 \in Z'_2(W_P)$, cuya imagen $s_2 = d_{2W_P}(s'_2)$ tiene una antiimagen $s_1 \in Z_1(W_P)$. Llamamos $\delta_P(s_3) = [s_1] \in Z_1(W_P)/(\text{Im } d_1)(W_P)$.

Supongamos que elegimos otros \bar{W}_P , \bar{s}'_2 y \bar{s}_1 que cumplan lo mismo. Entonces, $\bar{s}'_2|_{W_P \cap \bar{W}_P} - \bar{s}'_2|_{W_P \cap \bar{W}_P} \in \mathbb{N} \psi' = \text{Im } \phi'$, luego para cada $Q \in W_P \cap \bar{W}_P$ tenemos que $\bar{s}'_{2Q} - \bar{s}'_{2Q} \in \text{Im } \phi'_Q$, luego $\bar{s}_{2Q} - \bar{s}_{2Q} \in \text{Im}(d_{1Q} \circ \phi_Q)$, luego $\bar{s}_1 - \bar{s}_1 \in \text{Im } d_{1Q}$, luego $\bar{s}_1|_{W_P \cap \bar{W}_P} - \bar{s}_1|_{W_P \cap \bar{W}_P} \in (\text{Im } d_1)(W_P \cap \bar{W}_P)$, luego $\bar{\delta}_P(s_3)|_{W_P \cap \bar{W}_P} = \bar{\delta}_P(s_3)|_{W_P \cap \bar{W}_P}$.

El mismo argumento prueba que $\delta_P(s_3)|_{W_P \cap W_Q} = \delta_Q(s_3)|_{W_P \cap W_Q}$. Sea $\hat{\delta}_P(s_3)$ la imagen de $\delta_P(s_3)$ en $(Z_1/\text{Im } d_1)(W_P)$. Entonces

$$\hat{\delta}_P(s_3)|_{W_P \cap W_Q} = \hat{\delta}_Q(s_3)|_{W_P \cap W_Q},$$

luego estos elementos se extienden un $\delta_*(s_3) \in (Z_1/\text{Im } d_1)(U)$ que es independiente de todas las elecciones intermedias, pues hemos probado que todas determinan el mismo $\delta_*(s_3)_P$.

De hecho, es claro que $\delta_*(s_3)_P$ es el homomorfismo de conexión usual obtenido a partir de s_{3P} con el diagrama del enunciado localizado en P , es decir, se toma una antiimagen de s_{3P} en Z'_{2P} , se toma su imagen en Z_{2P} , se toma una antiimagen en Z_{1P} y se toma la clase módulo $\text{Im } d_{1P}$. Como cada elemento de $Z'_3(U)$ está determinado por sus localizaciones, esto prueba el resto del teorema, a saber, que δ_* es un homomorfismo de \mathcal{O}_X -módulos y que la sucesión del enunciado es exacta.¹ ■

Teorema 6.3 *Sea X un espacio anillado y $0 \rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B} \xrightarrow{\psi} \mathcal{C} \rightarrow 0$ una sucesión exacta de complejos de \mathcal{O}_X -módulos. Entonces existen homomorfismos*

$$\delta_*^n : H^n(\mathcal{C}) \rightarrow H^{n+1}(\mathcal{A})$$

tales que la sucesión siguiente es exacta:

$$\dots \rightarrow H^n(\mathcal{A}) \xrightarrow{\bar{\phi}^n} H^n(\mathcal{B}) \xrightarrow{\bar{\psi}^n} H^n(\mathcal{C}) \xrightarrow{\delta_*^n} H^{n+1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\bar{\phi}^{n+1}} H^{n+1}(\mathcal{B}) \rightarrow \dots$$

DEMOSTRACIÓN: Basta comprobar que el diagrama siguiente satisface las hipótesis del teorema anterior.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A}^n / \text{Im } d_{n-1} & \xrightarrow{\phi^n} & \mathcal{B}^n / \text{Im } d_{n-1} & \xrightarrow{\psi^n} & \mathcal{C}^n / \text{Im } d_{n-1} & \longrightarrow & 0 \\ d_n \downarrow & & d_n \downarrow & & d_n \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{N} d_{n+1} & \xrightarrow{\phi^{n+1}} & \mathcal{N} d_{n+1} & \xrightarrow{\psi^{n+1}} & \mathcal{N} d_{n+1} \end{array}$$

Ahora bien, todas las comprobaciones pueden reducirse a las propiedades análogas sobre los diagramas que resultan de localizar en un punto arbitrario $P \in X$, y entonces son las comprobaciones usuales cuando en lugar de \mathcal{O}_X -módulos tenemos módulos ordinarios.² ■

La sucesión exacta dada por el teorema anterior se llama *sucesión exacta larga de cohomología* asociada a la sucesión exacta corta dada de homomorfismos de complejos.

¹Para los detalles véase la prueba de 4.9.

²Para los detalles véase la prueba de 4.10. Nótese que 4.10 está enunciado para complejos directos y no inversos, lo que supone únicamente que los homomorfismos d disminuyen el grado en lugar de aumentarlo. Los cambios que ello conlleva son meramente de notación.

Nota Se comprueba fácilmente que los homomorfismos de conexión dados por el teorema anterior conmutan con los homomorfismos inducidos por homomorfismos de sucesiones exactas de complejos, es decir (compárese con 4.11) que si tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{C} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}' & \longrightarrow & \mathcal{B}' & \longrightarrow & \mathcal{C}' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

con filas exactas, entonces los homomorfismos entre los grupos de cohomología inducidos por las flechas verticales determinan un diagrama conmutativo entre sus sucesiones exactas largas de cohomología. (Una vez más, todas las comprobaciones se reducen a comprobar la conmutatividad de diagramas de homomorfismos de módulos sobre un anillo y no sobre un espacio anillado.)

■

Los funtores exactos por la izquierda o la derecha cumplen que $F0 = 0$, y esto basta para concluir que transforman complejos inversos en complejos inversos en el caso de los funtores covariantes y complejos inversos en complejos directos en el caso de los contravariantes. Además, su aditividad (teorema 5.49,7) implica que transforman homotopías en homotopías. En virtud del teorema 5.47, los funtores exactos, además, conservan la homología.

Nuestro propósito es estudiar la inexactitud de un funtor exacto por la izquierda o por la derecha estudiando cómo alteran los grupos de (co)homología de ciertos complejos, complejos que vamos a construir en la sección siguiente.

6.2 Resoluciones inyectivas y proyectivas

Nos ocupamos ahora de los resultados técnicos necesarios para la construcción de los funtores derivados.

Definición 6.4 Sea X un espacio anillado y \mathcal{M} un \mathcal{O}_X -módulo. Una *resolución inversa* de \mathcal{M} es una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{J}^0 \longrightarrow \mathcal{J}^1 \longrightarrow \mathcal{J}^2 \longrightarrow \dots$$

La resolución es *inyectiva* si los \mathcal{O}_X -módulos \mathcal{J}^i son inyectivos. Similarmente, una *resolución directa* de \mathcal{M} es una sucesión exacta

$$\dots \longrightarrow \mathcal{P}^2 \longrightarrow \mathcal{P}^1 \longrightarrow \mathcal{P}^0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0,$$

y la resolución es *proyectiva* si los \mathcal{O}_X -módulos \mathcal{P}^i son proyectivos.

El teorema 5.51 implica que todo \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} admite una resolución inyectiva, pero vamos a demostrar algo más preciso:

Teorema 6.5 Sea X un espacio anillado y

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_1 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M}_2 \xrightarrow{\beta} \mathcal{M}_3 \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de \mathcal{O}_X -módulos. Entonces existen sendas resoluciones inyectivas $(\mathcal{J}_j^i)_i$, para $j = 1, 2, 3$, tales que $\mathcal{J}_2^i = \mathcal{J}_1^i \oplus \mathcal{J}_3^i$ y el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}_1 & \longrightarrow & \mathcal{J}_1^0 & \longrightarrow & \mathcal{J}_1^1 \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}_2 & \longrightarrow & \mathcal{J}_2^0 & \longrightarrow & \mathcal{J}_2^1 \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow \beta & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}_3 & \longrightarrow & \mathcal{J}_3^0 & \longrightarrow & \mathcal{J}_3^1 \longrightarrow \dots \end{array}$$

donde las flechas verticales son los homomorfismos naturales

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_1^i \longrightarrow \mathcal{J}_1^i \oplus \mathcal{J}_3^i \longrightarrow \mathcal{J}_3^i \longrightarrow 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\eta_1 : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{J}_1^0$ un monomorfismo en un módulo inyectivo \mathcal{J}_1^0 y consideremos el homomorfismo

$$(\alpha, -\eta_1) : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{J}_1^0.$$

Sea $\mathcal{G} = \text{CN}(\alpha, -\eta_1)$ y sea $\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{J}$ un monomorfismo en un módulo inyectivo \mathcal{J} . Definimos $\bar{\alpha}^0$ como la composición $\mathcal{J}_1^0 \longrightarrow \mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{J}_1^0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{J}$ y $\bar{\eta}_2$ como la composición $\mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{J}_1^0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{J}$.

Observemos que ambos homomorfismos son inyectivos. Por ejemplo, si tomamos $P \in X$ y $f \in \mathcal{J}_{1,P}^0$ tales que $\bar{\alpha}_P^0(f) = 0$, entonces $(0, f) \in \text{Im}(\alpha_P, -\eta_{1,P})$, es decir que existe un $g \in \mathcal{M}_{1,P}$ tal que $\alpha_P(g) = 0$ y $-\eta_{1,P}(g) = f$, pero entonces $g = 0$ y también $f = 0$. Por el teorema 5.53 tenemos que $\mathcal{J} = \text{Im}(\bar{\alpha}^0) \oplus \text{CN}(\bar{\alpha}^0)$.

Llamemos $\mathcal{H} = \text{CN}(\bar{\alpha}^0)$ y sea $\bar{\beta}^0 : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{H}$ el epimorfismo canónico. Es inmediato que todo sumando directo de un módulo inyectivo es inyectivo, luego \mathcal{H} es inyectivo. Tenemos la situación siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}_1 & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{M}_2 & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{M}_3 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \eta_1 & & \downarrow \bar{\eta}_2 & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}_1^0 & \xrightarrow{\bar{\alpha}^0} & \mathcal{J} & \xrightarrow{\bar{\beta}^0} & \mathcal{H} \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde el cuadrado es conmutativo y las filas y columnas son exactas. Como $\text{Im}(\alpha) \subset \text{N}(\bar{\eta}_2 \circ \bar{\beta}^0)$, podemos definir un homomorfismo $\text{CN}(\alpha) \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que

$\mathcal{M}_2 \longrightarrow \text{CN}(\alpha) \longrightarrow \mathcal{H}$ sea $\bar{\eta}_2 \circ \bar{\beta}^0$. Este homomorfismo se extiende a un homomorfismo $\bar{\eta}_3 : \mathcal{M}_3 \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que

$$\mathcal{M}_2 \longrightarrow \text{CN}(\alpha) \longrightarrow \mathcal{M}_3 \xrightarrow{\bar{\eta}_3} \mathcal{H}$$

sea $\bar{\eta}_2 \circ \bar{\beta}^0$, es decir, tal que $\bar{\eta}_3$ hace el diagrama conmutativo (aunque no es necesariamente inyectivo). Sea $\nu : \mathcal{M}_3 \longrightarrow \mathcal{K}$ un monomorfismo en un módulo inyectivo. Definimos $\mathcal{J}_3^0 = \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$, $\mathcal{J}_2^0 = \mathcal{J} \oplus \mathcal{K}$, $\eta_3 = (\bar{\eta}_3, \nu) : \mathcal{M}_3 \longrightarrow \mathcal{J}_3^0$, $\eta_2 = (\bar{\eta}_2, \beta \circ \nu) : \mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathcal{J}_2^0$, $\alpha^0 = (\bar{\alpha}^0, 0) : \mathcal{J}_1^0 \longrightarrow \mathcal{J}_2^0$, $\beta^0 = (\bar{\beta}^0, 1) : \mathcal{J}_2^0 \longrightarrow \mathcal{J}_3^0$. Ahora el diagrama siguiente es conmutativo con filas y columnas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}_1 & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{M}_2 & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{M}_3 \longrightarrow 0 \\ & & \eta_1 \downarrow & & \eta_2 \downarrow & & \eta_3 \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}_1^0 & \xrightarrow{\alpha^0} & \mathcal{J}_2^0 & \xrightarrow{\beta^0} & \mathcal{J}_3^0 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Los módulos \mathcal{J}_i^0 son inyectivos porque es evidente que la suma directa de módulos inyectivos es inyectiva, y también es claro que $\mathcal{J}_2^0 \cong \mathcal{J}_1^0 \oplus \mathcal{J}_3^0$, de modo que α^0 y β^0 se corresponden con la inmersión y la proyección natural.

Sea ahora $\mathcal{G}_i = \text{CN}(\eta_i)$, para $i = 1, 2, 3$. El diagrama anterior nos da una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\bar{\alpha}} \mathcal{G}_2 \xrightarrow{\bar{\beta}} \mathcal{G}_3 \longrightarrow 0.$$

Repetiendo todo el argumento anterior obtenemos un diagrama conmutativo con filas y columnas exactas

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \mathcal{G}_2 & \xrightarrow{\bar{\beta}} & \mathcal{G}_3 \longrightarrow 0 \\ & & \bar{\delta}_1 \downarrow & & \bar{\delta}_2 \downarrow & & \bar{\delta}_3 \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}_1^1 & \xrightarrow{\bar{\alpha}_1} & \mathcal{J}_2^1 & \xrightarrow{\bar{\beta}_1} & \mathcal{J}_3^1 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Llamando $\bar{\delta}_i^0$ a las composiciones $\mathcal{J}_i^0 \longrightarrow \mathcal{G}_i \xrightarrow{\bar{\delta}_i^0} \mathcal{J}_i^1$ obtenemos un peldaño más del trío de sucesiones exactas del enunciado del teorema. El proceso se repite indefinidamente para obtener las sucesiones exactas completas. ■

Nota Supongamos que partimos de un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}_1 & \longrightarrow & \mathcal{M}_2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_3 \longrightarrow 0 \\ & & \phi_1 \downarrow & & \phi_2 \downarrow & & \phi_3 \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}'_1 & \longrightarrow & \mathcal{M}'_2 & \longrightarrow & \mathcal{M}'_3 \longrightarrow 0 \end{array}$$

con filas exactas. Entonces existe un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (\mathcal{J}'_1)_i & \longrightarrow & (\mathcal{J}'_2)_i & \longrightarrow & (\mathcal{J}'_3)_i \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & (\mathcal{J}^0_1)_i & \longrightarrow & (\mathcal{J}^0_2)_i & \longrightarrow & (\mathcal{J}^0_3)_i \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde las filas son las resoluciones inyectivas construidas en el teorema anterior para las dos filas del diagrama de partida (donde entendemos que $\mathcal{J}_j^{-1} = \mathcal{M}_j$).

En efecto, consideremos el diagrama siguiente, donde falta definir los homomorfismos ϕ_1^0 , $\bar{\phi}_2^0$ y $\bar{\phi}_3^0$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & \mathcal{M}'_1 & \xrightarrow{\alpha'} & \mathcal{M}'_2 & \xrightarrow{\beta'} & \mathcal{M}'_3 \\ & \nearrow \phi_1 & \downarrow \eta'_1 & & \nearrow \phi_2 & \downarrow \bar{\eta}'_2 & \nearrow \phi_3 \\ \mathcal{M}_1 & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{M}_2 & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{M}_3 & & \\ \downarrow \eta_1 & & \downarrow \eta_1 & & \downarrow \bar{\eta}_2 & & \downarrow \bar{\eta}_3 \\ & \nearrow \phi_1^0 & \mathcal{J}'^0_1 & \xrightarrow{\bar{\alpha}'_0} & \mathcal{J}' & \xrightarrow{\bar{\beta}'_0} & \mathcal{K}' \\ & & \downarrow \eta_1 & & \downarrow \eta_1 & & \downarrow \eta_1 \\ & \nearrow \phi_1^0 & \mathcal{J}^0_1 & \xrightarrow{\bar{\alpha}^0} & \mathcal{J} & \xrightarrow{\bar{\beta}^0} & \mathcal{K} \\ & & \downarrow \eta_1 & & \downarrow \eta_1 & & \downarrow \eta_1 \\ & & \mathcal{J}^0_1 & & \mathcal{J} & & \mathcal{K} \end{array}$$

La inyectividad de η_1 nos permite tomar ϕ_1^0 que haga conmutativa la cara izquierda del diagrama. Entonces $(\phi_2, \phi_1^0) : \mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{J}^0_1 \longrightarrow \mathcal{M}'_2 \oplus \mathcal{J}'^0_1$ induce un homomorfismo $\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$, a partir del cual podemos tomar un homomorfismo $\bar{\phi}_2^0 : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}'$ que haga conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{J} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}' & \longrightarrow & \mathcal{J}' \end{array}$$

Las definiciones de $\bar{\alpha}^0$ y $\bar{\eta}_2$ implican inmediatamente que tanto la cara inferior izquierda como la cara central del diagrama son conmutativas. Las filas del diagrama forman sucesiones exactas cortas, por lo que existe un $\bar{\phi}_3^0$ que hace conmutativa la cara inferior derecha. La exactitud de las filas implica también la conmutatividad de la cara derecha. Por último tomamos un homomorfismo $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ que conmute con ϕ_3 , ν y ν' . Es fácil definir entonces homomorfismos ϕ_2^0 y ϕ_3^0 de forma obvia que hacen conmutativo el diagrama que resulta de sustituir \mathcal{J} , \mathcal{K} , \mathcal{J}' , \mathcal{K}' por \mathcal{J}^0_2 , \mathcal{J}^0_3 , \mathcal{J}^0_2 , \mathcal{J}^0_3 . La continuación del argumento del teorema no presenta ninguna dificultad. ■

La prueba anterior es “dualizable”, en el sentido de que sigue siendo válida si invertimos el sentido de todas las flechas, salvo por el hecho de que el dual del teorema 5.51 sólo lo tenemos demostrado para categorías de módulos sobre un anillo.

Vamos a enunciar el teorema dual en este contexto, aunque es válido (con la misma prueba) para cualquier categoría de \mathcal{O}_X -módulos que tenga “suficientes proyectivos”, en el sentido de que todo \mathcal{O}_X -módulo sea imagen de un \mathcal{O}_X -módulo proyectivo.

Demostraremos el teorema como ilustración de lo que supone dualizar un argumento, pero ya no volveremos a demostrar teoremas duales de teoremas ya demostrados:

Teorema 6.6 *Sea A un anillo y*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2 \xrightarrow{\beta} M_3 \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de A -módulos. Entonces existen sendas resoluciones proyectivas $(P_j^i)_i$, para $j = 1, 2, 3$, tales que $P_2^i = P_1^i \oplus P_3^i$ y el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_1^1 & \longrightarrow & P_1^0 & \longrightarrow & M_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & P_2^1 & \longrightarrow & P_2^0 & \longrightarrow & M_2 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & P_3^1 & \longrightarrow & P_3^0 & \longrightarrow & M_3 \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde las flechas verticales son los homomorfismos naturales

$$0 \longrightarrow P_1^i \longrightarrow P_1^i \oplus P_3^i \longrightarrow P_3^i \longrightarrow 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\eta_3 : P_3^0 \longrightarrow M_3$ un epimorfismo, donde P_3^0 es un A -módulo proyectivo y consideremos el homomorfismo

$$\beta - \eta_3 : M_2 + P_3^0 \longrightarrow M_3.$$

Sea $G = N(\beta - \eta_3)$ y sea $P \longrightarrow G$ un epimorfismo con P proyectivo. Definimos $\bar{\beta}^0$ como la composición $P \longrightarrow G \longrightarrow M_2 \oplus P_3^0 \longrightarrow P_3^0$ y $\bar{\eta}_2$ como la composición $P \longrightarrow G \longrightarrow M_2 \oplus P_3^0 \longrightarrow M_2$.

Observemos que ambos homomorfismos son suprayectivos. Por ejemplo, si tomamos $f \in P_3^0$, entonces $\eta_3(f) = \beta(m)$, para cierto $m \in M_2$, de modo que $(m, f) \in G$, por lo que tiene una antiimagen $p \in P$ que cumple $\bar{\beta}^0(p) = f$.

Por el teorema 5.8 tenemos que $P = N(\bar{\beta}^0) \oplus \text{Im } \bar{\beta}^0$. Llamemos $H = N(\bar{\beta}^0)$ y sea $\bar{\alpha}_0 : H \longrightarrow P$ la inyección canónica. Es inmediato que todo sumando

directo de un módulo proyectivo es proyectivo, luego \mathcal{H} es proyectivo. Tenemos la situación siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \uparrow & & \uparrow & \\
 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{\alpha} & M_2 & \xrightarrow{\beta} & M_3 \longrightarrow 0 \\
 & & & \uparrow \bar{\eta}_2 & & \uparrow \eta_3 & \\
 0 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{\bar{\alpha}^0} & P & \xrightarrow{\bar{\beta}^0} & P_3^0 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

donde el cuadrado es conmutativo y las filas y columnas son exactas. Como $\text{Im}(\bar{\beta}^0 \circ \bar{\eta}_2) \subset N\beta$, podemos definir un homomorfismo $\bar{\eta}_1 : H \rightarrow M_1$ que haga el cuadrado conmutativo (aunque no es necesariamente suprayectivo).

Sea $\nu : K \rightarrow M_1$ un epimorfismo con K proyectivo. Definimos $P_1^0 = H \oplus K$, $P_2^0 = P \oplus K$, $\eta_1 = \bar{\eta}_1 + \nu : P_1^0 \rightarrow M_1$, $\eta_2 = \bar{\eta}_2 + \beta \circ \nu : P_2^0 \rightarrow M_2$, $\beta^0 = \bar{\beta}^0 : P_2^0 \rightarrow P_3^0$, $\alpha^0 = \bar{\alpha}^0 + 1 : P_1^0 \rightarrow P_2^0$. Ahora el diagrama siguiente es conmutativo con filas y columnas exactas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & M_1 & \xrightarrow{\alpha} & M_2 & \xrightarrow{\beta} & M_3 & \longrightarrow 0 \\
 & & & \uparrow \eta_1 & & \uparrow \eta_2 & & \uparrow \eta_3 \\
 0 & \longrightarrow & P_1^0 & \xrightarrow{\alpha^0} & P_2^0 & \xrightarrow{\beta^0} & P_3^0 & \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Los módulos P_i^0 son proyectivos porque es evidente que la suma directa de módulos proyectivos es proyectiva, y también es claro que $P_2^0 \cong P_1^0 \oplus P_3^0$, de modo que α^0 y β^0 se corresponden con la inmersión y la proyección natural.

La sucesión se prolonga dualizando los argumentos del teorema anterior tal y como hemos venido haciendo hasta ahora. ■

Nota Igualmente se demuestra la versión dual de la nota posterior a 6.5. ■

La característica principal de las resoluciones inyectivas y proyectivas es que permiten extender homomorfismos de módulos a homomorfismos de complejos, tal y como prueba el teorema siguiente. Lo demostramos para resoluciones inyectivas, pero su dual para resoluciones proyectivas se demuestra sin dificultad:

Teorema 6.7 *Si X es un espacio anillado, $\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ es un homomorfismo de \mathcal{O}_X -módulos y (\mathcal{J}_i) , (\mathcal{I}_i) son resoluciones de \mathcal{M} y \mathcal{N} respectivamente, con \mathcal{J} inyectiva, entonces α se extiende a un homomorfismo entre ambas resoluciones, y dos extensiones cualesquiera son homotópicas.*

DEMOSTRACIÓN: Hemos de construir homomorfismos $\alpha^i : \mathcal{J}^i \rightarrow \mathcal{J}^i$ que hagan conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{M} & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{J}^0 & \xrightarrow{\delta^0} & \mathcal{J}^1 & \xrightarrow{\delta^1} & \mathcal{J}^2 & \longrightarrow & \dots \\ & & \alpha \downarrow & & \alpha^0 \downarrow & & \alpha^1 \downarrow & & \alpha^2 \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{N} & \xrightarrow{\eta'} & \mathcal{J}^0 & \xrightarrow{\delta'^0} & \mathcal{J}^1 & \xrightarrow{\delta'^1} & \mathcal{J}^2 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Obtenemos α_0 por la inyectividad de \mathcal{J}^0 , luego obtenemos α_1 por la inyectividad de \mathcal{J}^1 aplicada al monomorfismo $\text{CN}(\eta) \rightarrow \mathcal{J}^1$ y al homomorfismo $\text{CN}(\eta) \rightarrow \mathcal{J}^1$ inducido por $\alpha_0 \circ \delta'_0$, y así sucesivamente.

Supongamos ahora que tenemos otra sucesión de homomorfismos (α'^i) . Definimos $\Delta^{-1} = 0$, con lo que hemos de construir homomorfismos $\Delta^i : \mathcal{J}^{i+1} \rightarrow \mathcal{J}^i$ tales que

$$\alpha^0 - \alpha'^0 = \delta^0 \Delta^0 \quad \text{y} \quad \alpha^i - \alpha'^i = \Delta^{i-1} \delta'^{i-1} + \delta^i \Delta^i \quad \text{para } i \geq 1.$$

En primer lugar, obtenemos Δ^0 aplicando la inyectividad de \mathcal{J}^0 al monomorfismo $\text{CN}(\eta) \rightarrow \mathcal{J}^0$ y el homomorfismo $\text{CN}(\eta) \rightarrow \mathcal{J}^0$ inducido por $\alpha^0 - \alpha'^0$. A continuación observamos que

$$\delta^0(\alpha^1 - \alpha'^1 - \Delta^0 \delta'^0) = \delta^0 \alpha^1 - \delta^0 \alpha'^1 - (\alpha^0 - \alpha'^0) \delta'^0 = 0,$$

luego $\alpha^1 - \alpha'^1 - \Delta^0 \delta'^0$ induce un homomorfismo $\text{CN}(\delta^0) \rightarrow \mathcal{J}^1$. La inyectividad de \mathcal{J}^1 nos da entonces Δ^1 tal que $\alpha^1 - \alpha'^1 - \Delta^0 \delta'^0 = \delta^1 \Delta^1$. La construcción puede prolongarse así indefinidamente. ■

6.3 La construcción de los funtores derivados

Consideremos un functor covariante $F : \text{Mod}(X) \rightarrow \text{Mod}(Y)$ exacto por la izquierda o por la derecha, donde X e Y son espacios anillados. Para cada \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} , podemos considerar una resolución inyectiva

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\eta} \mathcal{J}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{J}^1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{J}^2 \xrightarrow{d_2} \dots$$

Si eliminamos a \mathcal{M} tenemos el *complejo reducido*:

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{J}^1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{J}^2 \xrightarrow{d_2} \dots$$

que ya no es exacto en \mathcal{J}^0 . Si ahora aplicamos F , obtenemos un complejo de \mathcal{O}_Y -módulos

$$0 \longrightarrow F\mathcal{J}^0 \xrightarrow{Fd_0} F\mathcal{J}^1 \xrightarrow{Fd_1} F\mathcal{J}^2 \xrightarrow{Fd_2} \dots$$

que ya no tiene por qué ser exacto en ningún sitio. Para cada $n \geq 0$, definimos $D^n F(\mathcal{M})$ como el n -simo grupo de cohomología de este complejo. Hemos de

demostrar que este \mathcal{O}_Y -módulo no depende (salvo isomorfismo) de la elección de la resolución inyectiva, pero antes consideremos otro \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{N} , con otra resolución inyectiva,

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \xrightarrow{\eta'} \mathcal{J}^0 \xrightarrow{d'_0} \mathcal{J}^1 \xrightarrow{d'_1} \mathcal{J}^2 \xrightarrow{d'_2} \dots$$

y un homomorfismo $\alpha : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$. Por el teorema 6.7, α se extiende a un homomorfismo de complejos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{M} & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{J}^0 & \xrightarrow{d_0} & \mathcal{J}^1 & \xrightarrow{d_1} & \mathcal{J}^2 & \longrightarrow & \dots \\ & & \alpha \downarrow & & \alpha^0 \downarrow & & \alpha^1 \downarrow & & \alpha^2 \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{N} & \xrightarrow{\eta'} & \mathcal{J}^0 & \xrightarrow{d'_0} & \mathcal{J}^1 & \xrightarrow{d'_1} & \mathcal{J}^2 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

en el que podemos eliminar \mathcal{M} y \mathcal{N} para obtener un homomorfismo entre los complejos reducidos y luego aplicar F . Así obtenemos el homomorfismo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & F\mathcal{J}^0 & \xrightarrow{Fd_0} & F\mathcal{J}^1 & \xrightarrow{Fd_1} & F\mathcal{J}^2 & \longrightarrow & \dots \\ & & F\alpha^0 \downarrow & & F\alpha^1 \downarrow & & F\alpha^2 \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & F\mathcal{J}^0 & \xrightarrow{Fd'_0} & F\mathcal{J}^1 & \xrightarrow{Fd'_1} & F\mathcal{J}^2 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

De acuerdo con el teorema 6.1, llamamos $D^n F(\alpha) : D^n F(\mathcal{M}) \longrightarrow D^n F(\mathcal{N})$ al homomorfismo inducido sobre los grupos de cohomología. También hemos de demostrar que este homomorfismo no depende de la elección de las resoluciones inyectivas ni de la extensión de α .

Empezamos suponiendo que tenemos dos extensiones de α , digamos (α^i) y (α'^i) , con lo que el teorema 6.7 nos da una homotopía entre ellas:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{M} & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{J}^0 & \xrightarrow{d_0} & \mathcal{J}^1 & \xrightarrow{d_1} & \mathcal{J}^2 & \longrightarrow & \dots \\ & & \alpha \downarrow & \swarrow \Delta^{-1} & \alpha^0 \downarrow & \swarrow \Delta^0 & \alpha^1 \downarrow & \swarrow \Delta^1 & \alpha^2 \downarrow & \swarrow \Delta^2 & \\ & & & & \alpha'^0 \downarrow & & \alpha'^1 \downarrow & & \alpha'^2 \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{N} & \xrightarrow{\eta'} & \mathcal{J}^0 & \xrightarrow{d'_0} & \mathcal{J}^1 & \xrightarrow{d'_1} & \mathcal{J}^2 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

En la demostración de 6.7 se ve que podemos tomar $\Delta^{-1} = 0$, por lo que seguimos teniendo una homotopía al reducir los complejos, y es evidente que F transforma dicha homotopía en una homotopía entre los homomorfismos $(F\alpha^i)$ y $(F\alpha'^i)$, luego ambos inducen el mismo homomorfismo $D^n F(\alpha)$.

Observemos ahora que si tenemos una sucesión $\mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{N} \xrightarrow{\beta} \mathcal{P}$ y fijamos sendas resoluciones inyectivas de los tres módulos, al componer una extensión de α con una de β obtenemos una extensión de $\alpha\beta$, por lo que, usando ésta para hacer los cálculos, vemos que

$$D^n F(\alpha\beta) = D^n F(\alpha)D^n F(\beta).$$

Por otra parte, si fijamos una resolución inyectiva (\mathcal{J}^i) de un módulo \mathcal{M} , entonces una extensión de la identidad en \mathcal{M} está formada por las identidades en los módulos \mathcal{J}^i , de donde deducimos que $D^n F(1) = 1$.

Combinando estos dos hechos, concluimos que si $\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ es un isomorfismo entre dos módulos y tomamos resoluciones inyectivas arbitrarias de cada uno de ellos, entonces los homomorfismos $D^n F(\alpha)$ son isomorfismos, ya que cumplen

$$D^n F(\alpha) D^n F(\alpha^{-1}) = D^n F(1) = 1, \quad D^n F(\alpha^{-1}) D^n F(\alpha) = D^n F(1) = 1.$$

En particular, tomando $\mathcal{M} = \mathcal{N}$, concluimos que distintas resoluciones inyectivas de un mismo módulo \mathcal{M} dan lugar a grupos $D^n F(\mathcal{M})$ isomorfos, que es lo que queríamos probar.

Definición 6.8 Si X e Y son espacios anillados y $F : \text{Mod}(X) \rightarrow \text{Mod}(Y)$ es un funtor covariante exacto por la izquierda, se llama *functor derivado (derecho) n -ésimo* de F al funtor $D^n F : \text{Mod}(X) \rightarrow \text{Mod}(Y)$ que acabamos de construir.³

En la construcción de los funtores derivados no hemos usado en ningún momento que F sea exacto por la izquierda (hemos usado las propiedades que da el teorema 5.49, pero todas ellas las tienen también los funtores exactos por la derecha). La razón por la que esta construcción tiene interés especialmente en el caso de funtores exactos por la izquierda es el teorema siguiente:

Teorema 6.9 Si X e Y son espacios anillados y $F : \text{Mod}(X) \rightarrow \text{Mod}(Y)$ es un funtor covariante exacto por la izquierda, entonces $D^0 F$ es naturalmente equivalente a F , es decir, a cada \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} le corresponde un isomorfismo $\phi_{\mathcal{M}} : F\mathcal{M} \rightarrow D^0 F(\mathcal{M})$, de modo que si $\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ es un homomorfismo de \mathcal{O}_X -módulos, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} F\mathcal{M} & \xrightarrow{F\alpha} & F\mathcal{N} \\ \phi_{\mathcal{M}} \downarrow & & \downarrow \phi_{\mathcal{N}} \\ D^0 F(\mathcal{M}) & \xrightarrow{D^0 F(\alpha)} & D^0 F(\mathcal{N}) \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN: Para calcular $D^0 F(\mathcal{M})$ partimos de una resolución inyectiva

$$0 \rightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\eta} \mathcal{J}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{J}^1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{J}^2 \xrightarrow{d_2} \dots$$

Aplicando F a la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\eta} \mathcal{J}^0 \xrightarrow{d_0} \text{Im } d_0 \rightarrow 0$$

obtenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow F\mathcal{M} \xrightarrow{F\eta} F\mathcal{J}^0 \xrightarrow{Fd_0} F \text{Im } d_0.$$

³En realidad $D^n F(\mathcal{M})$ sólo está definido salvo isomorfismo, pero esto es un tecnicismo sin ninguna trascendencia en la teoría que vamos a desarrollar.

Por otra parte, $D^0F(\mathcal{M})$ se obtiene a partir del complejo

$$0 \longrightarrow F\mathcal{J}^0 \xrightarrow{Fd_0} F\mathcal{J}^1 \longrightarrow \dots$$

En definitiva, tenemos que $D^0F(\mathcal{M}) = \mathcal{N}(Fd_0) = \text{Im}(F\eta) \cong F\mathcal{M}$. Concretamente, el isomorfismo no es más que $F\eta : F\mathcal{M} \longrightarrow D^0F(\mathcal{M})$. Teniendo esto en cuenta, la conmutatividad del diagrama del enunciado es trivial. ■

En suma, tenemos que el funtor derivado D^0F es esencialmente el propio F . A su vez, esto tiene interés a causa de la conexión entre los funtores derivados que proporciona el teorema siguiente:

Teorema 6.10 *Si X e Y son espacios anillados, $F : \text{Mod}(X) \longrightarrow \text{Mod}(Y)$ es un funtor covariante exacto por la izquierda y $0 \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{N} \xrightarrow{\beta} \mathcal{P} \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de \mathcal{O}_X -módulos, entonces existen homomorfismos de \mathcal{O}_Y -módulos $\delta^n : D^nF(\mathcal{P}) \longrightarrow D^{n+1}F(\mathcal{M})$ que forman una sucesión exacta*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow D^0F(\mathcal{M}) \xrightarrow{D^0F\alpha} D^0F(\mathcal{N}) \xrightarrow{D^0F\beta} D^0F(\mathcal{P}) \\ \xrightarrow{\delta^0} D^1F(\mathcal{M}) \xrightarrow{D^1F\alpha} D^1F(\mathcal{N}) \xrightarrow{D^1F\beta} D^1F(\mathcal{P}) \xrightarrow{\delta^1} \dots \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN: Consideramos las resoluciones inyectivas dadas por el teorema 6.5. Los tres complejos reducidos forman una sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_1^n \longrightarrow \mathcal{J}_1^n \oplus \mathcal{J}_3^n \longrightarrow \mathcal{J}_3^n \longrightarrow 0,$$

donde los homomorfismos son la inyección y la proyección canónicas. Al aplicar F obtenemos una nueva sucesión exacta de complejos:

$$0 \longrightarrow F\mathcal{J}_1^n \longrightarrow F\mathcal{J}_1^n \oplus F\mathcal{J}_3^n \longrightarrow F\mathcal{J}_3^n \longrightarrow 0,$$

a la que podemos aplicar el teorema 6.3. ■

Nota Observemos que si partimos de un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{P} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}' & \longrightarrow & \mathcal{N}' & \longrightarrow & \mathcal{P}' \longrightarrow 0 \end{array}$$

con filas exactas, aplicando la nota posterior a 6.5 y luego la nota posterior a 6.3, concluimos que los homomorfismos inducidos por las flechas verticales entre los grupos de cohomología conmutan con los homomorfismos de conexión dados por el teorema o, lo que es lo mismo, que determinan un homomorfismo entre las sucesiones exactas largas correspondientes a cada una de las filas del diagrama. ■

Combinando los dos teoremas precedentes vemos que si tenemos un funtor covariante $F : \text{Mod}(X) \rightarrow \text{Mod}(Y)$ exacto por la izquierda y

$$0 \rightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{N} \xrightarrow{\beta} \mathcal{P} \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta de \mathcal{O}_X -módulos, entonces tenemos una sucesión exacta de \mathcal{O}_Y -módulos

$$0 \rightarrow F\mathcal{M} \xrightarrow{F\alpha} F\mathcal{N} \xrightarrow{F\beta} F\mathcal{P} \xrightarrow{\delta^1} D^1F\mathcal{M} \rightarrow D^1F\mathcal{N} \rightarrow D^1F\mathcal{P} \rightarrow \dots,$$

de modo que los funtores derivados “completan” la inexactitud de F . Por consiguiente, es claro que si $D^1F = 0$ entonces F es exacto. Más aún, es fácil ver que los funtores exactos cumplen que $D^nF = 0$ para todo $n \geq 1$.

Observemos ahora que si \mathcal{J} es un \mathcal{O}_X -módulo inyectivo, entonces una resolución inyectiva de \mathcal{J} es simplemente

$$0 \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Al reducir la resolución y aplicar F obtenemos

$$0 \rightarrow F\mathcal{J} \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

de donde concluimos que $D^nF(\mathcal{J}) = 0$ para $n \geq 1$.

Aunque hemos definido los funtores derivados en términos de módulos inyectivos, a la hora de hacer cálculos concretos, éstos no son fáciles de manejar explícitamente, pero a continuación demostramos que es posible sustituirlos por otros que puedan ser más convenientes.

Definición 6.11 Sean X e Y espacios anillados y $F : \text{Mod}(X) \rightarrow \text{Mod}(Y)$ un funtor covariante exacto por la izquierda. Un \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} es *acíclico* para F si $D^iF(\mathcal{M}) = 0$ para todo $i \geq 1$.

Así, acabamos de probar que los \mathcal{O}_X -módulos inyectivos son acíclicos para cualquier funtor.

Una *resolución acíclica* de \mathcal{M} (para un funtor F) es una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{J}^0 \rightarrow \mathcal{J}^1 \rightarrow \mathcal{J}^2 \rightarrow \dots$$

tal que todos los módulos \mathcal{J}^i son acíclicos.

Teorema 6.12 Si X e Y son espacios anillados y $F : \text{Mod}(X) \rightarrow \text{Mod}(Y)$ es un funtor exacto por la izquierda, los funtores derivados de F pueden calcularse a partir de cualquier resolución acíclica de un \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} dado, no necesariamente inyectiva.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos una resolución acíclica

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{J}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{J}^1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{J}^2 \xrightarrow{d_2} \dots$$

Calcular los funtores derivados con ella significa pasar al complejo

$$0 \longrightarrow F\mathcal{J}^0 \xrightarrow{Fd_0} F\mathcal{J}^1 \xrightarrow{Fd_1} F\mathcal{J}^2 \xrightarrow{Fd_2} \dots$$

y calcular

$$\mathcal{F}^0(\mathcal{M}) = \mathcal{N}F(d_0), \quad \mathcal{F}^i(\mathcal{M}) = \mathcal{N}F(d_i)/\text{Im}Fd_{i-1}, \text{ para } i \geq 1.$$

Hemos de probar que $\mathcal{F}^i(\mathcal{M}) \cong D^iF(\mathcal{M})$ para $i \geq 0$. El mismo argumento empleado en el teorema 6.9 prueba que $\mathcal{F}^0(\mathcal{M}) \cong F\mathcal{M} \cong D^0F(\mathcal{M})$, luego nos queda probar el isomorfismo para $i \geq 1$.

Sea $\mathcal{N}^i = \mathcal{N}(d_i)$. Tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}^{i-1} \longrightarrow \mathcal{J}^{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \mathcal{N}^i \longrightarrow 0,$$

de la que obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow D^0F(\mathcal{N}^{i-1}) \xrightarrow{\alpha} D^0F(\mathcal{J}^{i-1}) \xrightarrow{\beta} D^0F(\mathcal{N}^i) \xrightarrow{\delta} D^1F(\mathcal{N}^{i-1}) \longrightarrow 0,$$

así como isomorfismos $D^jF(\mathcal{N}^i) \cong D^{j+1}F(\mathcal{N}^{i-1})$, para $j \geq 1$.

Así pues, para $i \geq 1$,

$$D^iF(\mathcal{M}) \cong D^iF(\mathcal{N}^0) \cong D^{i-1}F(\mathcal{N}^1) \cong \dots \cong D^1F(\mathcal{N}^{i-1}) \cong D^0F(\mathcal{N}^i)/\text{Im}\beta.$$

Por otra parte, consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} & & D^0F(\mathcal{N}^{i-1}) & & \\ & \nearrow & & \searrow \alpha & \\ D^0F(\mathcal{J}^{i-2}) & \xrightarrow{D^0F(d_{i-2})} & D^0F(\mathcal{J}^{i-1}) & \xrightarrow{D^0F(d_{i-1})} & D^0F(\mathcal{J}^i) \\ & & \searrow \beta & & \nearrow \alpha' \\ & & & D^0F(\mathcal{N}^i) & \end{array}$$

donde convenimos que $\mathcal{J}^{-1} = \mathcal{M}$ y $d_{-1} = \epsilon$. Sabemos que α es inyectiva, y también lo es α' , pues es el homomorfismo análogo a α con i en lugar de $i-1$. Así pues,

$$\text{Im}\beta \cong \text{Im}D^0F(d_{i-1}), \quad \text{Im}\alpha \cong \mathcal{N}D^0F(d_{i-1}).$$

Ahora bien, el segundo isomorfismo es válido también cambiando α por α' e $i-1$ por i , de modo que α' determina un isomorfismo entre $D^0F(\mathcal{N}^i)$

y $\mathbb{N}D^0F(d_i)$, que se restringe a un isomorfismo entre $\text{Im } \beta$ e $\text{Im } D^0F(d_{i-1})$. Consecuentemente,

$$\begin{aligned} D^iF(\mathcal{M}) &\cong D^0F(\mathcal{N}^i)/\text{Im } \beta \cong \mathbb{N}D^0F(d_i) / \text{Im } D^0F(d_{i-1}) \\ &\cong \mathbb{N}F(d_i)/\text{Im } F(d_{i-1}) \cong \mathcal{F}^i(\mathcal{M}). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Nota Es importante observar que los isomorfismos del teorema anterior son naturales, es decir, que si tenemos un homomorfismo de resoluciones acíclicas

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{M} & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{J}^0 & \xrightarrow{d_0} & \mathcal{J}^1 & \xrightarrow{d_1} & \mathcal{J}^2 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{N} & \xrightarrow{\epsilon'} & \mathcal{J}^0 & \xrightarrow{d_0} & \mathcal{J}^1 & \xrightarrow{d_1} & \mathcal{J}^2 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

entonces tenemos diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} D^iF(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \mathcal{F}^i(\mathcal{M}) \\ D^iF(f) \downarrow & & \downarrow \bar{f}_i \\ D^iF(\mathcal{N}) & \longrightarrow & \mathcal{F}^i(\mathcal{N}) \end{array}$$

donde \bar{f}_i es el homomorfismo inducido por f_i entre los grupos de cohomología de las resoluciones dadas. En particular, si f es un isomorfismo, lo mismo vale para $D^iF(f)$ y, por consiguiente, para \bar{f}_i . ■

Definición 6.13 Si X e Y son espacios anillados y $F : \text{Mod}(X) \longrightarrow \text{Mod}(Y)$ es un funtor contravariante exacto por la derecha, sus *funtores derivados (izquierdos)* I^nF se definen de forma completamente análoga a los funtores derivados derechos de un funtor covariante exacto por la izquierda.⁴ La única diferencia es que al aplicar F a una resolución inyectiva de un módulo pasamos a un complejo directo, pero esto no afecta en nada a ninguno de los argumentos que hemos empleado y todos los resultados siguen siendo válidos. Los funtores I^nF son ahora contravariantes, como F .

Por el contrario, los *funtores derivados izquierdos* de un funtor covariante exacto por la derecha y los *funtores derivados derechos* de un funtor contravariante exacto por la izquierda han de definirse con resoluciones proyectivas en lugar de inyectivas, por lo que sólo existen en la medida en que la categoría $\text{Mod}(X)$ tenga suficientes proyectivos. En particular, podemos definirlos para funtores sobre la categoría de los módulos sobre un anillo.

⁴Izquierdo / derecho hace referencia a hacia dónde avanzan los funtores derivados en la sucesión exacta larga que determinan.

6.4 Caracterización axiomática

Podría pensarse que la construcción de los funtores derivados de un funtor dado es un tanto caprichosa o arbitraria, pero en esta sección demostraremos que estos funtores están completamente determinados por sus propiedades fundamentales, de modo que la forma concreta de construirlos pasa a ser irrelevante. El primer paso para aislar estas propiedades fundamentales que determinan a los funtores derivados es definir con precisión la noción de “homomorfismo de conexión” que aparece implícita en el teorema 6.10:

Definición 6.14 Sean X e Y dos espacios anillados y $(T^n)_{n \geq 0}$ una sucesión de funtores covariantes $T^n : \text{Mod}(X) \rightarrow \text{Mod}(Y)$. Un *homomorfismo de conexión derecho* para dicha sucesión es una aplicación que a cada sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{N} \xrightarrow{\beta} \mathcal{P} \longrightarrow 0$$

de \mathcal{O}_X -módulos le hace corresponder una sucesión de homomorfismos de \mathcal{O}_Y -módulos $\delta_n : T^n \mathcal{P} \rightarrow T^{n+1} \mathcal{M}$ tales que la sucesión

$$0 \longrightarrow T^0 \mathcal{M} \xrightarrow{T^0 \alpha} T^0 \mathcal{N} \xrightarrow{T^0 \beta} T^0 \mathcal{P} \xrightarrow{\delta_0} T^1 \mathcal{M} \xrightarrow{T^1 \alpha} T^1 \mathcal{N} \xrightarrow{T^1 \beta} T^1 \mathcal{P} \xrightarrow{\delta_1} \dots$$

es exacta y, para todo homomorfismo de sucesiones exactas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{M} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{N} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{P} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \phi & & \downarrow \chi & & \downarrow \psi & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}' & \xrightarrow{\alpha'} & \mathcal{N}' & \xrightarrow{\beta'} & \mathcal{P}' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & T^0 \mathcal{M} & \xrightarrow{T^0 \alpha} & T^0 \mathcal{N} & \xrightarrow{T^0 \beta} & T^0 \mathcal{P} & \xrightarrow{\delta_0} & T^1 \mathcal{M} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow T^0 \phi & & \downarrow T^0 \chi & & \downarrow T^0 \psi & & \downarrow T^1 \phi & & \\ 0 & \longrightarrow & T^0 \mathcal{M}' & \xrightarrow{T^0 \alpha'} & T^0 \mathcal{N}' & \xrightarrow{T^0 \beta'} & T^0 \mathcal{P}' & \xrightarrow{\delta_0} & T^1 \mathcal{M}' & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Los homomorfismos de conexión izquierdos se definen análogamente, salvo que las sucesiones exactas largas forman complejos directos en lugar de inversos. Igualmente se definen de forma obvia los homomorfismos de conexión derechos e izquierdos de una familia de funtores contravariantes.

El teorema 6.10 y la nota posterior demuestran que los funtores derivados derechos de un funtor covariante exacto por la izquierda tienen un homomorfismo de conexión derecha, y lo mismo es válido *mutatis mutandis* en los otros tres casos posibles.

Diremos que una sucesión de funtores $(T^n)_{n \geq 0}$ dotada de un homomorfismo de conexión por la derecha es *universal* si cuando $(T'^n)_{n \geq 0}$ es otra sucesión

de funtores (de la misma varianza) dotada también de un homomorfismo de conexión y $\eta_0 : T^0 \rightarrow T'^0$ es una transformación natural, existe una única sucesión de transformaciones naturales $\eta_n : T^n \rightarrow T'^n$ (que empieza con el η_0 dado) tal que, para cada sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow 0,$$

los diagramas siguientes son conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} T^n \mathcal{P} & \xrightarrow{\delta_n} & T^{n+1} \mathcal{M} \\ \eta_{n, \mathcal{P}} \downarrow & & \downarrow \eta_{n+1, \mathcal{M}} \\ T'^n \mathcal{P} & \xrightarrow{\delta'_n} & T'^{n+1} \mathcal{M} \end{array}$$

La definición se adapta de forma obvia al caso en que los homomorfismos de conexión son izquierdos.

Observemos que si (T^n) y (T'^n) son dos sucesiones universales de funtores dotados de un homomorfismo de conexión y $\eta_0 : T^0 \rightarrow T'^0$ es una equivalencia natural, entonces todas las transformaciones naturales $\eta_n : T^n \rightarrow T'^n$ son equivalencias, cuyas inversas son las transformaciones naturales η_n^{-1} obtenidas a partir de η_0^{-1} por la universalidad de (T'_n) . En efecto, se comprueba inmediatamente que las transformaciones naturales $\eta_n \circ \eta_n^{-1}$ cumplen la definición anterior para la identidad $T^0 \rightarrow T^0$, luego por la unicidad ha de ser $\eta_n \circ \eta_n^{-1} = 1$, e igualmente $\eta_n^{-1} \circ \eta_n = 1$.

Esto significa que en un sistema $(T^n)_{n \geq 0}$ universal, tanto los funtores T^n , para $n \geq 1$, como el homomorfismo de conexión, están completamente determinados (salvo equivalencia natural) por el functor T^0 . Los funtores $(T^n)_{n \geq 1}$ se llaman *satélites* de T^0 . El teorema que vamos a probar es una condición suficiente para que un sistema de funtores sea universal.

Teorema 6.15 Sean X e Y dos espacios anillados y $(T^n)_{n \geq 0}$ una sucesión de funtores covariantes $T^n : \text{Mod}(X) \rightarrow \text{Mod}(Y)$ dotada de un homomorfismo de conexión derecho. Supongamos que para cada \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} y cada $n \geq 1$ existe un monomorfismo $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{J}$, donde \mathcal{J} es un \mathcal{O}_X -módulo tal que $T^n \mathcal{J} = 0$. Entonces la sucesión dada es universal.

DEMOSTRACIÓN: Sea $(T'^n)_{n \geq 0}$ otra sucesión de funtores covariantes dotada también de un homomorfismo de conexión derecho y sea $\eta_0 : T^0 \rightarrow T'^0$ una transformación natural.

Dado un \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} , podemos formar una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 0,$$

donde $T^1 \mathcal{J} = 0$ y $\mathcal{C} = \mathcal{J}/\mathcal{M}$. A partir de ella obtenemos el siguiente diagrama

conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & T^0\mathcal{M} & \longrightarrow & T^0\mathcal{J} & \longrightarrow & T^0\mathcal{C} & \xrightarrow{\delta_1} & T^1\mathcal{M} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \eta_{0\mathcal{M}} \downarrow & & \eta_{0\mathcal{J}} \downarrow & & \eta_{0\mathcal{C}} \downarrow & & \eta_{1\mathcal{M}} \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & T'^0\mathcal{M} & \longrightarrow & T'^0\mathcal{J} & \longrightarrow & T'^0\mathcal{C} & \xrightarrow{\delta'_1} & T'^1\mathcal{M} & \longrightarrow & T'^1\mathcal{J}
 \end{array}$$

Es claro que existe un único homomorfismo $\eta_{1\mathcal{M}} : T^1\mathcal{M} \longrightarrow T'^1\mathcal{M}$ que hace conmutativo el último cuadrado.

Observemos que el funtor T^0 es exacto por la izquierda, lo que nos permite aplicar esto en particular al caso en que (T'^n) es la sucesión de funtores derivados de T^0 y η_0 es la equivalencia natural. Entonces las tres primeras flechas verticales del diagrama anterior son isomorfismos y es claro que la cuarta es, al menos, un monomorfismo. Si, más en particular, aplicamos esto al caso en que \mathcal{M} es un \mathcal{O}_X -módulo inyectivo, entonces $T'^1\mathcal{M} = 0$, luego también $T^1\mathcal{M} = 0$.

Así pues, hemos probado que T^1 se anula sobre los módulos inyectivos. Por consiguiente, podemos volver a empezar tomando como \mathcal{J} un módulo inyectivo.

En el caso particular en que (T'^n) sea la sucesión de funtores derivados de T^0 , ahora tenemos que $T'^1\mathcal{J} = 0$, luego el diagrama anterior nos da que $\eta_{1\mathcal{M}}$ es un isomorfismo.

Consideremos ahora un homomorfismo de \mathcal{O}_X -módulos $\alpha : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$. Sumergiendo ambos en sendos módulos inyectivos obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{J} & \longrightarrow & \mathcal{C} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \alpha \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{J}' & \longrightarrow & \mathcal{C}' & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

(El homomorfismo $\mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}'$ se obtiene por la inyectividad de \mathcal{J}' , que a su vez induce un homomorfismo entre los cocientes \mathcal{C} y \mathcal{C}' .)

Ahora tenemos los dos diagramas conmutativos correspondientes a la construcción de $\eta_{1\mathcal{M}}$ y $\eta_{1\mathcal{N}}$ así como los dos diagramas conmutativos correspondientes a la definición de homomorfismo de conexión y al homomorfismo α . Todos ellos se combinan en un diagrama en forma de tres cubos yuxtapuestos, cuyas caras comunes conmutan, además, por la naturalidad de η_0 . De ahí se sigue fácilmente la conmutatividad de la última cara, que es

$$\begin{array}{ccc}
 T^1\mathcal{M} & \xrightarrow{T^1\alpha} & T^1\mathcal{N} \\
 \eta_{1\mathcal{M}} \downarrow & & \downarrow \eta_{1\mathcal{N}} \\
 T'^1\mathcal{M} & \xrightarrow{T'^1\alpha} & T'^1\mathcal{N}
 \end{array}$$

Si aplicamos esto en particular cuando α es la identidad en \mathcal{M} vemos que $\eta_{1\mathcal{M}}$ no depende de la elección del módulo inyectivo \mathcal{J} , luego tenemos una transformación natural bien definida $\eta_1 : T^1 \longrightarrow T'^1$ que, por construcción, es la única que

conmuta con ciertos homomorfismos de conexión (los asociados a inmersiones de un módulo dado en un módulo inyectivo). Si probamos que conmuta con todos los homomorfismos de conexión, obviamente será la única que lo haga.

Fijemos, pues una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow 0$$

y consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{P} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow \phi & & \downarrow \chi \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{J} & \longrightarrow & \mathcal{C} \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde \mathcal{J} es un \mathcal{O}_X -módulo inyectivo. De él obtenemos a su vez el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} T^0\mathcal{P} & \xrightarrow{T^0\chi} & T^0\mathcal{C} & \xrightarrow{\delta_0} & T^1\mathcal{M} \\ \eta_{0\mathcal{P}} \downarrow & & \eta_{0\mathcal{C}} \downarrow & & \eta_{1\mathcal{M}} \downarrow \\ T'^0\mathcal{P} & \xrightarrow{T'^0\chi} & T'^0\mathcal{C} & \xrightarrow{\delta'_0} & T'^1\mathcal{M} \end{array}$$

El primer cuadrado conmuta por la naturalidad de η_0 , mientras que el segundo conmuta por la construcción de η_1 . Por otra parte, la definición de homomorfismo de conexión aplicada al homomorfismo $(1, \phi, \chi)$ de sucesiones exactas nos da que las composiciones de las dos filas del diagrama anterior son precisamente los homomorfismos de conexión para la sucesión exacta de partida. Esto termina la construcción de η_1 . Ahora procedemos por inducción y suponemos construidas transformaciones naturales η_0, \dots, η_n que conmuten con los homomorfismos de conexión. También podemos suponer que los funtores T^1, \dots, T^n son equivalentes a los funtores derivados de T^0 .

Fijado un \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} , formamos nuevamente una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0,$$

donde $T^{n+1}\mathcal{J} = 0$ y $\mathcal{C} = \mathcal{J}/\mathcal{M}$, de la que deducimos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} T^n\mathcal{J} & \longrightarrow & T^n\mathcal{C} & \xrightarrow{\delta_n} & T^{n+1}\mathcal{M} & \longrightarrow & 0 \\ \eta_{n\mathcal{J}} \downarrow & & \eta_{n\mathcal{C}} \downarrow & & \eta_{n+1\mathcal{M}} \downarrow & & \\ T'^n\mathcal{J} & \longrightarrow & T'^n\mathcal{C} & \xrightarrow{\delta'_{n+1}} & T'^{n+1}\mathcal{M} & \longrightarrow & T'^{n+1}\mathcal{J} \end{array}$$

que nos da un homomorfismo $\eta_{n+1\mathcal{M}}$, el único que conmuta con los homomorfismos de conexión.

En el caso particular en que (T'_n) es la sucesión de los funtores derivados de T^0 , tenemos, por hipótesis de inducción, que $\eta_{n\mathcal{C}}$ es un isomorfismo, por lo

que $\eta_{n+1\mathcal{M}}$ es un monomorfismo, y si \mathcal{M} es inyectivo resulta que $T^{n+1}\mathcal{M} = 0$. Empezamos de nuevo tomando \mathcal{J} inyectivo, y entonces $T^n\mathcal{J} = 0$ en el diagrama anterior. Todas las comprobaciones que faltan son más sencillas que las que hemos hecho en el caso $n = 0$. ■

Teniendo en cuenta que los funtores derivados se anulan sobre \mathcal{O}_X -módulos inyectivos y que todo \mathcal{O}_X -módulo puede sumergirse en un \mathcal{O}_X -módulo inyectivo, el teorema anterior implica en particular:

Teorema 6.16 *Si T es un funtor covariante exacto por la izquierda, entonces la sucesión $\{D^n T\}_{n \geq 0}$ de sus funtores derivados es universal con $D^0 T$ equivalente a T .*

Nota La prueba del teorema 6.15 —y, por consiguiente, también la del teorema anterior— se adapta de forma obvia al caso de una sucesión de funtores contravariantes con un homomorfismo de conexión izquierdo, mientras que los otros dos casos posibles (funtores covariantes con homomorfismo de conexión izquierdo y contravariantes con homomorfismo de conexión derecho) requieren que la categoría tenga suficientes proyectivos, lo cual se cumple, en particular, en el caso de categorías de módulos sobre un anillo. ■

Capítulo VII

Ejemplos de funtores derivados

En este capítulo vamos a estudiar tres ejemplos concretos de funtores derivados. En el capítulo XII, cuya lectura puede combinarse con la de éste, se muestran varias aplicaciones a la homología singular.

7.1 Productos de torsión

El teorema 5.28 prueba que si A es un anillo y N es un A -módulo, el funtor covariante

$$- \otimes_A N : \text{Mód}(A) \longrightarrow \text{Mód}(A)$$

es exacto por la derecha. Como la categoría de los A -módulos tiene suficientes proyectivos (todo A -módulo es imagen de un A -módulo libre), todo A -módulo tiene una resolución proyectiva que, más concretamente, puede tomarse libre: Tomamos un epimorfismo $L_0 \longrightarrow M$, con L_0 libre, luego otro de otro módulo libre L_1 en el núcleo del anterior, con lo que obtenemos una sucesión exacta $L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M$ y continuamos el proceso indefinidamente hasta obtener una resolución

$$\cdots \longrightarrow L_2 \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Un caso especialmente simple se da cuando A es un dominio de ideales principales, pues entonces se cumple [Al 4.41] que todo submódulo de un A -módulo libre es libre. Por lo tanto, podemos tomar como L_1 el núcleo del epimorfismo precedente y la resolución libre se reduce a

$$0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0. \quad (7.1)$$

En el caso general, el hecho es que tenemos definidos los funtores derivados izquierdos de tensor $- \otimes_A N$ (definición 6.13):

Definición 7.1 Si A es un anillo y N es un A -módulo, llamamos $\text{Tor}_n^A(-, N)$ a los funtores derivados izquierdos del funtor $- \otimes_A N$.

Explícitamente, si

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

es una resolución proyectiva de un A -módulo M , entonces $\text{Tor}_n^A(M, N)$ es el n -simo grupo de homología del complejo

$$\cdots \longrightarrow P_2 \otimes_A N \longrightarrow P_1 \otimes_A N \longrightarrow P_0 \otimes_A N \longrightarrow 0.$$

El teorema 6.9 nos da isomorfismos naturales $\text{Tor}_0^A(M, N) \cong M \otimes_A N$ y el hecho más relevante es el teorema 6.10, que se particulariza al teorema siguiente:

Teorema 7.2 *Si A es un anillo y*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0,$$

es una sucesión exacta corta de A -módulos, existen homomorfismos de conexión $\delta^n : \text{Tor}_{n+1}^A(M, N) \longrightarrow \text{Tor}_n^A(M, N)$ que dan lugar a una sucesión exacta larga

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \text{Tor}_2^A(M'', N) \xrightarrow{\delta^1} \text{Tor}_1^A(M', N) \longrightarrow \text{Tor}_1^A(M, N) \longrightarrow \text{Tor}_1^A(M'', N) \\ \xrightarrow{\delta^0} M' \otimes_A N \longrightarrow M \otimes_A N \longrightarrow M'' \otimes_A N \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

De acuerdo con la nota posterior a 6.10, esta correspondencia es funtorial, en el sentido de que un homomorfismo entre sucesiones exactas cortas induce un homomorfismo entre las correspondientes sucesiones exactas largas.

Vamos a estudiar con más detalle estos funtores $\text{Tor}_n^A(-, N)$. En primer lugar observamos que en realidad podemos definir funtores covariantes

$$\text{Tor}_n^A : \text{Mód}(A) \times \text{Mód}(A) \longrightarrow \text{Mód}(A).$$

Esto requiere definir (functorialmente), para cada par de homomorfismos de A -módulos $f : M \longrightarrow M'$, $g : N \longrightarrow N'$ un homomorfismo

$$\text{Tor}_n^A(f, g) : \text{Tor}_n^A(M, N) \longrightarrow \text{Tor}_n^A(M', N').$$

Para ello observamos que si \mathcal{C} y \mathcal{C}' son resoluciones libres de M y M' , respectivamente, digamos

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_2 & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & \downarrow f \\ \cdots & \longrightarrow & C'_2 & \longrightarrow & C'_1 & \longrightarrow & C'_0 \longrightarrow M' \longrightarrow 0 \end{array}$$

entonces f se extiende a un homomorfismo de complejos $\bar{f} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ y dos extensiones cualesquiera son homotópicas. Ésta determina a su vez un homomorfismo de complejos

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_2 \otimes_A N & \longrightarrow & C_1 \otimes_A N & \longrightarrow & C_0 \otimes_A N \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_2 \otimes g & & \downarrow f_1 \otimes g & & \downarrow f_0 \otimes g \\ \cdots & \longrightarrow & C'_2 \otimes_A N' & \longrightarrow & C'_1 \otimes_A N' & \longrightarrow & C'_0 \otimes_A N' \longrightarrow 0 \end{array}$$

y si \bar{f} y \bar{f}' son dos extensiones homotópicas de f , también son homotópicas $\bar{f} \otimes g$ y $\bar{f}' \otimes g$, luego los homomorfismos que inducen en los grupos de homología de estos complejos son independientes de la elección de la extensión. Son estos homomorfismos los que definimos como

$$\mathrm{Tor}_n^A(f, g) : \mathrm{Tor}_n^A(M, N) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^A(M', N').$$

Es inmediato comprobar que son funtoriales.

Así podemos ver a Tor_n^A como un funtor de dos argumentos, cuyo papel en el cálculo de $\mathrm{Tor}_n^A(M, N)$ es asimétrico, ya que los cálculos se hacen mediante resoluciones proyectivas de M manteniendo N fijo. Pero el funtor $M \otimes_A -$ tiene las mismas propiedades que $- \otimes_A M$, luego podemos considerar sus derivados izquierdos $\overline{\mathrm{Tor}}_n^A(M, -)$, que a su vez definen funtores

$$\overline{\mathrm{Tor}}_n^A : \mathrm{Mód}(A) \times \mathrm{Mód}(A) \longrightarrow \mathrm{Mód}(A).$$

La diferencia entre $\mathrm{Tor}_n^A(M, N)$ y $\overline{\mathrm{Tor}}_n^A(M, N)$ es que el primero se calcula mediante una resolución proyectiva de M y el segundo mediante una resolución proyectiva de N . Sin embargo, vamos a ver que esta diferencia es sólo aparente, pues ambos funtores son naturalmente equivalentes, por lo que no tendremos necesidad de distinguirlos:

Teorema 7.3 *Los funtores Tor_n^A y $\overline{\mathrm{Tor}}_n^A$ son naturalmente equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos en primer lugar que el funtor covariante

$$\overline{\mathrm{Tor}}_n^A(-, N) : \mathrm{Mód}(A) \longrightarrow \mathrm{Mód}(A)$$

es naturalmente equivalente al funtor $\mathrm{Tor}_n^A(-, N)$ usando la versión dual del teorema 6.15. En primer lugar demostramos que los funtores $\overline{\mathrm{Tor}}_n^A(-, N)$ tienen un homomorfismo de conexión. En efecto, fijamos una resolución libre

$$\cdots \longrightarrow L_2 \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

y ahora consideramos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

Por 5.31 también es exacta la sucesión de complejos

$$0 \longrightarrow M' \otimes_A (L_i) \longrightarrow M \otimes_A (L_i) \longrightarrow M'' \otimes_A (L_i) \longrightarrow 0,$$

y esta sucesión da lugar a una sucesión exacta larga entre los grupos de homología, que son los módulos $\overline{\mathrm{Tor}}_n^A(M', N)$, $\overline{\mathrm{Tor}}_n^A(M, N)$ y $\overline{\mathrm{Tor}}_n^A(M'', N)$. También es obvio que un homomorfismo entre dos sucesiones exactas cortas induce un homomorfismo entre las sucesiones exactas de complejos que, a su vez, induce un isomorfismo entre las sucesiones de homología.

Si L es libre, como el funtor $L \otimes_A -$ es exacto, resulta que $\overline{\text{Tor}}_n^A(L, N) = 0$ para $n \geq 1$, luego la familia $(\overline{\text{Tor}}_n^A(-, N))$ es universal. Sólo falta probar que $\overline{\text{Tor}}_0^A(-, N) \cong \otimes_A N$. Para ello aplicamos a la sucesión exacta

$$L_1 \xrightarrow{\partial_0} L_0 \xrightarrow{\epsilon} N \longrightarrow 0$$

la exactitud por la derecha de $M \otimes_A -$, que nos da una sucesión exacta

$$M \otimes_A L_1 \xrightarrow{1 \otimes \partial_0} M \otimes_A L_0 \xrightarrow{1 \otimes \epsilon} M \otimes_A N \longrightarrow 0.$$

Tenemos que $\overline{\text{Tor}}_n^A(M, N) = (M \otimes_A L_0) / \text{Im}(1 \otimes \partial_0) \cong M \otimes_A N$, y el isomorfismo es el inducido por $1 \otimes \epsilon$, lo que implica fácilmente que se trata de un isomorfismo de funtores.

Concluimos que existen equivalencias naturales

$$\eta_{-,N}^n : \overline{\text{Tor}}_n^A(-, N) \longrightarrow \text{Tor}_n^A(-, N).$$

Así, para cada A -módulo M , tenemos que $\eta_{M,N}^n : \overline{\text{Tor}}_n^A(M, N) \longrightarrow \text{Tor}_n^A(M, N)$ es un isomorfismo de módulos.

Si $f : M \longrightarrow M'$ y $g : N \longrightarrow N'$ son homomorfismos de módulos, consideramos el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} \overline{\text{Tor}}_n^A(M, N) & \xrightarrow{\overline{\text{Tor}}_n^A(1_M, g)} & \overline{\text{Tor}}_n^A(M, N') & \xrightarrow{\overline{\text{Tor}}_n^A(f, 1_{N'})} & \overline{\text{Tor}}_n^A(M', N') \\ \eta_{M,N}^n \downarrow & & \eta_{M,N'}^n \downarrow & & \eta_{M',N'}^n \downarrow \\ \text{Tor}_n^A(M, N) & \xrightarrow{\text{Tor}_n^A(1_M, g)} & \text{Tor}_n^A(M, N') & \xrightarrow{\text{Tor}_n^A(f, 1_{N'})} & \text{Tor}_n^A(M', N') \end{array}$$

Las filas horizontales son $\overline{\text{Tor}}_n^A(f, g)$ y $\text{Tor}_n^A(f, g)$, respectivamente, y el cuadrado de la derecha es conmutativo por la naturalidad de $\eta_{-,N'}^n$. Si probamos que el primero también lo es, tendremos que $\eta^n : \overline{\text{Tor}}_n^A \longrightarrow \text{Tor}_n^A$ es una equivalencia natural.

Para ello observamos que las aplicaciones

$$\zeta_{-,g}^n : \text{Tor}_n^A(-, N) \longrightarrow \text{Tor}_n^A(-, N'), \quad \bar{\zeta}_{-,g}^n : \overline{\text{Tor}}_n^A(-, N) \longrightarrow \overline{\text{Tor}}_n^A(-, N')$$

dadas por $\zeta_{M,g}^n = \text{Tor}_n^A(1_M, g)$, $\bar{\zeta}_{M,g}^n = \overline{\text{Tor}}_n^A(1_M, g)$, respectivamente, son transformaciones naturales que conservan los homomorfismos de conexión. En efecto, dada una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0,$$

el teorema 6.6 nos da resoluciones proyectivas de los tres módulos que forman una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'' \longrightarrow 0$$

con $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}''$. Esto hace que al aplicar $-\otimes_A N$ y $-\otimes_A N'$ la sucesión siga siendo exacta (por 5.29) y tengamos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}' \otimes_A N & \longrightarrow & \mathcal{C} \otimes_A N & \longrightarrow & \mathcal{C}'' \otimes_A N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow 1 \otimes g & & \downarrow 1 \otimes g & & \downarrow 1 \otimes g & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}' \otimes_A N' & \longrightarrow & \mathcal{C} \otimes_A N' & \longrightarrow & \mathcal{C}'' \otimes_A N' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Al aplicar el teorema 4.11 obtenemos la conmutatividad de los homomorfismos $\zeta_{M'',g}$ y $\zeta_{M',g}$ con los homomorfismos de conexión de las sucesiones exactas largas determinadas por $\text{Tor}_n^A(-, N)$ y $\text{Tor}_n^A(-, N')$.

Igualmente, si \mathcal{C} y \mathcal{C}' son resoluciones libres de N y N' , respectivamente, tenemos que g determina un homomorfismo de complejos $\bar{g} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, lo que nos da un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' \otimes_A \mathcal{C} & \longrightarrow & M \otimes_A \mathcal{C} & \longrightarrow & M'' \otimes_A \mathcal{C} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow 1 \otimes \bar{g} & & \downarrow 1 \otimes \bar{g} & & \downarrow 1 \otimes \bar{g} & & \\ 0 & \longrightarrow & M' \otimes_A \mathcal{C}' & \longrightarrow & M \otimes_A \mathcal{C}' & \longrightarrow & M'' \otimes_A \mathcal{C}' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

y de nuevo basta aplicar 4.11 para concluir que los homomorfismos $\bar{\zeta}_{M'',g}$ y $\bar{\zeta}_{M',g}$ conmutan con los homomorfismos de conexión de las sucesiones exactas largas determinadas por $\overline{\text{Tor}}_n^A(-, N)$ y $\overline{\text{Tor}}_n^A(-, N')$.

Pero esto implica que $(\eta_{-,N}^n)^{-1} \circ \bar{\zeta}_{-,g}^n \circ \eta_{-,N'}^n$ también conserva los homomorfismos de conexión, luego, por la unicidad de la definición de sucesión universal, tiene que ser $(\eta_{-,N}^n)^{-1} \circ \bar{\zeta}_{-,g}^n \circ \eta_{-,N'}^n = \zeta_{-,g}^n$, lo que nos da la conmutatividad del cuadrado de la izquierda del diagrama precedente. ■

En la práctica, el teorema anterior afirma que los funtores $\text{Tor}_n^A(M, N)$ pueden calcularse indistintamente tomando resoluciones proyectivas de M y multiplicando por N o viceversa.

Como consecuencia tenemos que Tor es conmutativo:

Teorema 7.4 *Si A es un anillo, cada functor $\text{Tor}_n^{A*}(M, N) = \text{Tor}_n^A(N, M)$ es naturalmente equivalente a $\text{Tor}_n^A(M, N)$.*

DEMOSTRACIÓN: Es evidente que el functor $-\otimes_A N$ es naturalmente equivalente a $N \otimes_A -$, de donde se sigue sin dificultad que cada functor Tor_n^{A*} es naturalmente equivalente a $\overline{\text{Tor}}_n^A$ (pues el cálculo de uno se diferencia del del otro únicamente en el orden de los factores en los productos tensoriales), pero por el teorema anterior éstos son naturalmente equivalentes a los funtores Tor_n^A . ■

Nota Lo que afirma el teorema anterior es que para cada par de A -módulos M y N existen isomorfismos $\text{Tor}_n^A(M, N) \cong \text{Tor}_n^A(NM)$ y si $f : M \rightarrow M'$ y

$g : N \rightarrow N'$ son homomorfismos, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Tor}_n^A(M, N) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_n^A(N, M) \\ \mathrm{Tor}(f, g) \downarrow & & \downarrow \mathrm{Tor}(g, f) \\ \mathrm{Tor}_n^A(M', N') & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_n^A(N', M') \end{array} \quad \blacksquare$$

Un hecho elemental es que si N es de hecho un A - \mathbb{A} -bimódulo, entonces todos los A -módulos considerados en la construcción de $\mathrm{Tor}_n^A(M, N)$, a partir de la aplicación del producto tensorial $-\otimes_A N$, son A - \mathbb{A} -bimódulos de forma natural, y lo mismo sucede con los propios módulos $\mathrm{Tor}_n^A(M, N)$, y los homomorfismos inducidos por homomorfismos de A - \mathbb{A} -bimódulos son a su vez homomorfismos de A - \mathbb{A} -bimódulos, incluidos los homomorfismos de conexión en las sucesiones exactas largas.

El teorema 7.2 implica que el funtor $\mathrm{Tor}_1^A(-, N)$ es el funtor nulo si y sólo si el funtor $-\otimes_A N$ es exacto, es decir, si y sólo si N es un A -módulo plano. (De hecho, se trata de una propiedad básica de todos los funtores derivados.)

Por ejemplo, ahora es inmediato que todo A -módulo proyectivo P es plano, pues se cumple que $\mathrm{Tor}_1^A(P, N) = 0$ (basta calcularlo con la resolución proyectiva $0 \rightarrow P \rightarrow P \rightarrow 0$). Esto generaliza al teorema 5.31.

Veamos ahora que el producto de torsión distribuye las sumas directas:

Teorema 7.5 *Si M , $\{M_i\}_{i \in I}$ son A -módulos y N , $\{N_i\}_{i \in I}$ son A - \mathbb{A} -bimódulos, entonces existen isomorfismos naturales de A - \mathbb{A} -bimódulos*

$$\mathrm{Tor}_n^A\left(\bigoplus_{i \in I} M_i, N\right) \cong \bigoplus_{i \in I} \mathrm{Tor}_n^A(M_i, N), \quad \mathrm{Tor}_n^A\left(M, \bigoplus_{i \in I} N_i\right) \cong \bigoplus_{i \in I} \mathrm{Tor}_n^A(M, N_i).$$

DEMOSTRACIÓN: \mathcal{C}_i es una resolución libre de M_i , entonces $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{C}_i$ es una resolución libre de $\bigoplus_{i \in I} M_i$, pero $\left(\bigoplus_{i \in I} \mathcal{C}_i\right) \otimes_A N \cong \bigoplus_{i \in I} (\mathcal{C}_i \otimes_A N)$, y al considerar los grupos de homología obtenemos el primer isomorfismo del enunciado (y es claro que todos los isomorfismos considerados son naturales). Si la suma directa está en el segundo argumento usamos la conmutatividad de Tor . \blacksquare

Nota *En el resto de esta sección trabajaremos con dos anillos A y \mathbb{A} , del primero supondremos tácitamente que es un dominio de ideales principales, mientras que de \mathbb{A} sólo supondremos, salvo que se indique algo más, que es un anillo conmutativo y unitario.*

La hipótesis sobre A se traduce en que podemos calcular los funtores Tor mediante resoluciones libres de la forma (7.1), de donde se sigue inmediatamente que $\mathrm{Tor}_n^A(M, N) = 0$ para $n > 1$. Así, el único producto de torsión que nos queda por estudiar es el que llamaremos simplemente

$$\mathrm{Tor}_A(M, N) = \mathrm{Tor}_1^A(M, N).$$

El producto de torsión debe su nombre a que sólo depende de los submódulos de torsión de los factores:

Teorema 7.6 Sean M y N dos A - A -bimódulos y llamemos $i : M_t \rightarrow M$ y $j : N_t \rightarrow N$ a las inclusiones para los submódulos de torsión respecto de la estructura de A -módulo. Entonces $\text{Tor}(i, j) : \text{Tor}_A(M_t, N_t) \rightarrow \text{Tor}_A(M, N)$ es un isomorfismo de bimódulos.

DEMOSTRACIÓN: Consideramos la sucesión exacta larga derivada de la sucesión exacta

$$0 \rightarrow N_t \rightarrow N \rightarrow N/N_t \rightarrow 0.$$

El módulo N/N_t es libre de torsión, luego es plano por el teorema 5.33, por lo que $\text{Tor}_A(M, N/N_t) = 0$, luego

$$\text{Tor}(1, j) : \text{Tor}_A(M, N_t) \rightarrow \text{Tor}_A(M, N)$$

es un isomorfismo. Similarmente obtenemos que

$$\text{Tor}(i, 1) : \text{Tor}_A(M_t, N_t) \rightarrow \text{Tor}_A(M, N_t)$$

es un isomorfismo, y la composición de ambos es $\text{Tor}(i, j)$. ■

A su vez de aquí se sigue que $\text{Tor}_A(M, N)$ es siempre un módulo de torsión, pues es isomorfo a $\text{Tor}_A(M_t, N_t)$ y éste a su vez es un cociente de un submódulo de $C_1 \otimes_A N_t$, donde C_1 forma parte de una resolución libre de M . Claramente $C_1 \otimes_A N_t$ es un módulo de torsión.

Consideremos ahora el caso en que $M = \langle m \rangle$, y que el orden de m es $a \in A$, es decir, el ideal formado por los elementos de A que anulan a m es el generado por a . Entonces una resolución libre de M es

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} M \rightarrow 0,$$

donde f es la multiplicación por a y $g(b) = bm$, para todo $b \in A$. Tenemos entonces la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \text{Tor}_A(M, N) \rightarrow A \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes 1} A \otimes_A N \xrightarrow{g \otimes 1} M \otimes_A N \rightarrow 0.$$

A través del isomorfismo $A \otimes_A N \cong N$, la aplicación $f \otimes 1$ se transforma en la multiplicación por a en N , y $\text{Tor}_A(M, N)$ se corresponde con su núcleo, es decir, $\text{Tor}_A(M, N) \cong \{n \in N \mid an = 0\}$.

En particular esto vale si M es concretamente el módulo $A/(a)$, luego tenemos que

$$\text{Tor}_A(A/(a), N) \cong \{n \in N \mid an = 0\}.$$

Teniendo en cuenta los teoremas de estructura, esto permite calcular $\text{Tor}_A(M, N)$ siempre que M es un A -módulo finitamente generado. ■

Si N es finitamente generado y $m \in A$ es el mínimo común múltiplo de los órdenes de los elementos de torsión de N (o sea, el máximo factor invariante)

entonces $\text{Tor}_A(A/(m), N)$ es el submódulo de torsión de N . También es interesante notar cómo el producto de torsión depende del anillo respecto al que se calcula. Por ejemplo

$$\text{Tor}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \text{Tor}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = 0.$$

7.2 La homología de los productos tensoriales

Según el teorema 5.34, el producto tensorial $\mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C}'$ de dos complejos de A -módulos adquiere estructura de complejo de A -módulos con el operador frontera allí definido (y que está determinado por la condición de que sea una antiderivación). En esta sección vamos a relacionar la homología de un producto tensorial de complejos con la homología de sus factores.

Cambio de coeficientes Empezaremos estudiando el caso particular en el que tenemos un complejo \mathcal{C} de A -módulos y M es un A - \mathbb{A} -bimódulo, con lo que $\mathcal{C} \otimes_A M$ es también un complejo de A -módulos — y en este caso, de hecho es un complejo de \mathbb{A} -módulos — con el operador frontera $\partial \otimes 1$ (véanse las observaciones posteriores al teorema 5.34).

Es claro que si z es un p -ciclo de \mathcal{C} y $m \in M$, entonces $z \otimes m$ es un p -ciclo en $\mathcal{C} \otimes_A M$, y si z es una frontera entonces $z \otimes m$ también lo es. Esto permite definir una aplicación bilineal $H_p(\mathcal{C}) \times M \rightarrow H_p(\mathcal{C} \otimes_A M)$ dada por $([z], m) \mapsto [z \otimes m]$, que a su vez se extiende a un homomorfismo de bimódulos

$$\mu_p : H_p(\mathcal{C}) \otimes_A M \rightarrow H_p(\mathcal{C} \otimes_A M).$$

Equivalentemente, tenemos un homomorfismo de grado 0 entre los bimódulos

$$\mu : H(\mathcal{C}) \otimes_A M \rightarrow H(\mathcal{C} \otimes_A M). \quad (7.2)$$

En general μ no es un isomorfismo, pero interviene en una sucesión exacta que determina el segundo módulo:

Teorema 7.7 *Sea \mathcal{C} un complejo libre de A -módulos y N un A - \mathbb{A} -bimódulo, donde A es un dominio de ideales principales. Entonces existe una sucesión exacta de \mathbb{A} -módulos*

$$0 \rightarrow H_p(\mathcal{C}) \otimes_A N \xrightarrow{\mu} H_p(\mathcal{C} \otimes_A N) \rightarrow \text{Tor}_A(H_{p-1}(\mathcal{C}), N) \rightarrow 0$$

que además se escinde.

DEMOSTRACIÓN: Sea \mathcal{Z} el subcomplejo de \mathcal{C} formado por los módulos de ciclos $Z_p(\mathcal{C})$ con el operador frontera trivial. Sea \mathcal{F} el subcomplejo cuyo módulo de dimensión p es $F_{p-1}(\mathcal{C})$, también con el operador frontera trivial. Tanto \mathcal{Z} como \mathcal{F} son complejos libres y tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{\partial} \mathcal{F} \rightarrow 0.$$

Como \mathcal{F} es libre, los teoremas 5.29 y 5.6 nos dan la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z} \otimes_A N \xrightarrow{i \otimes 1} \mathcal{C} \otimes_A N \xrightarrow{\partial \otimes 1} \mathcal{F} \otimes_A N \longrightarrow 0.$$

A su vez podemos aplicar el teorema 4.10 para obtener la sucesión exacta

$$\longrightarrow H_p(\mathcal{Z} \otimes_A N) \longrightarrow H_p(\mathcal{C} \otimes_A N) \longrightarrow H_p(\mathcal{F} \otimes_A N) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(\mathcal{Z} \otimes_A N) \longrightarrow$$

Puesto que $\mathcal{Z} \otimes_A N$ y $\mathcal{F} \otimes_A N$ tienen también operadores frontera triviales, esta sucesión es en realidad

$$\longrightarrow Z_p(\mathcal{C}) \otimes_A N \longrightarrow H_p(\mathcal{C} \otimes_A N) \longrightarrow F_{p-1}(\mathcal{C}) \otimes_A N \xrightarrow{\delta_{*p}} Z_{p-1}(\mathcal{C}) \otimes_A N \longrightarrow$$

Para calcular el homomorfismo de conexión $\delta_{*p}(\partial c \otimes n)$ tomamos una antiimagen por $\partial \otimes 1$, por ejemplo $c \otimes n$, aplicamos el operador frontera de $\mathcal{C} \otimes_A N$, con lo que llegamos a $\partial c \otimes n$ y tomamos una antiimagen por $i \otimes 1$, con lo que llegamos de nuevo a $\partial c \otimes n$. En definitiva, $\delta_{*p} = j \otimes 1$, donde $j : F_{p-1}(\mathcal{C}) \longrightarrow Z_{p-1}(\mathcal{C})$ es la inclusión.

De las sucesión exacta anterior extraemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow (Z_p(\mathcal{C}) \otimes_A N) / \text{Im } \delta_{*p+1} \longrightarrow H_p(\mathcal{C} \otimes_A N) \longrightarrow N(\delta_{*p}) \longrightarrow 0.$$

Ahora observamos que

$$0 \longrightarrow F_{p-1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{j} Z_{p-1}(\mathcal{C}) \longrightarrow H_{p-1}(\mathcal{C}) \longrightarrow 0$$

es una resolución libre de $H_{p-1}(\mathcal{C})$, luego tenemos la sucesión exacta

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Tor}_A(H_{p-1}(\mathcal{C}), N) \longrightarrow F_{p-1}(\mathcal{C}) \otimes_A N \xrightarrow{\delta_{*p}} \\ Z_{p-1}(\mathcal{C}) \otimes_A N \longrightarrow H_{p-1}(\mathcal{C}) \otimes_A N \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

De aquí se sigue que

$$(F_{p-1}(\mathcal{C}) \otimes_A N) / \text{Im } \delta_{*p} \cong H_{p-1}(\mathcal{C}) \otimes_A N, \quad N(\delta_{*p}) \cong \text{Tor}_A(H_{p-1}(\mathcal{C}), N).$$

Combinando estos isomorfismos con la sucesión exacta que habíamos obtenido llegamos a la sucesión exacta del enunciado

$$0 \longrightarrow H_p(\mathcal{C}) \otimes_A N \xrightarrow{\mu} H_p(\mathcal{C} \otimes_A N) \longrightarrow \text{Tor}_A(H_{p-1}(\mathcal{C}), N) \longrightarrow 0.$$

Es fácil comprobar que μ es el homomorfismo definido en (7.2). Ahora falta comprobar que la sucesión se escinde. Para ello usamos que los módulos libres son proyectivos, lo que nos da un homomorfismo h_p que cierra el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & F_{p-1}(\mathcal{C}) \\ & \swarrow h_p & \downarrow 1 \\ C_p(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\partial_p} & F_{p-1}(\mathcal{C}) \end{array}$$

de modo que $h_p \circ \partial_p = 1$.

La aplicación $h_p \otimes 1 : F_{p-1}(\mathcal{C}) \otimes_A N \longrightarrow C_p(\mathcal{C}) \otimes_A N$ transforma elementos de $\text{Tor}_A(H_{p-1}(\mathcal{C}), N)$, es decir, del núcleo de δ_{*p} , en ciclos. Para probarlo descomponemos el operador frontera $\partial_p : C_p(\mathcal{C}) \longrightarrow C_{p-1}(\mathcal{C})$ como composición $\partial_p \circ j \circ i$, donde $j : F_{p-1}(\mathcal{C}) \longrightarrow Z_{p-1}(\mathcal{C})$ e $i : Z_{p-1}(\mathcal{C}) \longrightarrow C_{p-1}(\mathcal{C})$. Así

$$(h_p \otimes 1) \circ (\partial_p \otimes 1) = (h_p \otimes 1) \circ (\partial_p \otimes 1) \circ (j \otimes 1) \circ (i \otimes 1) = \delta_{*p} \circ (i \otimes 1).$$

Por consiguiente $h_p \otimes 1$ induce un homomorfismo

$$\phi : \text{Tor}_A(H_{p-1}(\mathcal{C}), N) \longrightarrow H_p(\mathcal{C} \otimes_A N) \quad (7.3)$$

que escinde la sucesión exacta del enunciado por el teorema 5.5. ■

En particular, si N es un A -módulo libre de torsión (y, por lo tanto, plano), el teorema anterior se reduce a que

$$\mu : H_p(\mathcal{C}) \otimes_A N \longrightarrow H_p(\mathcal{C} \otimes_A N)$$

es un isomorfismo.

Con lo visto hasta aquí el lector ya puede, si lo desea, leer la sección 12.1, que contiene varias aplicaciones del teorema anterior a la topología algebraica.

La homología de un producto Pasamos ahora al caso general en el que tenemos dos complejos de A -módulos \mathcal{C} y \mathcal{C}' . Podemos dotar a $\text{Tor}_A(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ de estructura de complejo definiendo

$$\text{Tor}_A(\mathcal{C}, \mathcal{C}')_p = \bigoplus_{i+j=p} \text{Tor}_A(C_i, C'_j),$$

y considerando el operador frontera dado por

$$\partial|_{\text{Tor}_A(C_i, C'_j)} = \text{Tor}(\partial_i, 1) + (-1)^i \text{Tor}(1, \partial'_j).$$

Por otra parte podemos definir un homomorfismo graduado

$$\mu : H(\mathcal{C}) \otimes_A H(\mathcal{C}') \longrightarrow H(\mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C}')$$

mediante $\mu([c] \otimes [c']) = [c \otimes c']$.

En efecto, la aplicación $([c], [c']) \mapsto [c \otimes c']$ está bien definida porque si c es un ciclo y $c' = \partial c''$ es una frontera, entonces $c \otimes c' = c \otimes \partial c'' = \partial(c \otimes c'')$, y similarmente al revés. Es claro que es bilineal, luego induce el homomorfismo μ indicado.

Ahora generalizamos el teorema 7.7:

Teorema 7.8 (Teorema de Künneth) Sean \mathcal{C} y \mathcal{C}' dos complejos de A -módulos, donde A es un dominio de ideales principales, y supongamos que \mathcal{C}' es libre. Entonces existe una sucesión exacta funtorial

$$0 \longrightarrow (H(\mathcal{C}) \otimes_A H(\mathcal{C}'))_p \xrightarrow{\mu} H_p(\mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C}') \longrightarrow \text{Tor}_A(H(\mathcal{C}), H(\mathcal{C}'))_{p-1} \longrightarrow 0.$$

Si \mathcal{C} también es libre, entonces la sucesión se escinde.

DEMOSTRACIÓN: Basta seguir punto por punto el argumento de 7.7. Consideramos el complejo \mathcal{Z}' formado por los módulos de ciclos $Z_p(\mathcal{C}')$ con el operador frontera trivial y sea \mathcal{F}' el complejo cuyo módulo de dimensión p es $F_{p-1}(\mathcal{C}')$, también con el operador frontera trivial. Tanto \mathcal{Z}' como \mathcal{F}' son complejos libres y tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}' \xrightarrow{i} \mathcal{C}' \xrightarrow{\partial} \mathcal{F}' \longrightarrow 0. \quad (7.4)$$

Como \mathcal{F}' es libre, el teorema 5.6 nos da que la sucesión se escinde (más concretamente, que se escinde la sucesión de restricciones a cada dimensión). Usando repetidas veces el teorema 5.29 junto con el hecho obvio de que la suma directa de sucesiones exactas es una sucesión exacta, obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{Z}' \xrightarrow{1 \otimes i} \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C}' \xrightarrow{1 \otimes \partial} \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{F}' \longrightarrow 0. \quad (7.5)$$

Consideramos ahora su sucesión exacta de homología

$$\longrightarrow H_p(\mathcal{C} \otimes_A \mathcal{Z}') \longrightarrow H_p(\mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C}') \longrightarrow H_p(\mathcal{C} \otimes_A \mathcal{F}') \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(\mathcal{C} \otimes_A \mathcal{Z}') \longrightarrow$$

Observemos que $\mathcal{C} \otimes_A \mathcal{Z}' = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}^j$, donde \mathcal{D}^j es el complejo dado por

$$D_p^j = C_{p-j} \otimes_A Z_p(\mathcal{C}'),$$

con el operador frontera dado por $\partial_p(c \otimes z) = \partial_{p-j}c \otimes z$. Por consiguiente

$$H_p(\mathcal{C} \otimes_A \mathcal{Z}') \cong \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} H_p(\mathcal{D}^j) \cong \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} H_{p-j}(\mathcal{C}) \otimes_A Z_p(\mathcal{C}') = \bigoplus_{i+j=p} H_i(\mathcal{C}) \otimes_A Z_j(\mathcal{C}'),$$

donde hemos usado el teorema 7.7, que nos da el isomorfismo

$$H_p(\mathcal{D}^j) \cong H_{p-j}(\mathcal{C}) \otimes_A Z_p(\mathcal{C}'), \quad (7.6)$$

puesto que $Z_p(\mathcal{C}')$ es libre y, por consiguiente, el producto de torsión que aparece en el teorema es nulo.

Similarmente, $\mathcal{C} \otimes_A \mathcal{F}' = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{E}^j$, donde \mathcal{E}^j es el complejo dado por

$$E_p^j = C_{p-j} \otimes_A F_{p-1}(\mathcal{C}'),$$

con lo que

$$H_p(\mathcal{C} \otimes_A \mathcal{F}') \cong \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} H_p(\mathcal{E}^j) \cong \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} H_{p-j}(\mathcal{C}) \otimes_A F_{p-1}(\mathcal{C}') = \bigoplus_{i+j=p-1} H_i(\mathcal{C}) \otimes_A F_j(\mathcal{C}').$$

A través de estos isomorfismos, la sucesión exacta que hemos obtenido se convierte en

$$\longrightarrow \bigoplus_{i+j=p} H_i(\mathcal{C}) \otimes_A Z_j(\mathcal{C}') \longrightarrow H_p(\mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C}') \longrightarrow \bigoplus_{i+j=p-1} H_i(\mathcal{C}) \otimes_A F_j(\mathcal{C}')$$

$$\xrightarrow{\delta_{*p}} \bigoplus_{i+j=p-1} H_i(\mathcal{C}) \otimes_A Z_j(\mathcal{C}') \longrightarrow$$

Vamos a calcular δ_{*p} . Partimos de $[z] \otimes \partial_{j+1}c' \in H_i(\mathbb{C}) \otimes_A F_j(\mathcal{C}')$. A través de (7.6) se corresponde con $[z \otimes \partial_{j+1}c'] \in H_{p-1}(\mathcal{D}^j)$ (donde $p-1 = i+j$). Ahora aplicamos el homomorfismo de conexión de la sucesión (7.5), para lo cual tomamos una antiimagen de $z \otimes \partial c'$ por $1 \otimes \partial$, por ejemplo $z \otimes c'$. Calculamos su frontera en $\mathbb{C} \otimes_A \mathcal{C}'$, que es $(-1)^i z \otimes \partial c'$ y tomamos su clase $(-1)^i [z \otimes \partial c']$ en $H_{p-1}(\mathbb{C} \otimes_A \mathcal{Z}')$. Esta clase se corresponde con $(-1)^i [z] \otimes \partial c' \in H_i(\mathbb{C}) \otimes_A Z_j(\mathcal{C}')$. En definitiva, $\delta_{*p} = \bigoplus_{i+j=p-1} (-1)^i \otimes \gamma_j$, donde $\gamma_j : F_j(\mathcal{C}') \rightarrow Z_j(\mathcal{C}')$ es la inclusión.

De este modo, tenemos la sucesión exacta

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \bigoplus_{i+j=p} H_i(\mathbb{C}) \otimes_A Z_j(\mathcal{C}') / \text{Im}((-1)^i \otimes \gamma_j) &\rightarrow H_p(\mathbb{C} \otimes_A \mathcal{C}') \\ &\rightarrow \bigoplus_{i+j=p-1} N((-1)^i \otimes \gamma_j) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

Ahora calculamos la sucesión exacta larga del producto de torsión correspondiente a la sucesión exacta

$$0 \rightarrow F_j(\mathcal{C}') \xrightarrow{(-1)^i \gamma_j} Z_j(\mathcal{C}') \rightarrow H_j(\mathcal{C}') \rightarrow 0,$$

lo que nos da la sucesión exacta

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Tor}_A(H_i(\mathbb{C}), H_j(\mathcal{C}')) &\rightarrow H_i(\mathbb{C}) \otimes_A F_j(\mathcal{C}') \xrightarrow{(-1)^i \otimes \gamma_j} \\ &H_i(\mathbb{C}) \otimes_A Z_j(\mathcal{C}') \rightarrow H_i(\mathbb{C}) \otimes_A H_j(\mathcal{C}') \rightarrow 0. \end{aligned}$$

De aquí se sigue que

$$\begin{aligned} H_i(\mathbb{C}) \otimes_A Z_j(\mathcal{C}') / \text{Im}((-1)^i \otimes \gamma_j) &\cong H_i(\mathbb{C}) \otimes_A H_j(\mathcal{C}'), \\ N((-1)^i \otimes \gamma_j) &\cong \text{Tor}_A(H_i(\mathbb{C}), H_j(\mathcal{C}')). \end{aligned}$$

A través de estos isomorfismos, la sucesión (7.7) se convierte en la del enunciado. Sólo falta comprobar que el homomorfismo μ es el descrito en el párrafo previo al teorema. En efecto, un $[z] \otimes [z'] \in H_i(\mathbb{C}) \otimes_A H_j(\mathcal{C}')$ se corresponde con $[[z] \otimes z'] \in H_i(\mathbb{C}) \otimes_A Z_j(\mathcal{C}') / \text{Im}((-1)^i \otimes \gamma_j)$, que a su vez se corresponde con $[[z \otimes z']] \in H_p(\mathbb{C} \otimes_A \mathcal{Z}') / \text{Im} \delta_{*p}$ y su imagen en $H_p(\mathbb{C} \otimes_A \mathcal{C}')$ es $[z \otimes z']$. Es fácil ver que la sucesión es funtorial.

Supongamos ahora que \mathbb{C} es libre y veamos que la sucesión se escinde. Como $F(\mathbb{C})$ y $F(\mathcal{C}')$ son libres, el teorema 5.6 nos da que la sucesión (7.4) se escinde, al igual que su análoga sin primas. Por el teorema 5.5 existen homomorfismos $p : \mathbb{C} \rightarrow Z(\mathbb{C})$ y $p' : \mathcal{C}' \rightarrow Z(\mathcal{C}')$ tales que $p(c) = c$ para $c \in Z(\mathbb{C})$ y $p'(c') = c'$ para $c' \in Z(\mathcal{C}')$. Entonces la composición

$$Z(\mathbb{C} \otimes_A \mathcal{C}') \rightarrow \mathbb{C} \otimes_A \mathcal{C}' \xrightarrow{p \otimes p'} Z(\mathbb{C}) \otimes_A Z(\mathcal{C}') \rightarrow H(\mathbb{C}) \otimes_A H(\mathcal{C}')$$

transforma $F(\mathbb{C} \otimes_A \mathcal{C}')$ en 0, luego induce un homomorfismo

$$f : H(\mathbb{C} \otimes_A \mathcal{C}') \rightarrow H(\mathbb{C}) \otimes_A H(\mathcal{C}')$$

tal que $\mu \circ f = 1$, luego la sucesión se escinde. \blacksquare

En este punto el lector ya puede, si lo desea, leer la sección 12.2, y con ello verá cómo el teorema anterior se aplica al cálculo de la homología singular de un producto de espacios topológicos.

Más adelante vamos a necesitar una versión más fina del teorema de Künneth que no requiera que los complejos sean libres, sino una hipótesis más débil:

Teorema 7.9 (Teorema de Künneth) Sean \mathcal{C} y \mathcal{C}' dos complejos de A -módulos, donde A es un dominio de ideales principales, y supongamos que el complejo $\text{Tor}_A(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ es acíclico. Entonces existe una sucesión exacta funtorial

$$0 \longrightarrow (H(\mathcal{C}) \otimes_A H(\mathcal{C}'))_p \xrightarrow{-\mu} H_p(\mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C}') \longrightarrow \text{Tor}_A(H(\mathcal{C}), H(\mathcal{C}'))_{p-1} \longrightarrow 0$$

que además se escinde.

DEMOSTRACIÓN: La prueba consiste en tomar dos aproximaciones libres (definición 4.20)

$$\phi : \bar{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{C}, \quad \phi' : \bar{\mathcal{C}}' \longrightarrow \mathcal{C}'$$

y reducir el problema al teorema anterior. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{C}}' \xrightarrow{i'} \bar{\mathcal{C}}' \xrightarrow{\phi'} \mathcal{C}' \longrightarrow 0,$$

donde $\tilde{\mathcal{C}}$ es el complejo formado por los núcleos de los homomorfismos ϕ'_p . Como ϕ' induce isomorfismos entre los grupos de homología, la sucesión exacta larga de homología nos da que el complejo $\tilde{\mathcal{C}}'$ es acíclico.

Como \mathcal{C} es libre y $H(\tilde{\mathcal{C}}') = 0$, el teorema anterior nos da que $H(\mathcal{C} \otimes_A \tilde{\mathcal{C}}') = 0$.

Como $\bar{\mathcal{C}}'$ es un A -módulo libre, anula al funtor Tor , luego tenemos la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_A(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \longrightarrow \mathcal{C} \otimes_A \tilde{\mathcal{C}}' \xrightarrow{1 \otimes i} \mathcal{C} \otimes_A \bar{\mathcal{C}}' \xrightarrow{1 \otimes \phi'} \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C}' \longrightarrow 0.$$

Para pasar a una sucesión exacta larga de homología partimos esta sucesión en dos:

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_A(\mathcal{C}, \mathcal{C}') \longrightarrow \mathcal{C} \otimes_A \tilde{\mathcal{C}}' \xrightarrow{1 \otimes i} \text{Im}(1 \otimes i) \longrightarrow 0.$$

$$0 \longrightarrow \text{Im}(1 \otimes i) \longrightarrow \mathcal{C} \otimes_A \bar{\mathcal{C}}' \xrightarrow{1 \otimes \phi'} \mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C}' \longrightarrow 0,$$

En la primera, los dos primeros complejos son acíclicos, luego la sucesión exacta larga de homología nos da que el tercero también lo es. Por consiguiente, la sucesión exacta larga de homología de la segunda nos da que $1 \otimes \phi'$ induce isomorfismos

$$\overline{1 \otimes \phi'} : H(\mathcal{C} \otimes_A \bar{\mathcal{C}}') \longrightarrow H(\mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C}').$$

Por otra parte, tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{C}} \xrightarrow{i} \bar{\mathcal{C}} \xrightarrow{\phi} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

y, como $\bar{\mathcal{C}}'$ es libre, también es exacta

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{C}} \otimes_A \bar{\mathcal{C}}' \xrightarrow{i \otimes 1} \bar{\mathcal{C}} \otimes_A \bar{\mathcal{C}}' \xrightarrow{\phi \otimes 1} \mathcal{C} \otimes_A \bar{\mathcal{C}}' \longrightarrow 0$$

Como $\bar{\mathcal{C}}'$ es libre y $H(\tilde{\mathcal{C}}) = 0$, el teorema anterior nos da que $H(\tilde{\mathcal{C}} \otimes_A \bar{\mathcal{C}}') = 0$, luego la sucesión exacta larga de homología de la sucesión anterior implica que

$$\overline{\phi \otimes 1} : H(\bar{\mathcal{C}} \otimes_A \bar{\mathcal{C}}') \longrightarrow H(\mathcal{C} \otimes_A \bar{\mathcal{C}}')$$

es un isomorfismo. Componiendo los dos isomorfismos que hemos obtenido, concluimos que

$$\overline{\phi \otimes \phi'} : H(\bar{\mathcal{C}} \otimes_A \bar{\mathcal{C}}') \longrightarrow H(\mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C}')$$

también es un isomorfismo. Esto nos da diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (H(\bar{\mathcal{C}}) \otimes_A H(\bar{\mathcal{C}}'))_p & \xrightarrow{\mu} & H_p(\bar{\mathcal{C}} \otimes_A \bar{\mathcal{C}}') & \longrightarrow & \text{Tor}_A(H(\bar{\mathcal{C}}), H(\bar{\mathcal{C}}'))_{p-1} \longrightarrow 0 \\ & & \bar{\phi} \otimes \bar{\phi}' \downarrow & & \phi \otimes \phi' \downarrow & & \text{Tor}_{(\bar{\phi}, \bar{\phi}')} \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & (H(\mathcal{C}) \otimes_A H(\mathcal{C}'))_p & \xrightarrow{\mu} & H_p(\mathcal{C} \otimes_A \mathcal{C}') & \longrightarrow & \text{Tor}_A(H(\mathcal{C}), H(\mathcal{C}'))_{p-1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

donde la fila superior es exacta por el teorema anterior y las flechas verticales son isomorfismos. El homomorfismo inferior derecho se define precisamente como la composición de los otros tres lados del cuadrado. El hecho de que la fila superior sea exacta y se escinda implica trivialmente que lo mismo vale para la flecha inferior. ■

7.3 Módulos de extensiones

Vamos a estudiar ahora los funtores derivados derechos de los funtores contravariantes $\text{Hom}_A(-, N)$. Recordemos que, dados un anillo (unitario) arbitrario A , un A -módulo M y un A - \mathbb{A} -bimódulo N , hemos definido $\text{Hom}_A(M, N)$ como el \mathbb{A} -módulo de todos los homomorfismos $\omega : M \rightarrow N$. La estructura de \mathbb{A} -módulo es la dada por $(\omega a)(m) = \omega(m)a$.

Si $f : M \rightarrow M'$ es un homomorfismo de A -módulos, llamaremos homomorfismo *traspuesto* $f^t : \text{Hom}_A(M', N) \rightarrow \text{Hom}_A(M, N)$ al homomorfismo (de bimódulos) $\text{Hom}_A(f, N)$, dado por $f^t(\omega) = f \circ \omega$.

Por lo tanto podemos considerar a $\text{Hom}_A(-, N)$ como functor covariante de la categoría de los A -módulos en la de los \mathbb{A} -módulos.

El teorema 5.2 prueba que el functor $\text{Hom}_A(-, N)$ es exacto por la izquierda, lo que significa que si

$$P \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{g} R \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de A -módulos y N es un A - \mathbb{A} -bimódulo, entonces

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(R, N) \xrightarrow{g^t} \text{Hom}(Q, N) \xrightarrow{f^t} \text{Hom}(P, N)$$

es también una sucesión exacta.

Definición 7.10 Sea \mathcal{C} un complejo de A -módulos y sea N un A - \mathbb{A} -bimódulo. Definimos $\text{Hom}(\mathcal{C}, N)$ como el complejo inverso formado por los módulos de cocadenas $C^p = \text{Hom}_A(C_p, N)$ con el operador cofrontera $d_p = \partial_{p+1}^t$.

Definición 7.11 Dado un A - \mathbb{A} -bimódulo N , llamaremos $\text{Ext}_A^p(-, N)$ a los funtores derivados derechos del funtor $\text{Hom}_A(-, N)$.

Más concretamente, si tomamos cualquier resolución proyectiva de M

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

(en particular, podemos tomarla libre), a partir de ella podemos formar el complejo inverso:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(P_0, N) \longrightarrow \text{Hom}_A(P_1, N) \longrightarrow \text{Hom}_A(P_2, N) \longrightarrow \cdots$$

cuyos grupos de cohomología son precisamente los bimódulos $\text{Ext}_A^p(M, N)$.

En realidad podemos considerar a Exp_A^p como funtor

$$\text{Exp}_A^p : \text{Mód}(A) \times \text{Mód}(A, \mathbb{A}) \longrightarrow \text{Mód}(A, \mathbb{A})$$

contravariante en la primera componente y covariante en la segunda. En efecto, si tenemos homomorfismos

$$f : M' \longrightarrow M, \quad g : N \longrightarrow N',$$

podemos definir $\text{Ext}_A^p(f, g) : \text{Ext}_A^p(M, N) \longrightarrow \text{Ext}_A^p(M', N')$ sin más que extender f a un homomorfismo $\bar{f} : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ entre dos resoluciones proyectivas de M' y M , respectivamente, lo que determina un homomorfismo

$$\text{Hom}_A(\bar{f}, g) : \text{Hom}_A(\mathcal{C}, N) \longrightarrow \text{Hom}_A(\mathcal{C}', N')$$

que a su vez induce homomorfismos entre los grupos de cohomología de ambos complejos. Por la versión dual de 6.7, dos extensiones de f son necesariamente homotópicas, y lo mismo sucede al aplicarles el funtor Hom_A , por lo que la definición de $\text{Ext}_A^p(f, g)$ no depende de la elección de la extensión.

Los hechos fundamentales sobre los funtores Ext_A^p son que existen isomorfismos naturales

$$\text{Ext}_A^0(M, N) \cong \text{Hom}_A(M, N)$$

y el teorema 6.3, que en este contexto se particulariza como sigue:

Teorema 7.12 Dada una sucesión exacta de A - \mathbb{A} -bimódulos

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0,$$

y un A -módulo N , existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M'', N) \xrightarrow{g^t} \text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{f^t} \text{Hom}_A(M', N) \xrightarrow{\delta_0} \text{Ext}_A^1(M'', N) \\ \xrightarrow{\text{Ext}(g, N)} \text{Ext}_A^1(M, N) \xrightarrow{\text{Ext}(f, N)} \text{Ext}_A^1(M', N) \xrightarrow{\delta_1} \text{Ext}_A^2(M'', N) \longrightarrow \cdots$$

Además la asignación de la sucesión exacta larga a cada sucesión exacta corta es funtorial, en el sentido de la nota posterior a 6.3.

Nota Podemos construir otro funtor $\overline{\text{Ext}}$ a partir de los funtores derivados de los funtores $\text{Hom}_A(M, -)$, de modo que $\overline{\text{Ext}}_A^n(M, N)$ se calcula a partir de una resolución inyectiva de N en lugar de a partir de una resolución proyectiva de M . Como en el caso de Tor , podemos probar que los funtores Ext y $\overline{\text{Ext}}$ son naturalmente equivalentes, aunque no vamos a necesitar este hecho. En el caso de Tor lo usamos para deducir que $\text{Tor}_n^A(M, N) \cong \text{Tor}_n^A(N, M)$, pero el resultado análogo para Ext es falso, ya que $\text{Hom}_A(M, N)$ no es, en general, isomorfo a $\text{Hom}_A(N, M)$. ■

Veamos algunas consecuencias sencillas de las propiedades básicas de Ext :

Teorema 7.13 Si $\text{Ext}_A^1(M'', M') = 0$ entonces toda sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0,$$

se escinde.

DEMOSTRACIÓN: Si $\text{Ext}_A^1(M'', M') = 0$, el teorema anterior nos proporciona la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M'', M') \xrightarrow{g^t} \text{Hom}_A(M, M') \xrightarrow{f^t} \text{Hom}_A(M', M') \longrightarrow 0.$$

Por tanto f^t es suprayectiva, luego existe un homomorfismo $f' : M \longrightarrow M'$ tal que $f^t(f') = 1$, es decir, tal que $f \circ f' = 1$. ■

Teorema 7.14 Si M es un A -módulo proyectivo, entonces $\text{Ext}_A^p(M, N) = 0$ para todo módulo N y todo $p \geq 1$.

DEMOSTRACIÓN: Esto es un hecho general sobre funtores derivados, pero una prueba directa se obtiene considerando la resolución proyectiva

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow M \longrightarrow 0. \quad \blacksquare$$

Teorema 7.15 Sean M , $\{M_i\}_{i \in I}$ A -módulos y N , $\{N_i\}_{i \in I}$ A - A -bimódulos. Entonces existen isomorfismos naturales de bimódulos:

$$\text{Ext}_A\left(\bigoplus_{i \in I} M_i, N\right) \cong \prod_{i \in I} \text{Ext}_A(M_i, N), \quad \text{Ext}_A\left(M, \prod_{i \in I} N_i\right) \cong \prod_{i \in I} \text{Ext}_A(M, N_i).$$

DEMOSTRACIÓN: Si \mathcal{C}_i es una resolución libre de M_i , entonces $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{C}_i$ es una resolución libre de $\bigoplus_{i \in I} M_i$, y por (5.1) tenemos un isomorfismo natural

$$\text{Hom}_A\left(\bigoplus_{i \in I} \mathcal{C}_i, N\right) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}_A(\mathcal{C}_i, N),$$

y al formar los grupos de cohomología se obtiene el isomorfismo del enunciado. El segundo isomorfismo se prueba análogamente. ■

Nota En el resto de esta sección supondremos que A es un dominio de ideales principales.

Esto implica que todo A -módulo M admite una resolución libre tipo (7.1), lo que a su vez implica que $\text{Ext}_A^p(M, N) = 0$ si $p \neq 0, 1$, y escribiremos simplemente

$$\text{Ext}_A(M, N) = \text{Ext}_A^1(M, N).$$

Ejercicio: Probar que $\text{Ext}(R, P) = 0$ para todo módulo P si y sólo si R es libre.

Teorema 7.16 Si M es un A -módulo finitamente generado, entonces existe un isomorfismo natural $\text{Ext}_A(M, N) \cong M_t \otimes_A N$, donde M_t es el submódulo de torsión de M .

DEMOSTRACIÓN: Si $a \in A$, una resolución libre de A/aA es

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} A \longrightarrow A/aA \longrightarrow 0,$$

donde $\alpha(b) = ab$. Es claro que $\text{Hom}_A(A, N) \cong N$ y que, a través de este isomorfismo ($f \mapsto f(1)$), el homomorfismo α^t se corresponde con $\beta(n) = an$. Por consiguiente, tenemos la sucesión exacta

$$N \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow \text{Ext}_A(A/aA, N) \longrightarrow 0,$$

de la que deducimos que $\text{Ext}_A(A/aA, N) \cong N/aN \cong (A/aA) \otimes_A N$.

Ahora basta tener en cuenta que todo A -módulo finitamente generado se descompone en suma directa de un A -módulo libre y de M_t , el cual a su vez es isomorfo a una suma directa de un número finito de módulos de la forma A/aA , así como que tanto Ext como \otimes_A conmutan con sumas directas finitas. ■

Homología y cohomología Consideremos un complejo directo de A -módulos $\mathcal{C} = \{C_p\}_{p \in \mathbb{Z}}$ y un A - A -bimódulo N , con el cual podemos formar el complejo inverso de A - A -bimódulos $\{C^p\}_{p \in \mathbb{Z}} = \text{Hom}_A(\mathcal{C}, N)$. Consideramos la aplicación lineal

$$\langle \ , \ \rangle : C_p \times C^p \longrightarrow N$$

mediante

$$\langle c, \omega \rangle = \omega(c), \quad c \in C_p, \quad \omega \in C^p.$$

En estos términos, el operador cofrontera viene caracterizado por la relación

$$\langle c, d\omega \rangle = \langle \partial c, \omega \rangle, \quad c \in C_p, \quad \omega \in C^{p-1}.$$

Esto a su vez nos permite definir otra aplicación bilineal, llamada *producto de Kronecker*,

$$\langle \ , \ \rangle : H_p(\mathcal{C}) \times H_N^p(\mathcal{C}) \longrightarrow N$$

mediante

$$\langle [z], [\omega] \rangle = \langle z, \omega \rangle, \quad z \in Z_p, \quad \omega \in Z_N^p.$$

Equivalentemente, tenemos un homomorfismo (de bimódulos)

$$h : H_N^p(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{Hom}_A(H_p(\mathcal{C}), N) \quad (7.8)$$

dado por $h(x)(y) = \langle y, x \rangle$. En muchos casos h es un isomorfismo, pero la situación general es la que describe el teorema siguiente:

Teorema 7.17 *Sea \mathcal{C} un complejo libre de A -módulos y N un A - A -bimódulo. Existe una sucesión*

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_A(H_{p-1}(\mathcal{C}), N) \longrightarrow H_N^p(\mathcal{C}) \xrightarrow{h} \text{Hom}_A(H_p(\mathcal{C}), N) \longrightarrow 0$$

que es exacta y se escinde.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la sucesión exacta de complejos

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{\partial} \mathcal{F} \longrightarrow 0,$$

donde el módulo de p -cadenas de \mathcal{Z} es $Z_p(\mathcal{C})$, con operador frontera trivial, y el módulo de las p -cadenas de \mathcal{F} es $F_{p-1}(\mathcal{C})$, también con operador frontera trivial. El homomorfismo i es la inclusión.

Esta sucesión se escinde porque \mathcal{F} es libre. Por lo tanto la sucesión

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(\mathcal{F}, N) \xrightarrow{\partial^t} \text{Hom}_A(\mathcal{C}, N) \xrightarrow{i^t} \text{Hom}_A(\mathcal{Z}, N) \longrightarrow 0 \quad (7.9)$$

también es exacta y se escinde. Consideremos su sucesión de cohomología:

$$\longrightarrow H_N^{p-1}(\mathcal{Z}) \xrightarrow{\delta_{p-1}^*} H_N^p(\mathcal{F}) \xrightarrow{\partial^{t*}} H_N^p(\mathcal{C}) \xrightarrow{i^{t*}} H_N^p(\mathcal{Z}) \xrightarrow{\delta_p^*} H_N^{p+1}(\mathcal{F}) \longrightarrow$$

Teniendo en cuenta que las cofronteras de \mathcal{F} y \mathcal{Z} son triviales, esta sucesión es simplemente

$$\begin{aligned} &\longrightarrow \text{Hom}_A(Z_{p+1}, N) \xrightarrow{\delta_{p-1}^*} \text{Hom}_A(F_{p-1}, N) \xrightarrow{\partial^{t*}} H_N^p(\mathcal{C}) \\ &\xrightarrow{i^{t*}} \text{Hom}_A(Z_p, N) \xrightarrow{\delta_p^*} \text{Hom}_A(F_p, N) \longrightarrow \end{aligned}$$

de donde extraemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(F_{p-1}, N) / \text{Im } \delta_{p-1}^* \xrightarrow{\overline{\partial^{t*}}} H_N^p(\mathcal{C}) \xrightarrow{\overline{i^{t*}}} \text{N}(\delta_p^*) \longrightarrow 0. \quad (7.10)$$

Vamos a calcular los homomorfismos de conexión δ^* . Tomamos una clase $[\omega] \in H_N^{p-1}(\mathcal{Z})$, de aquí pasamos a $\eta \in \text{Hom}_A(C_{p-1}, N)$ tal que $i^t(\eta) = \omega$, es decir, $\eta|_{Z_{p-1}} = \omega$. Ahora tomamos $\omega' \in \text{Hom}_A(F_p, N)$ tal que $\partial^t \omega' = d\eta$, es decir, tal que $\omega'(\partial c) = \eta(\partial c)$. En definitiva, $\omega' = \eta|_{F_p} = \omega|_{F_p}$. De este modo, $\delta_{p-1}^*([\omega]) = \omega|_{F_p} = j^*([\omega])$, donde $j : F_{p-1} \longrightarrow Z_{p-1}$.

Por otra parte, una resolución libre de $H_{p-1}(\mathcal{C})$ es

$$0 \longrightarrow F_{p-1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{j} Z_{p-1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\pi} H_{p-1}(\mathcal{C}) \longrightarrow 0.$$

De ella obtenemos la sucesión exacta

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(H_{p-1}(\mathcal{C}), N) &\xrightarrow{\pi^t} \operatorname{Hom}_A(Z_{p-1}(\mathcal{C}), N) \\ &\xrightarrow{i^t} \operatorname{Hom}_A(F_{p-1}(\mathcal{C}), N) \longrightarrow \operatorname{Ext}_A(H_{p-1}(\mathcal{C}), N) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

De aquí obtenemos los isomorfismos

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_A(F_{p-1}, N) / \operatorname{Im} \delta_{p-1}^* &\cong \operatorname{Ext}_A(H_{p-1}(\mathcal{C}), N), \\ \mathcal{N}(\delta_{p-1}^*) &\cong \operatorname{Hom}_A(H_{p-1}(\mathcal{C}), N). \end{aligned}$$

Al sustituirlos en (7.10) obtenemos la sucesión del enunciado. Veamos que h es el homomorfismo descrito previamente al teorema. Según nuestra construcción es $h = i^{t*} \circ (\pi^t)^{-1}$, luego $h \circ \pi^t = i^{t*}$. Si hacemos actuar esta igualdad sobre un $[\omega] \in H_N^p(\mathcal{C})$ y luego sobre $z \in Z_p(\mathcal{C})$ obtenemos $h([\omega])([z]) = \omega(z)$, como queríamos probar.

Falta demostrar que la sucesión se escinde. El hecho de que (7.9) se escinda significa que existe $r : \operatorname{Hom}_A(\mathcal{Z}, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(\mathcal{C}, N)$ tal que $r \circ i^t = 1$, luego $r^* \circ i^{t*} = 1$. La restricción de r^* a $\mathcal{N}(\delta_p^*)$ justifica que (7.10) se escinde y, por consiguiente, la sucesión del enunciado también. ■

Con esto el lector puede pasar a la sección 12.3, en la que usamos el teorema anterior para relacionar la cohomología singular de un espacio topológico con la homología singular. El resto del capítulo XII no requiere más preliminares algebraicos, luego puede ser leído a continuación.

Extensiones de módulos Este apartado no será necesario más adelante, pero explica por qué el funtor Ext se llama Ext .

Si A es un anillo unitario arbitrario, dados dos A -módulos M y N , podemos preguntarnos si es posible construir un A -módulo E que contenga un submódulo $N_0 \cong N$ y de modo que $E/N_0 \cong M$. En tal caso se dice que E es una *extensión* de N por M .

En realidad, el problema de interés no es el que acabamos de plantear, pues la respuesta es obviamente afirmativa, ya que basta tomar $E = N \oplus M$. La cuestión es cuántas extensiones esencialmente distintas se puede construir con M y N . Para precisar la noción de “extensiones esencialmente distintas” conviene dar la definición siguiente de extensiones de módulos, que es obviamente equivalente a la que acabamos de dar:

Definición 7.18 Una *extensión* de un A -módulo N por un A -módulo M es una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} E \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0.$$

Diremos que dos extensiones son equivalentes si existe un homomorfismo ϕ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\alpha} & E & \xrightarrow{\beta} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow \phi & & \downarrow 1 & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\alpha'} & E' & \xrightarrow{\beta'} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Notemos que el homomorfismo ϕ es necesariamente un isomorfismo por el teorema 4.12, lo cual implica a su vez que la equivalencia entre extensiones de N por M es una relación de equivalencia.¹

A partir de una extensión e de N por M (notemos que aquí e representa una sucesión exacta), podemos construir la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M, N) \longrightarrow \text{Hom}_A(E, N) \longrightarrow \text{Hom}_A(N, N) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_A^1(M, N)$$

que nos permite definir $\lambda(e) = \delta(1)$. Tenemos así definida una aplicación λ de la clase de todas las extensiones de N por M en el conjunto $\text{Ext}_A^1(M, N)$. Si dos extensiones son equivalentes, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(M, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(E, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(N, N) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_A^1(M, N) \\ & & \uparrow 1 & & \uparrow \phi^t & & \uparrow 1 & & \uparrow 1 \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(M, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(E', N) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(N, N) \xrightarrow{\delta'} \text{Ext}_A^1(M, N) \end{array}$$

del que se deduce que $\delta = \delta'$ y, en particular, que $\lambda(e) = \delta(1) = \delta'(1) = \lambda(e')$. Así pues, λ es invariante en cada clase de equivalencia de extensiones.

Tomemos ahora $x \in \text{Ext}_A^1(M, N)$ y veamos que existe una extensión e de N por M tal que $\lambda(e) = x$. Para ello consideramos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\alpha} L \xrightarrow{\beta} M \longrightarrow 0$$

en la que L sea un A -módulo libre. De ella obtenemos la sucesión exacta

$$\longrightarrow \text{Hom}_A(C, N) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_A^1(M, N) \longrightarrow \text{Ext}_A^1(L, N) = 0,$$

luego podemos tomar $h : C \longrightarrow N$ tal que $\delta(h) = x$. Consideramos el A -módulo

$$E = (N \oplus L)/S_h, \quad \text{donde} \quad S_h = \{(h(c), -\alpha(c)) \mid c \in C\}.$$

¹Desde el punto de vista de la teoría de conjuntos hay que tener presente que cada clase de equivalencia de extensiones es una clase propia, por lo que técnicamente no existe un conjunto cociente que las contenga a todas, pero precisamente vamos a ver que sí que es posible establecer una correspondencia entre las clases de equivalencia y los elementos de un conjunto, y dicho conjunto no es sino $\text{Ext}_A^1(M, N)$.

Así tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{h} & N \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\ L & \xrightarrow{h'} & E \end{array}$$

donde $\alpha'(n) = [(n, 0)]$ y $h'(l) = [(0, l)]$. Consideramos la sucesión

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha'} E \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0,$$

donde $p([(n, l)]) = \beta(l)$. Notemos que p está bien definida, porque sobre cualquier $(h(c), -\alpha(c)) \in S_h$ se cumple $\beta(-\alpha(c)) = 0$.

Es claro que p es suprayectiva, así como que α' es inyectiva, pues si se cumple $\alpha'(n) = [(n, 0)] = 0$, es que $(n, 0) = (h(c), -\alpha(c))$, luego $\alpha(c) = 0$, luego $c = 0$, luego $n = h(c) = 0$. También es obvio que $\alpha' \circ p = 0$ y, más aún, si $p([(n, l)]) = 0$, es que $\beta(l) = 0$, luego existe un $c \in C$ tal que $l = \alpha(c)$, luego

$$[(n, l)] = [n, \alpha(c)] = [n + h(c), 0] = \alpha'((n + h(c))).$$

Esto prueba que la sucesión es exacta, luego es una extensión e de N por M . Vamos a probar que $\lambda(e) = x$.

En efecto, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\alpha} & L & \xrightarrow{\beta} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow h & & \downarrow h' & & \downarrow 1 & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\alpha'} & E & \xrightarrow{p} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

que a su vez da lugar a

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(M, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(L, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(C, N) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_A^1(M, N) \\ & & \uparrow 1 & & \uparrow h'^t & & \uparrow h^t & & \uparrow 1 \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(M, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(E, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(N, N) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_A^1(M, N) \end{array}$$

Por lo tanto, $\lambda(e) = \delta(1) = \delta(h^t(1)) = \delta(h) = x$.

Supongamos ahora que otra extensión

$$e' : 0 \longrightarrow N \xrightarrow{u} E' \xrightarrow{v} M \longrightarrow 0$$

tiene el mismo invariante $\lambda(e') = x$ y vamos a probar que es equivalente a la que hemos construido. Esto probará que todas las extensiones con el mismo invariante son equivalentes.

En efecto, por la propiedad proyectiva de los grupos libres, existe un homomorfismo k' que hace conmutativo el cuadrado de la derecha del diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\alpha} & L & \xrightarrow{\beta} & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow k & & \downarrow k' & & \downarrow 1 \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{u} & E' & \xrightarrow{v} & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

A su vez, k' permite definir k estableciendo que $k(c)$ es la única antiimagen en N de $k'(\alpha(c))$. Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(M, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(E', N) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(N, N) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_A^1(M, N) \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow k'^t & & \downarrow k^t \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(M, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(L, N) \xrightarrow{\alpha^t} \text{Hom}_A(C, N) & \xrightarrow{\delta} & \text{Ext}_A^1(M, N) \\ & & \uparrow 1 & & \uparrow h'^t & & \uparrow h^t \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_A(M, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(E, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_A(N, N) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_A^1(M, N) \end{array}$$

del que deducimos que $\delta(h^t(1)) = \delta(k^t(1))$, luego $\delta(h - k) = 0$, luego existe $\gamma : L \rightarrow N$ tal que $h - k = \alpha^t(\gamma) = \alpha \circ \gamma$.

Definimos $\phi : E \rightarrow E'$ mediante $\phi([(n, l)]) = u(n + \gamma(l)) + k'(l)$. La definición es correcta, pues si $(h(c), -\alpha(c)) \in S_h$, entonces

$$\begin{aligned} u(h(c) - \gamma(\alpha(c))) - k'(\alpha(c)) &= u(h(c) - \gamma(\alpha(c))) - u(k(c)) \\ &= u((h - k)(c) - \gamma(\alpha(c))) = 0. \end{aligned}$$

Tenemos que probar que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{\alpha'} & E & \xrightarrow{p} & M \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow \phi & & \downarrow 1 \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{u} & E' & \xrightarrow{v} & M \longrightarrow 0 \end{array}$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned} v(\phi([(n, l)])) &= v(u(n + \gamma(l)) + k'(l)) = v(k'(l)) = \beta(l) = p([(n, l)]), \\ \phi(\alpha'(n)) &= \phi([(n, 0)]) = u(n). \end{aligned}$$

Así pues, hemos probado que λ es una aplicación suprayectiva de la clase de todas las extensiones de N por M en el conjunto $\text{Ext}_A^1(M, N)$, y dos extensiones son equivalentes si y sólo si tienen la misma imagen por λ .

Por consiguiente, los elementos de $\text{Ext}_A^1(M, N)$ representan todas las clases de equivalencia de extensiones de N por M . ■

7.4 Cohomología de haces de módulos

Vamos a estudiar ahora los funtores derivados del funtor covariante

$$\Gamma(X, -) : \text{Mód}(X) \longrightarrow \text{Mód}(\mathcal{O}_X(X)),$$

donde X es un espacio anillado. Recordemos que se trata del funtor dado por $\Gamma(X, \mathcal{M}) = \mathcal{M}(X)$ y que a cada homomorfismo de \mathcal{O}_X -módulos $\phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ le asigna el homomorfismo $\phi_X : \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{N}(X)$.

En la página 193 hemos probado que es exacto por la izquierda, luego sus funtores derivados derechos se definen con resoluciones inyectivas, y existen en la categoría de los \mathcal{O}_X -módulos. Los representaremos por $H^n(X, -)$. Para cada \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} , los $\mathcal{O}_X(X)$ -módulos $H^n(X, \mathcal{M})$ se llaman *grupos de cohomología* de \mathcal{M} .

Si hemos presentado la teoría de funtores derivados en el contexto general de los \mathcal{O}_X -módulos asociados a un espacio anillado en lugar de en el caso de los módulos sobre un anillo ha sido precisamente para abarcar este caso.

Explícitamente, para calcular los grupos de cohomología de un haz \mathcal{M} partimos de una resolución inyectiva

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\eta} \mathcal{J}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{J}^1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{J}^2 \xrightarrow{d_2} \dots$$

la reducimos eliminando \mathcal{M} y pasamos al complejo

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}^0(X) \xrightarrow{d_{0X}} \mathcal{J}^1(X) \xrightarrow{d_{1X}} \mathcal{J}^2(X) \xrightarrow{d_{2X}} \dots$$

Entonces $H^n(X, \mathcal{M}) = \text{N} d_{nX} / \text{Im} d_{n-1X}$.

Si X es un espacio anillado y U es un abierto en X podríamos considerar, más en general, el funtor $\Gamma(U, -)$ en lugar de $\Gamma(X, -)$, que claramente es también exacto por la izquierda, pero es fácil ver que los $\mathcal{O}_X(U)$ -módulos que obtendríamos de esta manera no son sino $H^n(U, \mathcal{M}) = H^n(U, \mathcal{M}|_U)$. En efecto, basta tomar como resolución inyectiva de $\mathcal{M}|_U$ la resolución

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}|_U \xrightarrow{\eta|_U} \mathcal{J}^0|_U \xrightarrow{d_{0|U}} \mathcal{J}^1|_U \xrightarrow{d_{1|U}} \mathcal{J}^2|_U \xrightarrow{d_{2|U}} \dots$$

(teorema 5.52) y la igualdad es inmediata.

Módulos diseminados El teorema 6.12 afirma que los funtores derivados de un funtor covariante exacto por la izquierda pueden calcularse con cualquier resolución acíclica, no necesariamente inyectiva. Vamos a encontrar una clase de \mathcal{O}_X -módulos acíclicos más manejable que la de los inyectivos.

Definición 7.19 Si X es un espacio anillado, diremos que un \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} es *diseminado* si para todo par de abiertos $U \subset V \subset X$ se cumple que la restricción $\rho_U^V : \mathcal{M}(V) \longrightarrow \mathcal{M}(U)$ es suprayectiva.

Observemos que para que X sea diseminado basta con que sean suprayectivas las restricciones ρ_U^X . En primer lugar probamos que esta familia incluye a la de los módulos inyectivos:

Teorema 7.20 *Si X es un espacio anillado, todo \mathcal{O}_X -módulo inyectivo es diseminado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea U un abierto en X y consideremos el pre haz \mathcal{F}_U^- en X dado por

$$\mathcal{F}_U^-(W) = \begin{cases} \mathcal{O}_X(W) & \text{si } W \subset U, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con las restricciones obvias. Llamemos \mathcal{F}_U a su completión. Es inmediato que si $P \in X$, entonces

$$\mathcal{F}_{U,P} = \begin{cases} \mathcal{O}_{X,P} & \text{si } P \in U, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si $U \subset V \subset X$, tenemos un homomorfismo natural $\mathcal{F}_U^- \rightarrow \mathcal{F}_V^-$, que se extiende a un homomorfismo de haces $i : \mathcal{F}_U \rightarrow \mathcal{F}_V$. Es claro que si $P \in U$ entonces $i_P = 1$, mientras que si $P \in X \setminus U$ entonces $i_P = 0$, pero en ambos casos i_P es inyectivo, luego i es inyectivo.

Por otra parte, \mathcal{F}_U^- tiene una estructura natural de \mathcal{O}_X -módulo, luego \mathcal{F}_U también la tiene.

Si \mathcal{J} es un \mathcal{O}_X -módulo arbitrario y $f \in \mathcal{J}(U)$, podemos definir un homomorfismo $\phi_f : \mathcal{F}_U^- \rightarrow \mathcal{J}$ mediante

$$\phi_{f,W}(a) = \begin{cases} af|_W & \text{si } W \subset U, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así, si $P \in X$ se cumple que

$$\phi_{f,P}(1) = \begin{cases} f_P & \text{si } P \in U, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La completión $\phi_f^+ : \mathcal{F}_U \rightarrow \mathcal{J}$ cumple esto mismo, de donde se sigue que $\phi_{f,U}^+(1) = f$.

Si \mathcal{J} es inyectivo podemos extender ϕ_f^+ a un homomorfismo $\phi_V : \mathcal{F}_V \rightarrow \mathcal{J}$. Sea $g = \phi_V(1) \in \mathcal{J}(V)$. Entonces

$$g|_U = \phi_V(1)|_U = \phi_U(1) = \phi_U(i_U(1)) = \phi_{f,U}^+(1) = f.$$

Por lo tanto la restricción es suprayectiva. ■

Ahora vamos a demostrar que los módulos diseminados son acíclicos. Necesitamos algunos resultados previos:

Teorema 7.21 *Sea X un espacio anillado y $0 \rightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{N} \xrightarrow{\beta} \mathcal{P} \rightarrow 0$ una sucesión exacta de \mathcal{O}_X -módulos. Si \mathcal{M} es diseminado, la sucesión*

$$0 \rightarrow \mathcal{M}(X) \xrightarrow{\alpha_X} \mathcal{N}(X) \xrightarrow{\beta_X} \mathcal{P}(X) \rightarrow 0$$

también es exacta.

DEMOSTRACIÓN: La sucesión $0 \rightarrow \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{N}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ es exacta (para un módulo \mathcal{M} arbitrario) por la exactitud izquierda de $\Gamma(X, -)$. Basta probar que β_X es suprayectivo.

Fijemos $u \in \mathcal{P}(X)$ y sea Σ el conjunto de los pares (V, t) , donde V es un abierto en X y $t \in \mathcal{N}(V)$ cumple $\beta_V(t) = u|_V$. Definimos en Σ el orden parcial dado por $(V, t) \leq (V', t')$ si $V \subset V'$ y $t'|_V = t$. Obviamente $(\emptyset, 0) \in \Sigma$ y, por el lema de Zorn, Σ tiene un elemento maximal (U, t) . Basta probar que $U = X$.

En caso contrario existe $P \in X \setminus U$. Como β_P es suprayectiva, existe un entorno V de P y un $t' \in \mathcal{N}(V)$ tal que $\beta_V(t') = u|_V$. Entonces $t|_{U \cap V} - t'|_{U \cap V}$ está en el núcleo de $\beta_{U \cap V}$ y la sucesión

$$0 \rightarrow \mathcal{M}(U \cap V) \rightarrow \mathcal{N}(U \cap V) \rightarrow \mathcal{P}(U \cap V)$$

es exacta por el mismo motivo que para X . Existe, pues, un $s \in \mathcal{M}(U \cap V)$ tal que $t|_{U \cap V} - t'|_{U \cap V} = \alpha_{U \cap V}(s)$. Como \mathcal{M} es diseminado, existe un $s' \in \mathcal{M}(X)$ tal que $s = s'|_{U \cap V}$. Ahora definimos $\bar{t} \in \mathcal{N}(U \cup V)$ por $\bar{t}|_U = t$ y $\bar{t}|_V = t' + \alpha_V(s'|_V)$. Es claro entonces que $(U \cup V, \bar{t})$ contradice la maximalidad de (U, t) . ■

Teorema 7.22 *Si X es un espacio anillado y $0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow 0$ es una sucesión exacta de \mathcal{O}_X -módulos donde \mathcal{M} y \mathcal{N} son diseminados, entonces \mathcal{P} también lo es.*

DEMOSTRACIÓN: Si $U \subset V$ son dos abiertos de X , tenemos el siguiente diagrama conmutativo, en el que las filas son exactas por el teorema anterior (observemos que la restricción de un módulo diseminado es trivialmente diseminada):

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}(V) & \longrightarrow & \mathcal{N}(V) & \longrightarrow & \mathcal{P}(V) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}(U) & \longrightarrow & \mathcal{N}(U) & \longrightarrow & \mathcal{P}(U) \longrightarrow 0 \end{array}$$

El hecho de que la restricción en \mathcal{N} sea suprayectiva implica ahora que también lo es la de \mathcal{P} . ■

Teorema 7.23 *Si X es un espacio anillado, todo \mathcal{O}_X -módulo diseminado es acíclico.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{J}$ un monomorfismo en un módulo inyectivo y formemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow 0.$$

Los teoremas anteriores nos dan que tanto \mathcal{J} como \mathcal{I} son diseminados, así como que tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{J}(X) \rightarrow \mathcal{I}(X) \rightarrow 0.$$

Por otra parte, sabemos que $H^i(X, \mathcal{J}) = 0$ para todo $i \geq 1$. La sucesión exacta larga de homología implica entonces que $H^1(X, \mathcal{M}) = 0$, así como que $H^i(X, \mathcal{M}) \cong H^{i-1}(X, \mathcal{J})$. De aquí se sigue inductivamente que todos los grupos de cohomología (menos el primero) son nulos. ■

Esto tiene una consecuencia notable, y es que los grupos de cohomología $H^n(X, \mathcal{M})$ no dependen de la estructura de espacio anillado que estemos considerando en X , sino únicamente de su estructura topológica. En efecto, dado un espacio anillado (X, \mathcal{O}_X) , podemos considerar también a X como espacio anillado con el haz constante \mathbb{Z}_X , de modo que todo \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} es también un \mathbb{Z}_X -módulo. Ahora bien, \mathcal{M} es diseminado como \mathcal{O}_X -módulo si y sólo si lo es como \mathbb{Z}_X -módulo. Por consiguiente, una resolución inyectiva de \mathcal{M} como \mathcal{O}_X -módulo sigue siendo una resolución diseminada de \mathcal{M} como \mathbb{Z}_X -módulo, luego, al aplicarle el funtor $\Gamma(X, -)$, los grupos de cohomología del complejo resultante son los grupos $H^n(X, \mathcal{M})$ considerando indistintamente a \mathcal{M} como \mathcal{O}_X -módulo o como \mathbb{Z}_X -módulo.

También se cumple que los homomorfismos entre los grupos de cohomología son independientes de la estructura algebraica de \mathcal{M} . En efecto, tenemos que $\text{Mod}(X, \mathcal{O}_X) \subset \text{Mod}(X, \mathbb{Z}_X)$, luego en $\text{Mod}(X, \mathcal{O}_X)$ podemos considerar las dos familias de funtores $H^n(X, -)$, según consideremos a los módulos de $\text{Mod}(X, \mathcal{O}_X)$ como \mathcal{O}_X -módulos o como \mathbb{Z}_X -módulos (hemos probado que ambas familias de funtores coinciden sobre los módulos, pero nos falta probar que coinciden sobre los homomorfismos). Ambas familias están dotadas de sendos homomorfismos de conexión, ambas se anulan (para $n \geq 1$) sobre los \mathcal{O}_X -módulos diseminados, luego ambas son universales. Puesto que obviamente coinciden (incluso en los homomorfismos) para $n = 0$, concluimos que son isomorfas.

Desde otro punto de vista, para cada haz de grupos abelianos \mathcal{M} sobre el espacio topológico X , hemos definido los grupos de cohomología $H^n(X, \mathcal{M})$, que son grupos abelianos, pero si \mathcal{M} tiene una estructura adicional de \mathcal{O}_X -módulo para cierto haz de anillos \mathcal{O}_X sobre X , entonces los grupos $H^n(X, \mathcal{M})$ heredan una estructura de $\mathcal{O}_X(X)$ -módulo.

Módulos paracompactos En esta sección X será un espacio anillado sobre un espacio topológico paracompacto (definición 1.14). Para aprovechar la paracompacidad de X vamos a ver que el concepto de partición de la unidad puede trasladarse a los \mathcal{O}_X -módulos.

En primer lugar definimos el *soprote* de un endomorfismo $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ como la clausura $\text{sop } \phi$ del conjunto de los puntos $P \in X$ tales que $\phi_P \neq 0$. De este modo, si $U \subset X$ es un abierto disjunto con $\text{sop } \phi$, se cumple que $\phi_P = 0$ para todo $P \in U$, luego $\phi_U = 0$.

Si $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ es un cubrimiento abierto de X localmente finito, una *partición de la unidad subordinada a \mathcal{U}* en \mathcal{M} es una familia $\{\phi_i\}_{i \in I}$ de endomorfismos de \mathcal{M} tal que, $\text{sop } \phi_i \subset U_i$ y, para todo $P \in X$, $\sum_i \phi_{iP} = I_P$ (la identidad en \mathcal{M}_P).

Observemos que la finitud local del cubrimiento hace que todo punto $P \in X$ tenga un entorno V en el que el conjunto $\{i \in I \mid \phi_{iV} \neq 0\}$ es finito, luego, en particular, también es finito $\{i \in I \mid \phi_{iP} \neq 0\}$, por lo que la suma de endomorfismos que aparece en la definición es finita. De hecho, se cumple también que $\sum_i \phi_{iV} = I_V$ (la identidad en $\mathcal{M}(V)$).

Un \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} es *paracompacto* si todo cubrimiento abierto de X localmente finito tiene una partición de la unidad subordinada.

Teorema 7.24 *Si X es un espacio topológico (paracompacto), todo C_X -módulo es paracompacto. Si X es una variedad diferencial, todo C_X^∞ -módulo es paracompacto.*

DEMOSTRACIÓN: Probaremos las dos afirmaciones simultáneamente llamando \mathcal{O}_X a C_X o a C_X^∞ según el caso.

Sea \mathcal{M} un \mathcal{O}_X -módulo y $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de X localmente finito. Por el teorema 1.18 (véanse las notas posteriores) existe una partición de la unidad $\{f_i\}_{i \in I}$ subordinada al cubrimiento que está formada por funciones $f_i \in \mathcal{O}_X(X)$.

Para cada abierto $U \subset X$, definimos $\phi_{iU} : \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}(U)$ mediante $\phi_{iU}(m) = f_i|_U m$. Es inmediato que los homomorfismos ϕ_{iU} conmutan con las restricciones, por lo que definen endomorfismos $\phi_i : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. Se comprueba sin dificultad que $\{\phi_i\}_{i \in I}$ es una partición de la unidad de \mathcal{M} tal que $\text{sop } \phi_i = \text{sop } f_i \subset U_i$. ■

Nuestro propósito es demostrar que los módulos paracompactos son acíclicos, por lo que los grupos de cohomología se pueden calcular también con resoluciones paracompactas. El teorema siguiente nos garantiza la existencia de tales resoluciones:

Teorema 7.25 *Si X es un espacio anillado, para todo \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} existe un monomorfismo $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{J}$, donde \mathcal{J} es un \mathcal{O}_X -módulo paracompacto.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada abierto $U \subset X$ definimos $\mathcal{J}(U)$ como el conjunto de todas las aplicaciones s que a cada $P \in U$ le asignan un $s(P) \in \mathcal{M}_P$, que tiene una estructura natural de \mathcal{O}_X -módulo. Tomamos como restricciones las restricciones usuales como aplicaciones, con lo que \mathcal{J} se convierte claramente en un haz. Por otra parte, definimos $\mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{J}(U)$ como el homomorfismo que a cada $m \in \mathcal{M}(U)$ le asigna la aplicación $P \mapsto m_P$. Es claro que esto define un monomorfismo de haces. Sólo hemos de probar que \mathcal{J} es paracompacto.

Fijemos un cubrimiento de X localmente finito $\{U_i\}_{i \in I}$. Por el teorema 1.16, cada punto $P \in X$ tiene un entorno abierto W tal que $P \in W \subset \bar{W} \subset U_i$, para cierto $i \in I$. Los abiertos W forman un cubrimiento de X , y podemos tomar un refinamiento localmente finito $\{W_j\}_{j \in J}$. Así, para cada $j \in J$ existe un $i_j \in I$ tal que $\bar{W}_j \subset U_{i_j}$. Para cada $i \in I$, sea $J_i = \{j \in J \mid i_j = i\}$. Si $J_i = \emptyset$ definimos $V_i = \emptyset$, y en caso contrario tomamos

$$V_i = \bigcup_{j \in J_i} W_j.$$

La finitud local del cubrimiento hace que \bar{V}_i sea la unión de las clausuras de los W_j correspondientes, por lo que $\bar{V}_i \subset U_i$. Naturalmente, $\{V_i\}_{i \in I}$ es también un cubrimiento abierto localmente finito.

Para cada $P \in X$ tomemos $i_P \in I$ tal que $P \in V_{i_P}$. Sea $\chi_i : X \rightarrow \{0, 1\}$ la función dada por

$$\chi_i(P) = \begin{cases} 1 & \text{si } i_P = i, \\ 0 & \text{si } i_P \neq i. \end{cases}$$

Para cada abierto $U \subset X$, definimos el homomorfismo $\phi_{iU} : \mathcal{J}(U) \rightarrow \mathcal{J}(U)$ dado por $\phi_{iU}(s)(P) = \chi_i(P)s(P)$. Es inmediato que estos homomorfismos son compatibles con las restricciones, luego definen homomorfismos $\phi_i : \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$. También es obvio que $\phi_{iU} = 0$ siempre que U es disjunto con V_i , por lo que $\text{sop } \phi_i \subset \bar{V}_i \subset U_i$. Así mismo es claro que $\{\phi_i\}_{i \in I}$ es una partición de la unidad. ■

El teorema siguiente sería trivial si hubiéramos demostrado ya que los módulos paracompactos son acíclicos:

Teorema 7.26 *Sea X un espacio anillado y*

$$0 \rightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{N} \xrightarrow{\beta} \mathcal{P} \rightarrow 0$$

una sucesión exacta de \mathcal{O}_X -módulos tal que \mathcal{M} es paracompacto. Entonces también es exacta la sucesión

$$0 \rightarrow \mathcal{M}(X) \xrightarrow{\alpha_X} \mathcal{N}(X) \xrightarrow{\beta_X} \mathcal{P}(X) \rightarrow 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Sólo hay que probar la suprayectividad de β_X . Fijado $t \in \mathcal{P}(X)$, en principio tenemos que cada punto de X tiene un entorno U en el que $t|_U$ tiene antiimagen por β_U . Por la paracompacidad de X podemos suponer que los abiertos U forman un cubrimiento localmente finito $\{U_i\}_{i \in I}$. Fijemos $s_i \in \mathcal{N}(U_i)$ tal que $\beta_{U_i}(s_i) = t|_{U_i}$.

Sea $s_{ij} = s_i - s_j \in \mathcal{N}(U_i \cap U_j)$. Observemos que, en $U_i \cap U_j \cap U_k$, se cumple la relación $s_{ij} + s_{jk} = s_{ik}$. Por otra parte, $\beta_{U_i \cap U_j}(s_{ij}) = 0$, luego (identificando a \mathcal{M} con el núcleo de β a través de α), tenemos que $s_{ij} \in \mathcal{M}(U_i \cap U_j)$.

Fijemos una partición de la unidad $\{\phi_i\}_{i \in I}$ en \mathcal{M} subordinada al cubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$ y sea $V_{ik} = U_i \setminus \text{sop } \phi_k$. De este modo $U_i = V_{ik} \cup (U_i \cap U_k)$ y $\phi_k|_{U_i \cap U_k}(s_{ik})|_{U_i \cap U_k \cap V_{ik}} = 0$. Por consiguiente, existe $s'_{ik} \in \mathcal{M}(U_i)$ tal que $s'_{ik}|_{U_i \cap U_k} = \phi_k|_{U_i \cap U_k}(s_{ik})$ y $s'_{ik}|_{V_{ik}} = 0$.

Así, cada punto $P \in U_i$ tiene un entorno V que corta sólo a un número finito de abiertos U_k , luego $s'|_{ik} = 0$ para todo índice k salvo a lo sumo un número finito de ellos. Esto permite definir (en V) la suma

$$s'_i = \sum_k s'_{ik},$$

pero es claro que estas sumas para cada V son consistentes entre sí, luego se extienden a un mismo $s'_i \in \mathcal{M}(U_i)$.

Fijemos ahora un punto $P \in U_i \cap U_j$ y consideremos la diferencia

$$s'_{iP} - s'_{jP} = \sum_k (s'_{ikP} - s'_{jkP}),$$

donde la suma se puede restringir a los índices k tales que $P \in U_i \cap U_j \cap U_k$, y entonces

$$s'_{iP} - s'_{jP} = \sum_k \phi_{kP} (s_{ikP} - s_{jkP}) = \sum_k \phi_{kP} (s_{ijP}).$$

Ahora podemos considerar de nuevo que k recorre todos los índices, pues $\phi_{kP} = 0$ si $P \notin U_k$, y así podemos aplicar que $\{\phi_k\}_k$ es una partición de la unidad, con lo que concluimos que $s'_{iP} - s'_{jP} = s_{ijP}$, para todo $P \in U_i \cap U_j$, luego $s'_i - s'_j = s_{ij} = s_i - s_j$ (en $U_i \cap U_j$).

Equivalentemente, tenemos que $s_i + s'_i = s_j + s'_j$ en $U_i \cap U_j$, lo que significa que existe un $s \in \mathcal{N}(X)$ tal que $s|_{U_i} = s_i + s'_i$ para todo i , luego

$$\beta_X(s)|_{U_i} = \beta_{U_i}(s_i) + \beta_{U_i}(s'_i) = t|_{U_i} + 0,$$

luego $\beta_X(s) = t$. ■

Vamos a necesitar el siguiente hecho elemental:

Teorema 7.27 *Si X es un espacio anillado, \mathcal{M}, \mathcal{N} son dos \mathcal{O}_X -módulos y \mathcal{M} es paracompacto, entonces $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$ también es paracompacto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de X y sea $\{\phi_i\}_{i \in I}$ una partición de la unidad en \mathcal{M} subordinada. Es inmediato comprobar que los homomorfismos $\{\phi_i \otimes 1\}$ son una partición de la unidad para el producto tensorial con $\text{sop}(\phi_i \otimes 1) \subset \text{sop} \phi_i \subset U_i$. ■

Nota *A partir de aquí vamos a fijar un dominio de ideales principales D y vamos a trabajar exclusivamente con D_X -módulos, donde D_X es el haz constante asociado a D sobre el espacio topológico X . (Esto no es ninguna restricción, pues cuando $D = \mathbb{Z}$ estamos considerando todos los haces sobre X .) ■*

Si \mathcal{M} es un D_X -módulo, es fácil ver que $\mathcal{M} \otimes_{D_X} D_X \cong \mathcal{M}$.

Diremos que un D_X -módulo \mathcal{M} es *libre de torsión* si todos los D -módulos \mathcal{M}_P , con $P \in X$ son libres de torsión.

Teorema 7.28 *Sea*

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de D_X -módulos y sea \mathcal{N} un D_X -módulo. Si \mathcal{M}'' o \mathcal{N} es libre de torsión, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}' \otimes_{D_X} \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \otimes_{D_X} \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}'' \otimes_{D_X} \mathcal{N} \longrightarrow 0$$

es exacta. Si, además, \mathcal{M}' o \mathcal{N} es paracompacto, entonces también es exacta la sucesión

$$0 \longrightarrow (\mathcal{M}' \otimes_{D_X} \mathcal{N})(X) \longrightarrow (\mathcal{M} \otimes_{D_X} \mathcal{N})(X) \longrightarrow (\mathcal{M}'' \otimes_{D_X} \mathcal{N})(X) \longrightarrow 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Dado $P \in X$, el teorema 5.33 nos da que uno de los funtores, $\otimes_D \mathcal{M}'_P$ o $\otimes_D \mathcal{N}_P$, es exacto y, en cualquiera de los dos casos, se cumple que $\text{Tor}_D(\mathcal{M}'_P, \mathcal{N}_P) = 0$, lo que hace exacta a la sucesión

$$0 \longrightarrow (\mathcal{M}' \otimes_{D_X} \mathcal{N})_P \longrightarrow (\mathcal{M} \otimes_{D_X} \mathcal{N})_P \longrightarrow (\mathcal{M}'' \otimes_{D_X} \mathcal{N})_P \longrightarrow 0.$$

Esto prueba la primera parte del teorema. Bajo las hipótesis de la segunda parte tenemos que $\mathcal{M}' \otimes_{D_X} \mathcal{N}$ es paracompacto, por 7.27, luego el teorema 7.26 nos da la conclusión. ■

Ya tenemos todos los elementos necesarios para obtener el teorema principal de este apartado. Supongamos que

$$0 \longrightarrow D_X \xrightarrow{\eta} \mathcal{J}^0 \longrightarrow \mathcal{J}^1 \longrightarrow \mathcal{J}^2 \longrightarrow \dots$$

es una resolución paracompacta y libre de torsión del haz constante D_X . Sea \mathcal{M} un D_X -módulo arbitrario. Si eliminamos D_X y aplicamos el funtor covariante $\Gamma(- \otimes_{D_X} \mathcal{M})$, obtenemos un complejo

$$0 \longrightarrow (\mathcal{J}^0 \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X) \longrightarrow (\mathcal{J}^1 \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X) \longrightarrow (\mathcal{J}^2 \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X) \longrightarrow \dots$$

Llamaremos $\bar{H}^n(X, \mathcal{M})$ a sus grupos (D -módulos) de cohomología. Cada homomorfismo $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ induce claramente un homomorfismo entre los complejos respectivos, el cual induce a su vez homomorfismos entre los grupos de cohomología, con lo que cada

$$\bar{H}^n(X, -) : \text{Mod}(D_X) \longrightarrow \text{Mod}(D)$$

es un funtor covariante (que —en principio— depende de la resolución de D_X de la que hemos partido).

Vamos a probar que esta familia de funtores tiene un homomorfismo de conexión. Para ello tomamos una sucesión exacta de D_X -módulos

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'' \longrightarrow 0.$$

Como cada \mathcal{J}^n es paracompacto y libre de torsión, el teorema 7.28 nos da que la sucesión de complejos

$$0 \longrightarrow (\mathcal{J}^n)_n \otimes_{D_X} \mathcal{M}' \longrightarrow (\mathcal{J}^n)_n \otimes_{D_X} \mathcal{M} \longrightarrow (\mathcal{J}^n)_n \otimes_{D_X} \mathcal{M}'' \longrightarrow 0$$

es exacta, y su sucesión exacta de cohomología conecta los funtores $\bar{H}^n(X, -)$ aplicados a la sucesión exacta de partida. También es obvio que un homomorfismo entre dos sucesiones exactas cortas da lugar a un diagrama conmutativo entre las dos sucesiones exactas largas. En suma, tenemos un homomorfismo de conexión.

Sea \mathcal{H}^n el núcleo de $\mathcal{J}^n \longrightarrow \mathcal{J}^{n+1}$. Tenemos entonces la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^n \longrightarrow \mathcal{J}^n \longrightarrow \mathcal{H}^{n+1} \longrightarrow 0.$$

Como \mathcal{J}^n es libre de torsión, lo mismo le sucede al subhaz \mathcal{H}^n . El teorema 7.28 nos da entonces la exactitud de

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^n \otimes_{D_X} \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{J}^n \otimes_{D_X} \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{H}^{n+1} \otimes_{D_X} \mathcal{M} \longrightarrow 0,$$

y la exactitud izquierda de Γ nos da la exactitud de

$$0 \longrightarrow (\mathcal{H}^n \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X) \longrightarrow (\mathcal{J}^n \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X) \longrightarrow (\mathcal{H}^{n+1} \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X).$$

Esto implica que, en el siguiente diagrama conmutativo, las flechas verticales son inyectivas,

$$\begin{array}{ccccc} (\mathcal{J}^{n-1} \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X) & \longrightarrow & (\mathcal{J}^n \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X) & \xrightarrow{(d_n \otimes 1)_X} & (\mathcal{J}^{n+1} \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X) \\ & \searrow & \uparrow & \searrow & \uparrow \\ & & (\mathcal{H}^n \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X) & & (\mathcal{H}^{n+1} \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X) \end{array}$$

luego el núcleo de $(d_n \otimes 1)_X$ es el mismo que el de la flecha oblicua, que, por la sucesión exacta precedente, es la imagen de $(\mathcal{H}^n \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X)$.

Si $n \geq 1$ todo vale igualmente para la parte izquierda del diagrama, luego

$$\bar{H}^n(X, \mathcal{M}) = (\mathcal{H}^n \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X) / \text{Im}(d_{n-1} \otimes 1)_X.$$

Observemos ahora que si \mathcal{M} es paracompacto, entonces 7.28 nos da que la sucesión exacta previa al diagrama se puede prolongar con un 0, lo que significa que las flechas oblicuas del diagrama son suprayectivas, luego

$$\bar{H}^n(X, \mathcal{M}) = 0, \quad \text{para } n \geq 1.$$

Puesto que todo D_X -módulo puede sumergirse en un D_X -módulo paracompacto, podemos aplicar el teorema 6.15 para concluir que la sucesión de funtores $\bar{H}^n(X, -)$ es universal.

Volvamos al caso general en que \mathcal{M} es arbitrario y fijémosnos en el caso $n = 0$. El diagrama anterior nos da que

$$\bar{H}^0(X, \mathcal{M}) \cong (\mathcal{H}^0 \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X).$$

Ahora bien, tenemos un isomorfismo (fijo) $D_X \xrightarrow{\eta} \mathcal{H}^0$, el cual induce un isomorfismo

$$\mathcal{M} \cong D_X \otimes_{D_X} \mathcal{M} \cong \mathcal{H}^0 \otimes_{D_X} \mathcal{M},$$

que a su vez induce un isomorfismo natural

$$(\mathcal{H}^0 \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X) \cong \mathcal{M}(X),$$

luego el functor $\bar{H}^0(X, -)$ es naturalmente equivalente a $\Gamma(X, -)$.

La conclusión es que los funtores $\bar{H}^n(X, -)$ son naturalmente equivalentes a los funtores $H^n(X, -)$. El teorema siguiente resume lo que hemos obtenido:

Teorema 7.29 *Los grupos de cohomología de un D_X -módulo \mathcal{M} pueden calcularse a partir de cualquier resolución paracompacta y libre de torsión de D_X como los grupos de cohomología del complejo que resulta de aplicarle el functor covariante $\Gamma(X, - \otimes_{D_X} \mathcal{M})$.*

Nota Si tenemos un homomorfismo entre dos resoluciones paracompactas y libres de torsión del módulo constante D_X , es decir, un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & D_X & \longrightarrow & \mathcal{J}^0 & \longrightarrow & \mathcal{J}^1 & \longrightarrow & \mathcal{J}^2 & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow 1 & & \downarrow \phi_0 & & \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \\
 0 & \longrightarrow & D_X & \longrightarrow & \mathcal{J}^0 & \longrightarrow & \mathcal{J}^1 & \longrightarrow & \mathcal{J}^2 & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

es claro que (ϕ_i) induce transformaciones naturales entre los grupos de cohomología construidos con ambas resoluciones (compatibles con los homomorfismos de conexión), pero, como ambas familias de funtores son universales, sólo hay una familia de transformaciones naturales entre ellas compatibles con los homomorfismos de conexión, y está formada por isomorfismos. ■

Casi hemos probado el teorema siguiente:

Teorema 7.30 *Si X es un espacio anillado, todos los \mathcal{O}_X -módulos paracompactos son acíclicos.*

En efecto, sólo falta probar que existe una resolución paracompacta y libre de torsión del haz constante \mathbb{Z}_X . Si existe, podemos construir los funtores $\bar{H}^n(X, -)$, de los que hemos probado, por una parte, que son naturalmente equivalentes a los funtores $H^n(X, -)$ y, por otra, que se anulan sobre los \mathbb{Z}_X -módulos paracompactos. Esto implica que los \mathbb{Z}_X -módulos paracompactos son acíclicos, pero todo \mathcal{O}_X -módulo paracompacto lo es también como \mathbb{Z}_X -módulo.

El teorema 7.25 implica la existencia de resoluciones paracompactas, pero no garantiza que sean libres de torsión. La existencia de tales resoluciones la probamos (varias veces) en el capítulo XIII (véase la nota tras el teorema 13.1), en la que mostraremos cómo distintas cohomologías introducidas de formas diversas en topología algebraica y en geometría diferencial son, en realidad, la cohomología que hemos definido y estudiado en esta sección. Con lo visto hasta aquí, el lector puede abordar ya el estudio del capítulo XIII excepto la sección 13.4, que requiere la sección 7.5.

7.5 Álgebras de cohomología

Si D es un anillo conmutativo y unitario, recordemos que una D -álgebra (unitaria) es un conjunto M dotado a la vez de estructura de D -módulo y de anillo unitario, de modo que ambas estructuras son compatibles en el sentido de que

$$d(m_1 m_2) = (d m_1) m_2 = m_1 (d m_2), \quad \text{para todo } d \in D, m_1, m_2 \in M.$$

Si X es un espacio topológico, una D_X -álgebra \mathcal{M} es un D_X -módulo con la propiedad de que, para cada abierto $U \subset X$, el $D_X(U)$ -módulo $\mathcal{M}(U)$ tiene una estructura de $D_X(U)$ -álgebra de modo que las restricciones son homomorfismos

de anillos (unitarios), es decir, que si $V \subset U \subset X$ son abiertos, se cumple que $1_U|_V = 1_V$ y

$$(m_1 m_2)|_V = m_1|_V m_2|_V, \quad \text{para todo } m_1, m_2 \in \mathcal{M}(U).$$

No podemos pedir que sean homomorfismos de álgebras porque al restringir cambia el anillo. Lo que se cumple, por la definición de D_X -módulo, es que

$$(dm)|_V = d|_V m|_V, \quad \text{para todo } d \in D(U), m \in \mathcal{M}(U).$$

No obstante, sabemos que $D_X(U)$ está formado por las funciones con valores en D localmente constantes en U , por lo que en particular contiene a las funciones constantes, que podemos identificar con los elementos de D , y $\mathcal{M}(U)$ es una D -álgebra y las restricciones son homomorfismos de D -álgebras.

Si $P \in X$, es claro que los módulos locales \mathcal{M}_P adquieren una estructura natural de $D_{X,P}$ -álgebra, es decir, de D -álgebra, y las localizaciones son homomorfismos de D -álgebras.

En esta sección vamos a probar que si X es un espacio topológico paracompacto, D es un dominio de ideales principales y \mathcal{M} es una D_X -álgebra, entonces

$$H(X, \mathcal{M}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^n(X, \mathcal{M})$$

puede ser dotado también de una estructura de D -álgebra graduada (es decir, de modo que el producto de elementos homogéneos sea homogéneo de grado igual a la suma de los grados de los factores).

Producto tensorial de complejos En general, para un espacio anillado X , definimos el producto tensorial de dos complejos inversos de \mathcal{O}_X -módulos \mathcal{C} y \mathcal{C}' como el complejo dado por

$$(\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{C}')^p = \bigoplus_{i+j=p} (C^i \otimes_{\mathcal{O}_X} C'^j),$$

con el operador cofrontera dado por

$$\bigoplus_{i+j=p} (d_i \otimes 1_j + (-1)^i 1_i \otimes d_j).$$

Se trata de la versión para haces de la estructura considerada en el teorema 5.34 (salvo que allí considerábamos complejos directos, pero esto es un mero cambio de notación). De hecho, el complejo de $\mathcal{O}_{X,P}$ -módulos que resulta al localizar en un punto $P \in X$ es el considerado en 5.34, lo que prueba que realmente el producto que acabamos de definir es un complejo (es decir, que al aplicar dos veces el operador cofrontera obtenemos el homomorfismo nulo). ■

Volviendo al contexto de esta sección, calcularemos los D -módulos $H^p(X, \mathcal{M})$ a partir de resoluciones del haz constante D_X según el teorema 7.29, y nuestro punto de partida será el teorema siguiente:

Teorema 7.31 *El producto tensorial de dos resoluciones paracompactas y libres de torsión del haz constante D_X es también una resolución paracompacta y libre de torsión de D_X .*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos dos resoluciones

$$0 \longrightarrow D_X \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{C}^0 \longrightarrow \mathcal{C}^1 \longrightarrow \dots$$

y

$$0 \longrightarrow D_X \xrightarrow{\epsilon'} \mathcal{C}'^0 \longrightarrow \mathcal{C}'^1 \longrightarrow \dots$$

Su producto tensorial es, por definición, el complejo $\mathcal{C} \otimes_{D_X} \mathcal{C}'$ con el homomorfismo de conexión

$$D_X \longrightarrow D_X \otimes_{D_X} D_X \longrightarrow \mathcal{C}^0 \otimes_{D_X} \mathcal{C}'^0.$$

Tenemos que probar que es ciertamente una resolución de D_X , es decir, que la sucesión

$$0 \longrightarrow D_X \longrightarrow \mathcal{C}^0 \otimes_{D_X} \mathcal{C}'^0 \longrightarrow (\mathcal{C}^0 \otimes_{D_X} \mathcal{C}'^1) \oplus (\mathcal{C}^1 \otimes_{D_X} \mathcal{C}'^0) \longrightarrow \dots$$

es exacta. Para ello fijamos un $P \in X$ y tenemos que probar que la sucesión correspondiente de D -módulos locales en P es exacta.

Los complejos \mathcal{C}_P y \mathcal{C}'_P tienen grupos de cohomología nulos excepto en dimensión 0 (porque al eliminar el término $D_{X,P}$ perdemos la exactitud y los grupos de cohomología son isomorfos a D). Podemos aplicarles la versión 7.9 del teorema de Künneth (la hemos enunciado para complejos directos y ahora tenemos complejos inversos, pero eso no supone más que un cambio de notación). Como los complejos son libres de torsión, por el teorema 5.33 son planos, lo que se traduce en que $\text{Tor}_A(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ es idénticamente nulo, luego en particular acíclico.

El teorema de Künneth nos da que $H^p(\mathcal{C}_P \otimes \mathcal{C}'_P) = 0$ para $p \geq 1$, mientras que $H^0(\mathcal{C}_P \otimes \mathcal{C}'_P) \cong D$. Por lo tanto, para probar que el producto de las resoluciones dadas es exacto sólo nos falta probar la exactitud en D_X y en $\mathcal{C}^0 \otimes_{D_X} \mathcal{C}'^0$.

Por una parte, en la sucesión

$$D \longrightarrow D \otimes_D D \longrightarrow D \otimes_D \mathcal{C}'^0_P \longrightarrow \mathcal{C}^0_P \otimes_D \mathcal{C}'^0_P$$

tenemos que el primer homomorfismo es un isomorfismo, el segundo es un monomorfismo porque D es un D -módulo libre, luego plano y el tercero también es un monomorfismo porque \mathcal{C}'^0_P es un D -módulo libre de torsión, luego también es plano. Esto prueba la exactitud en D_X .

Si llamamos $c = \epsilon_P(1)$, $c' = \epsilon'_P(1)$, la exactitud de las resoluciones de partida implica que $Z^0(\mathcal{C}_P) = \langle c \rangle$, $Z^0(\mathcal{C}'_P) = \langle c' \rangle$, luego $H^0(\mathcal{C}_P) = \langle [c] \rangle$, $H^0(\mathcal{C}'_P) = \langle [c'] \rangle$, luego $H^0(\mathcal{C}_P \otimes_D \mathcal{C}'_P)$ está generado por $\mu([c] \otimes [c']) = [c \otimes c']$, pero $F^0(\mathcal{C}_P \otimes_D \mathcal{C}'_P) = 0$, luego $Z^0(\mathcal{C}_P \otimes_D \mathcal{C}'_P) = \langle c \otimes c' \rangle = \langle \epsilon_P(1) \otimes \epsilon'_P(1) \rangle$,

que es precisamente la imagen del homomorfismo de conexión del producto de resoluciones. Por lo tanto, el producto es también exacto en $\mathcal{C}^0 \otimes_{D_X} \mathcal{C}'^0$.

Es inmediato que la suma directa de módulos paracompactos es paracompacta, y por 7.27 sabemos que el producto tensorial también lo es, luego la resolución producto es paracompacta.

El producto tensorial de dos D -módulos libres de torsión es libre de torsión, porque esto equivale a que el producto tensorial de dos D -módulos planos sea plano, lo cual es inmediato (si los funtores $-\otimes_D N_1$ y $-\otimes_D N_2$ son exactos, también lo es su composición, $-\otimes_D(N_1 \otimes_D N_2)$). También es obvio que la suma directa de D -módulos libres de torsión es libre de torsión, luego los módulos locales de $\mathcal{C} \otimes_D \mathcal{C}'$ son libres de torsión. ■

Observemos ahora que si M es una A -álgebra, el producto $M \times M \rightarrow M$ es una aplicación bilineal balanceada, que induce, consecuentemente, un homomorfismo de módulos $M \otimes_A M \rightarrow M$. Por lo tanto, si \mathcal{M} es una D_X -álgebra, tenemos homomorfismos $\mathcal{M}(U) \otimes_{D_X(U)} \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}(U)$ (para cada abierto $U \subset X$) compatibles con las restricciones, que determinan un homomorfismo de haces que se extiende a su vez a un homomorfismo de haces

$$\mathcal{M} \otimes_{D_X} \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M},$$

determinado por que, para todo $P \in X$, su localización $\mathcal{M}_P \otimes_D \mathcal{M}_P \rightarrow \mathcal{M}_P$ es el homomorfismo dado por $m_1 \otimes m_2 \mapsto m_1 m_2$.

Consideremos ahora dos resoluciones \mathcal{C} y \mathcal{C}' paracompactas y libres de torsión del haz constante² D_X . Tenemos entonces homomorfismos naturales:

$$(\mathcal{C}^i \otimes_{D_X} \mathcal{M}) \otimes_{D_X} (\mathcal{C}'^j \otimes_{D_X} \mathcal{M}) \cong \mathcal{C}^i \otimes_{D_X} \mathcal{C}'^j \otimes_{D_X} \mathcal{M} \otimes_{D_X} \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{C}^i \otimes_{D_X} \mathcal{C}'^j \otimes_{D_X} \mathcal{M}.$$

A su vez, podemos considerar los homomorfismos

$$(\mathcal{C}^i \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X) \otimes_D (\mathcal{C}'^j \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X) \rightarrow (\mathcal{C}^i \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X) \otimes_{D(X)} (\mathcal{C}'^j \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X)$$

$$\xrightarrow{j_X^+} ((\mathcal{C}^i \otimes_{D_X} \mathcal{M}) \otimes_{D_X} (\mathcal{C}'^j \otimes_{D_X} \mathcal{M}))(X) \rightarrow (\mathcal{C}^i \otimes_{D_X} \mathcal{C}'^j \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X),$$

que inducen un homomorfismo de complejos de D -módulos

$$(\mathcal{C} \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X) \otimes_D (\mathcal{C}' \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X) \rightarrow (\mathcal{C} \otimes_{D_X} \mathcal{C}' \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X).$$

Conviene observar que este homomorfismo es el único que, para cada punto $P \in X$, hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{C} \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X) \otimes_D (\mathcal{C}' \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X) & \longrightarrow & (\mathcal{C} \otimes_{D_X} \mathcal{C}' \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}_P \otimes_D \mathcal{M}_P \otimes_D \mathcal{C}'_P \otimes_D \mathcal{M}_P & \longrightarrow & \mathcal{C}_P \otimes_D \mathcal{C}'_P \otimes_D \mathcal{M}_P \end{array}$$

²El teorema 13.1 prueba la existencia de tales resoluciones. Es el único punto en el que usamos un argumento topológico para justificar la viabilidad de la construcción algebraica que estamos realizando aquí.

donde el homomorfismo de la fila inferior es el determinado por

$$c \otimes m_1 \otimes c' \otimes m_2 \mapsto c \otimes c' \otimes m_1 m_2.$$

Ahora consideramos los homomorfismos que intervienen en el teorema de Künneth 7.8 correspondientes a los complejos $(\mathcal{C} \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X)$ y $(\mathcal{C}' \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X)$:

$$H^i((\mathcal{C} \otimes \mathcal{M})(X)) \otimes_D H^j((\mathcal{C}' \otimes \mathcal{M})(X)) \longrightarrow H^{i+j}((\mathcal{C} \otimes \mathcal{M})(X) \otimes_D (\mathcal{C}' \otimes \mathcal{M})(X)),$$

(donde \otimes abrevia a \otimes_{D_X}), que es el dado por $[a] \otimes [b] \mapsto [a \otimes b]$. Al componerlo con el homomorfismo inducido por el homomorfismo de complejos precedente obtenemos un homomorfismo

$$H^i((\mathcal{C} \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X)) \otimes_D H^j((\mathcal{C}' \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X)) \longrightarrow H^{i+j}((\mathcal{C} \otimes_{D_X} \mathcal{C}' \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X)).$$

En otros términos, en virtud del teorema 7.29, tenemos homomorfismos naturales

$$H^i(X, \mathcal{M}) \otimes_D H^j(X, \mathcal{M}) \longrightarrow H^{i+j}(X, \mathcal{M}),$$

donde los grupos de cohomología de la izquierda están calculados con las resoluciones \mathcal{C} y \mathcal{C}' de D_X y el de la derecha con la resolución $\mathcal{C} \otimes_{D_X} \mathcal{C}'$.

Vamos a probar que estos homomorfismos no dependen de las resoluciones empleadas para calcularlos, pero antes necesitamos precisar qué queremos decir exactamente con esto.

En la prueba del teorema 7.29 hemos visto que si \mathcal{C} es una resolución paracompacta y libre de torsión de D_X , existe un isomorfismo natural entre los funtores $H^0(X, -) \cong \Gamma(X, -)$, luego si consideramos otra resolución \mathcal{C}' , componiendo los dos isomorfismos correspondientes obtenemos un isomorfismo natural $H_{\mathcal{C}}^0(X, -) \cong H_{\mathcal{C}'}^0(X, -)$ entre los funtores de cohomología de grado 0 construidos con ambas resoluciones.

En la prueba de dicho teorema hemos visto también que las sucesiones de funtores de cohomología obtenidas a partir de resoluciones de D_X son universales, lo que se traduce en que el isomorfismo anterior determina una única sucesión de isomorfismos naturales $H_{\mathcal{C}}^p(X, -) \cong H_{\mathcal{C}'}^p(X, -)$ para todo $p \geq 0$, y, de hecho, cualquier sucesión de homomorfismos naturales que conmuten con los homomorfismos de conexión de ambas sucesiones de funtores de cohomología es necesariamente la sucesión de isomorfismos indicada.

En particular, la composición $H_{\mathcal{C}}^p(X, -) \cong H_{\mathcal{C}'}^p(X, -) \cong H_{\mathcal{C}''}^p(X, -)$ de los isomorfismos naturales correspondientes a $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ y $(\mathcal{C}', \mathcal{C}'')$ es necesariamente el isomorfismo natural correspondiente a $(\mathcal{C}, \mathcal{C}'')$.

Lo que vamos a probar es que si consideramos cuatro resoluciones paracompactas y libres de torsión de D_X , tenemos diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathcal{C}_1}^i(X, \mathcal{M}) \otimes_D H_{\mathcal{C}'_1}^j(X, \mathcal{M}) & \longrightarrow & H_{\mathcal{C}_1 \otimes_{D_X} \mathcal{C}'_1}^{i+j}(X, \mathcal{M}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{\mathcal{C}_2}^i(X, \mathcal{M}) \otimes_D H_{\mathcal{C}'_2}^j(X, \mathcal{M}) & \longrightarrow & H_{\mathcal{C}_2 \otimes_{D_X} \mathcal{C}'_2}^{i+j}(X, \mathcal{M}) \end{array}$$

donde la flecha vertical izquierda es el producto tensorial de los isomorfismos naturales, y la derecha es el isomorfismo natural. Para ello probaremos la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 H_{\mathcal{C}_1}^i(X, \mathcal{M}) \otimes_D H_{\mathcal{C}'_1}^j(X, \mathcal{M}) & \longrightarrow & H_{\mathcal{C}_1 \otimes_{D_X} \mathcal{C}'_1}^{i+j}(X, \mathcal{M}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_{\mathcal{C}_1 \otimes_{D_X} \mathcal{C}_2}^i(X, \mathcal{M}) \otimes_D H_{\mathcal{C}'_1 \otimes_{D_X} \mathcal{C}'_2}^j(X, \mathcal{M}) & \longrightarrow & H_{\mathcal{C}_1 \otimes_{D_X} \mathcal{C}_2 \otimes_{D_X} \mathcal{C}'_1 \otimes_{D_X} \mathcal{C}'_2}^{i+j}(X, \mathcal{M}) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 H_{\mathcal{C}_2}^i(X, \mathcal{M}) \otimes_D H_{\mathcal{C}'_2}^j(X, \mathcal{M}) & \longrightarrow & H_{\mathcal{C}_2 \otimes_{D_X} \mathcal{C}'_2}^{i+j}(X, \mathcal{M})
 \end{array}$$

Por simetría basta probar la conmutatividad del cuadrado superior. El interés de esto es que ahora no tenemos que comparar resoluciones sin relación alguna entre sí, sino que podemos definir un homomorfismo $\mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_1 \otimes_{D_X} \mathcal{C}_2$ mediante

$$\mathcal{C}_1^p \cong \mathcal{C}_1^p \otimes_{D_X} D_X \xrightarrow{1 \otimes \epsilon} \mathcal{C}_1^p \otimes_{D_X} \mathcal{C}_2^0 \rightarrow \bigoplus_{i+j=p} \mathcal{C}_1^i \otimes_{D_X} \mathcal{C}_2^j = (\mathcal{C}_1 \otimes_{D_X} \mathcal{C}_2)^p,$$

e igualmente tenemos un homomorfismo $\mathcal{C}'_1 \rightarrow \mathcal{C}'_1 \otimes_{D_X} \mathcal{C}'_2$. Se trata de un homomorfismo de complejos, pues, si lo llamamos ϕ y $c \in C_{1P}^p$, tenemos que

$$d(\phi(c)) = d(c \otimes \epsilon_P(1)) = dc \otimes \epsilon_P(1) + (-1)^p c \otimes d(\epsilon_P(1)) = dc \otimes \epsilon_P(1) = \phi(dc),$$

puesto que $\epsilon \circ d = 0$. Por consiguiente, de acuerdo con la nota posterior al teorema 7.29, estos homomorfismos inducen los isomorfismos naturales

$$H_{\mathcal{C}_1}^p(X, -) \cong H_{\mathcal{C}_1 \otimes_{D_X} \mathcal{C}_2}^p(X, -), \quad H_{\mathcal{C}'_1}^p(X, -) \cong H_{\mathcal{C}'_1 \otimes_{D_X} \mathcal{C}'_2}^p(X, -).$$

Para un haz \mathcal{M} , estos isomorfismos son los inducidos por los homomorfismos de complejos

$$\begin{aligned}
 \phi &: (\mathcal{C}_1 \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X) \longrightarrow (\mathcal{C}_1 \otimes_{D_X} \mathcal{C}_2 \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X), \\
 \phi' &: (\mathcal{C}'_1 \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X) \longrightarrow (\mathcal{C}'_1 \otimes_{D_X} \mathcal{C}'_2 \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X),
 \end{aligned}$$

que están determinados por localmente por

$$\phi_P(c \otimes m) = c \otimes \epsilon_P(1) \otimes m,$$

y análogamente con ϕ' . A su vez, combinando los dos homomorfismos anteriores obtenemos un homomorfismo entre las resoluciones

$$\mathcal{C}_1 \otimes_{D_X} \mathcal{C}'_1 \longrightarrow (\mathcal{C}_1 \otimes_{D_X} \mathcal{C}_2) \otimes_{D_X} (\mathcal{C}'_1 \otimes_{D_X} \mathcal{C}'_2),$$

que a su vez induce los isomorfismos naturales entre los grupos de cohomología calculados con cada una de ellas, y que en el caso de \mathcal{M} son los isomorfismos inducidos por

$$\psi : (\mathcal{C}_1 \otimes_{D_X} \mathcal{C}'_1 \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X) \longrightarrow (\mathcal{C}_1 \otimes_{D_X} \mathcal{C}_2 \otimes_{D_X} \mathcal{C}'_1 \otimes_{D_X} \mathcal{C}'_2 \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X),$$

determinado localmente por $\psi_P(c \otimes c' \otimes m) = c \otimes \epsilon_P(1) \otimes c' \otimes \epsilon'_P(1) \otimes m$.

Basta probar que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{M})(X) \otimes_D (\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{M})(X) & \longrightarrow & (\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{M})(X) \\ \phi \otimes \phi' \downarrow & & \downarrow \psi \\ (\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_2 \otimes \mathcal{M})(X) \otimes_D (\mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2 \otimes \mathcal{M})(X) & \longrightarrow & (\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_2 \otimes \mathcal{C}'_1 \otimes \mathcal{C}'_2 \otimes \mathcal{M})(X) \end{array}$$

(donde \otimes abrevia a \otimes_{D_X}), pues esto implica a su vez la conmutatividad del diagrama entre los grupos de cohomología. Para ello a su vez basta ver que conmutan las localizaciones a cada punto $P \in X$, pero entonces tenemos

$$\begin{array}{ccc} c \otimes m_1 \otimes c' \otimes m_2 & \longrightarrow & c \otimes c' \otimes m_1 m_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ c \otimes \epsilon_P(1) \otimes m_1 \otimes c' \otimes \epsilon'_P(1) \otimes m_2 & \longrightarrow & c \otimes \epsilon_P(1) \otimes c' \otimes \epsilon'_P(1) \otimes m_1 m_2 \end{array}$$

■

En particular, podemos considerar la composición

$$H_{\mathcal{C}}^i(X, \mathcal{M}) \otimes_D H_{\mathcal{C}}^j(X, \mathcal{M}) \longrightarrow H_{\mathcal{C} \otimes_{D_X} \mathcal{C}}^{i+j}(X, \mathcal{M}) \longrightarrow H_{\mathcal{C}}^{i+j}(X, \mathcal{M}),$$

donde la última flecha es el isomorfismo natural. Este homomorfismo no depende de la resolución \mathcal{C} en el sentido de que si tomamos otra tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} H_{\mathcal{C}}^i(X, \mathcal{M}) \otimes_D H_{\mathcal{C}}^j(X, \mathcal{M}) & \longrightarrow & H_{\mathcal{C} \otimes_{D_X} \mathcal{C}}^{i+j}(X, \mathcal{M}) & \longrightarrow & H_{\mathcal{C}}^{i+j}(X, \mathcal{M}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{\mathcal{C}'}^i(X, \mathcal{M}) \otimes_D H_{\mathcal{C}'}^j(X, \mathcal{M}) & \longrightarrow & H_{\mathcal{C}' \otimes_{D_X} \mathcal{C}'}^{i+j}(X, \mathcal{M}) & \longrightarrow & H_{\mathcal{C}'}^{i+j}(X, \mathcal{M}) \end{array}$$

Hemos probado que el primer cuadrado conmuta y el segundo lo hace porque ambas composiciones son necesariamente el isomorfismo natural entre los grupos de cohomología calculados con $\mathcal{C} \otimes_{D_X} \mathcal{C}$ y con \mathcal{C}' .

Componiendo estos homomorfismos con las aplicaciones canónicas

$$H_{\mathcal{C}}^i(X, \mathcal{M}) \times H_{\mathcal{C}}^j(X, \mathcal{M}) \longrightarrow H_{\mathcal{C}}^i(X, \mathcal{M}) \otimes_D H_{\mathcal{C}}^j(X, \mathcal{M}) \longrightarrow H_{\mathcal{C}}^{i+j}(X, \mathcal{M})$$

obtenemos un producto

$$\times : H_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{M}) \times H_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{M}) \longrightarrow H_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{M}).$$

Se trata de un producto graduado, en el sentido de que el producto de dos elementos homogéneos es homogéneo de grado igual a la suma de los grados de los factores. Vamos a probar que es asociativo, con lo que dotará a $H_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{M})$ de estructura de D -álgebra graduada (las demás propiedades de la estructura de álgebra se cumplen trivialmente por el hecho de que hemos definido el producto a partir de homomorfismos definidos sobre los productos tensoriales).

Basta probar que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{M})(X) \otimes_D (\mathcal{C} \otimes \mathcal{M})(X) & & \\
 \uparrow & \searrow & \\
 (\mathcal{C} \otimes \mathcal{M})(X) \otimes_D (\mathcal{C} \otimes \mathcal{M})(X) \otimes_D (\mathcal{C} \otimes \mathcal{M})(X) & & (\mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{M})(X) \\
 \downarrow & \nearrow & \\
 (\mathcal{C} \otimes \mathcal{M})(X) \otimes_D (\mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{M})(X) & &
 \end{array}$$

pero al localizarlo a un punto $P \in X$ arbitrario obtenemos

$$\begin{array}{ccc}
 c_1 \otimes c_2 \otimes m_1 m_2 \otimes c_3 \otimes m_3 & & \\
 \uparrow & \searrow & \\
 c_1 \otimes m_1 \otimes c_2 \otimes m_2 \otimes c_3 \otimes m_3 & & c_1 \otimes c_2 \otimes c_3 \otimes m_1 m_2 m_3 \\
 \downarrow & \nearrow & \\
 c_1 \otimes m_1 \otimes c_2 \otimes c_2 \otimes m_2 m_3 & &
 \end{array}$$

donde usamos la asociatividad del producto tensorial y del producto en \mathcal{M}_P .

Esto se traduce en que el producto

$$H_c^i(X, \mathcal{M}) \times H_c^j(X, \mathcal{M}) \times H_c^k(X, \mathcal{M}) \longrightarrow H_{\mathcal{C} \otimes_{D_X} \mathcal{C} \otimes_{D_X} \mathcal{C}}^{i+j+k}(X, \mathcal{M})$$

no depende de la forma en que se asocien los factores, y componiendo con el isomorfismo natural, obtenemos que lo mismo vale para

$$H_c^i(X, \mathcal{M}) \times H_c^j(X, \mathcal{M}) \times H_c^k(X, \mathcal{M}) \longrightarrow H_c^{i+j+k}(X, \mathcal{M}).$$

En la prueba del teorema 7.29 hemos visto que

$$\mathcal{M}(X) \cong (\mathcal{H}^0 \otimes_{D_X} \mathcal{M})(X) \cong H_c^0(X, \mathcal{M}),$$

donde \mathcal{H}^0 es la imagen del homomorfismo de conexión $\epsilon : D_X \longrightarrow \mathcal{C}^0$. Por lo tanto, si $s \in H_c^0(X, \mathcal{M})$, sus localizaciones son de la forma $s_P = \epsilon_P(1) \otimes m$, con $m \in \mathcal{M}_P$ y el isomorfismo está determinado por $f(m)_P = \epsilon_P(1) \otimes m_P$. Es fácil ver entonces que el producto

$$H_c^0(X, \mathcal{M}) \times H_c^0(X, \mathcal{M}) \longrightarrow H_{\mathcal{C} \otimes_{D_X} \mathcal{C}}^0(X, \mathcal{M}) \longrightarrow H_c^0(X, \mathcal{M})$$

está determinado localmente por

$$(\epsilon_P(1) \otimes m_1, \epsilon_P(1) \otimes m_2) \mapsto \epsilon_P(1) \otimes \epsilon_P(1) \otimes m_1 m_2 \mapsto \epsilon_P(1) \otimes m_1 m_2,$$

de donde se sigue que el isomorfismo natural $\mathcal{M}(X) \cong H^0(X, \mathcal{M})$ es, de hecho, un isomorfismo de álgebras. Más aún, la unidad $1 \in \mathcal{M}(X)$ se corresponde con el elemento $1 \in H_c^0(X, \mathcal{M})$ determinado por que, para cada $P \in X$, se cumple $1_P = \epsilon_P(1) \otimes 1$, y de ahí se sigue que la unidad de $H^0(X, \mathcal{M})$ es de hecho una unidad en $H(X, \mathcal{M})$.

Por último observamos que, aunque \mathcal{M} sea un haz de álgebras conmutativas, esto no implica que $H(X, \mathcal{M})$ sea también una D -álgebra conmutativa. Por el contrario, lo que sucede en tal caso es que es anticonmutativa: si $s \in H^i(X, \mathcal{M})$ y $t \in H^j(X, \mathcal{M})$, entonces

$$s \times t = (-1)^{ij} t \times s.$$

En efecto, para ello observamos que, para cada abierto $U \subset X$, los homomorfismos

$$\mathcal{C}^i(U) \otimes_D \mathcal{C}^j(U) \longrightarrow \mathcal{C}^j(U) \otimes_D \mathcal{C}^i(U)$$

dados por $u \otimes_{D_X} v \mapsto (-1)^{ij} v \otimes_{D_X} u$ inducen un homomorfismo de prehaces, que a su vez se extiende a un homomorfismo de haces

$$\mathcal{C}^i \otimes_{D_X} \mathcal{C}^j \longrightarrow \mathcal{C}^j \otimes_{D_X} \mathcal{C}^i$$

determinado localmente por

$$u \otimes v \mapsto (-1)^{ij} v \otimes u.$$

Al variar i, j , estos homomorfismos inducen un homomorfismo de complejos

$$\phi : \mathcal{C} \otimes_{D_X} \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \otimes_{D_X} \mathcal{C}.$$

En efecto, para comprobar que conmutan con el operador cofrontera localizamos a un punto $P \in X$ arbitrario:

$$d(\phi_P(u \otimes v)) = d((-1)^{ij} v \otimes u) = (-1)^{ij} dv \otimes u + (-1)^{(i+1)j} v \otimes du,$$

$$\phi_P(d(u \otimes v)) = \phi(du \otimes v + (-1)^i u \otimes dv) = (-1)^{(i+1)j} v \otimes du + (-1)^{ij+2i} dv \otimes u.$$

(Notemos que no se daría la igualdad si no hubiéramos introducido el signo $(-1)^{ij}$ en la definición de ϕ .)

Más aún, ϕ es un homomorfismo de \mathcal{C} en \mathcal{C} considerado como resolución de D_X (es decir, también conmuta con el homomorfismo de conexión, determinado localmente por $d \mapsto \epsilon_P(d) \otimes \epsilon_P(d)$, con lo que no se altera al conmutar los factores). Por consiguiente induce la identidad en $H_{\mathcal{C}}(X, \mathcal{M})$ y tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^i(X, \mathcal{M}) \otimes_D H^j(X, \mathcal{M}) & \longrightarrow & H^{i+j}(X, \mathcal{M}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^j(X, \mathcal{M}) \otimes_D H^i(X, \mathcal{M}) & \longrightarrow & H^{i+j}(X, \mathcal{M}) \end{array}$$

en el que la flecha vertical izquierda es $u \otimes v \mapsto (-1)^{ij} v \otimes u$ y la flecha vertical derecha es el homomorfismo inducido por ϕ , que, según acabamos de justificar, es la identidad. De aquí se sigue inmediatamente la anticonmutatividad del producto en $H(X, \mathcal{M})$.

Nota La construcción del álgebra de cohomología se simplifica sustancialmente en el único caso que realmente nos va a interesar, en el que el haz de álgebras

es $\mathcal{M} = D_X$. En tal caso, multiplicar por $\otimes_{D_X} D_X$ una resolución de D_X lleva a otra resolución isomorfa, por lo que este paso puede omitirse, y ello se traduce en que podemos eliminar todos los factores $\otimes_{D_X} \mathcal{M}$ en toda la construcción, de modo que la aplicación

$$H_{\mathcal{C}}^i(X, D_X) \otimes_D H_{\mathcal{C}'}^j(X, D_X) \longrightarrow H_{\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{C}'}}^{i+j}(X, D_X)$$

es simplemente la inducida por la identidad $\mathcal{C} \otimes_{D_X} \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C} \otimes_{D_X} \mathcal{C}'$ y la única operación relevante para obtener el producto es la aplicación del isomorfismo natural $H_{\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{C}'}}^{i+j}(X, D_X) \cong H_{\mathcal{C}}^{i+j}(X, D_X)$. ■

Tercera parte

Topología Algebraica

Capítulo VIII

El grupo fundamental

Empezamos el estudio de la topología algebraica propiamente dicha asociando a cada espacio topológico un invariante topológico que nos permitirá, entre otras cosas, resolver varios problemas que habíamos dejado pendientes en el capítulo III.

8.1 Construcción del grupo fundamental

En este capítulo un *arco* en un espacio topológico X será una aplicación continua $\sigma : I \rightarrow X$, de modo que exigimos que el dominio sea precisamente $I = [0, 1]$ en lugar de un intervalo cerrado arbitrario, como se admite en otros contextos. Los puntos $\sigma(0)$ y $\sigma(1)$ se llaman, respectivamente, *origen* y *extremo* del arco.

Si $x \in X$, representaremos por e_x el arco constante igual a x , es decir, el dado por $e_x(s) = x$, para todo $s \in I$. El arco inverso de un arco dado σ es el dado por $\sigma^{-1}(s) = \sigma(1 - s)$, que es un arco con la misma imagen, pero con el origen y el extremo intercambiados. Si σ, τ son dos arcos en X tales que $\sigma(1) = \tau(0)$ (y en tal caso diremos que son *encadenables*), podemos definir su *yuxtaposición* como el arco $\sigma\tau$ dado por

$$(\sigma\tau)(s) = \begin{cases} \sigma(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \tau(2s - 1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Observemos que si tres arcos ρ, σ, τ son encadenables, los arcos $(\rho\sigma)\tau$ y $\rho(\sigma\tau)$ tienen la misma imagen, pero no son exactamente el mismo, pues la parametrización es diferente. Podríamos definir una equivalencia estableciendo que dos arcos son equivalentes si uno se obtiene reparametrizando el otro, pero nos bastará considerar la homotopía entre arcos, que en particular identifica las reparametrizaciones.

A menudo vamos a considerar homotopías entre arcos con el mismo origen y el mismo extremo, y en tal caso conviene considerar homotopías que conserven este hecho:

Definición 8.1 Una *homotopía* entre dos arcos $\sigma, \tau : I \rightarrow X$ con el mismo origen y el mismo extremo en un espacio topológico X se define como una homotopía $F : I \times I \rightarrow X$ entre ellos tal que las aplicaciones $F_t(0)$ y $F_t(1)$ sean constantes.

Si representamos por \sim la homotopía de arcos con extremos fijos, tenemos las propiedades siguientes:

1) Si ρ, σ, τ son encadenables, entonces $(\rho\sigma)\tau \sim \rho(\sigma\tau)$.

En efecto, por definición:

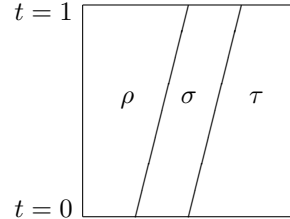
$$((\rho\sigma)\tau)(s) = \begin{cases} \rho(4s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/4, \\ \sigma(4s - 1) & \text{si } 1/4 \leq s \leq 1/2, \\ \tau(2s - 1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

$$(\rho(\sigma\tau))(s) = \begin{cases} \rho(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq 1/2, \\ \sigma(4s - 2) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 3/4, \\ \tau(4s - 3) & \text{si } 3/4 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Una homotopía entre estos dos arcos viene dada por

$$F_t(s) = \begin{cases} \rho\left(\frac{4s}{t+1}\right) & \text{si } t \geq 4s - 1, \\ \sigma(4s - t - 1) & \text{si } 4s - 1 \geq t \geq 4s - 2, \\ \tau\left(\frac{4(s-(t+2)/4)}{2-t}\right) & \text{si } 4s - 2 \geq t. \end{cases}$$

Esta definición se deduce de la figura y de la geometría elemental.



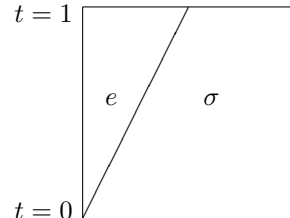
2) Si σ tiene origen x y extremo y , entonces $e_x\sigma \sim \sigma$, $\sigma e_y \sim \sigma$.

En efecto, por definición

$$(e_x\sigma)(s) = \begin{cases} x & \text{si } s \leq 1/2, \\ \sigma(2s - 1) & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

y una homotopía entre este arco y σ es la dada por

$$F_t(s) = \begin{cases} x & \text{si } s \leq t/2, \\ \sigma\left(\frac{s-t/2}{1-t/2}\right) & \text{si } t/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$



Similarmente se comprueba la segunda relación.

3) Si σ tiene origen x y extremo y , entonces $\sigma\sigma^{-1} \sim e_x$, $\sigma^{-1}\sigma \sim e_y$.

En efecto, una homotopía en este caso viene dada por

$$F_t(s) = \begin{cases} \sigma(2s) & \text{si } s \leq \frac{1}{2}(1-t), \\ \sigma(1-t) & \text{si } \frac{1}{2}(1-t) \leq s \leq \frac{1}{2}(1+t), \\ \sigma^{-1}(2s-1) & \text{si } \frac{1}{2}(1+t) \leq s. \end{cases}$$

(dejamos el dibujo correspondiente a cuenta del lector).

Probablemente el lector habrá observado que estas propiedades sugieren una operación que satisface las propiedades de grupo, pero para obtener realmente un grupo a partir de aquí necesitamos restringirnos a *bucles*, en un punto x , es decir, a arcos cuyo origen y extremo coincidan con x , para disponer así de un mismo bucle constante e_x que pueda ejercer de neutro.

Concretamente, definimos el *grupo fundamental* de un espacio topológico X en un punto $x \in X$ como el conjunto de todas las clases de homotopía de bucles en x . Lo representaremos por $\pi_1(X, x)$.

En $\pi_1(X, x)$ podemos definir el producto dado por $[\sigma][\tau] = [\sigma\tau]$, que, como muestra una comprobación rutinaria, no depende de la elección de los representantes de las clases. Las propiedades precedentes se traducen en que $\pi_1(X, x)$ es ciertamente un grupo con esta operación (en general no abeliano).

Si X, Y son conjuntos arbitrarios y $x \in X, y \in Y$, usaremos la notación $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ para expresar que $f : X \rightarrow Y$ y $f(x) = y$.

Si $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ es continua, definimos $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$ mediante $f_*([\sigma]) = [\sigma \circ f]$. Es fácil comprobar que la definición no depende del representante de la clase. Además es inmediato que $(\sigma\tau) \circ f = (\sigma \circ f)(\tau \circ f)$, por lo que f_* es claramente un homomorfismo de grupos. También es obvio¹ que $1_* = 1$ y que $(fg)_* = f_*g_*$.

Esto implica en particular que si f es un homeomorfismo entonces f_* es un isomorfismo de grupos, luego los grupos fundamentales son invariantes topológicos.

Observemos ahora que si $x, y \in X$ pueden unirse por un arco α , entonces los grupos $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(X, y)$ son isomorfos:

Para cada bucle σ en x tenemos que $(\alpha^{-1}\sigma)\alpha$ es un bucle en y . Además, si σ y τ son bucles homotópicos, es fácil construir una homotopía entre $(\alpha^{-1}\sigma)\alpha$ y $(\alpha^{-1}\tau)\alpha$. Por consiguiente podemos definir una aplicación

$$h_\alpha : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X, y)$$

mediante $h_\alpha([\sigma]) = [(\alpha^{-1}\sigma)\alpha]$. Esta aplicación es un isomorfismo de grupos.

En efecto: Es fácil ver que $((\alpha^{-1}\sigma)\alpha)((\alpha^{-1}\tau)\alpha)$ es homotópico a $(\alpha^{-1}(\sigma\tau))\alpha$. La homotopía se construye análogamente a la que hemos dado para probar que $\sigma\sigma^{-1}$ es homotópico a e_x . Por consiguiente h_α es un homomorfismo de grupos. También es fácil ver que una antiimagen de una clase $[\tau] \in \pi_1(X, y)$ es $[(\alpha\tau)\alpha^{-1}]$, por lo que h_α es suprayectivo. Finalmente, si $h_\alpha([\sigma]) = 1$, esto significa que $(\alpha^{-1}\sigma)\alpha$ es homotópico a la constante e_y . Es fácil ver entonces que el bucle $(\alpha((\alpha^{-1}\sigma)\alpha))\alpha^{-1}$ es homotópico a $(\alpha e_y)\alpha^{-1}$, es cual es homotópico a e_x . Ahora bien, es fácil construir una homotopía entre $(\alpha((\alpha^{-1}\sigma)\alpha))\alpha^{-1}$ y $((\alpha\alpha^{-1})\sigma)(\alpha\alpha^{-1})$, que a su vez es homotópico a $e_x\sigma e_x$, que es claramente homotópico a σ . Concluimos, pues, que $[\sigma] = 1$.

¹Estos hechos se resumen en que π_1 es un funtor covariante en la categoría de los espacios topológicos puntuados, es decir, la formada por los pares (X, x) , donde X es un espacio topológico y $x \in X$, con las aplicaciones continuas $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ como morfismos.

Así pues, si X es un espacio arcoconexo podemos hablar simplemente de su grupo fundamental $\pi_1(X)$, entendiéndolo que nos referimos a cualquiera de los grupos $\pi_1(X, x)$ con $x \in X$, ya que todos ellos son naturalmente isomorfos.

Veamos ahora que las aplicaciones entre grupos de homotopía inducidas por dos aplicaciones continuas homotópicas son “esencialmente” la misma:

Teorema 8.2 Sean $f, g : X \rightarrow Y$ aplicaciones continuas entre dos espacios topológicos y sea $F : I \times X \rightarrow Y$ una homotopía entre ellas. Dado $x \in X$, sea $\alpha : I \rightarrow Y$ el arco dado por $\alpha(t) = F_t(x)$, que conecta $f(x)$ con $g(x)$. Entonces el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, f(x)) \\ & \searrow g_* & \downarrow h_\alpha \\ & & \pi(Y, g(x)) \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $[\sigma] \in \pi_1(X, x)$. Entonces $h_\alpha(f_*([\sigma])) = [(\alpha^{-1}(\sigma \circ f))\alpha]$. Por otra parte, $g_*([\sigma]) = [\sigma \circ g]$, y hay que probar que los dos bucles son homotópicos. Para ello consideramos los arcos $\beta_t(s) = F_{1-s+st}(x)$ que unen $g(x)$ con $F_t(x)$, de modo que $\beta_0 = \alpha^{-1}$ y β_1 es el arco constante $c_{g(x)}$. Definimos $G : I \times I \rightarrow Y$ mediante $G_t = \beta_t(\sigma \circ F_t)\beta_t^{-1}$. Una comprobación rutinaria muestra que G es continua y que es una homotopía entre $c_{g(x)}(\sigma \circ g)c_{g(x)}$ y $(\alpha^{-1}(\sigma \circ f))\alpha$. Como el primer bucle es homotópico a $\sigma \circ g$, tenemos lo requerido. ■

Como consecuencia:

Teorema 8.3 Si dos espacios topológicos arcoconexos son homotópicos, sus grupos fundamentales son isomorfos.

DEMOSTRACIÓN: Sean $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$ dos aplicaciones continuas que cumplan la definición de homotopía de espacios topológicos. Entonces $f \circ g$ es homotópico a la identidad en X , luego si $x \in X$, según el teorema anterior, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(X, x) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, f(x)) & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(X, g(f(x))) \\ & \searrow 1 & & & \downarrow h_\alpha \\ & & & & \pi_1(X, x) \end{array}$$

donde la flecha vertical es un isomorfismo, luego f_* es inyectiva y g_* es suprayectiva. Ahora bien, aplicando el mismo razonamiento a $g \circ f$ y el punto $f(x) \in Y$ concluimos que $g_* : \pi_1(Y, f(x)) \rightarrow \pi_1(X, g(f(x)))$ es inyectiva, luego g_* es un isomorfismo. ■

En particular, el grupo fundamental de todo espacio contractible es trivial. Todavía no sabemos calcular grupos fundamentales más allá del caso obvio

de los espacio contractibles, pero cuando sepamos calcular algunos, el teorema siguiente nos permitirá calcular algunos más:

Teorema 8.4 *Dados espacios topológicos X e Y y un punto $(x, y) \in X \times Y$, se cumple*

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) \cong \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y).$$

DEMOSTRACIÓN: Las proyecciones p_X y p_Y determinan un homomorfismo

$$(p_X)_* \times (p_Y)_* : \pi_1(X \times Y, (x, y)) \longrightarrow \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y).$$

No es difícil comprobar que su inverso viene dado por $f([\sigma], [\tau]) = [(\sigma, \tau)]$, donde (σ, τ) es el bucle dado por $(\sigma, \tau)(s) = (\sigma(s), \tau(s))$. ■

El teorema siguiente puede parecer muy particular, pero nos va a permitir, justo a continuación, caracterizar los espacios topológicos con grupo fundamental trivial:

Teorema 8.5 *Una función continua $f : S^1 \longrightarrow X$ es homotópica a una constante si y sólo si induce el homomorfismo trivial $f_* : \pi_1(S^1) \longrightarrow \pi_1(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Si f es homotópica a una constante, por el teorema 1.45 se extiende a una función continua $f : B^2 \longrightarrow X$. Sea $j : S^1 \longrightarrow B^2$ la inclusión. Así $f = j \circ \tilde{f}$, luego $f_* = j_* \circ \tilde{f}_*$, pero j_* es el homomorfismo trivial, porque $\pi_1(B^2) = 1$, ya que B^2 es contractible. Por lo tanto f_* también es trivial.

Recíprocamente, si f_* es trivial, sea $\sigma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, de modo que $[\sigma] \in \pi_1(S^1, s_0)$. Como $f_*([\sigma]) = [\sigma \circ f] = 1$, existe una homotopía (de bucles) $F : I \times I \longrightarrow X$ tal que $F_0(s) = \sigma \circ f$ y $F_1(s) = x_0$.

La aplicación $1 \times \sigma : I \times I \longrightarrow I \times S^1$ es una identificación, pues es continua, cerrada y suprayectiva, y F toma el mismo valor en cada par $(t, 0)$ y $(t, 1)$ identificado por $1 \times \sigma$, luego existe una única aplicación \tilde{F} que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} I \times I & \xrightarrow{F} & X \\ i \times \sigma \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \\ I \times S^1 & & \end{array}$$

y claramente es una homotopía entre f y la función constante x_0 . ■

Espacios simplemente conexos Presentamos ahora la clase de espacios topológicos más sencillos por lo que a su grupo fundamental se refiere:

Definición 8.6 Un espacio topológico es *simplemente conexo* si es arcoconexo y su grupo fundamental es trivial.

Vemos algunas equivalencias:

Teorema 8.7 *Sea X un espacio topológico arcoconexo. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

1. X es simplemente conexo,
2. Toda aplicación continua $f : S^1 \rightarrow X$ es homotópica a una constante.
3. Toda aplicación continua $f : S^1 \rightarrow X$ se extiende a una aplicación continua en el disco B^2 .
4. Todo par de arcos en X con el mismo origen y extremo son homotópicos.

DEMOSTRACIÓN: Los teoremas 1.45 y 8.5 nos dan la equivalencia de las tres primeras afirmaciones.

3) \Rightarrow 4) Sean α y β dos arcos que unen x con y . Definimos $f : S^1 \rightarrow X$ mediante

$$f(u, v) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{u+1}{2}\right) & \text{si } v \geq 0, \\ \beta\left(\frac{u+1}{2}\right) & \text{si } v \leq 0. \end{cases}$$

Claramente f es continua, luego por hipótesis se extiende a una aplicación continua $\tilde{f} : B^2 \rightarrow X$. Definimos

$$F_t(s) = \tilde{f}(2s - 1, (1 - 2t)\sqrt{1 - (2s - 1)^2}).$$

Es fácil ver que F es una homotopía entre α y β en las condiciones del enunciado.

4) \Rightarrow 1) Si σ es un bucle en un punto $x \in X$, basta aplicar 4) a σ y el bucle constante x . ■

Todo espacio arcoconexo homotópico a un espacio simplemente conexo es simplemente conexo, luego en particular todo espacio contractible lo es (y esto incluye a todos los subconjuntos convexos de \mathbb{R}^n).

El teorema 8.4 implica que el producto de espacios simplemente conexos es simplemente conexo.

8.2 Cubrimientos

Ahora vamos a profundizar en el estudio de los cubrimientos que iniciamos en la sección 1.8 lo que, en particular, nos proporcionará una técnica para calcular grupos fundamentales. Empezamos conectando con el teorema 1.58, que para el caso de bucles puede enunciarse así:

Teorema 8.8 *Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un cubrimiento, sea $x \in X$ y sea $\tilde{x} \in \tilde{X}$ tal que $p(\tilde{x}) = x$. Entonces las elevaciones a \tilde{X} con origen en \tilde{x} de dos bucles homotópicos en x tienen el mismo extremo y son arcos homotópicos.*

Es importante tener presente que, en general, la elevación de un bucle a un cubrimiento no es un bucle. Por ejemplo si elevamos un bucle al cubrimiento natural $p_1 : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ obtendremos un arco de origen elegido arbitrariamente y cuyo extremo será dicho origen desplazado tantas unidades como vueltas haya dado el bucle alrededor de la circunferencia (teniendo en cuenta su orientación).

Con esto estamos en condiciones de determinar cuándo una aplicación continua puede elevarse a un cubrimiento:

Teorema 8.9 *Consideremos un cubrimiento $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$ y una aplicación continua arbitraria $f : (Y, y) \rightarrow (X, x)$ con Y conexo y localmente arcoconexo.² Entonces f admite una elevación $\tilde{f} : (Y, y) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x})$ si y sólo si se cumple que $f_*[\pi_1(Y, y)] \subset p_*[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})]$. Además, en tal caso la elevación es única.*

DEMOSTRACIÓN: Obviamente la condición es necesaria, pues si existe \tilde{f} tal que $\tilde{f} \circ p = f$, entonces $f_*[\pi_1(Y, y)] = p_*[\tilde{f}_*[\pi_1(Y, y)]] \subset p_*[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})]$. Veamos la suficiencia.

Para cada punto $y' \in Y$, tomamos un arco α de y a y' . Entonces $\alpha \circ f$ es un arco de x en $f(y')$. Consideramos su elevación α' a \tilde{X} con origen en \tilde{x} y definimos $\tilde{f}(y') = \alpha'(1)$.

La definición de $\tilde{f}(y')$ no depende de la elección de α , pues si α_1 es otro arco que une y con y' , entonces consideramos $\alpha\alpha_1^{-1}$, que es un bucle en y . Si π es su clase de homotopía, entonces $f_*(\pi)$ es la clase de $(\alpha \circ f)(\alpha_1 \circ f)^{-1}$. Por hipótesis existe un bucle β en \tilde{x} tal que $\beta \circ p = (\alpha \circ f)(\alpha_1 \circ f)^{-1}$ (en principio $\beta \circ p$ sería únicamente homotópico a $(\alpha \circ f)(\alpha_1 \circ f)^{-1}$, pero la homotopía induciría una homotopía entre β y otro bucle para el que tendríamos la igualdad indicada por el teorema 1.58 y la observación posterior). Es claro que la elevación de $\alpha \circ f$ con origen en \tilde{x} es $\beta(t/2)$ y la elevación de $\alpha_1 \circ f$ es $\beta(1 - t/2)$. En particular ambas tienen extremo $\beta(t/2)$, luego α y α_1 determinan el mismo valor para $\tilde{f}(y')$.

Por construcción $\tilde{f} \circ p = f$. Veamos que \tilde{f} es continua. Tomemos un punto $y' \in Y$ y sea U un entorno fundamental de $f(y')$. Sea U_0 la componente conexa de $p^{-1}[U]$ que contiene a $\tilde{f}(y')$. Sea $U_1 \subset f^{-1}[U]$ un entorno arcoconexo de y' . Entonces, la aplicación $g = f|_{U_1} \circ (p|_{U_0})^{-1} : U_1 \rightarrow U_0$ es continua y basta probar que $g = \tilde{f}|_{U_1}$. En efecto, si $y'' \in U_1$, entonces podemos tomar un arco α que una y con y' y un arco β en U_1 que una y' con y'' . Podemos usar $\alpha\beta$ para calcular $\tilde{f}(y'')$. Para ello observamos que $\alpha\beta \circ f = (\alpha \circ f)(\beta \circ f)$ y la elevación de este arco con origen en \tilde{x} es $\alpha'(\beta \circ g)$. Por consiguiente, $\tilde{f}(y'') = g(\beta(1)) = g(y'')$.

La unicidad la proporciona el teorema 1.56. ■

En particular toda aplicación continua $f : Y \rightarrow X$ definida sobre un espacio simplemente conexo y localmente arcoconexo Y se eleva a cualquier cubrimiento de X .

²Notemos que todo espacio conexo y localmente arcoconexo es arcoconexo, pero un espacio arcoconexo no es necesariamente localmente arcoconexo.

Nota Si X es una variedad diferencial, podemos considerar su grupo fundamental $\pi_1(X, x)$ tal cual lo hemos definido para espacios topológicos arbitrarios, es decir, considerando bucles continuos y homotopías entre bucles continuos, no necesariamente diferenciables, pero si en el teorema anterior p es un cubrimiento (diferenciable) entre variedades diferenciales y la aplicación f es diferenciable, su elevación también lo es.

En efecto, basta observar que la prueba de la continuidad de f se apoya únicamente en que las aplicaciones $g = f|_{U_1} \circ (p|_{U_0})^{-1}$ son continuas, pero en este contexto son diferenciables, porque lo son tanto $f|_{U_1}$ como $(p|_{U_0})^{-1}$.

Como consecuencia, en el caso de variedades diferenciales, el homeomorfismo que proporciona el teorema siguiente es, de hecho, un difeomorfismo. ■

Teorema 8.10 Sean $p_1 : (\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \rightarrow (X, x)$, $p_2 : (\tilde{X}_2, \tilde{x}_2) \rightarrow (X, x)$ dos cubrimientos conexos y localmente arcoconexos de un mismo espacio X tales que $p_{1*}[\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)] = p_{2*}[\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)]$. Entonces existe un único homeomorfismo $g : (X_1, x_1) \rightarrow (X_2, x_2)$ que cumple $g \circ p_2 = p_1$.

DEMOSTRACIÓN: El teorema anterior nos da elevaciones

$$g : (X_1, x_1) \rightarrow (X_2, x_2), \quad h : (X_2, x_2) \rightarrow (X_1, x_1)$$

tales que $g \circ p_2 = p_1$ y $h \circ p_1 = p_2$. Por lo tanto $g \circ h \circ p_1 = g \circ p_2 = p_1$, pero por la unicidad del teorema anterior (aplicada a p_1 y p_1), tenemos que $g \circ h$ es la identidad, e igualmente razonamos que $h \circ g$ es la identidad, luego g y h son mutuamente inversas y g es un homeomorfismo. Además es la única elevación de p_2 , luego es único. ■

Seguidamente veremos cómo los cubrimientos pueden usarse para calcular grupos fundamentales. Empezamos por la observación siguiente:

Teorema 8.11 Si $p : \tilde{X} \rightarrow X$ es un cubrimiento, $\tilde{x} \in \tilde{X}$ y $p(\tilde{x}) = x$, entonces $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(X, x)$ es un monomorfismo de grupos.

DEMOSTRACIÓN: Si $p_*([\sigma]) = 1$, entonces el bucle $\sigma \circ p$ es homotópico a la constante e_x . Por 8.8 obtenemos que la elevación de $\sigma \circ p$ con origen en \tilde{x} (que —teniendo en cuenta la unicidad— es σ) es homotópica a la elevación de e_x con origen en \tilde{x} , que ha de ser $e_{\tilde{x}}$. Así pues, $[\sigma] = 1$. ■

En general p_* no es suprayectivo. Por ejemplo, el cubrimiento $p_1 : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ cumple $\pi_1(\mathbb{R}) = 1$, $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Aún podemos precisar más la situación: dado un cubrimiento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ y un punto $x \in X$, para cada $\tilde{x} \in p^{-1}[x]$ y cada $\pi = [\sigma] \in \pi_1(X, x)$, tenemos que el extremo de la elevación de σ con origen en \tilde{x} es un punto de $p^{-1}[x]$ que por 8.8 depende únicamente de la clase π . Así pues, podemos llamarlo $\tilde{x} \cdot \pi$. Tenemos así definida una aplicación

$$p^{-1}[x] \times \pi_1(X, x) \rightarrow p^{-1}[x].$$

Es fácil ver que esta aplicación es una acción del grupo fundamental sobre la fibra $p^{-1}[x]$ en el sentido de [TG 2.1], es decir, que cumple $\tilde{x} \cdot 1 = \tilde{x}$ y que $(\tilde{x} \cdot \pi_1) \cdot \pi_2 = \tilde{x} \cdot (\pi_1 \pi_2)$.

Más aún, si \tilde{X} es arcoconexo vemos que la acción es *transitiva*, es decir, que dados $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in p^{-1}[x]$ existe un $\pi \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ tal que $\tilde{x}_1 \cdot \pi = \tilde{x}_2$ (basta considerar un arco α que conecte \tilde{x}_1 con \tilde{x}_2 y tomar $\pi = [\alpha \circ p]$.)

Por otra parte, el *estabilizador* de un punto $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, es decir, el subgrupo de $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$ formado por los elementos que fijan a \tilde{x} , es precisamente el subgrupo $p_*[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})]$, pues σ se eleva a un bucle en \tilde{x} si y sólo si es la imagen por p de un bucle en \tilde{x} .

Argumentos básicos de la teoría de grupos nos dan ahora cierta información sobre los cubrimientos:

Ejercicio: Probar que si $p : \tilde{X} \rightarrow X$ es un cubrimiento con \tilde{X} arcoconexo y $x \in X$, entonces el cardinal de $p^{-1}[x]$ es el índice de $p_*[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})]$ en $\pi_1(X, x)$. En particular todas las fibras tienen el mismo cardinal.

Pero la consecuencia principal de estos hechos es el teorema siguiente, que nos permite calcular la estructura de varios grupos fundamentales. Necesitamos una definición:

Definición 8.12 Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un cubrimiento. Llamaremos *grupo de transformaciones* del cubrimiento al grupo de los homeomorfismos $f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ que dejan invariantes las fibras de p , es decir, que cumplen $f \circ p = p$ (claramente es un grupo con la composición).

Notemos que si f es una transformación de un cubrimiento $p : \tilde{X} \rightarrow X$, entonces f es una elevación de p a \tilde{X} , luego podemos aplicar el teorema 1.56 para concluir que dos transformaciones que coincidan en un punto son iguales. En particular una transformación con un punto fijo es la identidad.

Otro hecho sencillo de probar es que si $\pi \in \pi_1(X, x)$ y $p(\tilde{x}) = x$, entonces $f(\tilde{x} \cdot \pi) = f(\tilde{x}) \cdot \pi$, para toda transformación f del cubrimiento. En efecto, si $\pi = [\sigma]$ y $\tilde{\sigma}$ es la elevación de σ a \tilde{X} con origen en \tilde{x} , entonces $\tilde{\sigma} \circ f$ es la elevación de σ a \tilde{X} con origen en $f(\tilde{x})$, pues se cumple ciertamente que $\tilde{\sigma} \circ f \circ p = \tilde{\sigma} \circ p = \sigma$. Por consiguiente, $f(\tilde{x}) \cdot \pi = (\tilde{\sigma} \circ f)(1) = f(\tilde{\sigma}(1)) = f(\tilde{x} \cdot \pi)$.

Teorema 8.13 Si $p : \tilde{X} \rightarrow X$ es un cubrimiento tal que \tilde{X} es simplemente conexo y localmente arcoconexo, entonces su grupo de transformaciones es isomorfo al grupo fundamental de X .

DEMOSTRACIÓN: Llamemos G al grupo de transformaciones del cubrimiento y fijemos un punto $x \in X$. El hecho de que \tilde{X} sea simplemente conexo se traduce en la siguiente propiedad algebraica: Si $\tilde{x} \in \tilde{X}$ cumple $p(\tilde{x}) = x$ y $\pi, \rho \in \pi_1(X, x)$ cumplen $\tilde{x} \cdot \pi = \tilde{x} \cdot \rho$, entonces $\pi = \rho$.

En efecto, sean $\pi = [\sigma]$, $\rho = [\tau]$, sean $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\tau}$ las elevaciones de σ y τ a \tilde{X} con origen en \tilde{x} . Estamos suponiendo que $\tilde{\sigma}(1) = \tilde{\tau}(1)$. De este modo, $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\tau}$ son

dos arcos en \tilde{X} con el mismo origen y el mismo extremo. Por el teorema 8.7 existe una homotopía entre ambos (que deja invariantes a los extremos). Al componerla con p obtenemos una homotopía de bucles entre σ y τ , luego $\pi = \rho$.

Así pues, fijando $\tilde{x} \in p^{-1}[x]$, sabemos que para cada transformación $f \in G$ existe un $\pi \in \pi_1(X, x)$ tal que $f(\tilde{x}) = \tilde{x} \cdot \pi$ y acabamos de probar que es único. Si lo llamamos $\phi(f)$ tenemos una aplicación $\phi : G \rightarrow \pi_1(X, x)$ que verifica la relación $f(\tilde{x}) = \tilde{x} \cdot \phi(f)$. Se trata de un homomorfismo de grupos, pues aplicando una transformación g a esta relación obtenemos que $g(f(\tilde{x})) = \tilde{x} \cdot \phi(f)\phi(g)$, es decir,

$$(f \circ g)(\tilde{x}) = \tilde{x} \cdot \phi(f)\phi(g),$$

de donde $\phi(f \circ g) = \phi(f)\phi(g)$.

Por otra parte, si $\phi(f) = 1$ entonces $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$, luego $f = 1$. Por consiguiente, ϕ es un monomorfismo. Falta probar que es suprayectivo. Para ello hemos de probar que para cada $\pi \in \pi_1(x, X)$ existe $f \in G$ tal que $f(\tilde{x}) = \tilde{x} \cdot \pi$. Más en general, basta probar que si $\tilde{x}, \hat{x} \in p^{-1}[x]$ entonces existe $f \in G$ tal que $f(\tilde{x}) = \hat{x}$.

Para ello aplicamos el teorema 8.10 a los cubrimientos $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$ y $p : (\tilde{X}, \hat{x}) \rightarrow (X, x)$. Como trivialmente $p_*[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})] = 1 = p_*[\pi_1(\tilde{X}, \hat{x})]$, obtenemos un homeomorfismo $f : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (\tilde{X}, \hat{x})$ que obviamente es la transformación requerida. ■

En general, calcular grupos de transformaciones de cubrimientos es mucho más fácil que calcular directamente grupos de homotopía. Veamos algunas aplicaciones de este resultado:

Teorema 8.14 $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

DEMOSTRACIÓN: Consideramos el cubrimiento $p_1 : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ definido mediante $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. Claramente estamos en las condiciones del teorema anterior, luego sabemos que $\pi_1(S^1)$ es isomorfo al grupo G de los homeomorfismos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumplen $f(t) = t + 2k\pi$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y cierto $k \in \mathbb{Z}$. Notemos que en principio k depende de t , pero como

$$k(t) = \frac{f(t) - t}{2\pi},$$

tenemos que k es una función continua de \mathbb{R} en \mathbb{Z} , luego por conexión es constante. Así pues, cada transformación f tiene asociado un entero k_f de modo que $f(t) = t + 2k_f\pi$. Es claro que la aplicación $G \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f \mapsto k_f$ es un isomorfismo de grupos. ■

Más concretamente, un generador del grupo de transformaciones del cubrimiento considerado en el teorema anterior es la traslación $f(x) = x + 1$, luego, si consideramos el grupo $\pi_1(S^1, (1, 0))$ y tomamos $0 \in \mathbb{R}$ como punto tal que $p(0) = (1, 0)$, un generador del grupo fundamental es $\tilde{\sigma} \circ p$, donde $\tilde{\sigma}(t) = t$ es un arco que une 0 con $f(0)$, luego es la clase del arco $\sigma_1(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$.

En general, para cada $k \in \mathbb{Z}$, el arco $\sigma_k(t) = (\cos 2k\pi t, \text{sen } 2k\pi t)$ se eleva hasta $\tilde{\sigma}_k(t) = kt$, por lo que $[\sigma_k] = [\sigma_1]^k$ y así tenemos representantes explícitos de todas las clases de homotopía. Más aún, al final de la sección 1.8 vimos que el índice de un bucle (en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, luego en particular en S^2) es invariante por homotopías y $\text{Índ}\sigma_k = k$, por lo que el isomorfismo $\pi_1(S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$ viene dado explícitamente por $[\sigma] \mapsto \text{Índ}(\sigma)$. En otras palabras:

La clase de homotopía de un bucle en \mathbb{Z} está determinada por el número de vueltas que éste da a la circunferencia (contadas teniendo en cuenta el sentido de giro).

Esto vale también para $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$. La retracción $r : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow S^1$ dada por $x \mapsto x/\|x\|$ induce un isomorfismo entre los grupos de homotopía, que claramente conserva el índice de los bucles, por lo que también es cierto que el isomorfismo $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \rightarrow \mathbb{Z}$ viene dado explícitamente por la relación $[\sigma] \mapsto \text{Índ}(\sigma)$.

El grupo fundamental del toro El teorema 8.4 nos da ahora que el grupo fundamental de un toro es

$$\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z}^2.$$

De acuerdo con la prueba de dicho teorema, si $\sigma(t) = (\cos 2\pi t, \text{sen } 2\pi t)$ determina una base $[\sigma]$ de $\pi_1(S^1, (1, 0))$, entonces una base del grupo fundamental $\pi_1(S^1 \times S^1, ((1, 0), (1, 0)))$ la forman las clases $[\sigma, c_{(1,0)}]$ y $[c_{(1,0)}, \sigma]$, es decir, las clases de los bucles

$$\alpha(t) = ((\cos 2\pi t, \text{sen } 2\pi t), 1), \quad \beta(t) = (1, (\cos 2\pi t, \text{sen } 2\pi t)).$$

Podemos llegar al mismo resultado mediante el teorema 8.13 si consideramos el toro T como cociente del cuadrado I^2 respecto de la relación que identifica sus aristas opuestas y el cubrimiento $p_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow T$ dado por $p(x, y) = [E[x], E[y]]$.

Como \mathbb{R}^2 es simplemente conexo y localmente arcoconexo, $\pi_1(T, [0, 0])$ es isomorfo al grupo de homeomorfismos $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que cumplen $f(x, y) = (x + m_x, y + n_y)$, para ciertos $(m_x, n_y) \in \mathbb{Z}^2$ que, en principio dependen de (x, y) , pero la aplicación $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ dada por

$$g(x, y) = f(x, y) - (x, y)$$

es continua, luego es constante, luego en realidad $f(x, y) = (m, n) + (x, y)$, para ciertos $(m, n) \in \mathbb{Z}$. Con esto hemos probado que el grupo de las transformaciones de p es el grupo de las traslaciones en \mathbb{R}^2 determinadas por los elementos de \mathbb{Z}^2 , que es claramente isomorfo a \mathbb{Z}^2 .

Una base del grupo de transformaciones del cubrimiento lo forman las traslaciones $(1, 0)$ y $(0, 1)$, que se corresponden con los arcos $\alpha(t) = [(t, 0)]$ y $\beta(t) = [(0, t)]$.

Si consideramos un toro como subespacio $T' \subset \mathbb{R}^3$ a través del homeomorfismo $\bar{f} : T \rightarrow T'$ inducido por la parametrización $f : I^2 \rightarrow T'$ dada por

$$f(\phi, \theta) = (R \cos 2\pi\theta + r \cos 2\pi\phi \cos 2\pi\theta, R \sin 2\pi\theta + r \cos 2\pi\phi \sin 2\pi\theta, r \sin 2\pi\phi),$$

vemos que $\bar{f}_*([\alpha])$ y $\bar{f}_*([\beta])$ son las clases de los arcos

$$\alpha'(t) = (R + r \cos 2\pi\phi, 0, r \sin 2\pi\phi),$$

$$\beta'(t) = (R\theta + r \cos 2\pi\theta, R \sin 2\pi\theta + r \sin 2\pi\theta, 0),$$

que son una circunferencia longitudinal y otra transversal en el toro. ■

El razonamiento del ejemplo anterior se generaliza trivialmente para probar, mediante el cubrimiento $p_6 : \mathbb{R}^3 \rightarrow V$, que la variedad tridimensional V que resulta de identificar las caras opuestas de un cubo cumple $\pi_1(V) \cong \mathbb{Z}^3$.

Ejercicio: El grupo fundamental de un toro sólido es isomorfo a \mathbb{Z} .

Nota El hecho de que $\pi_1(S^1)$ no sea trivial permite probar el caso $n = 2$ del teorema 2.5, es decir, que no existen retracciones $r : B^2 \rightarrow S^1$. En efecto, si llamamos $i : S^1 \rightarrow B^2$ a la inclusión, tendríamos que $i \circ r$ es la identidad, luego también $i_* \circ r_*$ sería la identidad, luego $i_* : \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(B^2) = 1$ sería inyectiva, pero esto es falso.

Según vimos en el capítulo 2, de aquí se siguen a su vez el caso $n = 2$ del teorema de punto fijo de Brouwer, del teorema de invarianza de los dominios y el teorema de la curva de Jordan. ■

Una consecuencia curiosa de la determinación de $\pi_1(\mathbb{Z})$ es la siguiente:

Teorema fundamental del álgebra *Todo polinomio $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ no constante tiene una raíz en \mathbb{C} .*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ no tiene raíces en \mathbb{C} , y vamos a demostrar que $n = 0$, es decir, que $p(x)$ es constante.

Supongamos, por el contrario, que $n \geq 1$ y consideremos $f_r : I \rightarrow S^1$ dada por

$$f_r(s) = \frac{p(re^{2\pi is})/p(r)}{|p(re^{2\pi is})/p(r)|}.$$

Claramente es un bucle en 1 y, como función de (r, s) , es una homotopía de bucles en 1 tal que f_0 es el bucle constante. Por consiguiente, todos los bucles f_r determinan la clase de equivalencia trivial en $\pi_1(S^1)$. Ahora observamos que si $r > 1 + |a_{n-1}| + \dots + |a_0|$ y $|z| = r$, entonces

$$|z^n| = r^n = r \cdot r^{n-1} > (|a_{n-1}| + \dots + |a_0|)|z|^{n-1} \geq |a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0|,$$

de donde se sigue que el polinomio $p_t(z) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0)$ no tiene raíces en la circunferencia $|z| = r$ cuando $0 \leq t \leq 1$.

Así, la aplicación $g_t : I \rightarrow S^1$ dada por

$$g_t(s) = \frac{p_t(re^{2\pi is})/p_t(r)}{|p_t(re^{2\pi is})/p_t(r)|}$$

es un bucle en 0 y, como función de s, t , es una homotopía entre $\sigma_n = e^{2\pi ins}$ y f_r , luego la clase de homotopía de σ_n es la de f_r , que es la clase trivial. Pero hemos visto que $[\sigma_n]$ es la potencia n -sima de un generador de $\pi_1(S^1)$, luego sólo puede ser la clase trivial si $n = 0$. ■

Para aplicar el teorema 8.13 al cálculo del grupo fundamental de un espacio topológico X necesitamos encontrar un cubrimiento de X simplemente conexo y localmente arcoconexo. Hemos encontrado y usado varios cubrimientos con estas características, pero cabe preguntarse si todo espacio topológico tiene un cubrimiento así. La respuesta es negativa, pero podemos caracterizar a los espacios que lo tienen.

Definición 8.15 *Un cubrimiento universal de un espacio topológico X es un cubrimiento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ tal que \tilde{X} sea simplemente conexo y localmente arcoconexo.*

Así, el teorema 8.10 nos asegura que si un espacio topológico admite un cubrimiento universal, éste es único salvo homeomorfismo o, más precisamente, que si $\bar{p} : \bar{X} \rightarrow X$ es otro cubrimiento universal de X , entonces existe un homeomorfismo $f : \tilde{X} \rightarrow \bar{X}$ tal que $f \circ \bar{p} = p$.

Por otra parte, el teorema 8.9 nos da que un cubrimiento universal se eleva a cualquier otro cubrimiento de X .

La condición para la existencia de cubrimientos universales es un poco técnica, pero muy general:

Un espacio topológico X es *semilocalmente simplemente conexo* si todo punto x tiene un entorno U tal que la inclusión $i : U \rightarrow X$ induce el homomorfismo trivial $i_* : \pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$.

Esto equivale a que todo bucle en x contenido en U es homotópico al bucle constante mediante una homotopía en X . Esto se cumple en particular si X es localmente simplemente conexo, es decir, si todo punto tiene un entorno simplemente conexo.

De hecho, podemos probar algo más general que la existencia de cubrimientos universales:

Teorema 8.16 *Sea X un espacio topológico conexo, localmente arcoconexo y semilocalmente simplemente conexo, sea $x \in X$ y sea H un subgrupo de $\pi_1(X, x)$. Entonces existe un cubrimiento $p : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$ tal que \tilde{X} es conexo y localmente arcoconexo y $p_*[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})] = H$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea C el conjunto de todos los arcos en X con origen en x y definimos la relación de equivalencia dada por $\alpha \sim \beta$ si y sólo si $\alpha(1) = \beta(1)$ y $[\alpha\beta^{-1}] \in H$. Del hecho de que H es un subgrupo se sigue fácilmente que realmente se trata de una relación de equivalencia. Llamamos \tilde{X} al conjunto de todas las clases de equivalencia. Definimos $p : \tilde{X} \rightarrow X$ mediante $p([\alpha]) = \alpha(1)$. Como X es arcoconexo, es claro que p es suprayectiva. En particular, si \tilde{x} es la clase del bucle constante igual a x , tenemos que $p(\tilde{x}) = x$.

Ahora tenemos que dotar a \tilde{X} de una topología. Dado $\alpha \in C$ y un entorno arcoconexo U de $\alpha(1)$, definimos

$$B(U, \alpha) = \{[\alpha\delta] \mid \delta \text{ es un arco en } U \text{ con } \delta(0) = \alpha(1)\} \subset \tilde{X}.$$

Notemos que $[\alpha] \in B(U, \alpha)$, pues basta tomar δ como el arco constante igual a $\alpha(1)$ y entonces $[\alpha\delta] = [\alpha]$, pues $[(\alpha\delta)\alpha^{-1}] = [1] \in H$. Vamos a probar que estos conjuntos forman la base de una topología en \tilde{X} . Ciertamente, su unión es \tilde{X} .

Veamos ahora que si $[\beta] \in B(U, \alpha)$, entonces $[\alpha] \in B(U, \beta)$ y además $B(U, \alpha) = B(U, \beta)$.

En principio $[\beta] = [\alpha\delta]$, para cierto arco δ en U con origen en $\alpha(1)$. Entonces $[\beta\delta^{-1}] = [(\alpha\delta)\delta^{-1}] = [\alpha]$, luego $[\alpha] \in B(U, \beta)$. Ahora tomamos un elemento de $B(U, \beta)$, que será de la forma $[\beta\gamma]$, donde γ es un arco en U con origen en $\beta(1)$. Entonces $[\beta\gamma] = [(\alpha\delta)\gamma] = [\alpha(\delta\gamma)]$, donde $\delta\gamma$ es un arco en U con origen en $\alpha(1)$, luego $[\beta\gamma] \in B(U, \alpha)$. Esto nos da una inclusión y, por simetría, se cumple también la contraria.

Finalmente, pongamos que $[\beta] \in B(U_1, \alpha_1) \cap B(U_2, \alpha_2)$. Entonces se cumple $\beta(1) \in U_1 \cap U_2$, luego podemos tomar un abierto arcoconexo $V \subset U_1 \cap U_2$, de donde

$$[\beta] \in B(U, \beta) \subset B(U_1, \beta) \cap B(U_2, \beta) = B(U_1, \alpha_1) \cap B(U_2, \alpha_2).$$

Observemos que p es abierta, pues $p[B(U, \alpha)] = U$. En efecto, una inclusión es trivial, y si $a \in U$, sólo tenemos que tomar un arco δ en U que una $\alpha(1)$ con a , y así $[\alpha\delta] \in B(U, \alpha)$ cumple que $p([\alpha\delta]) = a$.

Veamos ahora que p es continua en $[\alpha] \in \tilde{X}$. Para ello tomamos un entorno U de $p([\alpha]) = \alpha(1)$, que podemos suponer arcoconexo, y entonces $B(U, \alpha)$ es un entorno de $[\alpha]$ tal que $p[B(U, \alpha)] = U$.

Para probar que $p : \tilde{X} \rightarrow X$ es un cubrimiento tomamos $a \in X$ y fijamos un entorno U tal que $i_* : \pi_1(U, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$ sea trivial. Esto sigue cumpliéndose si sustituimos U por un entorno menor, luego podemos suponer que U es arcoconexo. Veamos que $p^{-1}[U]$ es la unión de todos los abiertos $B(U, \alpha)$, donde α recorre todos los arcos que unen x con a . Sabemos que $p[B(U, \alpha)] = U$, luego una inclusión es inmediata.

Si $[\beta] \in p^{-1}[U]$, entonces $\beta(1) \in U$ y podemos tomar un arco δ en U que una a con $\beta(1)$. Llamamos $\alpha = \beta\delta^{-1}$, de modo que $[\beta] = [\alpha\delta] \in B(U, \alpha)$.

Ya hemos visto que si dos abiertos $B(U, \alpha_1)$ y $B(U, \alpha_2)$ tienen un elemento en común, entonces son iguales, luego los abiertos $B(U, \alpha)$ son disjuntos dos a dos y basta probar que $p|_{B(U, \alpha)} : B(U, \alpha) \rightarrow U$ es biyectiva, pues entonces es biyectiva, continua y abierta, es decir un homeomorfismo, como requiere la definición de cubrimiento. Ya sabemos que la restricción es suprayectiva y, si $[\alpha\delta_1], [\alpha\delta_2] \in B(U, \alpha)$ cumplen $p([\alpha\delta_1]) = p([\alpha\delta_2])$, entonces $\delta_1(1) = \delta_2(1)$, luego podemos formar el bucle $\delta_1\delta_2^{-1}$ en U , que por la elección de U es trivial en X , luego también lo es $(\alpha\delta_1)(\alpha\delta_2)^{-1}$, luego $[\alpha\delta_1] = [\alpha\delta_2]$.

Con esto tenemos que la aplicación construida es un cubrimiento. Esto implica que \tilde{X} es de Hausdorff si X lo es, pues si $[\alpha_1], [\alpha_2] \in \tilde{X}$ son puntos distintos y $p([\alpha_1]) = p([\alpha_2])$, ya hemos visto que existe U tal que $B(U, \alpha_1)$ y $B(U, \alpha_2)$ son entornos disjuntos de $[\alpha_1]$ y $[\alpha_2]$, mientras que si $p([\alpha_1]) \neq p([\alpha_2])$, basta tomar entornos disjuntos U_1 y U_2 de ambas imágenes y entonces $p^{-1}[U_1]$ y $p^{-1}[U_2]$ son entornos disjuntos de $[\alpha_1]$ y $[\alpha_2]$.

Es inmediato que \tilde{X} es localmente arcoconexo, pero falta probar que es conexo. Para ello consideramos cualquier $[\alpha] \in \tilde{X}$ y vamos a probar que la elevación del arco α con origen en \tilde{x} tiene extremo $[\alpha]$. Esto prueba que todos los puntos de \tilde{X} se pueden unir con \tilde{x} , luego \tilde{X} es arcoconexo.

Para cada $t \in I$, definimos $\alpha_t : I \rightarrow X$ mediante $\alpha_t(s) = \alpha(st)$. Así $[\alpha_t] \in \tilde{X}$, $[\alpha_0] = \tilde{x}$ y $[\alpha_1] = [\alpha]$. Definimos $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \tilde{X}$ mediante $\tilde{\alpha}(t) = [\alpha_t]$. Sólo tenemos que probar que $\tilde{\alpha}$ es continua, pues entonces es claramente la elevación de α , y claramente termina en $[\alpha]$.

Veamos que $\tilde{\alpha}$ es continua en $t_0 \in I$. Un entorno básico de $\tilde{\alpha}(t_0)$ es de la forma $B(U, \alpha_{t_0})$, para cierto entorno arcoconexo de $\alpha(t_0)$. Por la continuidad de α , existe un $\epsilon > 0$ tal que si $|t - t_0| < \epsilon$ entonces $\alpha(t) \in U$. Basta probar que también se cumple que $\tilde{\alpha}(t) \in B(U, \alpha_{t_0})$.

Supongamos en primer lugar que $t > t_0$ y llamemos δ a la composición de un homeomorfismo $I \rightarrow [t_0, t]$ seguido de α . Por la elección de ϵ tenemos que δ está contenido en U . Así $\tilde{\alpha}(t) = [\alpha_t] = [\alpha_{t_0}\delta] \in B(U, \alpha_{t_0})$. Si $t < t_0$ razonamos análogamente con $I \rightarrow [t, t_0]$.

Finalmente falta probar que $p_*[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})] = H$. Si α es un bucle en x y $\tilde{\alpha}$ es su elevación a \tilde{X} con origen \tilde{x} , tenemos que $[\alpha] \in p_*[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})]$ si y sólo si $\tilde{\alpha}$ es un bucle en \tilde{X} , si y sólo si su extremo (que es $[\alpha]$) coincide con \tilde{x} , es decir, si y sólo si $\alpha \sim c_x$ en C , lo cual equivale a que $[\alpha c_x] \in H$, o también a que $[\alpha] \in H$. ■

En particular:

Teorema 8.17 *Un espacio topológico X admite un cubrimiento universal si y sólo si es conexo, localmente arcoconexo y semilocalmente simplemente conexo.*

DEMOSTRACIÓN: Sólo hay que probar que las condiciones son necesarias. Sea $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un cubrimiento universal. Como \tilde{X} es conexo, también lo es X , y de la definición de cubrimiento se sigue que X es localmente arcoconexo.

Dado $x \in X$, sea $\tilde{x} \in \tilde{X}$ tal que $p(\tilde{x}) = x$, sea U un entorno fundamental de x y sea U_0 la componente conexa de \tilde{x} en $p^{-1}[U]$. Si α es un bucle en U , entonces $\tilde{\alpha} = \alpha \circ (p|_{U_0})^{-1}$ es un bucle en \tilde{X} en \tilde{x} , que es homotópico a la constante igual a \tilde{x} , y al componer la homotopía con p obtenemos que $[\alpha] = 1$ en $\pi_1(X, x)$. ■

Cubrimientos universales de variedades diferenciales Toda variedad topológica es localmente simplemente conexa, luego tiene un cubrimiento universal. Vamos a demostrar que en el caso de una variedad diferencial, su cubrimiento universal admite también estructura de variedad diferencial. Observemos que, por la versión diferenciable del teorema 8.10 (véase la nota tras 8.9), dos cubrimientos universales de una variedad diferencial (si son variedades diferenciales) son difeomorfos. Veamos ahora la versión diferenciable de 8.16:

Teorema 8.18 *Si V es una variedad diferencial conexa, $x \in V$ y H es un subgrupo de $\pi_1(V, x)$, existe una variedad diferencial conexa \tilde{V} y un cubrimiento (de variedades) $p : (\tilde{V}, \tilde{x}) \rightarrow (V, x)$ tal que $p_*[\pi_1(\tilde{V}, \tilde{x})] = H$.*

DEMOSTRACIÓN: Toda variedad diferencial V es localmente conexa y localmente simplemente conexa, luego si es conexa cumple las hipótesis que garantizan la existencia de un cubrimiento en las condiciones del enunciado, salvo que hay que probar que \tilde{V} admite estructura de variedad diferencial y que p es un cubrimiento de variedades.

El hecho de que V sea un espacio de Hausdorff implica que \tilde{V} también lo es. Observemos que todo abierto contenido en un abierto fundamental de V es también un abierto fundamental, luego los abiertos fundamentales de V contenidos en abiertos coordenados son una base de V .

Para cada abierto fundamental U_0 contenido en el dominio de una carta $x : U_0^* \rightarrow \tilde{U}_0^*$, consideramos las cartas de \tilde{V} de la forma $\tilde{x} : U \rightarrow \tilde{U}$, donde U es una componente conexa de $p^{-1}[U_0]$ y $\tilde{x} = p|_U \circ x$. Es claro que estas cartas cubren \tilde{V} , y son compatibles, pues $(p|_U \circ x)^{-1} \circ (p|_{U'} \circ x') = x^{-1} \circ x$. Esto determina en \tilde{V} una estructura de variedad diferenciable respecto a la cual las restricciones $p|_U : U \rightarrow U_0$ son difeomorfismos (pues sus lecturas sobre las cartas adecuadas son la identidad), lo que a su vez implica que p es diferenciable y es un cubrimiento de variedades. En realidad falta algo por probar, y es que \tilde{V} tiene una base numerable.

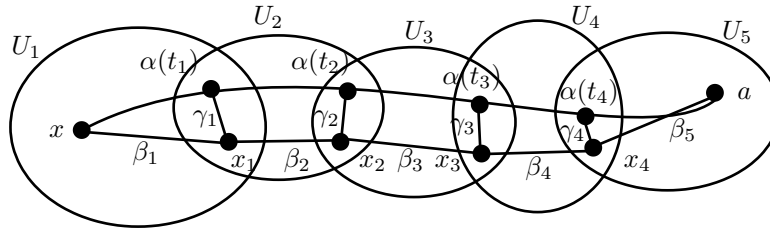
Claramente, V tiene una base numerable formada por abiertos fundamentales U difeomorfos a bolas abiertas en \mathbb{R}^n , y es claro entonces que las componentes conexas de las antiimágenes $p^{-1}[U]$ forman una base de \tilde{V} , luego basta probar que cada $p^{-1}[U]$ tiene una cantidad numerable de componentes conexas.

En la prueba de 8.16 hemos visto que dichas componentes conexas son de la forma $B(U, \alpha)$, donde α varía en los caminos que unen un punto fijo $x \in V$ con un punto fijo $a \in U$. También es fácil ver que si dos caminos α_1 y α_2 son homotópicos, entonces $B(U, \alpha_1) = B(U, \alpha_2)$, luego basta ver que sólo hay una cantidad numerable de clases de homotopía.

Por el teorema 1.36 podemos tomar un cubrimiento numerable \mathcal{C} de V con la propiedad de que la intersección de cualquier cantidad finita de abiertos de

\mathcal{C} (si es no vacía) es contractible, en particular arcoconexa. Tomamos un punto en cada intersección posible de dos abiertos de \mathcal{C} , con lo que tenemos a lo sumo una cantidad numerable de ellos, y añadimos x y a , con lo que formamos un conjunto numerable $\mathcal{P} \subset V$. Para cada par de puntos de \mathcal{P} que estén contenidos en un mismo abierto de \mathcal{C} , elegimos un arco que los una contenido en dicho abierto. De este modo tenemos un conjunto numerable de arcos \mathcal{A} . Finalmente, consideramos el conjunto numerable \mathcal{B} de todos los arcos que unen x con a que se obtienen por yuxtaposición de un número finito de arcos de \mathcal{A} . Se trata también de una familia numerable de arcos, y vamos a probar que todo arco α que une x con a es homotópico a uno de \mathcal{B} .

Por 1.1, existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ tal que cada imagen $\alpha[t_{i-1}, t_i]$ está contenida en un abierto $U_i \in \mathcal{C}$. Como $\alpha(t_i) \in U_i \cap U_{i+1}$, podemos tomar $x_i \in \mathcal{P}$ tal que $x_i \in U_i \cap U_{i+1}$. Sea $\beta_1 \in \mathcal{A}$ un arco en U_0 que una $x = \alpha(t_0)$ con x_1 , sea $\beta_i \in \mathcal{A}$ un arco en U_i que una x_{i-1} con x_i y sea $\beta_n \in \mathcal{A}$ un arco en U_n que una x_{n-1} con $a = \alpha(t_n)$.



Finalmente, como $U_i \cap U_{i+1}$ es arcoconexo, podemos tomar un arco γ_i contenido en la intersección que una $\alpha(t_i)$ con x_i . Si llamamos α_i a la composición de un homeomorfismo $I \rightarrow [t_{i-1}, t_i]$ con α , es claro que α es homotópico a $\alpha_1 \cdots \alpha_n$, que a su vez es homotópico a $[\alpha_1 \gamma_1 \gamma_1^{-1} \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1} \gamma_{n-1} \gamma_{n-1}^{-1} \alpha_n]$.

Pero β_1 y $\alpha_1 \gamma_1$ son arcos en U_1 con los mismos extremos. Como U_1 es simplemente conexo, son homotópicos, y lo mismo vale para β_2 y $\gamma_1^{-1} \alpha_2 \gamma_2$, etc., y combinando estas homotopías obtenemos que α es homotópico a $\beta_1 \cdots \beta_n \in \mathcal{B}$. ■

En particular toda variedad diferencial conexa tiene un cubrimiento universal y es único salvo difeomorfismo.

8.3 El teorema del giro de la tangente

Veamos una aplicación geométrica del criterio de elevación 8.9. Consideramos un arco derivable³ $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya derivada no se anule en ningún punto, con lo que $\gamma' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. El vector tangente unitario

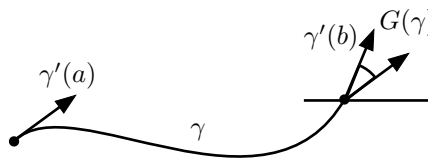
$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|},$$

es invariante por reparametrizaciones.

³La derivabilidad en los extremos se entiende como que γ es en realidad la restricción de un arco definido y derivable en un intervalo abierto mayor. Por “derivable” nos referiremos a que γ es al menos de clase C^1 .

Si $\theta(t)$ es una determinación continua del argumento de γ' , es decir, si

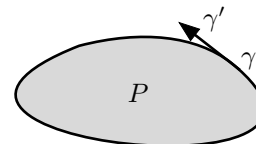
$$\gamma'(t) = \|\gamma'(t)\|(\cos \theta(t), \operatorname{sen} \theta(t)),$$



o, equivalentemente, si $T(t) = (\cos \theta(t), \operatorname{sen} \theta(t))$, entonces $G(\gamma) = \theta(b) - \theta(a)$ se interpreta como el ángulo que ha girado la tangente al desplazarse a lo largo de γ .

En particular, si γ es un bucle con $\gamma(a) = \gamma(b)$ y $\gamma'(a) = \gamma'(b)$, entonces γ' también es un bucle y $G(\gamma) = 2\pi I(\gamma', 0)$, de modo que $G(\gamma)/2\pi \in \mathbb{Z}$ es el número de vueltas que ha dado el vector tangente al desplazarse por γ (teniendo en cuenta que una vuelta en sentido negativo compensa a una vuelta en sentido positivo).

Supongamos ahora que γ es un bucle simple, es decir, que $\gamma(a) = \gamma(b)$, $\gamma'(a) = \gamma'(b)$, pero $\gamma|_{[a,b]}$ es inyectiva (de modo que γ no pasa dos veces por el mismo punto, salvo por que termina donde y como empieza). Más aún, supongamos que γ parametriza



la frontera de un abierto acotado $P \subset \mathbb{R}^2$. Además podemos pedir que γ' esté positivamente orientado respecto a la orientación que P induce en su frontera (donde a su vez la orientación de P es la usual en \mathbb{R}^2). Esto significa⁴ que si N es el vector normal unitario a ∂P que apunta hacia afuera de P , entonces la base N, γ' está orientada o, equivalentemente, que cuando avanzamos siguiendo a γ tenemos siempre P a la izquierda.

En este caso es intuitivamente claro que el giro de la tangente es $G(\gamma) = 2\pi$, pero no es fácil demostrarlo formalmente.

Para ello empezamos observando que el arco γ puede extenderse a una curva $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ periódica de periodo $b-a$, y el hecho de que se cumpla $\gamma(a) = \gamma(b)$ y $\gamma'(a) = \gamma'(b)$ se traduce en que γ' está definida y es continua en \mathbb{R} . Similarmente, la elevación θ puede prolongarse a una función continua $\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de modo que $\gamma'(t) = \|\gamma'(t)\|(\cos \theta(t), \operatorname{sen} \theta(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pero θ ya no es periódica.

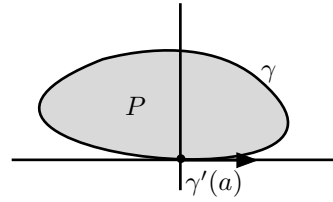
Lo que sabemos es que $\theta(t)$ y $\theta(t+b-a)$ son dos argumentos del mismo vector $\gamma'(t) = \gamma'(t+b-a)$, por lo que $\theta(t+b-a) - \theta(t) = 2k\pi$, para cierto $k \in \mathbb{Z}$. Como la función $(\theta(t+b-a) - \theta(t))/2\pi$ es continua y sólo toma valores enteros, tiene que ser constante, luego concluimos que $\theta(t+b-a) - \theta(t) = 2k\pi$, para un mismo $k \in \mathbb{Z}$ independiente de t . Equivalentemente, podemos calcular

$$G(\gamma) = \theta(\tilde{a}) - \theta(\tilde{b}) = 2k\pi$$

con valores $\tilde{a} < \tilde{b}$ arbitrarios que cumplan $\tilde{b} - \tilde{a} = b - a$. Nuestro objetivo es demostrar que $k = 1$. No perdemos generalidad si suponemos que γ está parametrizada por el arco.

⁴Para más precisión véase la sección [GD 4.2].

Elegimos \tilde{a} de modo que la segunda coordenada de $\gamma(\tilde{a})$ tome su valor mínimo (en $[a, b]$, luego en \mathbb{R} , por la periodicidad). A partir de aquí llamaremos a a este \tilde{a} y b a $\tilde{a} + b - a$. Así $\gamma'(a) = (1, 0)$ (el hecho de que la segunda componente de γ tenga un mínimo en a implica que la segunda componente de la derivada es nula). Componiendo γ con una traslación en \mathbb{R}^2 podemos suponer que $\gamma(a) = (0, 0)$. Es claro que esto no altera la derivada γ' ni, por consiguiente, la función θ .

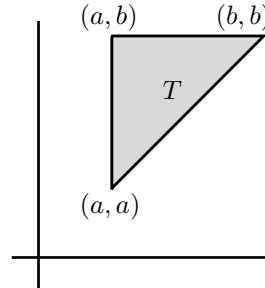


Consideramos ahora el triángulo

$$T = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq t_1 \leq t_2 \leq b\},$$

y definimos la función $V : T \rightarrow S^1$ dada por

$$V(t_1, t_2) = \begin{cases} \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{\|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\|} & \text{si } t_1 < t_2, (t_1, t_2) \neq (a, b), \\ \gamma'(t_1) & \text{si } t_1 = t_2, \\ -\gamma'(a) & \text{si } (t_1, t_2) = (a, b). \end{cases}$$



Vemos que V está bien definida gracias a que γ es simple. Además es continua. Obviamente lo es sobre el abierto en T formado por los puntos con $t_1 < t_2$ y $(t_1, t_2) \neq (a, b)$. Falta probar que lo es en el lado $t_1 = t_2$ y en el vértice (a, b) . Ahora bien:

$$\lim_{(t_1, t_2) \rightarrow (t, t)} \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{\|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\|} = \lim_{(t_1, t_2) \rightarrow (t, t)} \frac{(\gamma(t_2) - \gamma(t_1))/(t_2 - t_1)}{\|(\gamma(t_2) - \gamma(t_1))/(t_2 - t_1)\|} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|},$$

donde el límite (sobre el triángulo abierto) se calcula usando el teorema de Cauchy ([IC 1.12]) y el hecho de que γ' es continua. La continuidad de γ' implica también la existencia del límite sobre puntos de la recta $t_1 = t_2$, luego la existencia del límite en T . Similarmente,

$$\begin{aligned} \lim_{(t_1, t_2) \rightarrow (a, b)} \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{\|\gamma(t_2) - \gamma(t_1)\|} &= \lim_{(t_1, t_2) \rightarrow (a, b)} \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1 + b - a)}{\|\gamma(t_2) - \gamma(t_1 + b - a)\|} \\ &= \lim_{(t'_1, t_2) \rightarrow (b, b)} \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t'_1)}{\|\gamma(t_2) - \gamma(t'_1)\|}, \end{aligned}$$

donde hemos hecho el cambio de variable $t'_1 = t_1 + b - a$, pero entonces hay que tener en cuenta que, como $t_1 \geq a$, se cumple $t_2 \leq b \leq t'_1$, luego $t_2 - t'_1 < 0$, por lo que al introducir la diferencia en la norma hay que dejar el signo negativo fuera:

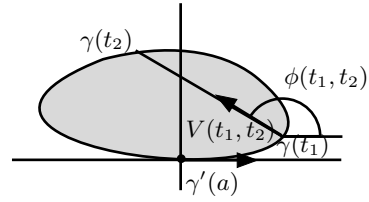
$$\lim_{(t'_1, t_2) \rightarrow (b, b)} \frac{(\gamma(t_2) - \gamma(t'_1))/(t_2 - t'_1)}{-\|(\gamma(t_2) - \gamma(t'_1))/(t'_1 - t_2)\|} = -\frac{\gamma'(b)}{\|\gamma'(b)\|} = -\gamma'(b) = -\gamma'(a).$$

Esto prueba la continuidad de V . Notemos que

$$V(a, a) = \gamma'(a) = (1, 0) = (\cos 0, \text{sen } 0).$$

Como T es simplemente conexo, el teorema 8.9 nos garantiza que V tiene una única elevación $\phi : T \rightarrow \mathbb{R}$ al cubrimiento $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ tal que $\phi(a, a) = 0$, de modo que

$$V(t_1, t_2) = (\cos \phi(t_1, t_2), \text{sen } \phi(t_1, t_2)).$$



En particular, por la unicidad de θ , se cumple $\theta(t) = \phi(t, t)$, luego

$$G(\gamma) = \theta(b) - \theta(a) = \phi(b, b) - \phi(a, a) = \phi(b, b).$$

Ahora observamos que la función $\phi(a, t)$, con $a < t < b$, da el argumento de $\gamma(t)$ (que está en el semiplano $y > 0$), luego, en principio, toma valores en

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi, (2k + 1)\pi[,$$

pero como la imagen de $]0, b[$ tiene que ser conexa, tiene que estar contenida en un único intervalo $]2k\pi, (2k + 1)\pi[$. Y como tiende a $\phi(0, 0) = 0$ cuando t tiende a 0, necesariamente está en $]0, \pi[$. Como $\phi(a, b)$ es un argumento de $(-1, 0)$, tiene que ser $\pi + 2k\pi$, y como es el límite de una función contenida en $]0, \pi[$, tiene que ser $\phi(a, b) = \pi$.

Seguidamente consideramos la función $\phi(t, b)$, con $a < t < b$. En cada punto es el argumento de un vector con origen en el semiplano $y > 0$ y con extremo en $(0, 0)$, luego tiene que estar en

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}](2k - 1)\pi, 2k\pi[,$$

pero por conexión la imagen tiene que estar contenida en uno de los intervalos. Teniendo en cuenta que en (a, b) tiende a π , concluimos que $\phi(t, b) \in]\pi, 2\pi[$. Finalmente, $\phi(b, b)$ tiene que ser un argumento de $\gamma'(b) = (1, 0)$, y como tiene que ser límite de una función contenida en $]\pi, 2\pi[$, necesariamente tiene que ser $G(\gamma) = \phi(b, b) = 2\pi$. ■

Ahora vamos a generalizar el resultado que hemos obtenido al caso en que la curva γ pueda tener un número finito de “picos”.

Definición 8.19 *Un polígono curvilíneo P en \mathbb{R}^2 es un abierto acotado cuya frontera puede ser parametrizada por un arco $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ regular a trozos. Los puntos $\gamma(t_i)$ tales que γ no es derivable en t_i (incluyendo a $\gamma(a) = \gamma(b)$ si $\gamma'(a) \neq \gamma'(b)$) se llaman vértices de P .*

En particular, seguimos suponiendo que γ es simple, es decir, que $\gamma|_{]a, b[}$ es inyectiva, y que $\gamma(a) = \gamma(b)$, pero ya no es necesario que $\gamma'(a) = \gamma'(b)$. Ahora tenemos una partición

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b,$$

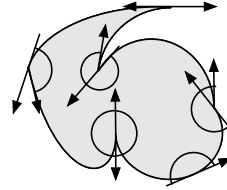
de modo que cada lado $\gamma_i = \gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ es un arco regular, sólo que ahora la derivada $\gamma'(t)$ no está definida en los puntos t_i , sino que en cada uno de ellos tenemos dos derivadas laterales $\gamma'_-(t_i)$ y $\gamma'_+(t_i)$. Entenderemos que, por definición, $\gamma'_-(a) = \gamma'_-(b)$ y $\gamma'_+(b) = \gamma'_+(a)$. Por simplicidad notacional consideraremos siempre que $\gamma(a) = \gamma(b)$ es un vértice de P , aunque se cumpla $\gamma'(a) = \gamma'(b)$.

El *ángulo exterior* en un vértice $\gamma(t_i)$ del polígono P se define como el ángulo $\epsilon_i \in]-\pi, \pi[$ que forman los vectores $\sigma'_-(t_i)$ y $\sigma'_+(t_i)$ con signo positivo si estos vectores (en ese orden) forman una base orientada de \mathbb{R}^2 , y con signo negativo en caso contrario. El *ángulo interior* se define como $\delta_i = \pi - \epsilon_i \in]0, 2\pi[$.

Notemos que la definición anterior no tiene sentido si los vectores $\sigma'_-(t_i)$ y $\sigma'_+(t_i)$ son linealmente dependientes. Si uno es un múltiplo positivo del otro el ángulo exterior se define como 0 y a lo sumo γ presenta entonces un cambio brusco en su parametrización que puede eliminarse, por ejemplo, reparametrizando por el arco. En cambio, si las tangentes tienen sentidos opuestos se dice que γ tiene una *cúspide* en $\gamma(t_i)$. En tal caso es posible asignar coherentemente un valor $\pm\pi$ para el ángulo exterior (luego de 0 o 2π para el interior) y a continuación daremos la idea intuitiva de cuál es el criterio, pero en la práctica será más conveniente adoptar el convenio siguiente:

Nota En lo sucesivo incluiremos en la definición de polígono curvilíneo la exigencia de que ninguno de los vértices sea una cúspide.

La figura muestra los ángulos internos de los vértices de un polígono curvilíneo con dos cúspides (es decir, un ejemplo de los polígonos que acabamos de excluir). La cúspide situada arriba a la izquierda tiene ángulo interior igual a 0, mientras que la situada abajo en el centro tiene ángulo interior 2π . Abajo a la derecha hay también un falso vértice con ángulo interior π y ángulo exterior nulo. La idea subyacente es que el ángulo exterior es el ángulo en $[-\pi, \pi]$ que hay que girar $\gamma'_-(t_i)$ para pasar a $\gamma'_+(t_i)$ con signo positivo o negativo según si el giro tiene que hacerse en sentido antihorario o en sentido horario. Este criterio no vale para las cúspides, pero hay otro que vale en general: Si al continuar avanzando en la dirección de $\gamma'_-(t_i)$ nos salimos de P , entonces el ángulo exterior es positivo y el interior es nulo, mientras que si entramos en P el ángulo exterior es negativo y el interior 2π . No obstante, en lugar de formalizar esta idea, adoptaremos la política que hemos indicado de excluir las cúspides.



La definición de ángulo exterior que hemos dado hace que se cumpla la propiedad siguiente que va a ser fundamental: si

$$\gamma'_-(t_i) = \|\gamma'_-(t_i)\|(\cos \theta, \text{sen } \theta),$$

entonces

$$\gamma'_+(t_i) = \|\gamma'_+(t_i)\|(\cos(\theta + \epsilon_i), \text{sen}(\theta + \epsilon_i)),$$

es decir, que el ángulo exterior es el giro de la tangente en el vértice. Ahora ya podemos enunciar la versión final del teorema que queremos probar:

Teorema 8.20 (Teorema del giro de la tangente) *Sea $P \subset \mathbb{R}^2$ un polígono curvilíneo cuya frontera esté parametrizada por un arco γ regular a trozos recorrido según la orientación positiva que P induce en ∂P . Sean $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ los lados del polígono, sean $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ sus ángulos exteriores y $G(\gamma_i)$ el giro del vector tangente γ'_i a lo largo del lado γ_i . Entonces*

$$\sum_{i=1}^m G(\gamma_i) + \sum_{i=1}^m \epsilon_i = 2\pi.$$

DEMOSTRACIÓN: Llamamos $G(\gamma)$ al miembro izquierdo de la fórmula del enunciado. La prueba consiste en ver que los vértices pueden ser redondeados sin alterar el valor de $G(\gamma)$ y aplicar el caso ya demostrado.

Empezamos definiendo $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de forma que, para todo t distinto de los puntos de enlace t_i , se cumpla que $\gamma'(t) = \|\gamma'(t)\|(\cos \theta(t), \text{sen } \theta(t))$.

Partimos de una determinación continua del argumento $\theta : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ de $\gamma'_1 = \gamma'|_{[t_0, t_1]}$, pero la modificamos en t_1 cambiando su valor de $\theta(t_1)$ a $\theta(t_1) + \epsilon_1$. Así, según hemos señalado se cumple que $\gamma'_2(t_1) = \|\gamma'_2(t_1)\|(\cos \theta(t_1), \text{sen } \theta(t_1))$. Ahora prolongamos θ con la determinación continua del argumento de γ'_2 que parte de $\theta(t_1)$, con lo que tenemos $\theta : [t_0, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$, pero la modificamos en t_2 sumándole ϵ_2 , para que $\gamma'_3(t_2) = \|\gamma'_3(t_2)\|(\cos \theta(t_2), \text{sen } \theta(t_2))$. Prosiguiendo de este modo (hasta modificar $\theta(b)$ con ϵ_m), obtenemos una función $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple lo requerido. A diferencia del caso anterior, ya no es continua, sino que tiene discontinuidades de salto en los puntos t_i , y cada salto tiene amplitud ϵ_i , con $|\epsilon_i| \leq \pi$. Además se cumple que $\theta(t_i) - \theta(t_{i-1}) = G(\gamma_i)$ antes de la modificación del extremo, y $\theta(t_i) - \theta(t_{i-1}) = G(\gamma_i) + \epsilon_i$ después de la modificación, luego

$$G(\gamma) = \sum_{i=1}^m G(\gamma_i) + \sum_{i=1}^m \epsilon_i = \theta(b) - \theta(a).$$

Vamos a modificar γ para obtener un bucle de clase C^1 —que es lo único que hemos usado en la prueba para bucles sin vértices— con el mismo valor de $G(\gamma)$, con lo que la parte ya probada nos dará que $G(\gamma) = 2\pi$.

No perdemos generalidad si suponemos que $\gamma(t)$ está parametrizada por el arco. Por simplificar la notación vamos a considerar el vértice correspondiente a t_1 , es decir, al punto $p = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_1)$, donde tenemos las derivadas $\gamma'_1(t_1)$ y $\gamma'_2(t_1)$. Si son iguales, γ ya es de clase C^1 en t_1 y no es necesario redondear el vértice (pues realmente no hay un vértice en p), así que podemos suponer que $\gamma'_1(t_1) \neq \gamma'_2(t_1)$.

Como el salto de θ en t_1 tiene a lo sumo amplitud π , existe un $\delta > 0$ tal que si $t_1 - \delta < u < t_1 < v < t_1 + \delta$, entonces $|\theta(v) - \theta(u)| < 2\pi$.

En segundo lugar, como

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} \frac{\gamma_1(t) - \gamma_1(t_1)}{\|\gamma_1(t) - \gamma_1(t_1)\|} = \gamma'_1(t_1),$$

multiplicando por $\gamma'_1(t)$ dentro del límite concluimos que el coseno del ángulo que $\gamma'_1(t)$ forma con $\gamma_1(t) - p$ tiende a $\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_1) = 1$. Esto se traduce en que, tomando $\delta > 0$ suficientemente pequeño, si $t_1 - \delta < u < t_1$, el vector $\gamma'_1(t)$ no es ortogonal a $\gamma_1(t) - p$. Similarmente podemos garantizar que si $t_1 < v < t_1 + \delta$ entonces $\gamma'_2(t)$ no es ortogonal a $\gamma_2(t) - p$.

Veamos por último lugar que podemos tomar $\delta > 0$ de forma que la distancia de $\gamma(t)$ a $\gamma(t_1)$ es decreciente en $[t_1 - \delta, t_1]$ y creciente en $[t_1, t_1 + \delta]$. Esto implica a su vez que, para todo $r > 0$ suficientemente pequeño, $\gamma[t_1 - \delta, t_1 + \delta] \cap B_r(p)$ es de la forma $\gamma[u, v]$, para ciertos $u < t_1 < v$.

En efecto, componiendo γ con un giro y una traslación en \mathbb{R}^2 podemos suponer que $\gamma(t_1) = (0, 0)$ y que $\gamma'_1(t_1) = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$, con lo que las dos componentes de γ_1 tienen derivada negativa en t_1 , luego en un entorno de t_1 , luego decrecen hasta 0 en un intervalo $[t_1 - \delta, t_1]$, luego la distancia también es decreciente, y esto vale para la curva γ original. Con otro giro para que sea $\gamma'_2(t_1) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ garantizamos que la distancia es creciente en otro intervalo $[t_1, t_1 + \delta]$, y basta tomar el mínimo de los dos δ .

Como $[a, b] \setminus]t_1 - \delta, t_1 + \delta[$ es compacto y su imagen por γ no contiene a p (porque γ es inyectiva), podemos tomar un $r > 0$ tal que

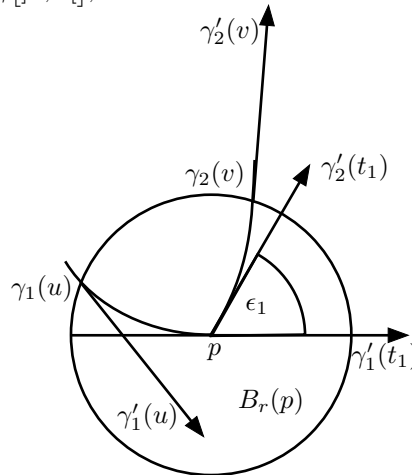
$$B_r(p) \cap \gamma[a, b] \subset \gamma[t_1 - \delta, t_1 + \delta].$$

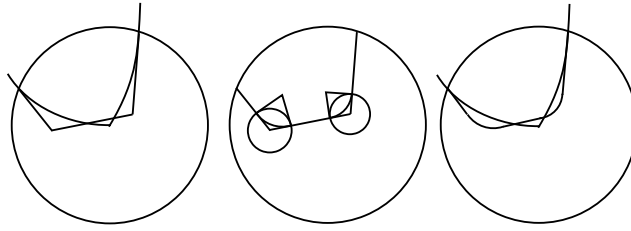
Combinando esto con lo anterior, tenemos un $r > 0$ tal que

$$B_r(p) \cap \gamma[a, b] = \gamma[u, v],$$

para ciertos $t_0 < u < t_1 < v < t_2$, que además cumplirán que $\gamma'_1(u)$ y $\gamma'_2(v)$ no son tangentes a la bola $B_r(p)$. Además $\theta(u)$ es un argumento de $\gamma'_1(u)$ y $\theta(v)$ es un argumento de $\gamma'_2(v)$, y la diferencia entre ambos en valor absoluto es menor que 2π . Ahora sustituimos $\gamma|_{[u, v]}$ por una nueva curva construida como indicamos a continuación:

Prolongamos $\gamma_1(u)$ con un segmento de recta con derivada constante $\gamma'_1(u)$ hasta un punto interior a $B_r(p)$, e igualmente prolongamos hacia atrás $\gamma_2(v)$ con otro segmento de recta. Unimos los extremos interiores de ambos segmentos con un tercer segmento, y finalmente redondeamos los dos vértices mediante arcos de circunferencia. Concretamente, tomamos dos discos disjuntos centrados en los vértices y contenidos en $B_r(p)$ y sustituimos el ángulo contenido en cada uno de ellos por el arco de circunferencia construido de forma obvia para que sea de clase C^1 . El resultado es una curva γ^* de clase C^1 que une $\gamma'_1(u)$ con $\gamma'_2(v)$.





Aquí se nos presenta un pequeño problema técnico, y es que tenemos que considerar a γ^* parametrizada por el arco, pero su longitud L no tiene por qué ser la misma que la de $\gamma|_{[u,v]}$, es decir, $v - u$, por lo que la curva con el vértice redondeado será

$$\bar{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } t \leq u, \\ \gamma^*(t) & \text{si } u \leq t \leq u + L, \\ \gamma(t - L + v - u) & \text{si } u + L \leq t \leq b + L - v + u. \end{cases}$$

Para evitar lo que no son más que meras complicaciones de notación vamos a suponer que $L = v - u$.

Es claro a partir de la construcción que γ^* no se corta a sí misma y, como dentro de $B_r(p)$ no hay más puntos de γ que los de $\gamma|_{[u,v]}$, concluimos que $\bar{\gamma}$ sigue siendo una curva inyectiva y de clase C^1 en $]t_0, t_2[$. El punto crucial es que no es difícil justificar que una curva construida como γ^* , es decir, redondeando con arcos de circunferencia una poligonal de tres segmentos que entran en un círculo por puntos distintos y no se cortan entre sí, cumple necesariamente⁵ $|G(\gamma^*)| < 2\pi$ y que el signo⁶ es el de $\theta(v) - \theta(u)$. Por lo tanto, si θ^* es la elevación a \mathbb{R} de $(\gamma^*)'$ que empieza en $\theta(u)$, termina precisamente en el argumento de $\gamma_2'(v)$ que dista menos de 2π de $\theta(u)$ y que es mayor o menor que $\theta(u)$ según el signo de ϵ_1 . Pero dicho argumento es precisamente $\theta(v)$, de donde se sigue que la elevación a \mathbb{R} de $\bar{\gamma}'$ se obtiene sin más que reemplazar $\theta|_{[u,v]}$ por $\theta^*|_{[u,v]}$, luego $\bar{\theta}(a) = \theta(a)$ y $\bar{\theta}(b) = \theta(b)$, luego $G(\bar{\gamma}) = G(\gamma)$.

Así hemos suavizado un vértice, y el proceso se puede aplicar igualmente a todos los demás hasta obtener una curva de clase C^1 con el mismo $G(\gamma)$. ■

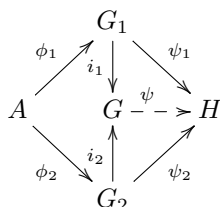
8.4 El teorema de Steifert-van Kampen

Vamos a probar ahora un potente resultado que nos permitirá calcular muchos grupos fundamentales. Para ello necesitamos el concepto siguiente:

⁵Si los dos arcos giran en sentidos opuestos es inmediato y, en caso contrario, podemos unir $\gamma_1(u)$ y $\gamma_2(v)$ con un segmento para formar un cuadrilátero, de modo que los giros de los dos semicírculos más los dos ángulos en $\gamma_1(u)$ y $\gamma_2(v)$ tienen que sumar 2π .

⁶En este punto es relevante la forma en que hemos definido el signo de ϵ_i , pues si cortamos γ cerca de un vértice como estamos haciendo, el arco que hay que recorrer para unir los extremos de la forma más simple es positivo si el vértice es un saliente y negativo si es un entrante.

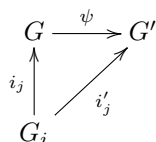
Definición 8.21 Sean G_1 y G_2 dos grupos y sean $\phi_j : A \rightarrow G_j$ dos homomorfismos de grupos. Un *producto amalgamado* de G_1 y G_2 respecto a los homomorfismos ϕ_j es un grupo G junto con homomorfismos $i_j : G_j \rightarrow G$ que hacen conmutativo el triángulo de la izquierda del diagrama siguiente



y, tal que, para cualesquiera homomorfismos ψ_j en un grupo H que cumplan $\phi_1 \circ \psi_1 = \phi_2 \circ \psi_2$, existe un único homomorfismo ψ que hace conmutativos los triángulos de la derecha.

La definición es sofisticada, pero enseguida veremos que tiene una interpretación sencilla. Notemos que no es evidente que todo par de homomorfismos de grupos tenga un producto amalgamado. Enseguida veremos que así es, pero antes probamos el teorema siguiente, que afirma que, si lo tiene, es único salvo isomorfismo:

Teorema 8.22 Sean G_1 y G_2 dos grupos y sean $\phi_j : A \rightarrow G_j$ dos homomorfismos de grupos. Si dos grupos G y G' con homomorfismos $i_j : G_j \rightarrow G$, $i'_j : G_j \rightarrow G'$ satisfacen la definición de producto amalgamado, entonces existe un único isomorfismo $\psi : G \rightarrow G'$ que hace conmutativos los diagramas



DEMOSTRACIÓN: Basta tomar como ψ el homomorfismo dado por la definición de suma amalgamada aplicada con $H = G'$ y $\psi_j = i'_j$, que cumple $i_j \circ \psi = i'_j$.

Si usamos que G' cumple la definición tomando ahora $H = G$ con $\psi_j = i_j$ obtenemos otro homomorfismo $\bar{\psi} : G' \rightarrow G$ que cumple $i'_j \circ \bar{\psi} = i_j$. Aplicamos de nuevo que G cumple la definición, pero ahora tomando $H = G$ y $\psi_j = i_j$, lo que nos da un único homomorfismo $\psi^* : G \rightarrow G$ tal que $i_j \circ \psi^* = i_j$. Ahora bien, la identidad en G cumple trivialmente estas relaciones y, por otra parte,

$$i_j \circ \psi \circ \bar{\psi} = i'_j \circ \bar{\psi} = i_j,$$

luego $\psi \circ \bar{\psi}$ también las cumple, luego por la unicidad $\psi \circ \bar{\psi} = 1$. Igualmente se comprueba que $\bar{\psi} \circ \psi = 1$, luego ψ es un isomorfismo.

La unicidad de ψ se debe a que si otro isomorfismo ψ' hace conmutativos los diagramas del enunciado, entonces, como antes, tanto $\psi \circ \psi'^{-1}$ como la identidad cumplen la definición de producto amalgamado para $H = G$ con $\psi_j = i_j$. ■

Pasamos ya a ocuparnos de la existencia de productos amalgamados. Recordemos de [TG 3.17] que si L es un grupo libre de base X y $R \subset L$, entonces $G = \langle X \mid R \rangle$ se define como el grupo cociente $G = L/N$, donde N es la intersección de todos los subgrupos normales de G que contienen a R . Una expresión de la forma $G = \langle X \mid R \rangle$ se llama una presentación de G mediante los generadores X y las relaciones R . Véanse los comentarios tras la definición [TG 3.17] sobre los convenios de notación habituales sobre presentaciones de grupos.

Por ejemplo, $G_1 = \langle x \mid x^4 = 1 \rangle$ es un grupo cíclico de orden 4, mientras que $G_2 = \langle y \mid y^6 = 1 \rangle$ es un grupo cíclico de orden 6. Consideremos ahora los homomorfismos $\phi_j : \mathbb{Z} \rightarrow G_j$ dados por $\phi_1(1) = x^2$ y $\phi_2(1) = y^3$.

Vamos a demostrar que un producto amalgamado de G_1 y G_2 respecto de los homomorfismos indicados es

$$G = \langle x, y \mid x^4 = y^6 = 1, x^2 = y^3 \rangle.$$

En general, el producto amalgamado de dos grupos respecto de dos homomorfismos dados es el grupo que tiene por generadores a la unión disjunta de los generadores de los factores y por relaciones a las relaciones de ambos factores más las que identifican las imágenes de un generador de A en ambos factores.

Para demostrar esto partimos de dos grupos $G_j = \langle X_j \mid R_j \rangle$, lo que significa que $G_j = L_j/N_j$, donde X_j es una base del grupo libre L_j , $R_j \subset L_j$ y N_j es el menor subgrupo normal de L_j que contiene a R_j . Fijamos también homomorfismos $\phi_j : A \rightarrow G_j$ y un sistema generador X_0 de A (las relaciones que satisfaga son irrelevantes).

A partir de la definición de grupo libre [TG 3.9] se comprueba sin dificultad que si L es un grupo libre de base X y $X' \subset X$, entonces el subgrupo $\langle X' \rangle$ es libre de base X' . Esto nos permite considerar un grupo libre L de base X e identificar a X_1 y X_2 con subconjuntos disjuntos de X , de modo que $X = X_1 \cup X_2$. Así podemos considerar que L_1 y L_2 son subgrupos de L .

Cada elemento de G_j es una clase de congruencia en L_j . Fijemos aplicaciones $\tilde{\phi}_j : X_0 \rightarrow L_j$ que escojan arbitrariamente un representante para cada clase $\phi_j(x)$ con $x \in X_0$, es decir, tales que $\phi_j(x) = [\tilde{\phi}_j(x)]$. Sea

$$R_0 = \{ \tilde{\phi}_1(x)\tilde{\phi}_2^{-1}(x) \mid x \in X_0 \} \subset L$$

y sea N la intersección de todos los subgrupos normales de L que contienen a $R_0 \cup R_1 \cup R_2$. Lo que nos proponemos demostrar es que

$$G = \langle X_1 \cup X_2 \mid R_0 \cup R_1 \cup R_2 \rangle = L/N$$

es un producto amalgamado de los grupos y homomorfismos dados.⁷

Las restricciones de las proyecciones canónicas $L_i \rightarrow G$ contienen a R_i en su núcleo, luego también a N_i , luego inducen homomorfismos $i_j : G_j \rightarrow G$. Vamos a probar, más concretamente, que G satisface la definición de producto amalgamado con estos dos homomorfismos.

⁷En el ejemplo que hemos puesto sería $R_1 = x^4$, $R_2 = \{y^6\}$, $R_0 = \{x^2y^{-3}\}$.

En primer lugar observamos que si $x \in X_0$, entonces

$$\begin{aligned} i_1(\phi_1(x))i_2(\phi_2(x))^{-1} &= i_1[\tilde{\phi}_1(x)]i_2[\tilde{\phi}_2(x)^{-1}] \\ &= [\tilde{\phi}_1(x)][\tilde{\phi}_2(x)^{-1}] = [\tilde{\phi}_1(x)\tilde{\phi}_2(x)^{-1}] = 1, \end{aligned}$$

pues $\tilde{\phi}_1(x)\tilde{\phi}_2(x)^{-1} \in R_0 \subset N$. Equivalentemente, $i_1(\phi_1(x)) = i_2(\phi_2(x))$ y, como esto se cumple para x en un sistema generador de A , de hecho $\phi_1 \circ i_1 = \phi_2 \circ i_2$, como requiere la definición de producto amalgamado.

Ahora suponemos que tenemos homomorfismos $\psi_j : G_j \rightarrow H$ tales que $\phi_1 \circ \psi_1 = \phi_2 \circ \psi_2$.

Para definir un homomorfismo $\tilde{\psi} : L \rightarrow H$ sólo necesitamos especificar su restricción a la base $X_1 \cup X_2$. Establecemos que, para cada $x_j \in X_j$, se cumple $\tilde{\psi}(x_j) = \psi_j([x_j])$.

Así, si $x \in R_j$, para $j = 1, 2$, tenemos que $\tilde{\psi}(x) = \psi_1([x]) = \psi_1(1) = 1$. Por otra parte, un elemento de R_0 es de la forma $\tilde{\phi}_1(x)\tilde{\phi}_2(x)^{-1}$, con $x \in X_0$, con lo que

$$\tilde{\psi}(\tilde{\phi}_1(x)\tilde{\phi}_2(x)^{-1}) = \tilde{\psi}_1(\tilde{\phi}_1(x))\tilde{\psi}_2(\tilde{\phi}_2(x)^{-1}) = \psi_1(\phi_1(x))\psi_2(\phi_2(x))^{-1} = 1,$$

por la hipótesis sobre los homomorfismos ψ_i . Con esto hemos probado que el núcleo de $\tilde{\psi}$ contiene a $R_0 \cup R_1 \cup R_2$, luego también a N , luego $\tilde{\psi}$ induce un homomorfismo de grupos $\psi : G \rightarrow H$ y, si $x \in X_j$, entonces

$$\psi(i_j([x])) = \psi([x]) = \tilde{\psi}(x) = \psi_j([x]),$$

luego $i_j \circ \psi = \psi_j$. La unicidad es obvia, pues si otro homomorfismo cumple estas relaciones coincide con ψ sobre $i_1[X_1] \cup i_2[X_2]$, que es un sistema generador de G , luego tiene que ser igual a ψ . ■

Definición 8.23 Dados homomorfismos de grupos $\phi_j : A \rightarrow G_j$, representaremos por $G_1 \amalg_{\phi_1, \phi_2} G_2$ a cualquier producto amalgamado de los grupos dados respecto de los homomorfismos dados, que ya hemos probado que existe y es único salvo isomorfismo.

Cuando el contexto deja claro cuáles son los homomorfismos con los que se calcula un producto amalgamado es habitual escribir $G_1 \amalg_A G_2$.

Según hemos visto, el producto amalgamado es el grupo generado por la unión disjunta de los generadores de los factores con las relaciones de ambos más las que identifican las imágenes de un generador de A por los homomorfismos dados. Esto no servía como definición porque un mismo grupo admite distintas presentaciones en términos de generadores y relaciones, y hemos demostrado que cualquier par de presentaciones de los factores da lugar al mismo producto amalgamado.

En particular, cuando $A = 1$ el producto amalgamado se representa mediante $G_1 \amalg G_2$ y se llama *producto libre* de los grupos dados, y es el grupo generado por la unión disjunta de los generadores de los factores y que satisface las relaciones de ambos.

Por ejemplo, $\mathbb{Z} \amalg \mathbb{Z}$ es el grupo libre de rango 2, mientras que

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \amalg (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1 \rangle$$

es el grupo diédrico infinito.⁸

Teorema 8.24 (Steifert-van Kampen) *Sea X un espacio topológico descompuesto como $X = U \cup V$, donde U , V y $U \cap V$ son abiertos arcoconexos no vacíos. Entonces, los homomorfismos inducidos por las inclusiones*

$$\pi_1(U \cap V) \longrightarrow \pi_1(U), \quad \pi_1(U \cap V) \longrightarrow \pi_1(V)$$

determinan un producto amalgamado $\pi_1(U) \amalg_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V)$, y los homomorfismos

$$\pi_1(U) \longrightarrow \pi_1(X), \quad \pi_1(V) \longrightarrow \pi_1(X)$$

inducen un isomorfismo $\phi : \pi_1(U) \amalg_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V) \longrightarrow \pi_1(X)$.

DEMOSTRACIÓN: Todos los grupos fundamentales se calculan respecto de un punto $x_0 \in U \cap V$. Es inmediato que ϕ está bien definido (se cumplen todos los requisitos para formar el producto amalgamado y para definir ϕ). El problema es probar que ϕ es biyectivo.

Sea $f : I \longrightarrow X$ un bucle en x_0 . Por el lema del cubrimiento de Lebesgue 1.1, existe un natural n tal que la imagen por f de cada intervalo $[i/n, (i+1)/n]$ está contenida en U o en V . Si una está en U y la siguiente está en V (o viceversa), entonces $f((i+1)/n) \in U \cap V$. Tomamos un arco que una este punto con x_0 en $U \cap V$ y intercalamos en f seguido de su inverso. De este modo obtenemos otro representante de la clase de homotopía de f que se descompone en producto de clases bucles contenidos en U o en V y que, por lo tanto, están en la imagen de $\pi_1(U)$ o de $\pi_1(V)$, luego en la de ϕ . Esto prueba que ϕ es suprayectivo.

Para probar la inyectividad tomamos un elemento arbitrario del producto amalgamado con imagen nula, que, según acabamos de ver, podremos expresar como $\omega = \alpha_1 \cdots \alpha_m$, con $\alpha_i \in \pi_1(U)$ o bien $\alpha_i \in \pi_1(V)$. Sea $\alpha_i = [f_i]$. Tenemos una homotopía $F : I \times I \longrightarrow X$ tal que $F_0 = f_1 \cdots f_m$ y F_1 es el bucle constante x_0 .

Por el lema de Lebesgue 1.1, podemos tomar un número natural $n \geq 1$, que además podemos suponer múltiplo de m , tal que la imagen por F de cada cuadrado de lado $1/n$ está en U o en V .

Sea $\epsilon > 0$ menor que la distancia de cada compacto

$$F[[i/n, (i+1)/n] \times [j/n, (j+1)/n]]$$

al complementario del abierto U o V en el que esté contenido. Como F es uniformemente continua en $I \times I$, existe $\delta > 0$ tal que si $|s - s'| < \delta$, $|t - t'| < \delta$, entonces $|F(s, t) - F(s', t')| < \epsilon$, con lo que, si $F(s, t)$ está en U o en V , lo mismo vale para $F(s', t')$.

⁸En la sección [TG 3.3] vimos la presentación $D_\infty = \langle a, b \mid b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$, pero el cambio $a' = ab$, $b' = b$ nos da otro generador caracterizado por las relaciones $a'^2 = b'^2 = 1$.

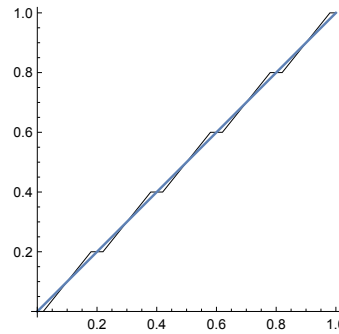
Sea $h : I \rightarrow I$ una función continua que cumpla $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, que sea constante en un entorno de cada punto i/n y de modo que $|h(u) - u| < \delta$ para todo $u \in I$. Es fácil construir una función de estas características como la que indica la gráfica. Así, si definimos $F' : I \times I \rightarrow X$ mediante

$$F'(s, t) = F(h(s), h(t)),$$

seguimos teniendo una homotopía entre F_0 y F_1 que sigue enviando cada cuadrado

$$[i/n, (i+1)/n] \times [j/n, (j+1)/n]$$

a U o a V pero que además es constante en un entorno de cada punto $(i/n, j/n)$. A partir de aquí escribiremos F en lugar de F' .



Sea $\epsilon > 0$ tal que F sea constante en cada bola $\overline{B}_\epsilon(i/n, j/n)$ con $i < n$, $0 < j < n$ y tomemos un arco $h_{ij} : I \rightarrow X$ tal que $h_{ij}(0) = x_0$ y $h_{ij}(1) = F(i/n, j/n)$, de modo que su imagen esté contenida en U , en V o en $U \cap V$ si $F(i/n, j/n)$ está en uno de estos conjuntos. Podemos modificar F en cada bola $\overline{B}_\epsilon(i/n, j/n)$ sustituyéndola por $h_{ij}(\|(s, t) - (i/n, j/n)\|/\epsilon)$. Puesto que esta función es constante igual a $F(i/n, j/n)$ en la frontera de la bola, el resultado sigue siendo una función continua, cada cuadrado $[i/n, (i+1)/n] \times [j/n, (j+1)/n]$ sigue teniendo su imagen contenida en U o en V y ahora, además, la homotopía modificada cumple $F(i/n, j/n) = x_0$.

Notemos que no hemos modificado F para $i = n$ o $j = 0, n$ porque en esos casos F_1 ya es constante igual a x_0 y la modificación podría hacer que dejara de serlo. La modificación en $i = 0$ ha sustituido cada bucle f_i por otro homotópico en U o en V , que, por consiguiente, determina la misma clase de homotopía α_i o β_i .

Con estos arreglos tenemos que la restricción de F a cada arco de la forma $\{i/n\} \times [j/n, (j+1)/n]$ o $[i/n, (i+1)/n] \times \{j/n\}$ es (salvo una reparametrización obvia) un bucle en x_0 , llamémoslo a_{ij} o b_{ij} , respectivamente, contenido en U o en V . El producto de todas las clases $[a_{00}][a_{10}] \cdots [a_{n0}]$ coincide con la clase de partida $[f_1] \cdots [f_m] = \omega$, mientras que $[a_{n0}][a_{n1}] \cdots [a_{nn}] = 1$. Por otra parte, tenemos que $[b_{i0}] = 1$, $[b_{in}] = 1$, pues F es constante igual a x_0 para $t = 0, 1$.

El teorema estará probado si demostramos que, para todo índice j , se cumple

$$[a_{1j}][a_{1j}] \cdots [a_{nj}] = [a_{1,j+1}][a_{1,j+1}] \cdots [a_{n,j+1}].$$

La idea se aprecia mejor en un ejemplo concreto, si bien es claro que el argumento es general. Pongamos que $n = 3$ y que la situación es la que muestra la figura siguiente. (Convenimos en que cada arco se recorre de izquierda a derecha o de abajo hacia arriba). Entonces, como cada arco contenido en un cuadrado es homotópico a un punto en el cuadrado, lo mismo sucede con sus imágenes por F (en U o en V), por lo que tenemos

$$[a_{00}]_U [a_{01}]_V [a_{02}]_V = [a_{10}]_U [b_{01}]_U^{-1} [b_{01}]_V [a_{11}]_V [b_{02}]_V^{-1} [b_{02}]_V [a_{12}]_V.$$

Ahora usamos que, vistos como elementos del producto amalgamado $\pi_1(U) \amalg_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V)$, tenemos la identidad $[b_{01}]_U = [b_{01}]_V$, pues ambas clases son la imagen de una misma clase del grupo $\pi_1(U \cap V)$. Esto nos permite simplificar:

$$[a_{00}]_U [a_{01}]_V [a_{02}]_V = [a_{10}]_U [a_{11}]_V [a_{12}]_V.$$

Insistimos en que el argumento es general: los b_{ij} que dividen dos cuadrados siempre se simplifican, tanto si los dos cuadrados tienen imagen en el mismo abierto o en abiertos distintos, mientras que b_{i0} y b_{in} determinan siempre la clase trivial. ■

En particular, si a las hipótesis del teorema anterior añadimos que $U \cap V$ es simplemente conexo, entonces $\pi_1(X) \cong \pi_1(U) \amalg \pi_1(V)$.

El teorema de van Kampen admite también una versión para cerrados que es una consecuencia sencilla de la versión para abiertos:

Teorema 8.25 (Steifert-van Kampen) *Sea X un espacio topológico descompuesto como $X = A \cup B$, donde A , B y $A \cap B$ son cerrados arcoconexos localmente arcoconexos no vacíos y $A \cap B$ es un retracto por deformación fuerte de entornos respectivos en A y en B . Entonces, los homomorfismos inducidos por las inclusiones*

$$\pi_1(A \cap B) \longrightarrow \pi_1(A), \quad \pi_1(A \cap B) \longrightarrow \pi_1(B)$$

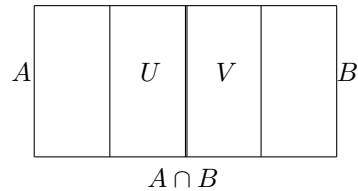
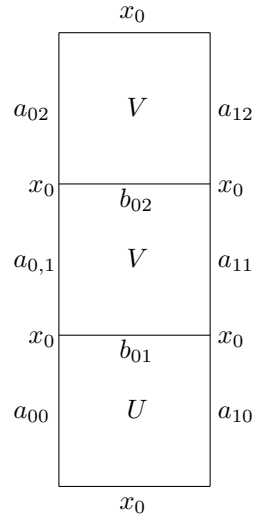
determinan un producto amalgamado $\pi_1(U) \amalg_{\pi_1(A \cap B)} \pi_1(B)$, y los homomorfismos

$$\pi_1(A) \longrightarrow \pi_1(X), \quad \pi_1(B) \longrightarrow \pi_1(X)$$

inducen un isomorfismo $\phi : \pi_1(A) \amalg_{\pi_1(A \cap B)} \pi_1(B) \longrightarrow \pi_1(X)$.

DEMOSTRACIÓN: Por hipótesis existen $A \cap B \subset U \subset A$ y $A \cap B \subset V \subset B$ de modo que U es abierto en A y V es abierto en B , y tales que existen retracciones $r_A : U \rightarrow A$, $r_B : V \rightarrow B$ homotópicas a la identidad en U y V , respectivamente, mediante homotopías que no mueven los puntos de $A \cap B$. Podemos sustituir U por su componente arcoconexa que contiene a $A \cap B$ (que sigue siendo abierta, porque A es localmente arcoconexo) y así tenemos que U es arcoconexo. Lo mismo vale para V .

Llamemos $U' = A \cup V$, $V' = B \cup U$. Ambos conjuntos son abiertos en X , pues, por ejemplo, $X \setminus U' = B \setminus V$, que es cerrado en B , luego en X . Además $U' \cup V' = X$ y $U' \cap V' = U \cup V$ es arcoconexo, pues es unión de dos conjuntos arcoconexos cuya intersección contiene a $A \cap B$, que es arcoconexo.



Las retracciones de U y V en $A \cap B$ pueden combinarse para formar una retracción $r_0 : U \cup V \rightarrow A \cap B$ que también será homotópica a la identidad mediante una homotopía que fija a los puntos de $A \cap B$.

Similarmente, la retracción de V en $A \cap B$ puede extenderse a una retracción $r_{U'} : U' \rightarrow A$ que también será homotópica a la identidad, e igualmente tenemos una retracción $r_{V'} : V' \rightarrow B$.

Fijado un punto $p \in A \cap B$, el teorema anterior nos da que los homomorfismos $\pi_1(U', p) \rightarrow \pi_1(X, p)$, $\pi_1(V', p) \rightarrow \pi_1(X, p)$ inducen un isomorfismo

$$\pi_1(U', p) \amalg_{\pi_1(U' \cap V', p)} \pi_1(V', p) \rightarrow \pi_1(X, p).$$

Ahora bien, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(A, p) & \xleftarrow{i_*} & \pi_1(A \cap B, p) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(B, p) \\ r_{U'*} \uparrow & & r_{0*} \uparrow & & \uparrow r_{V'*} \\ \pi_1(U', p) & \xleftarrow{i_*} & \pi_1(U' \cap V', p) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(V', p) \end{array}$$

en el que las flechas verticales son isomorfismos (la conmutatividad se debe a que los inversos de las flechas verticales son simplemente los homomorfismos inducidos por las inclusiones), de donde obtenemos un isomorfismo

$$\pi_1(U', p) \amalg_{\pi_1(U' \cap V', p)} \pi_1(V', p) \rightarrow \pi_1(A, p) \amalg_{\pi_1(A \cap B, p)} \pi_1(B, p)$$

sin más que aplicar la definición de producto amalgamado. ■

Veamos algunas aplicaciones. La primera es que las esferas de dimensión al menos 2 son simplemente conexas:

Teorema 8.26 *Si $n \geq 2$, entonces $\pi_1(S^n) = 1$.*

DEMOSTRACIÓN: Aplicamos el teorema de van Kampen tomando como abiertos $U = S^n \setminus \{N\}$ y $V = S^n \setminus \{S\}$, donde N y S son dos polos opuestos en la esfera. La hipótesis $n \geq 2$ hace falta para asegurar que $U \cap V$ es arcoconexo. Como U y V son homeomorfos a bolas abiertas, son simplemente conexos, luego $\pi_1(U) \amalg_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V) = 1$. ■

Teorema 8.27 *Si $n \geq 2$ entonces $\pi_1(P^n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

DEMOSTRACIÓN: Esto se prueba calculando el grupo de transformaciones del cubrimiento $p : S^n \rightarrow P^n(\mathbb{R})$, pero para aplicar el teorema 8.13 necesitábamos saber que S^n es simplemente conexo.

Puesto que cada fibra tiene dos puntos, sólo hay dos transformaciones posibles, la identidad y la aplicación antipodal. ■

Notemos que la clase de homotopía asociada a la aplicación antipodal es la formada por los bucles cuya elevación une dos puntos antípodas de S^n . Para $n = 1$ tenemos que $P^1(\mathbb{R})$ es homeomorfo a S^1 .

Teorema 8.28 *Si R_κ es la rosa con κ pétalos, entonces $\pi_1(R_\kappa)$ es libre de rango κ . Si p es el punto común a todos los pétalos, una base de $\pi_1(R_\kappa, p)$ está formada por un arco que de exactamente una vuelta a cada pétalo.*

DEMOSTRACIÓN: Veámoslo primero cuando κ es finito. Puesto que el grupo libre de rango 0 es el grupo trivial, el resultado es cierto incluso para $\kappa = 0$. Para $\kappa = 1$ tenemos que $R_1 = S^1$, luego también se cumple el teorema. Supongamos ahora que se cumple para R_n , donde $n \geq 1$ es un número natural, y veamos que se cumple para R_{n+1} .

Aplicamos la versión para cerrados del teorema de van Kampen, tomando como A la unión de n pétalos de R_{n+1} y como B el pétalo restante. Es claro que p es un retracto de un entorno en tanto en A como en B , así como que $A \cong R_n$ y $B \cong S^1$, luego

$$\pi_1(R_{n+1}, p) \cong \pi_1(A, p) \amalg \pi_1(B, p)$$

es el grupo libre de rango $n + 1$, y una base la forman las imágenes por los homomorfismos inducidos por las inclusiones de una base de los factores. Por hipótesis de inducción, una base de $\pi_1(R_n, p)$ la forman n arcos que den exactamente una vuelta a uno de los pétalos, y también sabemos que una base de $\pi_1(S^1, p)$ la forma un arco que dé una vuelta al único pétalo, luego una base de $\pi_1(R_{n+1}, p)$ es la descrita en el enunciado.

Consideremos ahora un cardinal infinito κ , de modo que $R_\kappa = \bigvee_{j \in J} S_j^1$, donde J es un conjunto de cardinal κ y S_j^1 es una copia de S^1 . Sea γ_j un bucle en p que dé exactamente una vuelta al pétalo S_j^1 . Observemos que las clases $[\gamma_j]$ generan $\pi_1(R_\kappa, p)$, pues, dada $[\gamma] \in \pi_1(R_\kappa, p)$, podemos cubrir R_κ mediante abiertos que cubran únicamente un pétalo cada uno (y de los restantes contengan únicamente subespacios homeomorfos a intervalos). Como $\gamma[I]$ es compacto, estará contenido en la unión de un número finito de tales abiertos, digamos los correspondientes a los pétalos j_1, \dots, j_n . Entonces la rosa R_n formada por dichos pétalos es un retracto por deformación fuerte de la unión de los abiertos, luego γ es homotópico a su imagen por la retracción, que es un bucle en R_n . Por la parte ya probada, γ_n es homotópico en R_n (luego en R_κ) a un producto finito de bucles γ_j , luego $[\gamma]$ está en el subgrupo generado por las clases $[\gamma_j]$.

Sea ahora L un grupo libre de base J y sea $f : L \rightarrow \pi_1(R_\kappa, p)$ el epimorfismo determinado por $f(j) = [\gamma_j]$. Basta probar que se trata de un isomorfismo. En caso contrario existirían índices $j_1, \dots, j_k \in J$ tales que

$$f(j_1^{\pm 1} \cdots j_k^{\pm 1}) = [\gamma_{j_1}^{\pm 1} \cdots \gamma_{j_k}^{\pm 1}] = 1.$$

Sea $H : I \times I \rightarrow R_\kappa$ una homotopía entre $\gamma_{j_1}^{\pm 1} \cdots \gamma_{j_k}^{\pm 1}$ y la identidad. Como la imagen $H[I \times I]$ es compacta, como antes podemos razonar que está contenida en una unión finita de abiertos que contengan a un R_n (la rosa formada por los pétalos de un subconjunto $J_n \subset J$ que, en particular, contiene a j_1, \dots, j_k como retracto fuerte por deformación. Entonces $\gamma_{j_1}^{\pm 1} \cdots \gamma_{j_k}^{\pm 1}$ sería homotópico a la

identidad en R_n , luego $[\gamma_{j_1}]^{\pm 1} \cdots [\gamma_{j_k}]^{\pm 1} = 1$ en $\pi_1(R_n, p)$, pero esto contradice a [TG 3.10], pues las clases $[\gamma_j]$ con $j \in J_n$ son una base de $\pi_1(R_n, p)$, luego son un generador libre. ■

En particular, puesto que dos grupos libres son isomorfos si y sólo si tienen el mismo rango (teorema [TG 3.11]), ahora tenemos probado que dos rosas son homotópicas si y sólo si tienen el mismo número de pétalos, lo que, junto con el teorema 3.8, completa la clasificación de los grafos en cuanto a su tipo de homotopía.

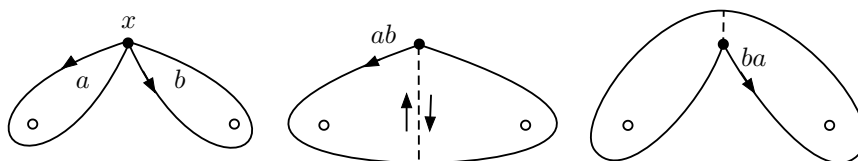
Más aún, ahora es inmediato un teorema puramente algebraico que no tiene una demostración sencilla:

Teorema 8.29 *Todo subgrupo de un grupo libre es libre.*

DEMOSTRACIÓN: Sea L un grupo libre de rango κ y sea R_κ la rosa de κ pétalos, que cumple $\pi_1(R_\kappa) \cong L$. Sea x el punto común de los pétalos de R_κ y sea H un subgrupo de $\pi_1(R_\kappa, x)$. Por el teorema 8.16 tenemos que existe un cubrimiento $p : \tilde{X} \rightarrow R_\kappa$ tal que $p_*[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})] = H$, donde \tilde{x} es una antiimagen de x . Por 8.11 tenemos que $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \cong H$. El teorema 3.9 nos da que \tilde{X} es la representación de un grafo, luego por 3.8 su grupo fundamental es el de una rosa, luego por el teorema anterior es libre. ■

Ejemplo Llamemos X a \mathbb{R}^2 menos dos puntos. En los ejemplos tras la definición 1.30 hemos visto que una bola cerrada menos dos puntos tiene un retracto por deformación fuerte homeomorfo a una rosa de dos pétalos. Como la bola es a su vez un retracto por deformación fuerte de \mathbb{R}^2 , de hecho todo X tiene un retracto por deformación fuerte homeomorfo a una rosa de dos pétalos. Es claro que sirve cualquier rosa cuyos pétalos rodeen a los dos puntos eliminados, y esto se traduce en que, para cualquier $x \in X$, $\pi_1(X, x)$ es libre de rango 2, y que una base la forman dos bucles cualesquiera que den exactamente una vuelta alrededor de cada punto eliminado.

En particular tenemos que $\pi_1(X, x)$ no es abeliano. Vamos a interpretar por qué falla la conmutatividad a la vez que nos familiarizamos con las operaciones en grupos fundamentales. Para ello fijamos dos clases a y b que contengan los dos bucles que muestra la figura de la izquierda, que dan exactamente una vuelta a cada punto eliminado en sentido antihorario.

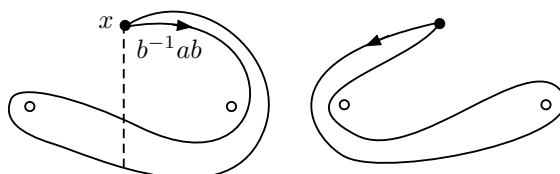


Entonces, el arco representado en la figura central está en la clase ab . Una forma de comprobarlo es aplicar un principio general: si tenemos un α bucle y, en cualquier punto, lo cortamos para prolongarlo con un arco que lo lleve al punto base x seguido de su opuesto, para luego proseguir con α , el bucle resultante

es homotópico a α . Una homotopía consiste en ir reduciendo gradualmente los dos arcos opuestos añadidos, para que, en lugar de llegar hasta x , lleguen cada vez a puntos más cercanos al punto de α de donde parten, hasta desaparecer. Al partir el bucle de ese modo es claro que se trata de la yuxtaposición de un bucle de la clase a seguido de otro de la clase b .

En cambio, la figura de la derecha muestra un bucle de la clase ba . Intuitivamente es claro que no es posible transformarlo en el bucle precedente sin mover el punto x de partida y sin pasar por encima de los puntos eliminados. La prueba formal de este hecho es precisamente que $\pi_1(X, x)$ es libre de rango 2, por lo que $ab \neq ba$.

Hemos dicho que la clase a correspondía a un bucle que rodea uno de los puntos en sentido antihorario, pero lo cierto es que eso no determina completamente la clase de homotopía, pues el bucle de la izquierda en la figura siguiente cumple lo mismo “de otra forma”.



Usando la línea punteada podemos ver que su clase es la conjugada $b^{-1}ab$. En efecto, si empezamos a recorrer el arco hasta encontrar la línea punteada y entonces volvemos a x a través de ella, obtenemos un arco de la clase b^{-1} . Luego retrocedemos por la línea punteada y continuamos con el arco hasta volver a encontrarla. Si entonces regresamos a x hemos recorrido un arco de la clase a . Luego volvemos a donde nos habíamos quedado y recorremos el resto del arco, con lo que obtenemos un arco de la clase b .

Si $\pi_1(X, x)$ fuera abeliano $b^{-1}ab$ sería igual a a , pero intuitivamente se ve que el arco de la figura no puede transformarse en un arco de la clase a sin pasar sobre el punto eliminado derecho (y de nuevo, la prueba formal de este hecho es que sabemos que $\pi_1(X, x)$ es libre). Dejamos a cargo del lector identificar la clase de homotopía del bucle representado en la figura de la derecha. ■

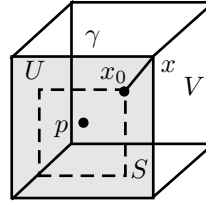
Los teoremas siguientes nos permiten calcular grupos fundamentales de complejos celulares. Empezamos adjuntando una celda bidimensional:

Teorema 8.30 *Sea X un espacio topológico arcoconexo, sea $f : S^1 \rightarrow X$ una aplicación continua y sea $Y = B^2 \otimes_f X$ la adjunción de una celda a X a través de f . Sea $\gamma(t) = f(\cos t, \sin t)$ el bucle que recorre la imagen de f , sea $x = \gamma(0)$ y sea $\pi_1(X, x) = \langle G \mid R \rangle$ una presentación por generadores y relaciones de $\pi_1(X, x)$. Entonces $\pi_1(Y, x) = \langle G, R \cup [\gamma] \rangle$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $h : (B^2, S^1) \rightarrow (Y, X)$ el homeomorfismo relativo correspondiente a la adjunción, de modo que $h|_{S^1} = f$. Llamemos U a la imagen por h del disco abierto, es decir, la celda que estamos adjuntando a X y sea $\tilde{S} = h[S^1] = f[S^1]$.

Sean $p = h(0) \in U$, $x_0 = h(1/2, 0) \in U$, y llamemos $\alpha : I \rightarrow \bar{U}$ al arco dado por $\alpha(t) = h((t + 1/2), 0)$, que une x_0 con $x = h(1, 0)$. Sea $V = Y \setminus \{p\}$.

Así $Y = U \cup V$, $U \cap V = U \setminus \{p\}$ y podemos aplicar el teorema de van Kampen, pero no con x como punto base, pues no está en $U \cap V$, sino con x_0 .



Consideremos la circunferencia $S_0 \subset B^2$ de centro 0 que pasa por y sea $r : B^2 \setminus \{0\} \rightarrow S_0$ la retracción natural, que es homotópica a la identidad. Llamando $S = h[S_0]$, tenemos que r induce una retracción que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} B^2 \setminus \{0\} & \xrightarrow{r} & S_0 \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \bar{U} \setminus \{p\} & \xrightarrow{r} & S \end{array}$$

La clase del bucle $\gamma_0(t) = (\cos t, \sin t)$ es un generador de $\pi_1(S^1, (1, 0))$ y la restricción $r|_{S^1} : (S^1, (1, 0)) \rightarrow (S_0, (1/2, 0))$ es un homeomorfismo, luego $r_*([\gamma_0])$ es un generador de $\pi_1(S_0, (1/2, 0))$. Aplicando h obtenemos que

$$h_*(r_*([\gamma_0])) = r_*(h_*([\gamma_0])) = r_*(f_*([\gamma_0])) = r_*([\gamma])$$

es un generador de $\pi_1(S, x_0)$.

Por otra parte, S es un retracto por deformación fuerte de $U \cap V$, luego $r_*([\gamma])$, visto ahora como elemento de $\pi_1(U \cap V, x_0)$, es también un generador de este grupo.

Consideremos ahora la retracción natural $B^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^1$, que induce una retracción $r' : \bar{U} \setminus \{p\} \rightarrow \tilde{S}$, que a su vez se extiende a una retracción (homotópica a la identidad) $r' : V \rightarrow X$ que fija a todos los puntos de $V \setminus U$. Esto nos da un isomorfismo $r'_* : \pi_1(V, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ cuyo inverso es el inducido por la inclusión $i : X \rightarrow V$.

Por lo tanto, $\pi_1(V, x)$ admite la misma presentación $\pi_1(V, x) = \langle G \mid R \rangle$, que se realiza por las clases de los mismos bucles, vistos ahora como bucles en V en lugar de en X .

Ahora consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(V, x_0) & \xrightarrow{h_\alpha} & \pi_1(V, x) \\ i_* \downarrow & & \downarrow i_* \\ \pi_1(Y, x_0) & \xrightarrow{h_\alpha} & \pi_1(Y, x) \end{array}$$

donde las flechas horizontales son los isomorfismos dados por $h_\alpha([\sigma]) = [\alpha^{-1}\sigma\alpha]$. Como grupo abstracto, $\pi_1(V, x_0)$ admite la misma presentación que $\pi_1(V, x)$, pero si pensamos en G y R como elementos de $\pi_1(V, x)$, entonces en $\pi_1(V, x_0)$ tenemos el generador $h_\alpha^{-1}[G]$ que satisface las relaciones $h_\alpha^{-1}[R]$.

Como $\pi_1(U, x_0) = 1$, el teorema de van Kampen afirma que $\pi_1(Y, x_0)$ es el grupo que resulta de añadir a una presentación de $\pi_1(V, x_0)$ la relación $r_*([\gamma])$, es decir,

$$\pi_1(Y, x_0) = \langle h_\alpha^{-1}[G] \mid h_\alpha^{-1}[R] \cup \{r_*([\gamma])\} \rangle,$$

luego

$$\pi_1(Y, x) = \langle G \mid R \cup \{h_\alpha(r_*([\gamma]))\} \rangle.$$

Ahora bien, $h_\alpha(r_*([\gamma])) = [\alpha^{-1}(\gamma \circ r)\alpha]$ y el hecho de que r sea homotópica a la identidad se traduce en que $\gamma \circ r$ es un arco homotópico a γ , pero mediante una homotopía que transforma x_0 en x . Combinándola con una homotopía que transforma α en el arco constante x , obtenemos una homotopía entre $\alpha^{-1}(\gamma \circ r)\alpha$ y γ que mantiene fijo el origen x . Por lo tanto, $h_\alpha(r_*([\gamma])) = [\gamma]$. ■

Nota Si queremos aplicar varias veces el teorema anterior para calcular el grupo fundamental de la adjunción sucesiva de varias celdas a un espacio topológico, en principio es necesario que las fronteras de todas las celdas tengan un punto común que pueda usarse como base de todos los grupos de homotopía. Esto será suficiente para todas las aplicaciones que veremos de este teorema, pero la técnica que hemos usado en la prueba permite calcular la relación entre los grupos de homotopía respecto de cualquier punto base $x_0 \in X$. La idea es tomar otro punto x en la frontera de la celda adjuntada y considerar un arco α que una x con x_0 . Entonces el grupo fundamental de Y resulta de adjuntar al de X la relación $[\alpha^{-1}\gamma\alpha]$. ■

Antes de mostrar ejemplos, conviene observar que adjuntar celdas de dimensiones superiores a 2 no modifica el grupo fundamental:

Teorema 8.31 *Si X es un espacio topológico arcoconexo e Y resulta de adjuntar a X una celda n -dimensional, con $n \geq 3$, entonces la inclusión induce un isomorfismo $i_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, x)$, para cualquier punto $x \in X$.*

DEMOSTRACIÓN: Si x está en la clausura de la celda adjuntada, el planteamiento es el mismo que el del teorema anterior, pero, ahora $U \cap V$ es homeomorfo a una bola abierta de \mathbb{R}^n menos un punto, luego también a S^{n-1} , que es simplemente conexo al igual que U , por lo que el teorema de van Kampen nos da un isomorfismo $i_* : \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, x_0)$, con el que se llega al isomorfismo $i_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, x)$.

Si $x_1 \in X$ es un punto arbitrario y α es un arco que lo une con x , tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x) & \xrightarrow{h_\alpha} & \pi_1(X, x_1) \\ i_* \downarrow & & \downarrow i_* \\ \pi_1(Y, x) & \xrightarrow{h_\alpha} & \pi_1(Y, x_1) \end{array}$$

que nos da el isomorfismo del enunciado. ■

Ahora podemos calcular los grupos fundamentales de las superficies compactas:

Teorema 8.32 *Se cumple:*

$$\begin{aligned}\pi_1(M_g) &= \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid a_1^{-1}b_1^{-1}a_1b_1 \cdots a_g^{-1}b_g^{-1}a_gb_g = 1 \rangle, \\ \pi_1(N_h) &= \langle a_1, \dots, a_h \mid a_1^2 \cdots a_h^2 = 1 \rangle.\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN: Basta aplicar el teorema 8.30. En el caso de M_g (para $g \geq 1$) tenemos que M_g se obtiene identificando los $4g$ lados de un polígono regular según el patrón $a_1^{-1}b_1^{-1}a_1b_1 \cdots a_g^{-1}b_g^{-1}a_gb_g$. Pero esto es lo mismo que decir que M_g es un complejo celular que consta de un 1-esqueleto formado por una rosa de $4g$ pétalos $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ a los que se adjunta una única celda mediante la aplicación continua de S^1 en la rosa que recorre todos los pétalos en el orden $a_1^{-1}, b_1^{-1}, a_1, b_1, \dots, a_g^{-1}, b_g^{-1}, a_g, b_g$, de modo que el bucle γ del teorema 8.30 es precisamente el bucle $a_1^{-1}b_1^{-1}a_1b_1 \cdots a_g^{-1}b_g^{-1}a_gb_g$, luego ésta es la única relación que hay que incorporar al grupo fundamental del 1-esqueleto. Igualmente se razona con N_h . ■

En el caso del toro y del plano proyectivo obtenemos los grupos que ya habíamos calculado:

$$\pi_1(M_1) = \langle a, b \mid ab = ba \rangle = \mathbb{Z}^2, \quad \pi_1(N_1) = \langle a \mid a^1 = 1 \rangle = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Para el resto no es fácil decidir directamente si son o no grupos isomorfos entre sí, pero puede verse que no indirectamente, calculando su abelianización (la abelianización de un grupo es el cociente sobre su subgrupo derivado [TG 1.42]).

En efecto, como la base canónica e_1, \dots, e_{2g} de \mathbb{Z}^{2g} satisface la relación que define a $\pi_1(M_g)$, tenemos un epimorfismo de grupos $\pi_1(M_g) \rightarrow \mathbb{Z}^{2g}$ que transforma los generadores de $\pi_1(M_g)$ en e_1, \dots, e_{2g} . Como \mathbb{Z}^{2g} es abeliano, éste induce un homomorfismo $\pi_1(M_g)/\pi_1(M_g)' \rightarrow \mathbb{Z}^{2g}$. Pero como el cociente es abeliano y \mathbb{Z}^{2g} es un \mathbb{Z} -módulo libre, podemos definir un homomorfismo $\mathbb{Z}^{2g} \rightarrow \pi_1(M_g)/\pi_1(M_g)'$ que envíe e_1, \dots, e_{2g} a los generadores del cociente, luego es el inverso del anterior y concluimos que

$$\pi_1(M_g)/\pi_1(M_g)' \cong \mathbb{Z}^{2g}.$$

Esto ya prueba que dos superficies M_g para valores diferentes de g no son homeomorfas. Ni siquiera homotópicas.

Para la superficie N_h tenemos que el cociente $\mathbb{Z}^h / \langle 2e_1 + \cdots + 2e_h \rangle$ tiene un generador que cumple la relación del grupo fundamental, luego tenemos un epimorfismo $\pi_1(N_h) \rightarrow \mathbb{Z}^h / \langle (1, \dots, 1) \rangle$, el cual induce a su vez otro

$$\pi_1(N_h)/\pi_1(N_h)' \rightarrow \mathbb{Z}^h / \langle 2e_1 + \cdots + 2e_h \rangle$$

que envía los generadores del cociente a las clases $[e_i]$. Recíprocamente podemos definir un homomorfismo

$$\mathbb{Z}^h \rightarrow \pi_1(N_h)/\pi_1(N_h)'$$

que envíe los e_i a las clases de los generadores de N_h y entonces $2(e_1 + \cdots + e_h)$ está en su núcleo, por lo que induce un homomorfismo

$$\mathbb{Z}^h / \langle (2, \dots, 2) \rangle \longrightarrow \pi_1(N_h) / \pi_1(N_h)'$$

que sobre el generador canónico actúa como el inverso del anterior, luego es el inverso del anterior y concluimos que

$$\pi_1(N_h) / \pi_1(N_h)' \cong \mathbb{Z}^h / \langle 2e_1 + \cdots + 2e_h \rangle \cong \mathbb{Z}^{h-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

El último isomorfismo es el inducido por el automorfismo de \mathbb{Z}^h dado por

$$(x_1, \dots, x_h) \mapsto (x_1 - x_h, \dots, x_{h-1} - x_h, x_h).$$

Como consecuencia:

Teorema 8.33 *Ninguna superficie compacta M_g o N_h es homotópica a ninguna otra. En particular, dos superficies compactas son homotópicas si y sólo si son homeomorfas.*

Por otro lado, el teorema 3.9 nos da que toda superficie topológica no compacta es homotópica a un grafo, luego:

Teorema 8.34 *Si S es una superficie topológica no compacta, entonces $\pi_1(S)$ es un grupo libre.*

Ejemplo Los teoremas 8.30 y 8.31 nos dan otra forma de comprobar que el grupo fundamental de la variedad tridimensional \mathcal{C} resultante de identificar las caras opuestas en un cubo es isomorfo a \mathbb{Z}^3 .

En efecto, tenemos que \mathcal{C} es un complejo celular cuyo 1-esqueleto X_1 es una rosa de tres pétalos, luego su grupo fundamental (con base en el único vértice) es libre de rango 3 y una base la forman las clases a , b , c de tres bucles que recorran las tres aristas del complejo. Su 2-esqueleto X^2 se obtiene adjuntando tres caras (véase la figura de la página 136) a través de aplicaciones continuas que envían S^1 a bucles pertenecientes a las clases $aba^{-1}b^{-1}$, $cac^{-1}a^{-1}$ y $cbc^{-1}b^{-1}$, respectivamente. Según el teorema 8.30, tenemos que

$$\pi_1(X^2, v) = \langle a, b, c \mid ab = ba, ac = ca, bc = cb \rangle \cong \mathbb{Z}^3.$$

Finalmente, el teorema 8.31 nos da que $\pi_1(\mathcal{C}, v) \cong \pi_1(X^2, v) \cong \mathbb{Z}^3$. ■

La técnica que acabamos de emplear puede usarse también para calcular el grupo fundamental de la esfera homológica de Poincaré:

El grupo fundamental de la esfera homológica de Poincaré Sea ahora \mathcal{C} la esfera homológica de Poincaré, es decir, la variedad tridimensional que resulta de identificar las caras opuestas de un dodecaedro tal y como detallamos al final de la sección 3.4. Se trata de un complejo celular cuyo 0-esqueleto X^0 consta de 5 vértices y cuyo 1-esqueleto X^1 contiene las 10 aristas que unen los 10 pares posibles de vértices.

En términos de la figura de la página 138, tomamos como base de los grupos fundamentales el vértice p (que, como cualquier otro, está en todas las aristas y en todas las caras) y consideramos el árbol maximal en X^1 formado por las aristas $a_1 = pq$, $a_8 = pr$, $a_6 = ps$ y $a_5 = pt$. Al identificar este árbol a un punto obtenemos una rosa de 6 pétalos, correspondientes a las aristas restantes $a_2, a_3, a_4, a_7, a_9, a_{10}$. El teorema 8.28 nos da que su grupo fundamental, es libre y está generado por clases de dichas aristas y, por 3.8, el grupo $\pi_1(X^2, p)$ también es libre de rango 6. Más precisamente, una base la forman los bucles que se forman conectando los extremos de las seis aristas indicadas a través del árbol, es decir, las clases

$$\begin{aligned} a &= [a_1 a_2 a_8^{-1}], & b &= [a_8 a_3 a_6^{-1}], & c &= [a_6 a_4 a_5^{-1}], \\ d &= [a_1 a_7 a_5^{-1}], & e &= [a_1 a_9 a_6^{-1}], & f &= [a_8 a_{10} a_5^{-1}]. \end{aligned}$$

El 2-esqueleto X^2 se forma adjuntando 6 caras a X^1 a través de aplicaciones continuas que envían S^1 a los bucles

$$\begin{aligned} (C_0) & a_1 a_2 a_3 a_4 a_5, & (C_1) & a_5 a_{10}^{-1} a_2^{-1} a_9 a_6^{-1}, & (C_2) & a_6 a_3^{-1} a_{10} a_7^{-1} a_1^{-1}, \\ (C_3) & a_8 a_2^{-1} a_7 a_4^{-1} a_6^{-1}, & (C_4) & a_5 a_7^{-1} a_9 a_3^{-1} a_8^{-1}, & (C_5) & a_8 a_{10} a_4^{-1} a_9^{-1} a_1^{-1}. \end{aligned}$$

(Convenimos en que a_i es la clase de un arco que une sus extremos en orden alfabético creciente, de modo que, por ejemplo, a_2 es la clase del arco que va de q a r y no al revés).

En términos de la base de $\pi_1(X^1, p)$ que hemos fijado, las clases de estos bucles son, respectivamente,

$$abc, \quad f^{-1} a^{-1} e, \quad b^{-1} f d^{-1}, \quad a^{-1} d c^{-1}, \quad d^{-1} e b^{-1}, \quad f c^{-1} e^{-1}.$$

Según los teoremas 8.30 y 8.31 tenemos que $\pi_1(\mathcal{C}, p) \cong \pi_1(X^2, p)$ es el grupo presentado por los generadores a, b, c, d, e, f con las relaciones

$$abc = f^{-1} a^{-1} e = b^{-1} f d^{-1} = a^{-1} d c^{-1} = d^{-1} e b^{-1} = f c^{-1} e^{-1} = 1.$$

Las relaciones cuarta y sexta nos dan que $d = ac$ y $e = f c^{-1}$, lo que nos permite eliminar estos generadores de la presentación, y el resultado es que

$$\pi_1(\mathcal{C}, p) \cong \langle a, b, c, f \mid abc = f^{-1} a^{-1} f c^{-1} = b^{-1} f c^{-1} a^{-1} = c^{-1} a^{-1} f c^{-1} b^{-1} = 1 \rangle.$$

Ahora despejamos $c = b^{-1} a^{-1}$, con lo que

$$\pi_1(\mathcal{C}, p) \cong \langle a, b, f \mid f^{-1} a^{-1} f a b = b^{-1} f a b a^{-1} = a b a^{-1} f a = 1 \rangle.$$

En la última relación despejamos $f = ab^{-1}a^{-2}$, con lo que llegamos a

$$\pi_1(\mathcal{C}, p) \cong \langle a, b \mid a^2ba^{-1}b^{-1}a^{-1}b = b^{-1}ab^{-1}a^{-1}ba^{-1} = 1 \rangle.$$

Ahora conviene observar que si añadimos la relación $ab = ba$, las relaciones se reducen a $a = b = 1$, lo que significa que $\pi_1(\mathcal{C}, p)/\pi_1(\mathcal{C}, p)' = 1$.

Para obtener una presentación más manejable del grupo fundamental hacemos el cambio de variables

$$\sigma = a, \quad \tau = ab^{-1},$$

cuyo inverso es $a = \sigma$, $b = \tau^{-1}\sigma$, lo que nos da la expresión

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathcal{C}, p) &\cong \langle \sigma, \tau \mid \sigma^2\tau^{-1}\sigma^{-1}\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}\sigma = \sigma^{-1}\tau^2\sigma^{-1}\tau^{-1} = 1 \rangle \\ &= \langle \sigma, \tau \mid \sigma^3 = (\tau\sigma)\tau^{-1}\sigma\tau, \tau\sigma = \sigma^{-1}\tau^2 \rangle. \end{aligned}$$

Si sustituimos la segunda relación en la primera obtenemos $\sigma^4 = \tau\sigma\tau$, y con ésta y la segunda se puede recuperar la primera, luego

$$\pi_1(\mathcal{C}, p) \cong \langle \sigma, \tau \mid \sigma^4 = \tau\sigma\tau, \sigma\tau\sigma = \tau^2 \rangle = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^5 = \tau^3 = (\sigma\tau)^2 \rangle.$$

En la sección [TG 3.3] se demuestra que esta presentación corresponde al grupo $LE(2, 5)$, cuyo orden es 120. De hecho, en la prueba se ve que σ tiene orden 10, τ tiene orden 4, y el subgrupo generado por $\sigma^5\tau^3 = (\sigma\tau)^2$ es un subgrupo normal de orden 2 contenido en el centro del grupo y cuyo cociente es isomorfo a A_5 (de donde se sigue que dicho subgrupo es necesariamente el centro del grupo, y aquí hemos obtenido que su derivado es todo el grupo). ■

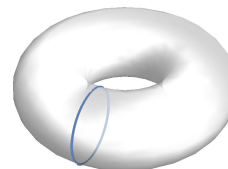
8.5 El grupo de los nudos toroidales

En la sección 2.7 introdujimos los conceptos básicos de la teoría de nudos. Ahora añadimos uno más definiendo el *grupo* de un nudo $S \subset \mathbb{R}^3$ como el grupo fundamental de $\mathbb{R}^3 \setminus S$, que claramente es un invariante respecto de la equivalencia de nudos. Por ejemplo, es fácil calcular el grupo del nudo trivial:

Teorema 8.35 *Si identificamos $S^1 = \{0\} \times S^1 \subset \mathbb{R}^3$, entonces $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1) \cong \mathbb{Z}$.*

DEMOSTRACIÓN: Aplicamos el teorema de van Kampen tomando como U un toro sólido abierto que tenga a S^1 en su frontera como indica la figura, y $V = \mathbb{R}^3 \setminus (\{0\} \times B^2)$.

Entonces $U \cong S^1 \times B_1(0)$, luego $\pi_1(U) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, y es claro que un generador es cualquier bucle que dé una vuelta al toro atravesando S^1 .



Por otra parte, V es simplemente conexo, pues tiene a S^2 como retracts por deformación (la retracción es $x \mapsto 2x/\|x\|$, con el 2 para llegar a la esfera de radio 2, que está contenida en V).

En tercer lugar, $U \cap V$ es claramente homeomorfo a $I \times B_1(0)$, que es contractible. Por consiguiente, $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1) \cong \mathbb{Z}$, y un generador es cualquier bucle que atraviese una vez la circunferencia. ■

Por lo tanto, una condición necesaria para que un nudo pueda ser trivial es que su grupo sea isomorfo a \mathbb{Z} . Vamos a calcular los grupos de los nudos toroidales y comprobaremos que no son triviales salvo en el caso del de tipo $(1, 1)$, que ya sabemos que es, ciertamente, el nudo trivial.

Conviene observar que en el cálculo de grupos de nudos podemos sustituir \mathbb{R}^3 por S^3 , en virtud de la consecuencia siguiente del teorema de van Kampen:

Teorema 8.36 *Si $n \geq 3$ y $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto y $\mathbb{R}^n \setminus K$ es conexo, entonces la inclusión $i : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$ induce un isomorfismo $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus K) \cong \pi_1(S^n \setminus K)$.*

DEMOSTRACIÓN: Identificamos S^n con la compactificación de Alexandroff de \mathbb{R}^n , tomamos R tal que $K \subset \overline{B_R(0)}$ y aplicamos el teorema de van Kampen tomando $U = \mathbb{R}^n \setminus K$ y $V = S^n \setminus \overline{B_R(0)}$. Así $U \cap V = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R(0)}$ es homotópico a S^{n-1} , luego $\pi_1(U \cap V) = 1$, al igual que $\pi_1(S^n \setminus \overline{B_R(0)})$, pues es un espacio homeomorfo a una bola abierta en \mathbb{R}^n . La conclusión es inmediata. ■

Por ejemplo, si quisiéramos ver los nudos como subespacios homeomorfos a toros sólidos, tendríamos que el grupo del nudo trivial $T \subset \mathbb{R}^3$ seguiría siendo $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus T) \cong \mathbb{Z}$, pues acabamos de ver que es isomorfo a $\pi_1(S^3 \setminus T)$, y al final de la sección 1.1 vimos que $S^3 \setminus T$ es homeomorfo a otro toro sólido $S^1 \times B_0(1)$.

Consideremos ahora el nudo toroidal S de tipo (m, n) , con m y n enteros primos entre sí, es decir, el determinado por la parametrización $\gamma(t) = p(mt, nt)$, donde $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la parametrización usual de un toro $T \subset \mathbb{R}^3$ (véase la página 48), entendiendo que en $p(s, t)$ las curvas con t constante lo recorren longitudinalmente (es decir, dan vueltas en torno a su eje de rotación) y las curvas con s constante lo recorren transversalmente. Vamos a calcular el grupo de S que, por el teorema anterior es isomorfo a $\pi_1(S^3 \setminus S)$.

La curva $\gamma(t)$ no sólo es continua, sino que de hecho es diferenciable, lo que hace que S sea una subvariedad diferencial de \mathbb{R}^3 . Por [GD 2.20], para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño podemos considerar un entorno tubular U_ϵ de S , es decir, el entorno formado por todos los puntos de \mathbb{R}^3 que distan de S menos que ϵ , que tiene la propiedad de ser difeomorfo a

$$N(S, \epsilon) = \{(p, v) \in S \times \mathbb{R}^3 \mid v \in T_p(S)^\perp, \|v\| < \epsilon\}$$

a través del difeomorfismo $\theta : N(S, \epsilon) \rightarrow U_\epsilon$ dado por $\theta(p, v) = p + v$. Esto significa que U_ϵ es un toro formado por la unión de un disco abierto de radio ϵ con centro en cada punto $p \in S$ y situado en el plano perpendicular al vector tangente a S en p . Es claro que θ biyecta el espacio

$$\bar{N}(S, \epsilon/2) = \{(p, v) \in S \times \mathbb{R}^3 \mid v \in T_p(S)^\perp, \|v\| \leq \epsilon/2\}$$

con el toro sólido $\bar{U}_{\epsilon/2}$ representado en la figura (el tubo que serpentea sobre el toro T), así como que el subespacio $\bar{N}(S, \epsilon/2)_0 =$

$$\{(p, v) \in S \times \mathbb{R}^3 \mid v \in T_p(S)^\perp, 0 < \|v\| \leq \epsilon/2\}$$

se corresponde con $\bar{U}_{\epsilon/2} \setminus S$, mientras que

$$\partial N(S, \epsilon/2) = \{(p, v) \in S \times \mathbb{R}^3 \mid v \in T_p(S)^\perp, \|v\| = \epsilon/2\}$$

se corresponde con el toro bidimensional $\partial U_{\epsilon/2}$.

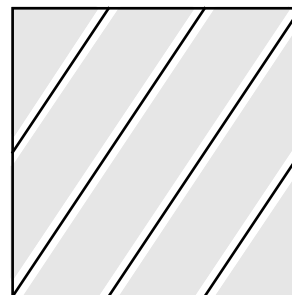
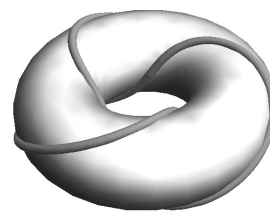
Es fácil probar que $\partial N(S, \epsilon/2)$ es un retracto por deformación fuerte de $\bar{N}(S, \epsilon/2)_0$, lo que se traduce en que $\partial U_{\epsilon/2}$ es un retracto por deformación fuerte de $\bar{U}_{\epsilon/2} \setminus S$ y, extendiendo la retracción (y la homotopía correspondiente) como la identidad en $S^3 \setminus S$, vemos que $S^3 \setminus U_{\epsilon/2}$ es un retracto por deformación de $S^3 \setminus S$. Por lo tanto, $\pi_1(S^3 \setminus S) \cong \pi_1(S^3 \setminus U_{\epsilon/2})$, y basta calcular este segundo grupo.

Al final de la sección 1.1 vimos que S^3 es la unión dos toros sólidos cerrados T_1 y T_2 , ambos con frontera igual al toro bidimensional T . Digamos que T_1 es el toro acotado. Llamamos $A = T_1 \setminus U_{\epsilon/2}$, que es un toro sólido con un surco estrecho excavado en su superficie alrededor de S . Igualmente $B = T_2 \setminus U_{\epsilon/2}$. Así A y B son cerrados en S^3 (o en $S^3 \setminus U_{\epsilon/2}$) tales que $A \cup B = S^3 \setminus U_{\epsilon/2}$ y $A \cap B = T \setminus U_{\epsilon/2}$ es un toro bidimensional al que le hemos recortado una estrecha banda abierta que rodea a S .

Vamos a examinar $A \cap B$ más detalladamente. Si pensamos en T como el cociente que resulta de identificar los lados opuestos de I^2 , la curva S se corresponde con una serie de rectas oblicuas con pendiente n/m . Al eliminar una banda estrecha a su alrededor, lo que queda son varias bandas anchas de modo que el final de cada una se identifica con el principio de otra hasta formar un anillo homeomorfo a $S^1 \times I$ (aquí es esencial que m y n son primos entre sí, pues, en general, si $(m, n) = d$, las bandas forman d anillos disjuntos.

Así pues, $\pi_1(A \cap B) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, y un generador es la clase de un bucle α que dé una vuelta al anillo, lo cual, sobre el toro T , equivale a que corra paralelamente a S en todo momento.

Pretendemos aplicar a A y B la versión para cerrados del teorema de van Kampen 8.25. Para ello necesitamos justificar que $A \cap B$ es un retracto por deformación fuerte de un entorno en A y en B . Para ello consideramos un entorno tubular V_δ del toro T , formado por todos los puntos de \mathbb{R}^3 que resultan de desplazar cada punto de T una distancia menor que δ en dirección perpendicular a la superficie de T . Es fácil ver que T es un retracto por deformación fuerte



de V_δ (esto es una propiedad general de los entornos tubulares). La retracción $r : V_\epsilon \rightarrow T$ proyecta cada punto de V_δ ortogonalmente sobre T . Entonces $r^{-1}[T \setminus S] \cap A$ es un abierto en A que tiene como retracto por deformación fuerte a $T \setminus S$, pero a su vez es fácil ver que $A \cap B$ es un retracto por deformación fuerte de $T \setminus S$ (en la figura anterior, basta trasladar cada punto horizontalmente hasta $A \cap B$).

Así pues, podemos aplicar el teorema de van Kampen y, teniendo en cuenta que $\pi_1(A) \cong \pi_1(B) \cong \mathbb{Z}$ (pues A y B son toros sólidos), tenemos que $\pi_1(A \cup B)$ tiene dos generadores, correspondientes a las clases dos bucles que rodeen el toro T_1 longitudinalmente (lo que nos da un generador de $\pi_1(A)$) y transversalmente (lo que nos da un generador de $\pi_1(B)$, pues A y B están “encadenados”, de modo que B pasa por el agujero de A y un bucle de T que recorre A longitudinalmente recorre B transversalmente, y viceversa). Ahora bien, estos generadores satisfacen una relación que debemos determinar, correspondiente a que las imágenes del generador $[\alpha]$ de $\pi_1(A \cap B)$ en $\pi_1(A)$ y en $\pi_1(B)$ dan lugar al mismo elemento de $\pi_1(A \cup B)$.

No es difícil comprobar que A y B son retractos por deformación fuertes de los toros T_1 y T_2 , respectivamente. De hecho, son homeomorfos, pero para nuestros fines basta con tener en cuenta lo primero, pues nos así nos basta con expresar la clase del bucle α en términos de los generadores de $\pi_1(T_1)$ y $\pi_1(T_2)$.

La parametrización p del toro que estamos considerando se puede factorizar como

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\pi} T_0 \xrightarrow{\bar{p}} T,$$

donde $T_0 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$, π es la proyección en el cociente y \bar{p} es el homeomorfismo que p induce sobre T_0 . Si llamamos T'_0 al cociente que resulta de identificar los lados opuestos de I^2 , la inclusión $I^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ induce también un homeomorfismo $T'_0 \rightarrow T_0$ y, por último, el homeomorfismo $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ nos da un homeomorfismo $T_0 \cong S^1 \times S^1$ dado por $([x], [y]) \mapsto (\cos 2\pi x, \text{sen } 2\pi x, \cos 2\pi y, \text{sen } 2\pi y)$.

En estos términos, el bucle γ que recorre S es la imagen por \bar{p} del bucle en T_0 dado por $\tilde{\gamma}(t) = ([mt], [nt])$, mientras que α se corresponde con el bucle trasladado $\tilde{\alpha}(t) = ([mt + 1/(2n)], [nt])$, que a su vez se corresponde con el bucle

$$\tilde{\alpha}'(t) = (\cos(2\pi(mt + 1/(2n))), \text{sen}(2\pi(mt + 1/(2n))), \cos 2n\pi t, \text{sen } 2n\pi t)$$

en $S^1 \times S^1$. Recordemos que los bucles con la primera coordenada constante corresponden a los bucles transversales en T_1 , por lo que el homeomorfismo $S^1 \times S^1 \rightarrow T$ se extiende de forma natural a un homeomorfismo $S^1 \times B^2 \rightarrow T_1$, de modo que α como bucle en T_1 se corresponde con $\tilde{\alpha}'$ como bucle en $S^1 \times B^2$, que a su vez es homotópico a

$$\tilde{\alpha}'_0(t) = (\cos(2m\pi t + \pi/n), \text{sen}(2m\pi t + \pi/n), 1, 0).$$

Por otra parte, un generador de $\pi_1(T_1)$ con el mismo punto de partida que $\tilde{\alpha}'$ es

$$a_0(t) = (\cos(2\pi t + \pi/n), \text{sen}(2\pi t + \pi/n), 1, 0).$$

Como el índice de $\tilde{\alpha}'_0$ respecto de $(0, 0)$ es claramente m y la clase de homotopía de un bucle en S^1 está determinada por su índice, concluimos que $[\tilde{\alpha}'_0] = [a_0]^m$. El bucle a_0 se corresponde en T_1 con un bucle a que da una vuelta longitudinalmente y, a través de los isomorfismos correspondientes entre los grupos fundamentales, tenemos que $[\alpha] = [a]^m$.

Si ahora consideramos a α como bucle en T_2 , la situación es análoga, con la única diferencia de que es la primera componente de $S^1 \times S^1$ la que corresponde a los bucles transversales en T_2 y que hay que sustituir por B^2 , por lo que si b es un bucle con el mismo origen que α que da una vuelta longitudinal a T_2 (es decir, que pasa por el agujero de T_1 o, lo que es lo mismo, que da una vuelta transversal a T) llegamos a que $[\alpha] = [b]^n$ en $\pi_1(T_2)$. En definitiva, hemos demostrado lo siguiente:

Teorema 8.37 *Si m, n son enteros primos entre sí y $S_{m,n}$ es el nudo toroidal de tipo (m, n) , entonces*

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S_{m,n}) \cong \langle a, b \mid a^m = b^n \rangle.$$

Una base del grupo de $S_{m,n}$ la forman las clases de un bucle a que recorra longitudinalmente el toro rodeado por $S_{m,n}$ y la de un bucle b que lo rodee transversalmente.

Llamemos $G_{m,n} = \langle a, b \mid a^m = a^n \rangle$. Si $m = 1$ o $n = 1$ es claro que $G_{m,n} \cong \mathbb{Z}$ y, por otra parte, es fácil ver que el nudo $S_{m,n}$ es trivial. El teorema siguiente prueba que, salvo estos casos triviales y que $G_{m,n} = G_{n,m}$, los grupos $G_{m,n}$ no son isomorfos entre sí, por lo que los nudos correspondientes $S_{m,n}$ no son equivalentes dos a dos.

Teorema 8.38 *Si $1 < m \leq n$ son números naturales cualesquiera, los grupos*

$$G_{m,n} = \langle a, b \mid a^m = a^n \rangle$$

son no isomorfos entre sí dos a dos.

DEMOSTRACIÓN: Sea $c = a^m = b^n$, de modo que c conmuta con a y con b , luego está en el centro de $G_{m,n}$ y el subgrupo $N = \langle c \rangle$ es normal. Entonces

$$G_{m,n}/N \cong \langle a, b \mid a^m = b^n = 1 \rangle = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \amalg (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

Es fácil ver que cada elemento no trivial de este grupo se expresa de forma única como $w = a^{u_1} b^{v_1} \cdots a^{u_k} b^{v_k}$, donde $0 \leq u_i < m$, $0 \leq v_i < n$ y todos los exponentes son no nulos salvo a lo sumo u_1 o v_k (así permitimos que el primer y el último factor puedan ser a o b indistintamente).

Usando esto es fácil ver que el centro de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \amalg (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ es trivial, de donde se sigue inmediatamente que $N = Z(G_{m,n})$, por lo que en realidad tenemos que

$$G_{m,n}/Z(G_{m,n}) \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \amalg (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

Veamos ahora que n es el mayor orden de un elemento de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \amalg (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ de orden finito, con lo que podremos afirmar que si $G_{m,n} \cong G_{m',n'}$, necesariamente $n = n'$.

Usamos de nuevo que todo elemento no trivial del producto libre es de la forma $w = a^{u_1} b^{v_1} \dots a^{u_k} b^{v_k}$ en las condiciones indicadas anteriormente, y razonamos por inducción sobre el número de factores. Si es simplemente $w = a$ o $w = b$, tenemos que el orden de w es m o n , luego $\leq n$ en cualquier caso. Si vale para un número menor de factores, observamos que un elemento cuya expresión en términos de los generadores empiece por a y termine por b o viceversa tiene necesariamente orden infinito, luego tiene que ser $w = a^u w' a^{u'}$ o bien $w = b^v w' b^{v'}$. Consideramos el primer caso, pues el segundo es análogo. Es fácil ver que para que w tenga orden finito tiene que ser $a^u = a^{-u'}$, y entonces w' es conjugado de w , luego tiene el mismo orden finito, y por hipótesis de inducción es $\leq n$.

Finalmente observamos que

$$(G_{m,n}/Z(G_{m,n})) / (G_{m,n}/Z(G_{m,n}))' \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}),$$

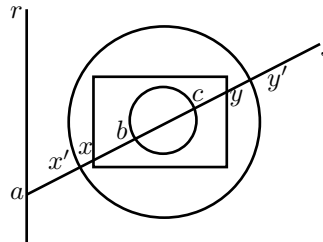
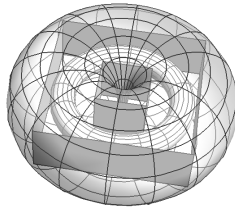
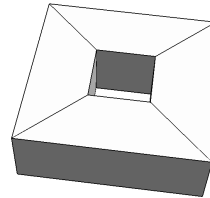
pues el cociente por el subgrupo derivado se obtiene sin más que añadir la relación $ab = ba$. Esto implica que si $G_{m,n} \cong G_{m',n'}$, entonces $mn = m'n'$ y, como ya hemos visto que tiene que ser $n = n'$, ahora podemos concluir que también $m = m'$. ■

Ejercicio: Probar que si $(m, n) = 1$, entonces $G_{m,n}/G'_{m,n} \cong \mathbb{Z}$.

8.6 La esfera cornuda de Alexander

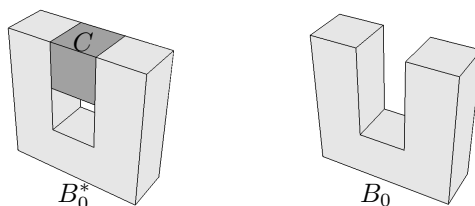
En esta sección vamos a construir la conocida como esfera cornuda de Alexander, que es un subespacio $S \subset \mathbb{R}^3$ homeomorfo a S^2 , pero con la propiedad de que una de las componentes conexas de $\mathbb{R}^3 \setminus S$ (o de $S^3 \setminus S$) no es simplemente conexa, lo que implica que S no es ambientalmente homeomorfa a S^2 .

Vamos a partir de un toro sólido, pero por comodidad para hacer los cálculos tomaremos un toro “anguloso” como el que muestra la figura. Es posible construir un homeomorfismo de \mathbb{R}^3 en sí mismo que transforme uno en el otro, por lo que los complementarios también son homeomorfos. Para ello basta situar un toro anguloso entre dos toros normales, como muestra la figura de la izquierda. La sección de estos toros con un semiplano cuya frontera sea el eje común r de los tres toros tiene la forma que se indica en la figura de la derecha:

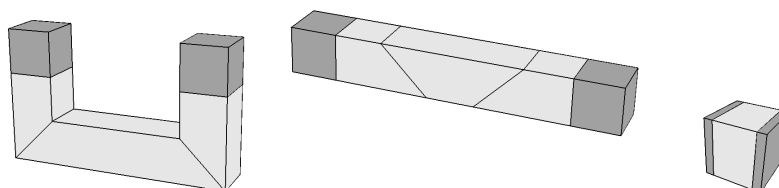


El homeomorfismo que necesitamos es el que, sobre cada semirrecta s que una un punto a de r con el centro común de las secciones circulares de los toros, actúa dejando invariantes a a y a los puntos del diámetro bc , mientras que sobre el segmento ab y la semirrecta de origen c es la única aplicación afín que transforma x en x' e y en y' .

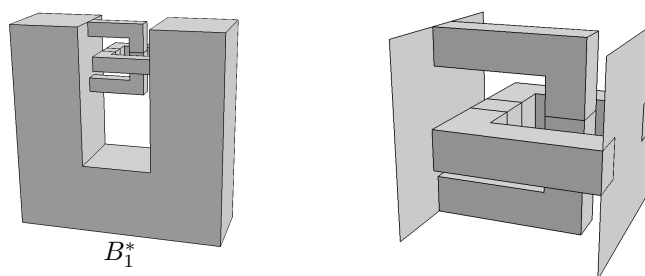
Partimos pues del toro sólido al que llamaremos B_0^* , formado por 8 cubos de arista unitaria. Elegimos uno de los cubos que no está en una esquina, digamos C , y lo eliminamos⁹ para formar el espacio compacto B_0 .



Es claro que B_0 es homeomorfo a una bola cerrada, pero vamos a esbozar cómo se construye un homeomorfismo porque usaremos varias veces la misma técnica: en primer lugar podemos estirar el cubo central hasta triplicar su longitud, luego contraemos la pieza central como muestra la figura (véase el ejemplo de la página 6), mientras que las dos verticales simplemente las giramos, y así obtenemos un prisma que podemos contraer hasta un cubo, el cual es claramente homeomorfo a una bola cerrada.

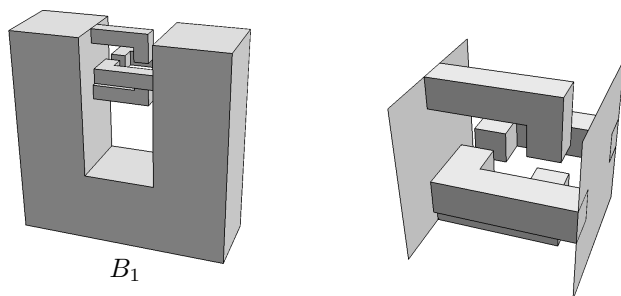


Ahora, en B_0^* “esculpimos” dos asas dentro de C , con lo que obtenemos el espacio B_1^* que muestra la figura:



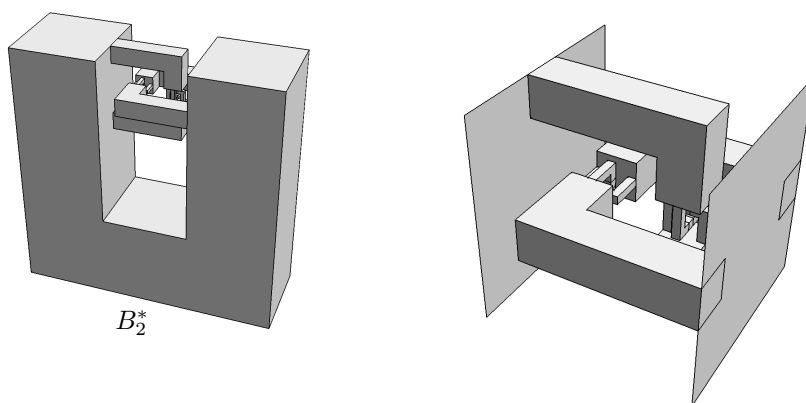
⁹Salvo que indiquemos lo contrario, cuando hablemos de “cubos” nos referiremos a cubos cerrados, por lo que, cuando decimos que B_0 se obtiene “eliminando” C de B_0^* no hay que interpretar literalmente que $B_0 = B_0^* \setminus C$, ya que hay dos caras de C que siguen formando parte de B_0 .

Cada asa está formada por 11 cubos de arista $1/5$. Llamamos C_0 y C_1 al cubo central de cada una de ellas. Si eliminamos estos dos cubos obtenemos un espacio B_1 , que puede verse también como el que resulta de añadir a B_0 dos pares de “cuernos” contenidos en C :



B_1

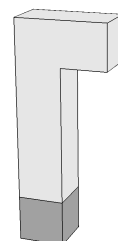
A su vez, llamamos B_2^* al espacio que resulta de “esculpir” un nuevo par de asas en cada uno de los cubos C_0 y C_1 , las cuales determinan a su vez cuatro nuevos cubos de arista $1/25$, digamos $C_{00}, C_{01} \subset C_0$ y $C_{10}, C_{11} \subset C_1$.



B_2^*

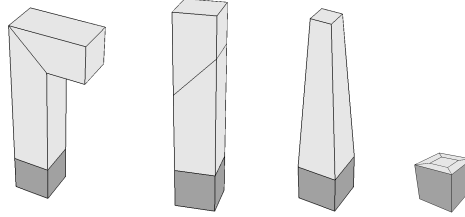
Si eliminamos estos cubos de las asas, obtenemos el espacio B_2 , que puede verse como el resultado de añadir a B_1 , dentro de C_0 y C_1 , cuatro nuevos pares de cuernos. Procediendo de este modo obtenemos una sucesión de espacios compactos $B_n \subset B_n^* \subset \mathbb{R}^3$, de modo que B_n es creciente y B_n^* es decreciente. Además, tenemos determinada una sucesión $\{C_s\}_s$, donde s varía en las sucesiones finitas de ceros y unos, de cubos cerrados de arista $1/5^n$, (n es la longitud de s). Además, los cubos $C_{s,0}$ y $C_{s,1}$ son disjuntos y están contenidos en C_s . Por lo tanto, los 2^n cubos C_s para las sucesiones s de longitud n son disjuntos dos a dos.

La esfera cornuda de Alexander se obtiene a partir de estos espacios mediante un proceso de “paso al límite” que tenemos que precisar. Para ello empezamos estudiando un “cuerno” aislado. En principio, los cuernos están formados por 5 cubos, pero vamos a considerar uno más a modo de “raíz”. Veamos que el cuerno de la figura (formado por 5 cubos más la “raíz”) es homeomorfo a la raíz



a través de un homeomorfismo que deja fijas las cinco caras de la raíz distintas de la que comparte con el resto del cuerno.

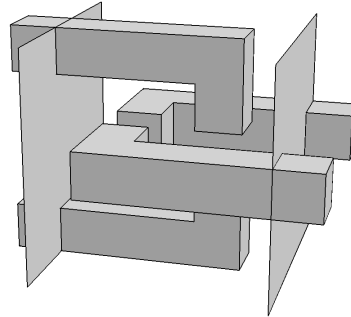
En primer lugar eliminamos el ángulo por el mismo procedimiento que hemos aplicado antes a B_0 : primero partimos la L, contraemos la pieza larga mediante una aplicación afín en cada segmento vertical que deje invariante la raíz y giramos la pieza corta:



Luego reducimos el cuadrado superior del prisma resultante y de nuevo contraemos la pirámide truncada verticalmente, de modo que las cinco caras de la frontera de la raíz permanecen inalteradas en todo momento.

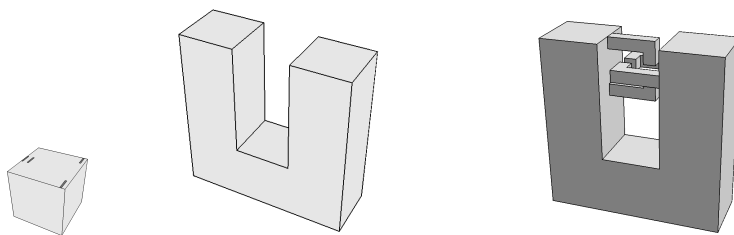
Con esto tenemos ya todo el material necesario para construir la esfera conada. Llamemos $B = I^3$ al cubo unitario en \mathbb{R}^3 y consideremos el homeomorfismo $f_0 : B \rightarrow B_0$ que hemos construido.

Ahora consideramos los cuatro cuernos que se le añaden a B_0 para formar B_1 prolongados con sendos cubos a modo de raíces $R_{00}, R_{01}, R_{10}, R_{11}$:



Consideraremos a cada cubo R_{ij} como abierto en B_0 , de modo que, de las seis caras de su frontera, sólo contiene una, la que está en la frontera de B_0 y que sirve de base al cuerno correspondiente de B_1 . Así, la frontera de R_{ij} en B_0 está formada por las cinco caras restantes.

Hemos visto que existen homeomorfismos de las cuatro raíces en los cuatro cuernos que fijan los puntos de las fronteras de las raíces. Por lo tanto, podemos formar un homeomorfismo $f_{0,1} : B_0 \rightarrow B_1$ que extienda a los cuatro homeomorfismos y que deje invariantes a todos los puntos exteriores a las cuatro raíces. Llamamos $f_1 : f_0 \circ f_{0,1} : B \rightarrow B_1$.



Así, f_0 hace brotar un par de cuernos a B y f_{01} hace brotar dos pares de cuernos más. Consideremos ahora el abierto (en B)

$$\{x \in B \mid f_0(x) \neq f_1(x)\} = f_0^{-1}[\{x \in B_0 \mid f_{01}(x) \neq x\}] = \bigcup_{ij} f_0^{-1}[R_{ij}].$$

Teniendo en cuenta la construcción de B_0 , es fácil ver que $A_{ij} = f_0^{-1}[R_{ij}]$ es un prisma abierto (en B , de modo que sólo contiene una de las caras de su frontera, contenida en la frontera de B) de aristas de longitudes $1/5$, $1/5$ y $1/35$. Además los cuatro abiertos A_{ij} tienen clausuras disjuntas.

Ahora repetimos el proceso: llamamos $f_{12} : B_1 \rightarrow B_2$ al homeomorfismo que expande los ocho nuevos cuernos de B_2 a partir de sus raíces respectivas R_{ijk} y que deja invariantes a todos los puntos exteriores a dichas raíces. Llamamos $f_2 = f_0 \circ f_{01} \circ f_{12} = f_1 \circ f_{12} : B \rightarrow B_2$. Consideramos a su vez el abierto en B

$$\{x \in B \mid f_1(x) \neq f_2(x)\} = f_1^{-1}[\{x \in B_1 \mid f_{12}(x) \neq x\}] = \bigcup_{ijk} f_1^{-1}[R_{ijk}].$$

Cada cubo R_{ijk} se corresponde a través de f_{01}^{-1} con un poliedro contenido en R_{ij} que contiene a una sola de sus caras, la contenida en R_{ij} . No es exactamente un cubo o un prisma por el proceso de construcción de f_{01} , pero está contenido en un cubo de arista $1/25$. A través de f_0^{-1} se corresponde con un poliedro A_{ijk} contenido en A_{ij} y también en un prisma de aristas de longitud $1/25$, $1/25$ y $1/(7 \cdot 5^2)$, es decir, la quinta parte de las aristas de A_{ij} . Concluimos que el abierto $\{x \in B \mid f_1(x) \neq f_2(x)\}$ es la unión de ocho abiertos $A_{ijk} = f_1^{-1}[R_{ijk}]$ de clausuras disjuntas y de diámetro $d(A_{ijk}) \leq d(A_{ij})/5$.

Es claro que este proceso puede continuarse indefinidamente. A continuación describimos la situación general:

- Tenemos una sucesión de homeomorfismos $f_n : B \rightarrow B_n$.
- El conjunto $A_n = \{x \in B \mid f_n(x) \neq f_{n+1}(x)\}$ es abierto en B y se descompone en unión de 2^{n+2} abiertos A_s con clausuras disjuntas dos a dos, donde s recorre las sucesiones de ceros y unos de longitud $n+2$, y de modo que $A_{s,0}, A_{s,1} \subset A_s$. Además, los diámetros decrecen en la proporción $d(A_{s,i}) \leq d(A_s)/5$.
- Más concretamente, si s es una sucesión de ceros y unos de longitud $n+2$, los abiertos $f_n[A_s] = R_s$ son cubos abiertos (en B_n) situados en las bases de los 2^{n+2} cuernos que se le añaden a B_n para formar B_{n+1} .

- También tenemos una sucesión $\{C_s\}_s$ de cubos cerrados en \mathbb{R}^3 , donde s recorre las sucesiones finitas de ceros y unos (incluyendo la sucesión vacía, a la que corresponde el cubo C). Si s tiene longitud n , entonces C_s tiene arista $1/5^n$. Se cumple que $C_{s,0}, C_{s,1}$ son disjuntos y están contenidos en el interior de C_s .
- Si s es una sucesión de longitud n , entonces C_s tiene dos caras en común con B_n , mientras que $C_{s,i}$ es disjunto de B_n .
- Si s es una sucesión de longitud $n+2$, cada cubo R_s está pegado al cubo $C_{s|_n}$, pero fuera de él (más precisamente, con su cara interior contenida en él), mientras que $R_{s,i}$ sí que está contenido en (el interior de) $C_{s|_n}$. Equivalentemente, para toda sucesión s de longitud $n+3$, tenemos que $R_s \subset C_{s|_n}$.

Tenemos, pues, una sucesión decreciente de abiertos A_n en B . Llamamos

$$K = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Veamos algunos hechos sobre K :

- Se cumple que $K = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{A}_n$.

En efecto, si $x \in \partial A_n$ (la frontera calculada en B), digamos que, concretamente, $x \in \partial A_s$, donde s es una sucesión de longitud $n+2$, tenemos que $f_n(x) \in \partial R_s$, luego $f_{n+1}(x) = f_n(x) \notin \overline{R}_{s,0} \cup \overline{R}_{s,1}$, ya que estos dos cubos están en el interior de $C_{s|_n}$, que es disjunto de B_n , ni tampoco puede estar en otro cubo $\overline{R}_{t,i}$, con $t \neq s$, pues son disjuntos con \overline{R}_s . Por lo tanto $x \notin \overline{A}_{n+1}$. Así pues, si un punto pertenece a la intersección de todas las clausuras, no puede estar en ninguna frontera, luego está en K .

- Para cada sucesión infinita s de ceros y unos, existe un único punto x_s tal que $\bigcap_{n=2}^{\infty} \overline{A}_{s|_n} = \{x_s\}$, y la aplicación $s \mapsto x_s$ biyecta¹⁰ las sucesiones con los puntos de K .

En efecto, $\{\overline{A}_{s|_n}\}_{n=2}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de cerrados no vacíos, luego por compacidad la intersección contiene un punto x_s , que tiene que ser único porque los diámetros de los conjuntos $\overline{A}_{s|_n}$ tienden a 0. Obviamente $x_s \in K$ y todo punto de K es de esta forma, porque tiene que pertenecer a la intersección de una familia $\{\overline{A}_{s|_n}\}_{n=2}^{\infty}$, para cierta s , luego tiene que ser x_s . También es claro que si $s \neq t$ entonces $x_s \neq x_t$, pues tiene que haber un n para el cual $s|_n \neq t|_n$ y entonces $\overline{A}_{s|_n} \cap \overline{A}_{t|_n} = \emptyset$.

- $K \subset \partial B$.

Esto se debe a que los diámetros de los conjuntos $\overline{A}_{s|_n}$ tienden a 0 y contienen puntos de ∂B , luego necesariamente $x_s \in \partial B$.

¹⁰Aunque no lo vamos a necesitar, a partir de aquí es fácil ver que K es homeomorfo al conjunto de Cantor.

Veamos ahora que las funciones $f_n : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ forman una sucesión uniformemente de Cauchy.

Para ello tomamos $\epsilon > 0$ y elegimos un natural n_0 tal que los cubos C_s para sucesiones s de longitud $n \geq n_0 \geq 3$ (que tienen arista $1/5^n$) tengan diámetro menor que ϵ .

Si $n \geq m \geq n_0$, dado cualquier punto $x \in B$, o bien $x \in B \setminus A_{n_0+1}$, en cuyo caso $f_m(x) = f_n(x)$, o bien $x \in A_{n_0+1}$, digamos $x \in A_s$, donde s tiene longitud $n_0 + 3$, en cuyo caso $f_m(x), f_n(x) \in R_s \subset C_{s|_{n_0}}$, con lo que $\|f_n(x) - f_m(x)\| < \epsilon$.

Como el espacio $C(B, \mathbb{R}^3)$ de las funciones continuas de B en \mathbb{R}^3 es completo para la topología de la convergencia uniforme [An 3.54], concluimos que la sucesión $\{f_n\}_{n=0}^\infty$ converge uniformemente a una función continua $f : B \rightarrow \mathbb{R}^3$.

He aquí algunos resultados sobre la función f . El primero es la continuidad de f que acabamos de probar junto con el hecho de que la convergencia uniforme implica la convergencia puntual:

- $f : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ es continua y, para cada $x \in B$, $f(x) = \lim_n f_n(x)$.
- Si $x \in B \setminus A_n$, entonces $f(x) = f_n(x) \in B_n$.
En efecto, en tal caso $x \in B \setminus A_m$ para todo $m \geq n$, luego $f_m(x) = f_{m+1}(x)$ para todo $m \geq n$, luego $f(x) = f_n(x)$.
- Si s es una sucesión infinita de ceros y unos, de modo que x_s es un punto arbitrario de K , entonces $\bigcap_n C_{s|_n} = \{f(x_s)\}$.
En efecto, como $x \in A_{s|_{n+3}}$, se cumple que $f_n(x) \in R_{s|_{n+3}} \subset C_{s|_n}$ y, como los diámetros de los cubos tienden a 0, se trata del único punto de la intersección.
- $f[K] \cap B_n = \emptyset$.
Esto se debe a que $f(x_s) \in C_{s|_{n+1}}$, y este cubo es disjunto de B_n , luego $f(x_s) \notin B_n$.
- $f : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva.
Si $x, y \in B$ cumplen que $f(x) = f(y)$, no puede suceder que $x \in B \setminus K$, $y \in K$ (o viceversa) pues en tal caso $f(x)$ estaría en un B_n y $f(y)$ no, (o viceversa).
Si $x, y \in B \setminus K$, entonces existe un n_0 tal que $f_{n_0}(x) = f(x) = f(y) = f_{n_0}(y)$, pero f_{n_0} es biyectiva, luego $x = y$.
Finalmente, si $x, y \in K$, digamos $x = x_s$, $y = y_t$, entonces $f(x) \in C_{s|_n}$, $f(y) \in C_{t|_n}$, pero los cubos son iguales o disjuntos, luego tiene que ser $s|_n = t|_n$ para todo n , luego $s = t$, luego $x = y$.

Llamaremos $\tilde{B} = f[B]$, $\tilde{S} = f[\partial B]$, $\tilde{K} = f[K]$ y $\tilde{U} = f[U]$, donde U es el interior de B .

- Por compacidad $f : B \rightarrow \tilde{B}$ es un homeomorfismo, luego también lo son sus restricciones $f|_{\partial B} : \partial B \rightarrow \tilde{S}$, $f|_K : K \rightarrow \tilde{K}$ y $f|_U : U \rightarrow \tilde{U}$.
- Por el teorema 1.4 tenemos que U es homeomorfo a una bola abierta y ∂B es homeomorfo a S^2 , luego lo mismo vale para \tilde{U} y \tilde{B} .
- \tilde{U} es el interior de \tilde{B} y \tilde{S} es la frontera de \tilde{B} .

En efecto, por el teorema 2.9 tenemos que \tilde{U} es abierto en \mathbb{R}^3 , luego está contenido en el interior de \tilde{B} , e igualmente f^{-1} transforma el interior de \tilde{B} en un abierto contenido en U , luego de hecho f transforma el interior U de B en el interior de \tilde{B} (que es, por tanto, \tilde{U}), luego también transforma la frontera de B en la frontera de \tilde{B} .

Definición 8.39 La *esfera cornuda de Alexander* es el compacto $\tilde{S} \subset \mathbb{R}^3$.

Acabamos de ver que, ciertamente, es una esfera topológica, en el sentido de que es homeomorfa a S^2 . El hecho de que sea la frontera de \tilde{B} se traduce en que el interior \tilde{U} es abierto y cerrado en $\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{S}$, luego es una componente conexa de $\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{S}$. Puede probarse que $V = \mathbb{R}^3 \setminus \tilde{B}$ es también conexo y, por lo tanto que U y V son las dos únicas componentes conexas de $\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{S}$, pero no merece la pena entrar en ello, porque una consecuencia general del teorema de Jordan-Brouwer 10.10, que demostraremos más adelante.

Así, tenemos una unión disjunta $\mathbb{R}^3 = \tilde{U} \cup \tilde{S} \cup \tilde{V}$, donde \tilde{U} es homeomorfo a una bola abierta, pero vamos a probar que el abierto \tilde{V} (la componente conexa no acotada de $\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{S}$), aunque es conexo, no es simplemente conexo, con lo que en particular no es homeomorfo al complementario en \mathbb{R}^3 de una bola cerrada.

Antes estudiaremos con algo más de detalle los espacios que acabamos de construir.

- Se cumple que

$$\tilde{B} = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \cup \tilde{K}$$

y $\tilde{K} \cap B_n = \emptyset$.

Si $x \in B_n$, entonces $x \in B_{n+1} \setminus \bigcup_s R_s$, donde s recorre las sucesiones de ceros y unos de longitud $n+3$, luego $x_0 = f_{n+1}^{-1}(x) \in B \setminus A_{n+1}$, luego $x = f_{n+1}(x_0) = sf(x_0) \in \tilde{B}$.

Recíprocamente, si $x = f(x_0) \in \tilde{B}$ pero no está en ningún B_n , entonces $x_0 \in K$, pues si $x_0 \in B \setminus A_n$, entonces $f(x_0) = f_n(x_0) \in B_n$, luego $x \in \tilde{K}$. Que $\tilde{K} = f[K]$ es disjunto de cada B_n lo hemos probado antes.

- Más aún, \tilde{K} es la clausura de $\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$.

Basta tener en cuenta que cada punto $f(x) \in \tilde{K}$ es el límite de la sucesión $\{f_n(x)\}_n$, contenida en la unión.

En otras palabras, al unir los compactos B_n el espacio resultante ya no es compacto, pero \tilde{B} es la clausura de dicho espacio, que se obtiene añadiendo los puntos de \tilde{W} (a los que se les llama a veces “las puntas de los cuernos”).

También podemos obtener \tilde{B} a partir de los espacios B_n^* , pues sucede que

$$\tilde{B} = \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n^*.$$

En efecto, por la construcción es claro que

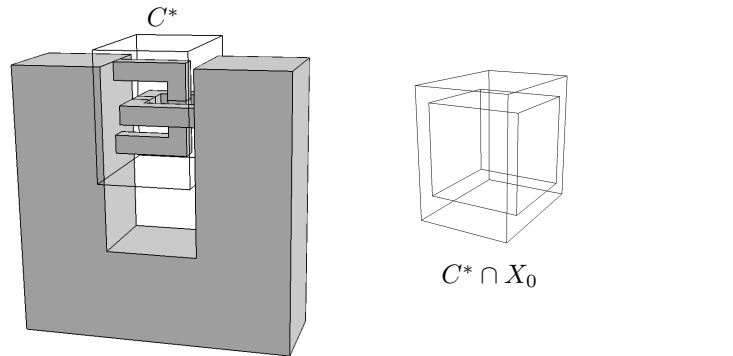
$$\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n^*,$$

luego tomando la clausura en el miembro izquierdo obtenemos una inclusión. Para probar la contraria observamos que si $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n^*$ no está en ningún B_n , necesariamente, para cada n , tiene que estar en uno de los cubos C_s , para cierta sucesión s de longitud n (pues B_n^* es la unión de B_n y estos cubos). Más concretamente, tiene que existir una sucesión infinita s tal que $x \in C_{s|_n}$, para todo n , y esto implica que $x = f(x_s) \in \tilde{K}$.

Llamemos ahora $X_n = \mathbb{R}^3 \setminus S_n^*$, de modo que $\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{B} = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$.

Vamos a calcular $\pi_1(X_n)$. Como X_0 es el complementario de un toro sólido, en la sección anterior hemos visto que $\pi_1(X_0) \cong \mathbb{Z}$, y un generador es la clase de cualquier arco cerrado que dé exactamente una vuelta alrededor del toro.

Para calcular $\pi_1(X_1)$ consideramos el espacio C^* formado por el complementario de las “asas” de B_1^* en un prisma abierto ligeramente mayor que C , de manera que $X_1 = X_0 \cap C^*$ y $C^* \cap X_0$ es un prisma perforado con un agujero cúbico:

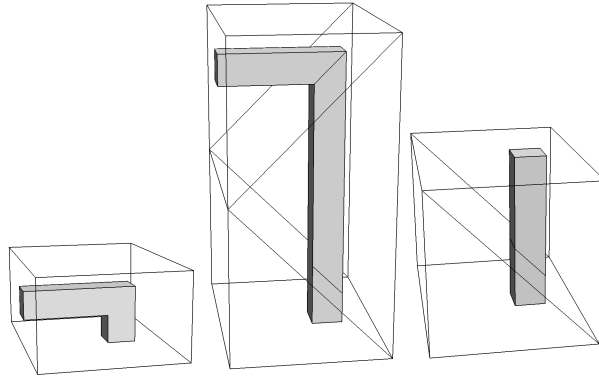


Es claro que $C^* \cap X_0$ es homotópico a un abierto en el plano limitado por un rectángulo y un cuadrado concéntricos, que a su vez es homotópico a una circunferencia, luego $\pi_1(C^* \cap X_0) \cong \mathbb{Z}$, y un generador es la clase de cualquier arco que rodee el agujero. En particular, podemos tomar como representante

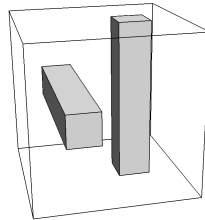
el representante de un generador de $\pi_1(X_0)$. Por consiguiente, la inclusión $i : C^* \cap X_0 \rightarrow X_0$ induce un isomorfismo $i_* : \pi_1(C^* \cap X_0) \rightarrow \pi_1(X_0)$ (pues envía un generador a un generador).

El teorema de van Kampen nos da entonces que, al identificar $\pi_1(X_0)$ y $\pi_1(C^*)$ con subgrupos de $\pi_1(X_1)$, el primero coincide con la intersección de ambos, luego $\pi_1(X_1) = \pi_1(C^*)$. Más precisamente, lo que tenemos es que la inclusión $i : C^* \rightarrow X_1$ induce un isomorfismo entre los grupos fundamentales, a través del cual, el homomorfismo inducido por la inclusión $i : X_0 \rightarrow X_1$ se corresponde con el inducido por $i : X_0 \cap C^* \rightarrow C^*$.

Ahora bien, las asas de C^* se pueden rectificar mediante homeomorfismos exactamente igual que antes rectificamos los cuernos de los espacios B_n . La figura de la izquierda muestra la parte superior de C^* (el interior del prisma más la base inferior menos la L). Es claro que, mediante un homeomorfismo que fije a todos los puntos de la base, podemos transformarla en la figura central y, a su vez, podemos contraer cada segmento vertical que va desde la base inferior hasta el plano oblicuo superior hasta un segmento que una el mismo punto de la base inferior con el correspondiente en el plano oblicuo inferior. El prisma superior se gira y el resultado es un homeomorfismo en el espacio de la derecha.



Como todos los homeomorfismos fijan a la base, se pueden extender al resto de C^* como la identidad. Repitiendo el proceso con las otras tres “patas” de las asas, el resultado es que C^* es homeomorfo a un cubo abierto menos dos tubos como en la figura:



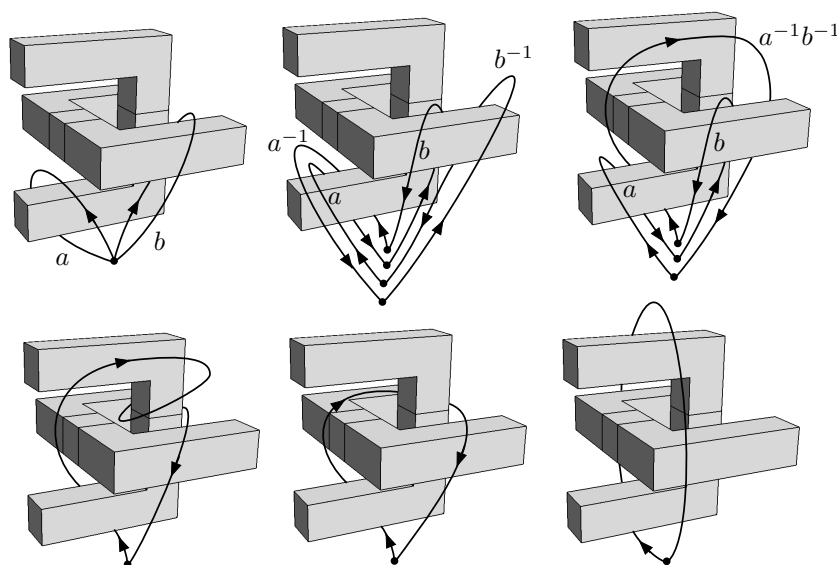
Este cubo puede dividirse en dos prismas abiertos, cada uno de los cuales contenga uno de los tubos y cuya intersección sea otro prisma abierto. El

teorema de van Kampen nos da que $\pi_1(C^*)$ es el producto libre de los grupos fundamentales de los prismas abiertos con un único tubo, pero claramente son homotópicos a un rectángulo en \mathbb{R}^2 con un agujero cuadrado, el cual es homotópico a una circunferencia, luego $\pi_1(C^*)$ es libre de rango 2, y una base está formada por las clases de dos bucles que den exactamente una vuelta a cada asa (pues, a través de los homeomorfismos y homotopías que hemos considerado, se corresponden con generadores de S^1).

Así pues, también $\pi_1(X_1)$ es libre de rango 2 y, para terminar de describir la situación, nos falta describir el homomorfismo $i_* : \pi_1(X_0) \rightarrow \pi_1(X_1)$ que, según hemos visto, se corresponde con $i_* : \pi_1(X_1 \cap C^*) \rightarrow \pi_1(C^*)$.

Observemos que hasta aquí no hemos usado en ningún momento que los pares de asas que construimos se entrelazan. Todo cuando hemos dicho valdría exactamente igual si las asas que añadimos dentro de cada cubo C_s estuvieran contenidas en dos prismas disjuntos, dejando un espacio libre entre ellas. Precisamente, el hecho de que estén entrelazadas determina la inclusión $i_* : \pi_1(X_1 \cap C^*) \rightarrow \pi_1(C^*)$. Es fácil probar que si no lo estuvieran i_* sería el homomorfismo trivial, pues un generador de $\pi_1(X_1 \cap C^*)$ sería homotópico a un punto en C^* .

En cambio, con las asas enlazadas, vamos a probar que si $a, b \in \pi_1(C^*)$ son las clases de dos arcos que dan una vuelta a cada asa y $c \in \pi_1(C^* \cap X_0)$ es un arco que da una vuelta alrededor de C , entonces, eligiendo adecuadamente las orientaciones de a y b , se cumple que $i_*(c) = a^{-1}b^{-1}ab$. Las figuras siguientes describen la homotopía:



En la primera vemos bucles representantes de las clases a y b . La clase $a^{-1}b^{-1}ab$ está representada por el arco que recorre el primer bucle en sentido inverso, luego el segundo también en sentido inverso, luego el primero y luego

el segundo. Ahora bien, aplicando una homotopía que conserve únicamente la posición de punto base, podemos separar los cuatro arcos para que recorran trayectorias distintas y se vean como en la segunda figura (en la cual el arco marcado como a^{-1} no es realmente un representante de la clase a^{-1} , pues ni siquiera es un bucle, sino una ligera deformación de un bucle representante de a^{-1} y lo mismo vale para los otros arcos).

Ahora observamos que el tramo que llega al vértice inferior de los cuatro señalados en la figura pasa por delante de ambas asas, luego podemos levantarlo para que quede como en la tercera figura. Seguidamente deslizamos el arco a siguiendo el asa cuyas puntas señalan hacia la izquierda, y el resultado es el arco que muestra la cuarta figura.

A continuación observamos que la parte superior del arco se puede llevar hacia la izquierda, y resulta el arco de la quinta figura, que claramente es homotópico al de la sexta, que es un generador de $i_*(c)$.

Esto implica que la inclusión $i_* : \pi_1(X_0) \rightarrow \pi_1(X_1)$ es un monomorfismo de grupos, ya que transforma un generador de $\pi_1(X_0)$ en un elemento de orden infinito de $\pi_1(X_1)$, a saber, el conmutador de los elementos de una base.

El mismo procedimiento sirve para calcular todos los grupos fundamentales $\pi_1(X_n)$. Admitiendo como hipótesis de inducción de $\pi_1(X_n)$ es libre de rango 2^n , de modo que una base la forman las clases de arcos que den exactamente una vuelta a cada una de las 2^n asas de B_n^* , podemos considerar el abierto C_n^* formado por la unión disjunta de los 2^n abiertos análogos a C^* situados sobre cada asa, de modo que $\pi_1(C_n^*)$ es libre de rango 2^{n+1} y concluimos como antes que es isomorfo a $\pi_1(X_{n+1})$, así como que cada generador de $\pi_1(X_n)$ se identifica con el conmutador de dos de los generadores de $\pi_1(X_{n+1})$.

En particular vemos que todos los homomorfismos $i_* : \pi_1(X_n) \rightarrow \pi_1(X_m)$, para $n \leq m$, son inyectivos.

Finalmente consideramos los homomorfismos $i_* : \pi_1(X_n) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{B})$. Sucede que son todos inyectivos, pues si la clase de un arco γ tiene imagen nula en $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{B})$, tanto la imagen de γ como la de la homotopía entre γ y un arco constante tienen que estar contenidas en un espacio X_m , para cierto $m \geq n$ pues son compactas, luego γ también tiene imagen trivial en $\pi_1(X_m)$, luego la clase de γ es trivial en $\pi_1(X_n)$. En particular, $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{B}) \neq 1$.

De hecho, el mismo argumento prueba que $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{B})$ es la unión de las imágenes de los grupos $\pi_1(X_n)$, por lo que $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{B})$ tiene un generador numerable que, no obstante, no podemos decir que sea una base, pues los generadores que provienen de X_n satisfacen relaciones con los generadores que provienen de X_{n+1} . De hecho, tenemos que cada generador de $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{B})$ es el conmutador de dos generadores del nivel siguiente, por lo que el subgrupo derivado $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{B})'$, al contener a todos los conmutadores, contiene en particular a todos los generadores, y así

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{B}) / \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{B})' = 1.$$

Esto no sucedería si se tratara de un grupo libre (ya que la abelianización de un grupo libre es el \mathbb{Z} -módulo libre del mismo rango).

En particular hemos probado que $\mathbb{R}^3 \setminus \tilde{B}$ no es simplemente conexo, luego no es homeomorfo al complementario en \mathbb{R}^3 de una bola cerrada.

Vemos así que la componente conexa “patológica” del complementario de la esfera cornuda es la no acotada, pero esto es anecdótico, pues aplicándole la inversión en S^3 respecto de un punto de la componente acotada obtenemos otra esfera con los cuernos “hacia adentro” en la que la componente conexa patológica de su complementario es la acotada. Más aún, es fácil modificar la construcción para obtener una esfera con dos bloques de cuernos, unos “hacia afuera” y otros “hacia adentro”, con lo que ninguna de las dos componentes conexas del complementario resulta ser simplemente conexa.

Capítulo IX

Homología singular

En este capítulo definiremos y comenzaremos el estudio de los grupos de homología singular de un espacio topológico de los que ya hemos mostrado algunos ejemplos en la introducción. El primer paso será estudiar el concepto de “símplice singular”, que generaliza a dimensiones superiores la noción de arco en un espacio topológico. Así como un arco es un segmento deformado, un 2-símplice singular será un triángulo deformado, un 3-símplice singular será un tetraedro deformado, etc. Los grupos de homología de un espacio dependerán del modo en que es posible ensamblar los símlices de cada dimensión para formar ciclos y fronteras.

Los conceptos y resultados algebraicos necesarios para seguir este capítulo están recopilados en la sección 4.2, que el lector deberá ir consultando a medida que vayamos haciendo referencia a los resultados expuestos en ella.

9.1 Símlices afines

Los resultados de esta sección dependen de la estructura afín de \mathbb{R}^n , por lo que pueden formularse literalmente en cualquier espacio afín real de dimensión finita. Recordemos brevemente los conceptos básicos de la geometría afín (particularizados a \mathbb{R}^n):

Una *variedad afín* es un subconjunto de \mathbb{R}^n de la forma $A = x + V$, donde V es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n . Notemos que $V = A - x$, donde x es cualquier punto de A , luego V está completamente determinado por A y se llama su *espacio director*. La dimensión de V se llama *dimensión* de A .

La intersección de variedades afines es una variedad afín, luego podemos hablar de la *envoltura afín* de un conjunto de puntos $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$, definida como la menor variedad afín A que los contiene. Claramente, su espacio director ha de contener a los vectores $a_1 - a_0, \dots, a_m - a_0$, luego ha de ser

$$A = a_0 + \langle a_1 - a_0, \dots, a_m - a_0 \rangle.$$

De este modo, $x \in A$ si y sólo si $x = a_0 + t_1(a_1 - a_0) + \cdots + t_m(a_m - a_0)$, para ciertos escalares t_i . Llamando $t_0 = 1 - t_1 - \cdots - t_m$ resulta que

$$x = t_0 a_0 + \cdots + t_m a_m, \quad t_0 + \cdots + t_m = 1. \quad (9.1)$$

Un punto x en estas condiciones se llama *combinación afín* de a_0, \dots, a_m . Recíprocamente, es fácil ver que toda combinación afín de a_0, \dots, a_m ha de estar en A , luego tenemos que la envoltura afín de un conjunto finito de puntos está formada por sus combinaciones afines.

Recordemos que $m+1$ puntos $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ son afinmente independientes si su envoltura afín tiene dimensión m , es decir, si los vectores $a_1 - a_0, \dots, a_m - a_0$ son linealmente independientes. Así, dos puntos distintos son siempre afinmente independientes, tres puntos son independientes si no están alineados, cuatro puntos son independientes si no están en el mismo plano, etc.

Si los puntos a_0, \dots, a_m son afinmente independientes, todo punto x de su envoltura afín se expresa de forma única como combinación afín (9.1) de a_0, \dots, a_m , pues los coeficientes t_i para $i \neq 0$ son las coordenadas de $x - a_0$ en la base $a_i - a_0$ del espacio director y t_0 está determinado por la ecuación de la derecha en (9.1). Dichos coeficientes reciben el nombre de coordenadas baricéntricas de x respecto a a_0, \dots, a_m .

Todo conjunto de puntos afinmente independientes en \mathbb{R}^n se puede extender hasta un conjunto de $n+1$ puntos afinmente independientes.

Una aplicación $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es *afín* si es de la forma $f(x) = a + \vec{f}(x)$, donde $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal. La aplicación \vec{f} está determinada por f , pues $\vec{f}(x) = f(x) - f(0)$.

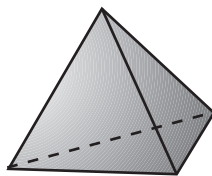
Es fácil ver que si $t_0 + \cdots + t_m = 1$ entonces

$$f(t_0 a_0 + \cdots + t_m a_m) = t_0 f(a_0) + \cdots + t_m f(a_m).$$

En particular, una aplicación afín $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ está determinada por los valores que toma sobre $n+1$ puntos afinmente independientes. Recíprocamente, cualquier aplicación definida sobre tales $n+1$ puntos con valores en \mathbb{R}^m se extiende a una única aplicación afín.

Definición 9.1 Un *p-símplice afín* en \mathbb{R}^n es la envoltura convexa S de $p+1$ puntos $a_0, \dots, a_p \in \mathbb{R}^n$ afinmente independientes. Los puntos a_i se llaman *vértices* de S , los símplexes generados por cada $r+1$ vértices de S se llaman *r-caras* de S . Representaremos el símplex de vértices a_0, \dots, a_p mediante $[a_0, \dots, a_p]$.

Podemos identificar los vértices con las 0-caras de S . Las 1-caras se llaman también *aristas* de S . Notemos que los 0-símplexes son los puntos, los 1-símplexes son los segmentos, los 2-símplexes son los triángulos y los 3-símplexes son los tetraedros. La figura muestra un 3-símplice:



Teorema 9.2 *Un p -símplice está generado por un único conjunto de vértices. En particular dos p -símplices son iguales si y sólo si tienen los mismos vértices.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $S = [a_0, \dots, a_p]$. Basta probar que estos vértices están determinados por S . Concretamente, vamos a ver que un punto $x \in S$ es un vértice si y sólo si no puede expresarse como $x = (1-t)u + tv$, con $u, v \in S$, $u \neq v$, $0 < t < 1$.

En efecto, si a_j pudiera expresarse de esta forma con

$$u = \sum_{i=0}^p t_i a_i, \quad v = \sum_{i=0}^p t'_i a_i,$$

entonces,

$$a_j = \sum_{i=0}^p ((1-t)t_i + tt'_i) a_i,$$

y los coeficientes de esta expresión son no negativos y suman 1, luego por la unicidad de las coordenadas baricéntricas ha de ser $(1-t)t_i + tt'_i = 0$, para $i \neq j$, luego $t_i = t'_i = 0$, luego $u = v = a_j$, contradicción.

Si un punto $x \in S$ no es un vértice, es fácil expresarlo de la forma indicada a partir de su expresión como combinación convexa de los vértices. ■

Por el teorema anterior podemos llamar *dimensión* de un símplice a su número de vértices menos 1, con lo que la dimensión de un p -símplice es p .

Es fácil ver que un p -símplice es un subespacio compacto convexo de interior no vacío en \mathbb{R}^p , por lo que el teorema 1.4 nos da que todos ellos son homeomorfos entre sí. Vamos a estudiar esto con más detalle:

Definición 9.3 Llamaremos *p -símplice canónico* al p -símplice afín $\Delta_p \subset \mathbb{R}^p$ determinado por los vértices

$$x_0 = (0, \dots, 0), \quad x_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad x_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots \quad x_p = (0, \dots, 1).$$

Observemos que las coordenadas baricéntricas de un punto $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ respecto de los vértices de Δ_p son $\left(1 - \sum_i a_i, a_1, \dots, a_p\right)$. Así,

$$\Delta_p = \{(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p \mid a_i \geq 0, \sum a_i \leq 1\}.$$

Claramente $\Delta_0 = \{0\}$, $\Delta_1 = [0, 1]$, mientras que Δ_2 y Δ_3 son el triángulo y el tetraedro representados en la figura:



Un p -símplice arbitrario $[a_0, \dots, a_r]$ es la imagen del p -símplice canónico $\Delta_p = [x_0, \dots, x_p]$ por la aplicación afín f determinada por $f(x_i) = a_i$. Es fácil ver que f es biyectiva (pues conserva las coordenadas baricéntricas) y claramente es continua. Por otro lado, también es fácil ver que Δ_p es compacto, luego f determina un homeomorfismo entre Δ_p y el símplice dado.

Definición 9.4 Llamaremos *interior* de un p -símplice S al conjunto de los puntos cuyas coordenadas baricéntricas (respecto de sus vértices) son todas estrictamente positivas, es decir los puntos de S que no pertenecen a ninguna de las caras de S distintas del propio S . La frontera de S está formada por los puntos de S que no pertenecen a su interior.

Observemos que el interior y la frontera de un símplice en este sentido no coinciden con el interior y la frontera en el sentido topológico usual. Por ejemplo, el interior de un segmento en \mathbb{R}^2 es todo el segmento menos sus extremos, cuando su interior topológico es vacío. Es fácil ver que el interior y la frontera de un símplice coinciden con su interior y su frontera topológica respecto a la topología relativa de su envoltura afín. También es fácil ver que un símplice es la clausura topológica de su interior.

Notemos también que una cara C de un símplice S está formada por los puntos cuyas coordenadas baricéntricas respecto a los vértices de S toman el valor 0 en los vértices que no corresponden a C . De aquí se sigue inmediatamente que la intersección de dos caras de S es vacía o bien es otra cara.

9.2 Complejos de cadenas singulares

Empezamos introduciendo el concepto de “símplice singular”, que generaliza a dimensiones superiores la noción de arco en un espacio topológico. Así como un arco es un segmento deformado, un 2-símplice será un triángulo deformado, un 3-símplice un tetraedro deformado, etc. Los grupos de homología de un espacio dependerán del modo en que es posible ensamblar los símplices de cada dimensión para formar ciclos y fronteras.

Recordemos que $\Delta_p \subset \mathbb{R}^p$ es el símplice canónico definido en 9.3.

Definición 9.5 Un *p -símplice singular* en un espacio topológico X es una aplicación continua $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$.

Observemos que, como todos los p -símplices afines son homeomorfos, en lugar del símplice canónico Δ_p podríamos considerar cualquier p -símplice afín.

Puesto que Δ_0 se reduce a un punto, podemos identificar los 0-símplices singulares de un espacio X con sus puntos. Los 1-símplices singulares son las aplicaciones continuas de $\Delta_1 = [0, 1]$ en X , es decir, los arcos en X .

A cada símplice afín le podemos asociar un símplice singular. Más en general, dados $p + 1$ puntos $y_0, \dots, y_p \in \mathbb{R}^n$, definimos $[y_0, \dots, y_p] \subset \mathbb{R}^n$ como su envoltura convexa (de modo que si los puntos son afinmente independientes entonces $[y_0, \dots, y_p]$ es el símplice afín que generan, de acuerdo con la sección 9.1).

Representaremos por

$$(y_0, \dots, y_p) : \Delta_p \longrightarrow [y_0, \dots, y_p]$$

a la restricción de la única aplicación afín que cumple $x_i \mapsto y_i$.

En particular (x_0, \dots, x_p) es la identidad en Δ_p . Observemos que $[y_0, \dots, y_p]$ no depende de la ordenación de los vértices, pero (y_0, \dots, y_p) sí. A los símplices de esta forma los llamaremos *símplices singulares afines*.

Siguiendo las ideas esbozadas en la introducción, definimos ahora los grupos de cadenas. Como advertíamos allí, vamos a permitir que los coeficientes varíen en un anillo unitario arbitrario, que en lo sucesivo representaremos por \mathbb{A} . El caso más importante será $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$, aunque la teoría se simplifica levemente si tomamos como \mathbb{A} un cuerpo, especialmente \mathbb{Q} , \mathbb{R} o \mathbb{C} .

Definición 9.6 Para cada número natural $p \geq 0$, llamaremos módulo de las *p-cadenas singulares* de un espacio topológico $X \neq \emptyset$ al \mathbb{A} -módulo libre $C_p(X)$ que tiene por base al conjunto de todos los p -símplices singulares en X .

De este modo, una p -cadena singular no nula se expresa de forma única como

$$c = \sum_{i=1}^n a_i \sigma_i, \quad a_i \in \mathbb{A}, \quad a_i \neq 0,$$

donde cada σ_i es un p -símplice singular. No debemos ver en estas sumas ninguna operación geométrica entre los símplices. Las p -cadenas son simplemente una forma útil de seleccionar un conjunto finito de símplices y asignar a cada uno un coeficiente, usualmente un número entero. Conviene definir el *soporte* de la p -cadena c como

$$|c| = \bigcup_{i=1}^n \sigma_i[\Delta_p].$$

Convenimos que $|0| = \emptyset$. Notemos que el soporte de una p -cadena singular es siempre un subespacio compacto de X .

En este punto la teoría presenta dos variantes: si definimos $C_p(X) = 0$ para $p < 0$ tenemos los complejos de la *homología completa*, mientras que la *homología reducida* se obtiene considerando que $\Delta_{-1} = \emptyset$, con lo que en todo espacio topológico X no vacío existe un único símplice singular de dimensión -1 , que representaremos por $(\cdot) : \emptyset \longrightarrow X$. Consecuentemente, $C_{-1}(X)$ es el \mathbb{A} -módulo libre de base (\cdot) . Los módulos $C_p(X)$ para $p < -1$ se definen también como 0.

Por completitud conviene definir $C_p(\emptyset) = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Así, a cada espacio topológico X le podemos asociar el módulo graduado (véase la definición 4.4)

$$C(X) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C_p(X).$$

Tampoco hemos de buscar ninguna interpretación a la suma de p -cadenas de dimensiones distintas. Tomar la suma directa es simplemente un modo cómodo de reducir los infinitos módulos de cadenas a un único objeto algebraico.

Si $U \subset X$ son espacios topológicos, es claro que podemos identificar a cada $C_p(U)$ con un submódulo de $C_p(X)$. Concretamente, $C_p(U)$ está formado por las p -cadenas de X cuyo soporte está contenido en U . De este modo, $C(U)$ es un submódulo graduado de $C(X)$.

Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua entre espacios topológicos, para cada p -símplice $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$ en X podemos definir $f_p^\#(\sigma) = \sigma \circ f$, que es un p -símplice en Y . Definimos $f_p^\# : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ como el homomorfismo de módulos que extiende linealmente a la aplicación $f_p^\#$ que acabamos de definir, es decir, el homomorfismo dado por

$$f_p^\#(\sum a_i \sigma_i) = \sum a_i f_p^\#(\sigma_i).$$

Esta definición vale también para $p = -1$ en la homología reducida, y entonces $f_{-1}^\#$ es la identidad, es decir, $f_{-1}^\#(\cdot) = (\cdot)$. Para $p = -1$ en la homología completa y para $p < -1$ en ambos casos, definimos $f_p^\# = 0$.

Los homomorfismos $f_p^\#$ se extienden a un único homomorfismo de grado 0

$$f^\# : C(X) \rightarrow C(Y)$$

entre los módulos de cadenas de X e Y . Es fácil ver que¹ $(f \circ g)^\# = f^\# \circ g^\#$, así como que si f es la identidad en X , entonces $f^\#$ es la identidad en $C(X)$.

Ahora vamos a definir la frontera de una cadena singular. De acuerdo con las ideas esbozadas en la introducción, la frontera de un p -símplice singular será una $p - 1$ -cadena en la que estará reflejada su orientación. En primer lugar definimos la frontera de los símplices canónicos:

En $[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p]$, el circunflejo indica que no aparece x_i . Se trata, pues, de una cara del símplice canónico Δ_p . De este modo, los símplices singulares $(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p)$ son las " $p - 1$ -caras" del p -símplice singular (x_0, \dots, x_p) . Definimos la *frontera* del p -símplice (x_0, \dots, x_p) como la $p - 1$ -cadena

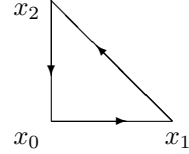
$$\partial_p(x_0, \dots, x_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) \in C_{p-1}(\Delta_p).$$

¹Esto se traduce en que C define un funtor covariante de la categoría de los espacios topológicos en la categoría de los \mathbb{A} -módulos graduados.

Para $p = 0$ en la homología completa definimos $\partial_0(x_0) = 0$, mientras que en la homología reducida la fórmula anterior sigue siendo válida, y nos da que $\partial_0(x_0) = (\cdot)$. Para $p < 0$ definimos $\partial_p = 0$.

Según esta definición,

$$\begin{aligned} \partial_1(x_0, x_1) &= (x_1) - (x_0), \\ \partial(x_0, x_1, x_2) &= (x_1, x_2) - (x_0, x_2) + (x_0, x_1). \end{aligned}$$



Ahora definimos la frontera de un p -símplice singular $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$ como

$$\partial_p \sigma = \sigma^\#(\partial_p(x_0, \dots, x_p)).$$

La interpretación es clara: la frontera de σ es la p -cadena formada por las imágenes por σ de los símplices que forman la frontera de Δ_p , con los mismos coeficientes. Definimos el operador frontera $\partial_p : C_p(X) \rightarrow C_{p-1}(X)$ como el homomorfismo de módulos que extiende linealmente a la aplicación frontera que ya tenemos definida. Explícitamente: $\partial_p(\sum a_i \sigma_i) = \sum a_i \partial_p \sigma_i$.

Los homomorfismos ∂_p se extienden a un único homomorfismo de grado -1

$$\partial : C(X) \rightarrow C(X)$$

del módulo de cadenas de X en sí mismo. Observemos que por definición ∂ conmuta con $\sigma^\#$ para todo p -símplice σ . Más en general, tenemos:

Teorema 9.7 Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos. Entonces $\partial \circ f^\# = f^\# \circ \partial$. Equivalentemente, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} C_p(X) & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1}(X) \\ f_p^\# \downarrow & & \downarrow f_{p-1}^\# \\ C_p(Y) & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1}(Y) \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN: Los casos $p \leq 0$ se comprueban fácilmente. Para $p > 0$ basta ver que ambas aplicaciones actúan igual sobre un p -símplice σ en X :

$$\begin{aligned} f_{p-1}^\#(\partial_p(\sigma)) &= f_{p-1}^\#(\sigma_{p-1}^\#(\partial_p(x_0, \dots, x_p))) = (\sigma \circ f)_{p-1}^\#(\partial_p(x_0, \dots, x_p)) \\ &= \partial_p(\sigma \circ f) = \partial_p(f_p^\#(\sigma)). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

La fórmula que hemos usado para definir la frontera del símplice (x_0, \dots, x_p) es válida de hecho para cualquier símplice singular afín:

Teorema 9.8 Sea (y_0, \dots, y_p) un p -símplice afín en \mathbb{R}^n . Entonces

$$\partial_p(y_0, \dots, y_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (y_0, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_p).$$

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $\sigma = (y_0, \dots, y_p)$. Entonces

$$\begin{aligned} \partial_p(y_0, \dots, y_p) &= \sigma_{p-1}^\#(\partial_p(x_0, \dots, x_p)) = \sigma_{p-1}^\# \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) \right) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma_{p-1}^\#(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (y_0, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_p). \end{aligned}$$

■

Ahora probamos el resultado fundamental sobre los operadores frontera:

Teorema 9.9 *Sea X un espacio topológico y $p \in \mathbb{Z}$. Entonces $\partial^2 = 0$ o, más explícitamente, $\partial_p \circ \partial_{p-1} = 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Dejando aparte los casos triviales, basta calcular la acción de la composición sobre un símplice σ . Tenemos que

$$\partial_{p-1}(\partial_p(\sigma)) = \sigma_{p-2}^\#(\partial_{p-1}(\partial_p(x_0, \dots, x_p))),$$

luego basta ver que $\partial_{p-1}(\partial_p(x_0, \dots, x_p)) = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned} \partial_{p-1}(\partial_p(x_0, \dots, x_p)) &= \partial_{p-1} \left(\sum_{i=0}^p (-1)^i (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) \right) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_{p-1}(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) = \\ &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} (x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j-1} (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_p) \\ &= \sum_{j < i} (-1)^{i+j} (x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) + \sum_{j < i} (-1)^{i+j-1} (x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde hemos usado el teorema 9.8. ■

El lector debería visualizar este teorema para el caso particular del tetraedro $\sigma = (x_0, x_1, x_2, x_3)$. Lo que sucede es que cada arista forma parte de dos caras, y es recorrida en sentidos opuestos cuando aparece en la frontera de cada una de ellas.

La definición 4.5 nos proporciona el marco teórico adecuado para expresar los resultados que hemos obtenido. Concretamente, ahora podemos afirmar que $(C(X), \partial)$ es un complejo directo, y el teorema 9.7 prueba además que cada aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos induce un homomorfismo de complejos² $f^\# : C(X) \rightarrow C(Y)$.

Es claro que si $U \subset X$ son espacios topológicos, entonces $C(U)$ es un sub-complejo de $C(X)$.

²Esto se traduce en que C es, más concretamente, un funtor covariante de la categoría de los espacios topológicos en la categoría de los complejos directos de \mathbb{A} -módulos.

Símplices diferenciables Si en lugar de considerar espacios topológicos arbitrarios consideramos una variedad diferencial V , podemos considerar p -símplices singulares diferenciables, es decir, aplicaciones $\sigma : \Delta_p \rightarrow V$ que sean diferenciables en el sentido de que se extienden a aplicaciones diferenciables de un abierto en \mathbb{R}^p que contenga a Δ_p en V .

Todos los p -símplices afines son difeomorfos en este sentido, pues uno se transforma en otro mediante una biyección afín de \mathbb{R}^p en sí mismo, que es un difeomorfismo. Por lo tanto, en la definición anterior Δ_p puede sustituirse por cualquier otro p -símplice afín. Los 1-símplices singulares son los arcos diferenciables.

Para cada número natural $p \geq 0$ definimos $C_p^\infty(V)$ como el \mathbb{A} -submódulo (libre) de $C_p(V)$ que tiene por base al conjunto de todos los p -símplices diferenciables singulares en V . Como en el caso continuo, tenemos dos posibles definiciones de $C_1^\infty(V)$, que distinguiremos hablando de los complejos de la homología diferenciable *completa o reducida*.

Es claro que $C^\infty(V) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} C_p^\infty(V)$ es un submódulo graduado de $C(V)$. Más aún, es evidente que el operador frontera de $C(V)$ se restringe a un operador en $C^\infty(V)$, de modo que $(C^\infty(V), \partial)$ es un subcomplejo de $(C(V), \partial)$.

Si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación diferenciable entre variedades, también es inmediato que el homomorfismo $f^\# : C(V) \rightarrow C(W)$ se restringe a un homomorfismo³ de complejos $f^\# : C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(W)$.

Veremos (teorema 9.42) que en el caso de una variedad diferencial V es equivalente trabajar con $C(V)$ o con $C^\infty(V)$, aunque para llegar a esta conclusión tendremos que comprobar primero que algunos resultados valen por igual en ambos casos. ■

9.3 Grupos de homología

Los resultados de la sección anterior nos permiten introducir con rigor los conceptos de ciclos, fronteras y grupos de homología de un espacio topológico, de acuerdo con lo que hemos visto en la introducción. En realidad, dichas definiciones las tenemos formuladas en 4.6 a partir de un complejo arbitrario. Aquí la aplicamos al caso particular del complejo de cadenas $C(X)$ de un espacio topológico X sobre un anillo unitario \mathbb{A} .

Concretamente, de acuerdo con 4.6, representaremos por $Z_p(X)$ al módulo de los p -ciclos de X , es decir, el submódulo de $C_p(X)$ formado por las p -cadenas de frontera nula. A su vez, $F_p(X)$ representará al módulo de las p -fronteras, es decir, de las imágenes de $C_{p-1}(X)$ por el operador frontera, de modo que $F_p(X) \leq Z_p(X)$. El cociente $H_p(X) = Z_p(X)/F_p(X)$ es el *grupo de homología*

³Esto significa que C se restringe a un funtor de la categoría de las variedades diferenciales en la categoría de los \mathbb{A} -módulos.

singular (completa o reducida, según la definición que adoptemos para $C_{-1}(X)$) de dimensión p del espacio X . A su vez, podemos incluir todos los grupos de homología en un único módulo graduado

$$H(X) = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H_p(X).$$

A cada aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos induce un homomorfismo de grado 0 $f^\# : C(X) \rightarrow C(Y)$, que a su vez determina un homomorfismo⁴ $f_* = f^\# : H(X) \rightarrow H(Y)$ de grado 0.

En realidad, por razones técnicas conviene considerar una situación un poco más general:

Si $U \subset X$, el cociente $C(X, U) = C(X)/C(U)$ es la suma directa de los \mathbb{A} -módulos $C_p(X, U) = C_p(X)/C_p(U)$ y es claro que el operador frontera de $C(X)$ induce un operador frontera en $C(X, U)$, que es, por lo tanto, un complejo directo de \mathbb{A} -módulos.

A los elementos de $C_p(X, U)$ los llamaremos *p-cadenas* de X módulo U . A sus grupos de homología los llamaremos grupos de *homología relativa* de X módulo U , y los representaremos por

$$H_p(X, U) = Z_p(X, U)/F_p(X, U).$$

Escribiremos $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ para indicar que $U \subset X$, $V \subset Y$, $f : X \rightarrow Y$ y $f[U] \subset V$. En estas condiciones, si la aplicación f es continua, cada homomorfismo $f_p^\# : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ induce un homomorfismo $f_p^\# : C_p(X, U) \rightarrow C_p(Y, V)$, y éstos se extienden a su vez a un homomorfismo de complejos

$$f^\# : C(X, U) \rightarrow C(Y, V),$$

que a su vez determina un homomorfismo graduado

$$f_* : H(X, U) \rightarrow H(Y, V).$$

Sigue cumpliéndose que $(f \circ g)^\# = f^\# \circ g^\#$, así como que la identidad induce la identidad, y lo mismo vale para los homomorfismos entre los grupos de homología.⁵

Observemos que $H_p(X) = H_p(X, \emptyset)$, con lo que la homología relativa generaliza a la absoluta.

Es inmediato que un homeomorfismo de pares $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ (es decir, un homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$ que cumpla $f[U] = V$) induce isomorfismos

⁴Es inmediato que H se convierte así en un funtor de la categoría de los espacios topológicos en la categoría de los \mathbb{A} -módulos graduados, más concretamente, se trata de la composición del funtor C con el funtor de homología que asigna a cada complejo directo su módulo graduado de grupos de homología. Cada H_p es un funtor en la categoría de los \mathbb{A} -módulos.

⁵Tenemos así dos funtores C y H de la categoría de pares (X, U) de espacios topológicos en la categoría de \mathbb{A} -módulos graduados, así como funtores C_p y H_p en la categoría de los \mathbb{A} -módulos.

$H(X, U) \cong H(Y, V)$ (porque el homeomorfismo inverso induce el homomorfismo inverso). En particular, espacios homeomorfos tienen grupos de homología isomorfos.

Si V es una variedad diferencial y U es un abierto en V (y en particular, también es una variedad diferencial), podemos definir igualmente los complejos relativos $C_p^\infty(V, U) = C_p^\infty(V)/C_p^\infty(U)$. En particular tenemos definidos los grupos de homología (completa o reducida) $H_p^\infty(V)$, así como los grupos relativos $H_p^\infty(V, U)$, de modo que las aplicaciones diferenciables $f : (V, U) \rightarrow (V', U')$ inducen homomorfismos $f_* : H^\infty(V, U) \rightarrow H^\infty(V', U')$ de grado 0 entre los grupos de homología.

Veamos ahora algunos hechos elementales que ilustren los conceptos que acabamos de introducir. Nos centraremos en cadenas de dimensión 1.

Símplices constantes Veamos en primer lugar que todo 1-símplice constante es una frontera. En efecto, si $\sigma : I \rightarrow X$ es un 1-símplice que toma constantemente el valor $x \in X$, consideramos el 2-símplice $c : \Delta_2 \rightarrow X$ que toma el mismo valor constante. Su frontera es

$$\partial c = c^\sharp(x_1, x_2) - c^\sharp(x_0, x_2) + c^\sharp(x_0, x_1) = \sigma - \sigma + \sigma = \sigma.$$

Símplices opuestos Sea $\sigma : I \rightarrow X$ un 1-símplice y definamos $\tau : I \rightarrow X$ mediante $\tau(t) = \sigma(1 - t)$, es decir, τ es el mismo arco que σ pero recorrido al revés. Vamos a ver que $\sigma + \tau$ es una frontera. No podemos decir que σ y $-\tau$ sean homólogos a menos que sean ciclos, pero esto nos garantiza que si en un ciclo sustituimos σ por $-\tau$, o viceversa, obtenemos un ciclo homólogo.

Definimos $c : \Delta_2 \rightarrow X$ mediante $c(x, y) = \sigma(x)$. Como antes:

$$\partial c = c^\sharp(x_1, x_2) - c^\sharp(x_0, x_2) + c^\sharp(x_0, x_1).$$

Pero

$$c^\sharp(x_0, x_1)(t) = c((x_0, x_1)(t)) = c(t, 0) = \sigma(t),$$

luego $c^\sharp(x_0, x_1) = \sigma$. Similarmente se prueba que $c^\sharp(x_1, x_2) = \tau$ y que $c^\sharp(x_0, x_2)$ es la constante $\sigma(0)$, luego es una frontera por el ejemplo anterior. En total tenemos

$$\partial c = \sigma + \tau + \partial c',$$

como queríamos probar.

Concatenación Sea $\sigma : I \rightarrow X$ un 1-símplice singular, sea $0 < r < 1$ y sean $\sigma_1, \sigma_2 : I \rightarrow X$ los símplices dados por

$$\sigma_1(t) = \sigma(tr), \quad \sigma_2(t) = \sigma(r + t(1 - r)).$$

Entonces, la 1-cadena $\sigma - \sigma_1 - \sigma_2$ es una frontera. Como antes, esto significa que si en un ciclo sustituimos σ por $\sigma_1 + \sigma_2$, o viceversa, obtenemos un ciclo homólogo.

En efecto, sea el 2-símplice $c : \Delta_2 \rightarrow X$ dado por $c(x, y) = \sigma(x + ry)$. Su frontera es

$$\partial c = c^\#(x_1, x_2) - c^\#(x_0, x_2) + c^\#(x_0, x_1).$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} c^\#(x_1, x_2)(t) &= c((x_1, x_2)(t)) = c((1-t)x_1 + tx_2) = c(1-t, t) \\ &= \sigma(1-t + rt) = \sigma_2(1-t). \end{aligned}$$

Según el ejemplo anterior, $c^\#(x_1, x_2) = -\sigma_2 + \partial c'$, para una cierta cadena c' . Similarmente se prueba que $c^\#(x_0, x_2) = \sigma_1$ y $c^\#(x_0, x_1) = \sigma$. De este modo tenemos que

$$\partial c = -\sigma_2 + \partial c' - \sigma_1 + \sigma,$$

como queríamos probar.

Ejercicio: Probar que si $\sigma : I \rightarrow X$ es un 1-símplice y $\theta : I \rightarrow I$ es una aplicación continua tal que $\theta(0) = 1$ y $\theta(1) = 0$, entonces $\sigma + \theta \circ \sigma$ es una frontera.

Dedicamos el resto de la sección a probar algunos resultados elementales sobre los grupos de homología. Por simplicidad los enunciaremos sólo en el caso continuo, pero el lector debe comprobar que los enunciados análogos para la homología diferenciable se demuestran sin cambio alguno. Para empezar, observamos que la diferencia entre la homología completa y la reducida es mínima:

Teorema 9.10 *Sea X un espacio topológico y $U \subset X$. Entonces los grupos de homología completa $H_p(X, U)$ coinciden con los de homología reducida salvo a lo sumo en el caso $p = 0$, $X \neq \emptyset$, $U = \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN: Los operadores frontera son los mismos para ambas homologías salvo a lo sumo ∂_0 . Esto hace que todos los grupos de homología coincidan salvo a lo sumo $H_0(X, U)$ y $H_{-1}(X, U)$. Ahora bien, si $U \neq \emptyset$, entonces $C_{-1}(X) = C_{-1}(U)$, pues en el caso reducido ambos coinciden con el \mathbb{A} -módulo generado por (\cdot) . Por consiguiente $C_{-1}(X, U) = 0$, de donde $H_{-1}(X, U) = 0$ para ambas homologías. Además entonces $\partial_0 = 0$ necesariamente, luego también coinciden los dos grupos $H_0(X, U)$.

Falta probar que si $U = \emptyset$ también coinciden los grupos $H_{-1}(X)$. Podemos suponer $X \neq \emptyset$. Para la homología completa tenemos trivialmente que $H_{-1}(X) = 0$, y para la reducida tenemos que $Z_{-1}(X) = C_{-1}(X)$, porque $\partial_{-1} = 0$, y $F_{-1}(X) = C_{-1}(X)$, pues (\cdot) es la frontera de cualquier $x \in X$. Así pues, $H_{-1}(X) = 0$ también en este caso. ■

El teorema siguiente es ahora trivial:

Teorema 9.11 *Si X es un espacio topológico, $U \subset X$ y $p < 0$, entonces se cumple $H_p(X, U) = 0$.*

Enseguida calcularemos los grupos $H_0(X, U)$, pero antes probaremos un resultado general:

Teorema 9.12 Sea $X = \bigcup_k X_k$ un espacio topológico descompuesto en una unión disjunta de subespacios tales que cada uno de ellos sea unión de componentes arcoconexas⁶ de X . Sea $U \subset X$ y sea $U_k = U \cap X_k$. Sean

$$i_k : (X_k, U_k) \longrightarrow (X, U)$$

las inclusiones. Entonces

$$\bigoplus_k i_{*k} : \bigoplus_k H_p(X_k, U_k) \longrightarrow H_p(X, U)$$

es un isomorfismo de módulos para la homología completa.

DEMOSTRACIÓN: Si $\sigma : \Delta_p \longrightarrow X$ es un p -símplice singular, entonces su imagen es arcoconexa, luego está contenida en un X_k . De aquí se sigue que

$$C_p(X) = \bigoplus_k C_p(X_k), \quad C_p(U) = \bigoplus_k C_p(U_k), \quad \text{para } p \geq 0.$$

Esto mismo es trivialmente cierto si $p < 0$ (sería falso para $p = -1$ con la homología reducida). Es claro entonces que

$$\bigoplus_k i_k^\# : \bigoplus_k C_p(X_k, U_k) \longrightarrow C_p(X, U)$$

es un isomorfismo. Una comprobación directa nos da que este isomorfismo se restringe a otro

$$\bigoplus_k i_k^\# : \bigoplus_k Z_p(X_k, U_k) \longrightarrow Z_p(X, U)$$

que además transforma la suma de los módulos de fronteras en $F_p(X, U)$. Por consiguiente los cocientes son isomorfos, es decir,

$$\bigoplus_k i_{*k} : \bigoplus_k H_p(X_k, U_k) \longrightarrow H_p(X, U)$$

es un isomorfismo. ■

En particular el teorema anterior es aplicable cuando los subespacios X_k son las componentes arcoconexas de X , lo que reduce cualquier cálculo de grupos de homología al caso de espacios arcoconexos. Ahora estamos en condiciones de calcular $H_0(X, U)$.

Teorema 9.13 Sea X un espacio topológico y $U \subset X$. Sea r el número de componentes arcoconexas de X que no cortan a U (el cardinal r puede ser finito o infinito). Entonces $H_0(X, U)$ es un \mathbb{A} -módulo libre de rango r excepto para la homología reducida con $U = \emptyset$, en cuyo caso el rango es $r - 1$.

⁶En el caso en que X sea una variedad topológica / diferencial, al ser localmente arcoconexa, sus componentes arcoconexas son abiertas, luego cada X_k es abierto en X y es también una variedad topológica / diferencial.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos primero el caso de la homología completa. Por el teorema anterior, basta probar que si X es arcoconexo, entonces

$$H_0(X, U) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } U \neq \emptyset, \\ \mathbb{A} & \text{si } U = \emptyset. \end{cases}$$

Si $U \neq \emptyset$, tomemos $x \in U$. Cada $y \in X$ puede unirse con x mediante un arco⁷ σ . Notemos que σ es un 1-símplice y $\partial\sigma = y - x$. Por lo tanto la clase de homología de y es la misma que la de x , que es nula módulo U , luego $H_0(X, U) = 0$.

Supongamos ahora que $U = \emptyset$ y sea $\alpha = \sum a_i \sigma_i \in C_1(X)$. Sean x_i, y_i los extremos de σ_i . Entonces

$$\partial\alpha = \sum a_i (y_i - x_i).$$

De aquí se sigue inmediatamente que una condición necesaria para que una 0-cadena $\beta = \sum b_i z_i$ sea una frontera es que $\sum b_i = 0$. La condición es también suficiente, pues basta tomar un punto $x \in X$ y arcos σ_i que unan x con cada z_i . Entonces la 1-cadena $\sum b_i \sigma_i$ tiene frontera $\sum b_i (z_i - x) = \beta$.

Por consiguiente, el homomorfismo $C_0(X) \rightarrow \mathbb{A}$ dado por $\sum b_i z_i \mapsto \sum b_i$ es obviamente suprayectivo y su núcleo es $F_0(X)$. Como $Z_0(X) = C_0(X)$, tenemos que $H_0(X) \cong \mathbb{A}$.

Según el teorema 9.10, el resultado es válido igualmente para la homología reducida si $U \neq \emptyset$. Nos falta calcular $H_0(X)$ para la homología reducida. Tomemos representantes x_i de cada una de las componentes arcoconexas de X . Fijemos una de ellas x_{i_0} . Una 0-cadena $\alpha = \sum_{x \in X} a_x x$ es un ciclo si y sólo si

$$\partial\alpha = \sum_{x \in X} a_x (\cdot) = 0,$$

es decir, si $\sum_{x \in X} a_x = 0$. En tal caso

$$\alpha = \sum_{x \in X} a_x (x - x_{i_0}).$$

Para cada $x \in X$, existe un x_{i_x} en su misma componente arcoconexa, luego existe un arco σ_x que une x_{i_x} con x . Entonces $\partial\sigma_x = x_{i_x} - x$. Por consiguiente, la clase de homología de α es

$$[\alpha] = \sum_{x \in X} a_x [x_{i_x} - x_{i_0}] = \sum_{i \neq i_0} b_i [x_i - x_{i_0}].$$

⁷En el caso diferenciable podemos unir x con y mediante un arco diferenciable a trozos. Esto no es un 1-símplice diferenciable, pero si llamamos $\sigma_0, \dots, \sigma_n$ los trozos diferenciables del arco, de modo que $\sigma_{i-1}(1) = \sigma_i(0)$, entonces $\sigma = \sigma_0 + \dots + \sigma_n$ es una 1-cadena singular diferenciable cuya frontera es igualmente $\partial\sigma = y - x$, y llegamos a la misma conclusión. Similarmente, cada vez que en el resto de la prueba consideramos un arco (continuo) que une dos puntos, en el caso diferenciable tenemos un arco diferenciable a trozos que determina una 1-cadena σ con la misma frontera.

Esto prueba que los $r - 1$ elementos $[x_i - x_{i_0}]$ generan $H_0(X)$. Basta probar que son independientes. Supongamos que

$$\sum_{i \neq i_0} b_i [x_i - x_{i_0}] = 0,$$

para ciertos coeficientes (casi todos nulos) $b_i \in \mathbb{A}$. Entonces

$$\sum_{i \neq i_0} b_i (x_i - x_{i_0}) = \partial \sum_k c_k \sigma_k = \sum_k c_k (z_k - y_k),$$

donde z_k e y_k son los extremos de cada arco σ_k . Ahora bien, si $c_k \neq 0$, entonces z_k ha de ser un x_i (quizá $i = i_0$), pero y_k está en la misma componente conexa que z_k , luego ha de ser también x_i (porque en la izquierda no aparecen dos puntos distintos en la misma componente). Pero entonces el sumando $c_k(z_k - y_k)$ es nulo, luego todo el miembro derecho es nulo, luego todo b_i es nulo. ■

Para terminar calculamos los grupos de homología de un espacio $X = \{x\}$ formado por un único punto.

Teorema 9.14 *Sea $X = \{x\}$ un espacio topológico formado por un punto. Entonces $H_p(X) = 0$ salvo si $p = 0$ con la homología completa, en cuyo caso $H_0(X) \cong \mathbb{A}$.*

DEMOSTRACIÓN: El teorema anterior cubre el caso $p = 0$. En el caso $p > 0$ sólo hay un p -símplice singular en X , digamos $\sigma_p : \Delta_p \rightarrow X$. Entonces $\partial \sigma_p = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma_{p-1}$. Por lo tanto:

$$\partial \sigma_p = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ es impar,} \\ \sigma_{p-1} & \text{si } p \text{ es par.} \end{cases}$$

Por consiguiente, si p es impar $Z_p(X) = F_p(X) = C_p(X)$, mientras que si p es par entonces $Z_p(X) = F_p(X) = 0$. En ambos casos, $H_p(X) = 0$. ■

9.4 El teorema de homotopía

En esta sección probaremos que dos espacios homotópicos tienen los mismos grupos de homología. Para tratar con la homología relativa hemos de introducir las homotopías relativas:

Definición 9.15 Diremos que dos aplicaciones $f, g : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ son *homotópicas* si existe una aplicación continua $h : (I \times X, I \times U) \rightarrow (Y, V)$ tal que, para todo $x \in X$, se cumple $h(0, x) = f(x)$, $h(1, x) = g(x)$.

La definición de homotopía de espacios topológicos se generaliza de forma obvia a pares de espacios: diremos que (X, U) e (Y, V) son *homotópicos* si existen aplicaciones continuas $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ y $g : (Y, V) \rightarrow (X, U)$ tales que $f \circ g$ y $g \circ f$ son homotópicas a la identidad en el espacio correspondiente.

El teorema principal que vamos a probar es el siguiente:

Teorema 9.16 (Teorema de homotopía) Si $f, g : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ son aplicaciones homotópicas, entonces $f_* = g_*$.

El teorema vale con la misma prueba para la homología diferenciable entendiendo que en este caso exigimos que tanto las aplicaciones como la homotopía entre ellas sean diferenciables.

Del teorema de homotopía se sigue inmediatamente lo que afirmábamos:

Teorema 9.17 Si los pares (X, U) e (Y, V) son homotópicos entonces, para todo $p \in \mathbb{Z}$, se cumple $H_p(X, U) \cong H_p(Y, V)$.

DEMOSTRACIÓN: Sean $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ y $g : (Y, V) \rightarrow (X, U)$ tales que $f \circ g$ sea homotópica a la identidad en (X, U) y $g \circ f$ a la identidad en (Y, V) .

Entonces, $f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = 1$ y $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = 1$, luego f_* es un isomorfismo de módulos y g_* es su inverso. ■

En particular, si un espacio X es contractible (es decir, homotópico a un punto), entonces sus grupos de homología son los mismos que los de un punto, es decir, son todos nulos salvo $H_0(X)$ para la homología completa, que es libre de rango 1.

He aquí otra consecuencia de interés:

Teorema 9.18 Si $A \subset X$ es un retracto por deformación fuerte de X se cumple que $H_p(X, A) = 0$ para todo índice p .

DEMOSTRACIÓN: Si $r : X \rightarrow A$ es una retracción homotópica a la identidad y llamamos $i : A \rightarrow X$ a la identidad, tenemos dos homomorfismos $r_* : H_p(X, A) \rightarrow H_p(A, A)$ e $i_* : H_p(A, A) \rightarrow H_p(X, A)$ tales que, por una parte, $i_* \circ r_* = (i \circ r)_* = 1_*$ y por otra $r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = 1$ (porque $r \circ i : (X, A) \rightarrow (X, A)$ es homotópica a la identidad). Por lo tanto r_* es un isomorfismo y claramente $H_p(A, A) = 0$. ■

Pasamos ya a la prueba del teorema de homotopía.

Consideramos el espacio $I \times \Delta_p \subset \mathbb{R}^{p+1}$. Identificaremos los vértices x_i de Δ_p con los puntos $(0, x_i)$ y llamaremos $y_i = (1, x_i)$. Definimos el *prisma canónico* como

$$P_p = \sum_{i=0}^p (-1)^i (x_0, x_1, \dots, x_i, y_i, y_{i+1}, \dots, y_p) \in C_{p+1}(I \times \Delta_p).$$

El lector debería dibujar P_2 y P_3 . La idea subyacente en esta definición es que hemos tomado el prisma de base Δ_p y altura 1 —en el sentido geométrico usual— y lo hemos dividido en símlices orientados de tal modo que cada cara compartida es compartida exactamente por dos símlices y con orientaciones opuestas.

Para cada p -símplice $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$, definimos $\sigma' : I \times \Delta_p \rightarrow I \times X$ mediante $\sigma'(t, x) = (t, \sigma(x))$. Definimos el *prisma* sobre σ como

$$P(\sigma) = \sigma'^{\#}(P) \in C_{p+1}(I \times X).$$

La interpretación de $P(\sigma)$ es la misma que la del prisma canónico, sólo que ahora estamos en un espacio arbitrario, la base es un símlice deformado y el prisma hereda las deformaciones de su base. Extendemos linealmente esta aplicación hasta un homomorfismo

$$P : C_p(X) \rightarrow C_{p+1}(I \times X).$$

Para cada aplicación continua $f : X \rightarrow Y$, definimos $f' : I \times X \rightarrow I \times Y$ mediante $f'(t, x) = (t, f(x))$. Veamos que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} C_p(X) & \xrightarrow{P} & C_{p+1}(I \times X) \\ f^{\#} \downarrow & & \downarrow f'^{\#} \\ C_p(Y) & \xrightarrow{P} & C_{p+1}(I \times Y) \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN: Basta probarlo sobre un p -símplice σ :

$$f'^{\#}(P(\sigma)) = f'^{\#}(\sigma'^{\#}(P)) = (\sigma' \circ f')^{\#}(P) = (\sigma \circ f)^{\#}(P) = f^{\#}(\sigma)^{\#}(P) = P(f^{\#}(\sigma)).$$

■

Tomemos ahora un p -símplice afín $[u_0, \dots, u_p] \subset \mathbb{R}^n$, formemos el prisma geométrico $I \times [u_0, \dots, u_p] \subset \mathbb{R}^{n+1}$, identifiquemos cada vértice u_i con el punto $(0, u_i)$ y sea $v_i = (1, u_i)$. Veamos que

$$P(u_0, \dots, u_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (u_0, \dots, u_i, v_i, v_{i+1}, \dots, v_p). \quad (9.2)$$

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $\sigma = (u_0, \dots, u_p)$. Entonces

$$P(\sigma) = \sigma'^{\#}(P) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma'^{\#}(x_0, \dots, x_i, y_i, \dots, y_p).$$

Ahora bien, σ es una aplicación afín, y es fácil ver que σ' también lo es, así como la composición $\sigma'^{\#}(x_0, \dots, x_i, y_i, \dots, y_p)$. Esta aplicación, es un $p+1$ -símplice determinado por las imágenes que toma sobre los vértices canónicos x_0, \dots, x_{p+1} (que no hemos de confundir con los vértices de dimensión p a los que damos el mismo nombre). Calculando estas imágenes concluimos que

$$\sigma'^{\#}(x_0, \dots, x_i, y_i, \dots, y_p) = (u_0, \dots, u_i, v_i, \dots, v_p).$$

Esto prueba la fórmula.

■

Comprobemos ahora la relación:

$$\partial P = (y_0, \dots, y_p) - (x_0, \dots, x_p) - P(\partial(x_0, \dots, x_p)). \quad (9.3)$$

Geoméricamente afirma que, dejando de lado las orientaciones, la frontera de un prisma está formada por sus dos bases más el prisma de la frontera de su base inferior.

DEMOSTRACIÓN: Calculamos:

$$\begin{aligned}\partial P &= \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial(x_0, \dots, x_i, y_i, \dots, y_p) \\ &= \sum_{j \leq i} (-1)^{i+j} (x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_i, y_i, \dots, y_p) \\ &\quad + \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j+1} (x_0, \dots, x_i, y_i, \dots, \hat{y}_j, \dots, y_p).\end{aligned}$$

Separamos el término (y_0, \dots, y_p) del primer sumando y $-(x_0, \dots, x_p)$ del segundo. Los demás términos con $j = i$ se cancelan entre sí. Por lo tanto nos quedamos con

$$\begin{aligned}\partial P &= (y_0, \dots, y_p) - (x_0, \dots, x_p) + \sum_{j < i} (-1)^{i+j} (x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_i, y_i, \dots, y_p) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} (x_0, \dots, x_i, y_i, \dots, \hat{y}_j, \dots, y_p).\end{aligned}$$

Hemos de comprobar que los dos últimos sumandos coinciden con la expresión $-P(\partial(x_0, \dots, x_p))$. En efecto, usamos la fórmula (9.2):

$$\begin{aligned}P(\partial(x_0, \dots, x_p)) &= \sum_{j=0}^p (-1)^j P(x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_p) \\ &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} (x_0, \dots, x_i, y_i, \dots, \hat{y}_j, \dots, y_p) \\ &\quad + \sum_{j < i} (-1)^{i+j-1} (x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_i, y_i, \dots, y_p).\end{aligned}$$

■

Ahora extendemos esta relación a un símplice arbitrario $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$. Para ello definimos las aplicaciones $f', g' : X \rightarrow I \times X$ mediante $f'(x) = (0, x)$, $g'(x) = (1, x)$. Veamos que

$$\partial P(\sigma) = g'^{\#}(\sigma) - f'^{\#}(\sigma) - P(\partial\sigma). \quad (9.4)$$

En efecto, sea $\sigma'(t, x) = (t, \sigma(x))$ y apliquemos $\sigma'^{\#}$ a ambos miembros de la fórmula (9.3). Así

$$\sigma'^{\#}(\partial P) = \sigma'^{\#}(y_0, \dots, y_p) - \sigma'^{\#}(x_0, \dots, x_p) - \sigma'^{\#}(P(\partial(x_0, \dots, x_p))).$$

Es inmediato que $\sigma'^{\#}(y_0, \dots, y_p) = g'^{\#}(\sigma)$ y $\sigma'^{\#}(x_0, \dots, x_p) = f'^{\#}(\sigma)$. Por otra parte, como $\sigma'^{\#}$ conmuta con ∂ y con P , llegamos a la fórmula buscada.

■

Todas las aplicaciones que aparecen en (9.4) son homomorfismos, luego de hecho tenemos probada la relación

$$g'^{\sharp} - f'^{\sharp} = P \circ \partial + \partial \circ P.$$

En realidad debemos comprobar explícitamente esta fórmula para 0-símplices con la homología completa, pues entonces $\partial_0 = 0$ no está definida por la fórmula válida para dimensiones superiores. La comprobación no ofrece dificultad alguna. Igualmente, si extendemos P a los módulos $C_p(X)$ con $p < 0$ como el homomorfismo nulo, la relación sigue siendo válida para ambas homologías.

Consideremos finalmente dos aplicaciones $f, g : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ y una homotopía h entre ellas. Entonces $f = f' \circ h$ y $g = g' \circ h$, luego componiendo con h^{\sharp} y llamando $P_h = P \circ h^{\sharp}$, tenemos que

$$g^{\sharp} - f^{\sharp} = P_h \circ \partial + \partial \circ P_h.$$

Observemos que el homomorfismo $P : C(X) \rightarrow C(I \times X)$ transforma los elementos de $C(U)$ en elementos de $C(I \times U)$, por lo que induce un homomorfismo $P : C(X, U) \rightarrow C(I \times X, I \times U)$, luego podemos considerar que $P_h : C(X, U) \rightarrow C(Y, V)$ es un homomorfismo de módulos de grado 1.

Con esto hemos probado que toda homotopía h entre dos aplicaciones continuas $f, g : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ induce una homotopía P_h entre los homomorfismos f^{\sharp} y g^{\sharp} en el sentido de 4.7 y, como se observa tras la definición, esto implica que $f_* = g_*$, como queríamos probar. ■

9.5 La sucesión exacta de homología

No podremos sacar partido a la homología singular hasta que no dispongamos de ciertos resultados básicos. Dos de ellos ya están a nuestra disposición: la homología de un punto y el teorema de homotopía, pero nos faltan dos más. En esta sección nos ocuparemos del teorema de la sucesión exacta de homología, que nos permitirá relacionar los grupos de homología de distintos espacios, de modo que podremos calcular unos a partir de otros. El último será el teorema de escisión, del que nos ocuparemos en la sección siguiente.

El punto de partida es el teorema siguiente, que nos permite construir sucesiones exactas (véase la definición 4.8) entre complejos de homología singular relativa:

Teorema 9.19 Sean $V \subset U \subset X$ espacios topológicos, sean

$$i : (U, V) \rightarrow (X, V), \quad j : (X, V) \rightarrow (X, U)$$

la inclusión y la identidad, respectivamente. Entonces la sucesión siguiente es exacta:

$$0 \rightarrow C(U, V) \xrightarrow{i^{\sharp}} C(X, V) \xrightarrow{j^{\sharp}} C(X, U) \rightarrow 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Observemos que la exactitud de la sucesión indicada equivale a la exactitud de cada sucesión

$$0 \longrightarrow C_p(U, V) \xrightarrow{i_p^\#} C_p(X, V) \xrightarrow{j_p^\#} C_p(X, U) \longrightarrow 0.$$

Distingamos varios casos:

a) Si $X = \emptyset$ todos los módulos son nulos, y la exactitud es trivial.

b) Si $X \neq \emptyset$ y $U = V = \emptyset$, entonces $C_p(U, V) = 0$, luego $i_p^\# = 0$. Por otra parte, $C_p(X, U) = C_p(X, V) = C_p(X)$ y $j_p^\# = 1$ (i.e. es la identidad). De nuevo la conclusión es trivial.

c) Si $X \neq \emptyset \neq U, V = \emptyset$, entonces tenemos

$$0 \longrightarrow C_p(U) \xrightarrow{i_p^\#} C_p(X) \xrightarrow{j_p^\#} C_p(X, U) = C_p(X)/C_p(U) \longrightarrow 0.$$

Para $p < -1$ todos los módulos son triviales, luego la conclusión es obvia. Lo mismo sucede si $p = -1$ y la homología es completa. Para $p = -1$ en la homología reducida tenemos que $i_{-1}^\# = 1$, $j_{-1}^\# = 0$ (pues $C_{-1}(X, U) = 0$). La conclusión es clara. Finalmente, si $p \geq 0$, tenemos que $i_p^\#$ es la inclusión y $j_p^\#$ es la proyección en el cociente, luego la sucesión también es exacta en este caso.

d) Si $V \neq \emptyset$, para $p < 0$ todos los módulos son nulos y la conclusión es trivial. Para $p \geq 0$ tenemos

$$0 \longrightarrow C_p(U)/C_p(V) \xrightarrow{i_p^\#} C_p(X)/C_p(V) \xrightarrow{j_p^\#} C_p(X)/C_p(U) \longrightarrow 0.$$

Los homomorfismos son los naturales, es decir, los dados por $[c] \mapsto [c]$. La exactitud se comprueba sin ninguna dificultad. ■

Este teorema nos permite aplicar el teorema 4.10 para obtener lo siguiente:

Teorema 9.20 Sean $V \subset U \subset X$ espacios topológicos, sean

$$i : (U, V) \longrightarrow (X, V), \quad j : (X, V) \longrightarrow (X, U)$$

la inclusión y la identidad, respectivamente. Entonces existen homomorfismos $\delta_{*p} : H_p(X, U) \longrightarrow H_{p-1}(U, V)$ que forman una sucesión exacta larga:

$$\dots \longrightarrow H_p(U, V) \xrightarrow{i_{*p}} H_p(X, V) \xrightarrow{j_{*p}} H_p(X, U) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(U, V) \xrightarrow{i_{*p-1}} \dots$$

A la sucesión exacta que proporciona este teorema se la suele llamar *sucesión de homología* de la terna (X, U, V) . Si $V = \emptyset$ tenemos la *sucesión de homología* del par (X, U) , que tiene la forma:

$$\dots \longrightarrow H_p(U) \xrightarrow{i_{*p}} H_p(X) \xrightarrow{j_{*p}} H_p(X, U) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(U) \xrightarrow{i_{*p-1}} \dots$$

He aquí una primera aplicación sencilla:

Teorema 9.21 *Si X es un espacio topológico y U es un subespacio homotópico a un punto, entonces $H_p(X, U) \cong H_p(X)$ para todo $p \geq 0$ con la homología reducida (luego también con la completa para $p \geq 1$).*

DEMOSTRACIÓN: Basta tener en cuenta que en la sucesión exacta del par (X, U) todos los términos $H_p(U)$ son nulos, luego la identidad en X induce isomorfismos. ■

El teorema 4.11 se traduce fácilmente en el teorema siguiente, según el cual los homomorfismos inducidos por las aplicaciones continuas entre ternas conectan satisfactoriamente las sucesiones exactas largas de homología:

Teorema 9.22 *Sean $V \subset U \subset X$ y $V' \subset U' \subset X'$ espacios topológicos y $f : (X, U, V) \rightarrow (X', U', V')$ una aplicación continua. Entonces los cuadrados del diagrama siguiente son conmutativos:*

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & H_p(U, V) & \xrightarrow{i_*} & H_p(X, V) & \xrightarrow{j_*} & H_p(X, U) & \xrightarrow{\delta_*} & H_{p-1}(U, V) & \cdots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \cdots & H_p(U', V') & \xrightarrow{i'_*} & H_p(X', V') & \xrightarrow{j'_*} & H_p(X', U') & \xrightarrow{\delta_*} & H_{p-1}(U', V') & \cdots \end{array}$$

donde las flechas verticales representan los homomorfismos inducidos por f y su restricción a U .

DEMOSTRACIÓN: Aunque hasta ahora no habíamos considerado aplicaciones entre ternas, se entiende que la hipótesis sobre f es que $f : X \rightarrow X'$, $f[U] \subset U'$ y $f[V] \subset V'$. El resultado es consecuencia inmediata del teorema 4.11 una vez comprobado que los cuadrados del diagrama siguiente son conmutativos:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_p(U, V) & \xrightarrow{i^\#} & C_p(X, V) & \xrightarrow{j^\#} & C_p(X, U) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C_p(U', V') & \xrightarrow{i'^\#} & C_p(X', V') & \xrightarrow{j'^\#} & C_p(X', U') & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

La prueba requiere, como es habitual, tratar aparte los casos triviales. El caso principal es consecuencia inmediata de las definiciones. ■

Como es habitual, todos los resultados de esta sección se adaptan trivialmente al caso de la homología diferenciable.

Nota Análogamente a la observación tras el teorema 4.11, los dos teoremas anteriores prueban que la sucesión exacta larga asociada a cada terna (X, U, V) es funtorial, es decir, que determina un funtor definido sobre la categoría de todas las ternas de espacios topológicos (tales que $V \subset U \subset X$) con imagen en la categoría de las sucesiones exactas largas de \mathbb{A} -módulos. Igualmente, los homomorfismos de conexión pueden verse como transformaciones naturales entre los funtores oportunos. ■

9.6 El teorema de escisión

Nos ocupamos ahora del último resultado básico de la homología singular. El teorema de escisión se probará sin dificultad en cuanto hayamos demostrado un hecho intuitivamente evidente, pero cuya prueba formal requiere algún trabajo. Se trata de que un símlice puede ser subdividido en símlices arbitrariamente pequeños que formen una cadena con el mismo soporte que el símlice de partida. El lector deberá comprobar que todas las definiciones y demostraciones se adaptan trivialmente al caso diferenciable.

Empezamos introduciendo los conceptos necesarios para definir la subdivisión de un símlice.

Definición 9.23 Sea $\sigma = (y_0, \dots, y_p)$ un p -símlice singular afín en \mathbb{R}^n y sea $z \in \mathbb{R}^n$. Representaremos por $z\sigma$ al $p+1$ -símlice singular afín (z, y_0, \dots, y_p) . Si $\alpha = \sum_i a_i \sigma_i$ es una p -cadena formada por símlices afines en \mathbb{R}^n , llamaremos

$$z\alpha = \sum_i a_i (z\sigma_i).$$

La interpretación del teorema siguiente es clara:

Teorema 9.24 Sea α una cadena singular en \mathbb{R}^n formada por símlices afines y sea $z \in \mathbb{R}^n$. Entonces $\partial(z\alpha) = \alpha - z\partial\alpha$.

DEMOSTRACIÓN: Puesto que ambos miembros son lineales, basta probar que es cierto cuando $\alpha = \sigma = (y_0, \dots, y_p)$. Entonces

$$\begin{aligned} \partial(z\sigma) &= \partial(z, y_0, \dots, y_p) = (y_0, \dots, y_p) - \sum_{i=0}^p (-1)^i (z, y_0, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_p) \\ &= \sigma - z \sum_{i=0}^p (-1)^i (y_0, \dots, \hat{y}_i, \dots, y_p) = \sigma - z\partial\sigma. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definición 9.25 El *baricentro* de un p -símlice singular afín (y_0, \dots, y_p) es el punto

$$b = \sum_{i=0}^p \frac{1}{p+1} y_i.$$

Es fácil ver que el baricentro de un segmento es su punto medio, y el de un triángulo es el punto donde se cortan sus medianas.

Definimos ahora la subdivisión de una p -cadena singular afín α en \mathbb{R}^n , es decir, una p -cadena formada por símlices singulares afines. Observemos que por el teorema 9.8, la frontera de una cadena afín es una cadena afín. La definición es por inducción sobre p :

1. Si α es una 0-cadena, definimos $S(\alpha) = \alpha$.

2. Si σ es un p -símplice singular afín, definimos

$$S(\sigma) = bS(\partial\sigma),$$

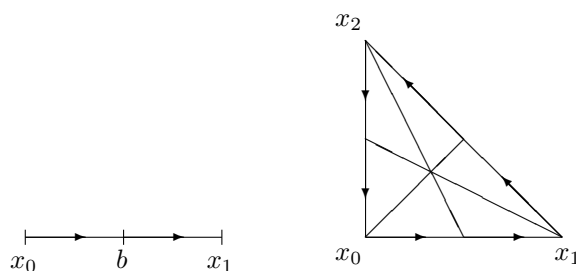
donde b es el baricentro de σ .

3. Si $\alpha = \sum_i a_i \sigma_i$ es una p -cadena singular afín en \mathbb{R}^n , definimos

$$S(\alpha) = \sum_i a_i S(\sigma_i).$$

En particular tenemos definida la subdivisión $S(x_0, \dots, x_p)$ del símplice canónico. Concretamente, $S(x_0) = (x_0)$, $S(x_0, x_1) = (b, x_1) - (b, x_0)$, donde b es el punto medio del segmento, $S(x_0, x_1, x_2)$ se forma dividiendo en dos cada lado del triángulo y adjuntando el baricentro a cada uno de los seis segmentos que obtenemos.

El lector puede calcular las orientaciones de los segmentos interiores del triángulo, y comprobará que se cancelan mutuamente, de modo que la frontera de la subdivisión resulta ser la subdivisión de la frontera del triángulo completo.



Definimos ahora la subdivisión de un p -símplice arbitrario $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$ como $S(\sigma) = \sigma^\#(S(x_0, \dots, x_p))$. Como es habitual, extendemos la definición a cadenas arbitrarias por linealidad, con lo que tenemos definidos homomorfismos

$$S : C_p(X) \rightarrow C_p(X).$$

Hemos de notar que tenemos dos definiciones distintas de la subdivisión de un símplice singular afín. Llamando S' a la subdivisión que hemos definido inductivamente, vamos a ver que $S(\sigma) = \sigma^\#(S'(x_0, \dots, x_p))$ coincide con $S'(\sigma)$.

Más en general, vamos a probar que si $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación afín, entonces $S' \circ f^\# = f^\# \circ S'$, pues aplicando esto a $f = \sigma$ obtenemos que

$$S(\sigma) = \sigma^\#(S'(x_0, \dots, x_p)) = S'(\sigma^\#(x_0, \dots, x_p)) = S'(\sigma).$$

Basta comprobar que $S' \circ f^\#$ y $f^\# \circ S'$ coinciden sobre un p -símplice singular afín σ . Razonaremos por inducción sobre p .

Si $p = 0$ tenemos que $S'(f^\#(\sigma)) = f^\#(\sigma) = f^\#(S'(\sigma))$. Supongamos que la igualdad es cierta para $p - 1$ -símplices, y por consiguiente para $p - 1$ -cadenas

afines. En particular esta hipótesis de inducción implica que $f^\sharp(S'(\partial\sigma)) = S'(f^\sharp(\partial\sigma))$. Notemos también que $f(b)$ es el baricentro de $f^\sharp(\sigma)$.

$$f^\sharp(S'(\sigma)) = f^\sharp(bS'(\partial\sigma)) = f(b)f^\sharp(S'(\partial\sigma)) = f(b)S'(\partial(f^\sharp(\sigma))) = S'(f^\sharp(\sigma)).$$

De este modo, ya no necesitamos distinguir entre S y S' . No enunciamos como teorema la igualdad que hemos probado porque el teorema siguiente la incluye como caso particular:

Teorema 9.26 *Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua entre espacios topológicos entonces $f^\sharp \circ S = S \circ f^\sharp$.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que ambas aplicaciones coinciden sobre un p -símplice σ en X .

$$\begin{aligned} f^\sharp(S(\sigma)) &= f^\sharp(\sigma^\sharp(S(x_0, \dots, x_p))) = (\sigma \circ f)^\sharp(S(x_0, \dots, x_p)) \\ &= S(\sigma \circ f) = S(f^\sharp(\sigma)). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Aunque no hemos usado subíndices explícitamente, en realidad tenemos definidos homomorfismos $S_p : C_p(X) \rightarrow C_p(X)$ para $p \geq 0$. Completamos la definición estableciendo que S_p es la identidad cuando $p < 0$, con lo que tenemos un homomorfismo de grado 0

$$S : C(X) \rightarrow C(X).$$

Veamos ahora que es un homomorfismo de complejos, es decir, que conmuta con el operador frontera, tal y como mostraba la figura del triángulo.

Teorema 9.27 *Si X es un espacio topológico, el operador de subdivisión*

$$S : C(X) \rightarrow C(X)$$

es un homomorfismo de complejos.

DEMOSTRACIÓN: Es claro que S_p conmuta con la frontera si $p \leq 0$, tanto para la homología reducida como para la completa. Razonando por inducción, podemos suponer que $S_{p-1} \circ \partial_{p-1} = \partial_{p-1} \circ S_{p-2}$. Ahora, si σ es un p -símplice arbitrario y b es el baricentro de (x_0, \dots, x_p) ,

$$\begin{aligned} \partial_p(S_p(\sigma)) &= \partial_p(S_p(\sigma^\sharp(x_0, \dots, x_p))) = \sigma^\sharp(\partial_p(S_p(x_0, \dots, x_p))) \\ &= \sigma^\sharp(\partial_p(bS_{p-1}(\partial_p(x_0, \dots, x_p)))) \quad \text{y por 9.24} \\ &= \sigma^\sharp(S_{p-1}(\partial_p(x_0, \dots, x_p))) - b\partial_{p-1}(S_{p-1}(\partial_p(x_0, \dots, x_p))) \\ &= S_{p-1}(\partial_p(\sigma)) - \sigma^\sharp(bS_{p-1}(\partial_{p-1}(\partial_p(x_0, \dots, x_p)))) \\ &= S_{p-1}(\partial_p(\sigma)). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

En cierto sentido, al subdividir una cadena obtenemos la misma cadena, sólo que construida con piezas más pequeñas. Esto se plasma en el teorema siguiente:

Teorema 9.28 *Para la homología completa, el operador subdivisión S es homotópico a la identidad.*

DEMOSTRACIÓN: Dado un espacio topológico, hemos de construir una homotopía de $C(X)$ en sí mismo, compuesta por homomorfismos

$$H_p : C_p(X) \longrightarrow C_{p+1}(X)$$

de modo que, para todo entero p y todo $\alpha \in C_p(X)$, se cumpla

$$S(\alpha) - \alpha = \partial H_p(\alpha) + H_{p-1}(\partial\alpha). \quad (9.5)$$

Además lo construiremos de manera que si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua, entonces

$$f^\# \circ H_p = H_p \circ f^\#.$$

Construiremos estos homomorfismos inductivamente. Si tomamos $H_p = 0$ para $p \leq 0$ ambas relaciones se cumplen trivialmente. Supongamos definido H_{p-1} de modo que se cumplan ambas igualdades.

En primer lugar definiremos $H_p(x_0, \dots, x_p)$. Según (9.5), debe cumplir

$$\partial H_p(x_0, \dots, x_p) = S(x_0, \dots, x_p) - (x_0, \dots, x_p) - H_{p-1}(\partial(x_0, \dots, x_p)). \quad (9.6)$$

Veamos que el miembro derecho es un ciclo en $C_p(\Delta_p)$. En efecto, su frontera es

$$\begin{aligned} & \partial(S(x_0, \dots, x_p) - \partial(x_0, \dots, x_p) - \partial(H_{p-1}(\partial(x_0, \dots, x_p)))) \\ &= S(\partial(x_0, \dots, x_p)) - \partial(x_0, \dots, x_p) \\ & - (S(\partial(x_0, \dots, x_p)) - \partial(x_0, \dots, x_p) - H_{p-1}(\partial^2(x_0, \dots, x_p))) = 0. \end{aligned}$$

Ahora bien, Δ_p es convexo, luego es contractible, luego sus grupos de homología coinciden con los del punto, con lo que $H_p(\Delta_p) = 0$ (para la homología completa), lo que significa que todos los p -ciclos son p -fronteras. Por consiguiente, podemos definir $H_p(x_0, \dots, x_p)$ eligiendo una $p+1$ -cadena en $C_{p+1}(\Delta_p)$ cuya frontera sea el miembro derecho de (9.6), de manera que (9.5) se cumple para (x_0, \dots, x_p) .

Para un p -símplice singular σ en un espacio topológico arbitrario X , definimos

$$H_p(\sigma) = \sigma^\#(H_p(x_0, \dots, x_p)),$$

y extendemos linealmente esta aplicación a un homomorfismo en $C_p(X)$.

Hemos de comprobar que cumple las dos relaciones. En primer lugar:

$$\begin{aligned} \partial H_p(\sigma) &= \partial(\sigma^\#(H_p(x_0, \dots, x_p))) = \sigma^\#(\partial H_p(x_0, \dots, x_p)) \\ &= \sigma^\#(S(x_0, \dots, x_p) - (x_0, \dots, x_p) - H_{p-1}(\partial(x_0, \dots, x_p))) \\ &= S(\sigma) - \sigma - H_{p-1}(\partial\sigma). \end{aligned}$$

Respecto a la segunda relación:

$$\begin{aligned} f^\#(H_p(\sigma)) &= f^\#(\sigma^\#(H_p(x_0, \dots, x_p))) \\ &= (\sigma \circ f)^\#(H_p(x_0, \dots, x_p)) = H_p(\sigma \circ f) = H_p(f^\#(\sigma)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Si X es un espacio topológico y $U \subset X$, entonces, el hecho de que la subdivisión S conmute con $i^\#$, donde $i : U \rightarrow X$ es la inclusión, se traduce en que S induce un homomorfismo $S : C(X, U) \rightarrow C(X, U)$ con las mismas propiedades que S . Similarmente, el hecho de que la homotopía construida en el teorema anterior conmute con $i^\#$ significa que induce una homotopía en $C(X, U)$ entre S y la identidad. La observación tras la definición 4.7 nos da ahora el teorema siguiente:

Teorema 9.29 *Sea X un espacio topológico y $U \subset X$. Entonces, en la homología completa, $S_{*p} : H_p(X, U) \rightarrow H_p(X, U)$ es la identidad.*

Ahora vamos a comprobar que, subdividiendo una cadena un número suficiente de veces, podemos conseguir que sus símlices sean arbitrariamente pequeños. Supongamos primeramente que $\sigma = (y_0, \dots, y_p)$ es un p -símlice singular afín en \mathbb{R}^n . Representaremos por $\|\cdot\|$ a la norma euclídea en \mathbb{R}^n y por $d(|\sigma|)$ al diámetro del soporte $|\sigma|$ respecto a dicha norma.

Si $u, v \in |\sigma|$, entonces $u = \sum_{i=0}^p a_i y_i$, $v = \sum_{i=0}^p b_i y_i$ donde los coeficientes son no negativos y suman 1. Por lo tanto

$$\|u - v\| = \left\| \sum_{i=0}^p a_i (y_i - v) \right\| \leq \sum_{i=0}^p a_i \|y_i - v\| \leq \max_i \|y_i - v\|.$$

Repetiendo el argumento con cada término de la última expresión llegamos a que

$$\|u - v\| \leq \max_{i,j} \|y_i - y_j\|,$$

luego claramente

$$d(|\sigma|) = \max_{i,j} \|y_i - y_j\|. \quad (9.7)$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \|y_i - v\| &= \left\| \sum_{j=0}^p b_j (y_i - y_j) \right\| \leq \sum_{j \neq i} b_j \|y_i - y_j\| \\ &\leq (1 - b_i) \max_{i,j} \|y_i - y_j\| = (1 - b_i) d(|\sigma|). \end{aligned}$$

En particular, si $v = b_\sigma = \sum_{i=0}^p \frac{1}{p+1} y_i$, tenemos que

$$\|y_i - b_\sigma\| \leq \frac{p}{p+1} d(|\sigma|).$$

luego, por (9.7),

$$\|u - b_\sigma\| \leq \frac{p}{p+1} d(|\sigma|), \quad \text{para todo } u \in |\sigma|. \quad (9.8)$$

Con esto podemos probar:

Teorema 9.30 *Sea σ un p -símplice singular afín en \mathbb{R}^n . Entonces, cada p -símplice τ de $S(\sigma)$ cumple*

$$d(|\tau|) \leq \frac{p}{p+1} d(|\sigma|).$$

DEMOSTRACIÓN: Lo probamos por inducción sobre p . Para $p = 0$ es trivialmente cierto, pues todos los diámetros son nulos. Supongámoslo cierto para $p - 1$. Como $S(\sigma) = b_\sigma S(\partial\sigma)$, el símplice τ es de la forma $b_\sigma \tau'$, donde τ' es uno de los símplices de $S(\partial\sigma)$. Más exactamente, es uno de los símplices de $S(\rho)$, donde ρ es uno de los símplices de $\partial\sigma$. Es claro que $|\rho| \subset |\sigma|$, luego $d(|\rho|) \leq d(|\sigma|)$. Por hipótesis de inducción

$$d(|\tau'|) \leq \frac{p-1}{p} d(|\sigma|) \leq \frac{p}{p+1} d(|\sigma|).$$

Hemos de estimar la distancia entre dos vértices de τ . Si ambos están en τ' sirve la cota anterior. En caso contrario uno es b_σ y el otro está en $|\tau'| \subset |\sigma|$, luego nos sirve (9.8). En cualquier caso tenemos la cota del enunciado. ■

Ahora es claro que subdividiendo un símplice singular afín podemos obtener cadenas con símplices de diámetro arbitrariamente pequeño. Para un símplice en un espacio topológico arbitrario no podemos hablar de diámetro, pero podemos exigir que los símplices estén dominados por un cubrimiento abierto arbitrario:

Teorema 9.31 *Sea $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$ un p -símplice singular en un espacio topológico X y sea \mathcal{U} un cubrimiento abierto de X . Entonces existe un número natural n tal que cada símplice de $S^n(\sigma)$ está contenido en un abierto de \mathcal{U} .*

DEMOSTRACIÓN: Las antiimágenes por σ de los abiertos de \mathcal{U} forman un cubrimiento abierto de Δ_p . Por el lema del cubrimiento de Lebesgue 1.1 existe un $\epsilon > 0$ tal que todo subconjunto de Δ_p de diámetro menor que ϵ está contenido en uno de los abiertos de \mathcal{U} .

Del teorema 9.30 se sigue que existe un número natural n tal que cada símplice de $S^n(x_0, \dots, x_n)$ tiene diámetro menor que ϵ , luego está contenido en un abierto de \mathcal{U} . Como $S^n(\sigma) = \sigma^\sharp(S^n(x_0, \dots, x_p))$, es claro que n cumple lo pedido. ■

Finalmente estamos en condiciones de demostrar el teorema de escisión. Su enunciado es sencillo: si $V \subset U \subset X$, los grupos de homología $H_p(X, U)$ se forman despreciando los símplices contenidos en U , por lo que es razonable esperar que no se alteren al eliminar V , es decir, que sean isomorfos a los grupos $H_p(X \setminus V, U \setminus V)$. En realidad es necesaria una hipótesis topológica adicional:

Teorema 9.32 (Teorema de escisión) Sean $V \subset U \subset X$ espacios topológicos tales que $\bar{V} \subset \overset{\circ}{U}$. Entonces la inclusión

$$i : (X \setminus V, U \setminus V) \longrightarrow (X, U)$$

induce isomorfismos naturales⁸

$$i_* : H_p(X \setminus V, U \setminus V) \longrightarrow H_p(X, U)$$

para la homología completa.

DEMOSTRACIÓN: Veamos que i_* es suprayectiva. Sea $[\alpha] \in H_p(X, U)$. Consideremos el cubrimiento de X formado por los dos abiertos $X \setminus \bar{V}$ y $\overset{\circ}{U}$. Por el teorema anterior existe un n tal que cada símplice en $S^n(\alpha)$ está contenido en uno de estos dos abiertos. Por el teorema 9.29, $[S^n(\alpha)] = S_*^n([\alpha]) = [\alpha]$. Esto significa que podemos suponer que α está formada por símplices contenidos en $X \setminus \bar{V}$ o $\overset{\circ}{U}$, pero los que están en $\overset{\circ}{U}$ podemos eliminarlos, porque son nulos módulo U .

En definitiva, toda clase de $H_p(X, U)$ tiene un representante formado por símplices contenidos en $X \setminus \bar{V}$, luego la clase tiene antiimagen en $H_p(X \setminus V, U \setminus V)$.

Supongamos ahora que $i_*([\alpha]) = 0$. Esto significa que $\alpha = \partial\beta + \gamma$, donde $\beta \in C_{p+1}(X)$ y $\gamma \in C_p(U)$. Podemos aplicar repetidas veces el operador S a esta igualdad sin cambiar por ello la clase $[\alpha]$. Con ello podemos exigir que $\beta = \beta_1 + \beta_2$, donde $\beta_1 \in C_{p+1}(\overset{\circ}{U})$ y $\beta_2 \in C_{p+1}(X \setminus \bar{V})$. Así

$$\alpha - \partial\beta_2 = \partial\beta_1 + \gamma.$$

Pero el miembro izquierdo está en $C_p(X \setminus V)$ y el miembro derecho en $C_p(U)$, luego ambos están en $C_p(U \setminus V)$. Así pues, $\alpha - \partial\beta_2 \in C_p(U \setminus V)$, luego $[\alpha] = 0$, como queríamos probar. ■

Nota El teorema de escisión es también válido por lo general para la homología reducida. En efecto, esto es trivialmente cierto si $X = \emptyset$ o $U = \emptyset$. Si no es así, el teorema 9.10 nos da que los grupos $H_n(X, U)$ son los mismos para ambas homologías, y lo mismo ocurre con $H_n(X \setminus V, U \setminus V)$ salvo si $U = V$. Así, si $U \neq V$, todos los grupos que aparecen en el teorema de escisión son independientes de la homología considerada, y claramente lo mismo sucede con los homomorfismos i_* , luego el teorema se cumple igualmente. Notemos que en el caso excepcional U ha de ser abierto y cerrado en X . Usando el teorema 9.13 es fácil encontrar ejemplos de esta situación en los que no se cumple el teorema de escisión. ■

Veamos una primera aplicación:

⁸Insistimos en que esto significa que la aplicación que a cada terna (X, U, V) en las condiciones del enunciado le asigna i_{*p} es un isomorfismo natural entre los funtores dados por $(X, U, V) \mapsto H_p(X \setminus V, U \setminus V)$ y $(X, U, V) \mapsto H_p(X, U)$. La comprobación de esta naturalidad es trivial.

Teorema 9.33 *Sea X un espacio topológico y sea A un cerrado en X tal que exista un abierto $A \subset U \subset X$ de modo que A sea un retracto por deformación fuerte de U . Entonces la proyección canónica $\pi : X \rightarrow X/A$ induce isomorfismos $H_p(X, A) \cong H_p(X/A, \{a\}) \cong H_p(X/A)$ (donde $\pi[A] = \{a\}$), para la homología reducida (luego también con la completa si $p \geq 1$).*

DEMOSTRACIÓN: El teorema 9.18 nos da que $H_p(U, A) = 0$ para todo índice p , luego la sucesión exacta de homología de $A \subset U \subset X$ nos da que la inclusión $j : (X, A) \rightarrow (X, U)$ induce isomorfismos $j_{*p} : H_p(X, A) \rightarrow H_p(X, U)$.

Por 1.46 tenemos que a es un retracto por deformación fuerte de U/A , luego obtenemos igualmente isomorfismos $j_{*p} : H_p(X/A, \{a\}) \rightarrow H_p(X/A, U/A)$.

El diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} H_p(X, A) & \xrightarrow{j_*} & H_p(X, U) & \xleftarrow{i_*} & H_p(X \setminus A, U \setminus A) \\ \pi_* \downarrow & & \pi_* \downarrow & & \downarrow \pi_* \\ H_p(X/A, \{a\}) & \xrightarrow{j_*} & H_p(X/A, U/A) & \xleftarrow{i_*} & H_p(X/A \setminus \{a\}, U/A \setminus \{a\}) \end{array}$$

donde los homomorfismos i_* son los isomorfismos dados por el teorema de escisión. Además, la flecha vertical derecha es un isomorfismo porque la restricción $\pi|_{X \setminus A} : X \setminus A \rightarrow X/A \setminus \{a\}$ es un homeomorfismo. Concluimos que también es un isomorfismo la flecha vertical izquierda, luego

$$H_p(X, A) \cong H_p(X/A, \{a\}) \cong H_p(X/A),$$

donde hemos usado el teorema 9.21. ■

De aquí se deducen varias consecuencias. Por ejemplo, podemos calcular los grupos de homología de la circunferencia:

Teorema 9.34 *Los grupos de cohomología completa de S^1 son:*

$$H_p(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } p = 0, 1, \\ 0 & \text{si } p \geq 2. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: Podemos ver a S^1 como el cociente de I cuando se identifica a un punto el conjunto $A = \{0, 1\}$. Claramente A es un retracto por deformación fuerte de un entorno, por lo que el teorema anterior nos da que $H_p(S^1) \cong H_p(X, A)$ para la homología reducida. Ahora consideramos la sucesión exacta de homología

$$\rightarrow H_1(A) \rightarrow H_1(I) \rightarrow H_1(S^1) \rightarrow H_0(A) \rightarrow H_0(I) \rightarrow H_0(S^1) \rightarrow 0.$$

Como I es homotópico a un punto, sus grupos de homología reducida son triviales. Por 9.13 sabemos que $H_0(A) \cong \mathbb{A}$ y que $H_0(X_r) = 0$ y por 9.12 tenemos además que $H_p(A) = 0$ para $p \geq 1$. Por lo tanto, la sucesión exacta se reduce a

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow H_1(S^1) \rightarrow \mathbb{A} \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

Por lo tanto, $H_1(S^1) \cong \mathbb{A}$. Más aún, prolongando la sucesión exacta hacia la izquierda vemos que los restantes grupos de homología son nulos. La homología completa la deducimos ahora de los teoremas 9.10 y 9.13. ■

Si analizamos cómo hemos llegado al isomorfismo $H_p(S^1) \cong \mathbb{A}$, vemos que ha sido a través de las composiciones siguientes:

$$\mathbb{Z} \longleftarrow H_0(A) \xleftarrow{\delta} H_1(I, A) \xrightarrow{\pi_*} H_1(S^1, \{(1, 0)\}) \xleftarrow{i_*} H_1(S^1),$$

donde $\pi : I \rightarrow S^1$ es la composición del homomorfismo $I \rightarrow I/A$ con un isomorfismo $I/A \cong S^1$. Por ejemplo sirve $\pi(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$. En la prueba de 9.13 se ve que un generador de $H_0(A)$ es $[1 - 0] = \delta([\sigma])$, donde $\sigma : I \rightarrow I$ es la identidad (que, ciertamente cumple $\sigma \in C_1(I, A)$), luego $[\sigma]$ genera $H_1(I, A)$ y $\pi_*([\sigma]) = [\pi]$ genera $H_1(S^1, \{(1, 0)\})$, luego la clase $[\pi] \in H_1(S^1)$ genera el grupo de cohomología de la circunferencia.

Teorema 9.35 (Homología de los ramos) *Sea $\{X_j\}_{j \in J}$ una familia de espacios topológicos y sea $x_j \in X_j$ un punto que sea un retracto por deformación fuerte de un entorno en X_j . Entonces, para la homología reducida,*

$$H_p(\bigvee_{j \in J} X_j) \cong \bigoplus_{j \in J} H_p(X_j).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $A = \{x_j \mid j \in J\} \subset \bigoplus_{j \in J}^n X_j$. Es claro que A es un retracto por deformación fuerte de un entorno, luego podemos aplicar el teorema 9.33, según el cual

$$H_p(\bigvee_{j \in J} X_j) \cong H_p(\bigoplus_{j \in J} X_j, A) \cong \bigoplus_{j \in J} H_p(X_j, \{x_j\}) \cong \bigoplus_{j \in J} H_p(X_j),$$

donde hemos usado 9.12 y 9.21. ■

Nota Si analizamos los isomorfismos considerados en la prueba del teorema anterior, veremos fácilmente que la inyección canónica

$$H_p(X_j) \longrightarrow H_p(\bigvee_{j \in J} X_j)$$

es simplemente la inducida por la restricción de la proyección en el cociente $\pi : X_j \rightarrow \bigvee_{j \in J} X_j$. ■

En particular:

Teorema 9.36 (Homología de las rosas) *Si R_κ es la rosa de κ pétalos (definición 3.7), su homología completa es*

$$H_0(R_\kappa) \cong \mathbb{A}, \quad H_1(R_\kappa) \cong L_\kappa, \quad H_p(R_\kappa) = 0 \quad \text{para } p \geq 2,$$

donde L_κ es la suma directa de κ copias de \mathbb{A} .

Así tenemos una prueba alternativa a la dada en 8.28 de que dos rosas son homotópicas si y sólo si tienen el mismo número de pétalos.

Como última aplicación de 9.33 probamos que, bajo condiciones razonables, los homeomorfismos relativos inducen isomorfismos entre los grupos de homología. Recordemos que un homeomorfismo relativo $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ es una aplicación continua tal que $f|_{X \setminus U} : X \setminus U \rightarrow Y \setminus V$ es un homeomorfismo.

Teorema 9.37 (Teorema del homeomorfismo relativo) *Consideremos un homeomorfismo relativo $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ entre pares de espacios compactos tales que U y V sean retractos por deformación fuertes de entornos respectivos. Entonces f induce isomorfismos*

$$f_* : H_p(X, U) \rightarrow H_p(Y, V).$$

DEMOSTRACIÓN: Es claro que f induce una aplicación continua f' que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ X/U & \xrightarrow{f'} & Y/V \end{array}$$

Del hecho de que f sea un homeomorfismo relativo se sigue que f' es biyectiva, luego por compacidad es un homeomorfismo. En correspondencia, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_p(X, U) & \xrightarrow{f_*} & H_p(Y, V) \\ \pi_* \downarrow & & \downarrow \pi_* \\ H_p(X/U, \{u\}) & \xrightarrow{f'_*} & H_p(Y/V, \{v\}) \end{array}$$

La flecha inferior es un isomorfismo y por el teorema 9.33 también lo son las verticales, luego f_* también lo es. ■

Los resultados que hemos obtenido hasta aquí son suficientes para obtener muchas más aplicaciones notables de la homología singular, pero, en lugar de obtenerlas directamente, lo haremos con mucha más comodidad a través de un teorema que probaremos en la sección siguiente. La prueba de dicho teorema no requiere el teorema de escisión, pero éste es imprescindible para aplicarlo. Concretamente, intervendrá a través del resultado siguiente:

Teorema 9.38 *Sean U_1 y U_2 abiertos en un espacio topológico. Entonces la inclusión $i : (U_1, U_1 \cap U_2) \rightarrow (U_1 \cup U_2, U_2)$ induce isomorfismos naturales*

$$i_* : H_p(U_1, U_1 \cap U_2) \rightarrow H_p(U_1 \cup U_2, U_2)$$

(para la homología reducida hemos de exigir que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$).

DEMOSTRACIÓN: Consideremos en primer lugar la homología completa. Tomemos $V = U_2 \setminus U_1$. Claramente V es cerrado en $U_1 \cup U_2$. El teorema de escisión aplicado al espacio $U_1 \cup U_2$ nos da que la inclusión

$$i : ((U_1 \cup U_2) \setminus V, U_2 \setminus V) \longrightarrow (U_1 \cup U_2, U_2)$$

induce isomorfismos entre los grupos de homología, y ésta es la inclusión indicada en el enunciado.

Para la homología reducida observamos que si $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, todos los grupos de homología que estamos considerando son grupos de homología relativa respecto a conjuntos no vacíos, luego el teorema 9.10 nos da que son los mismos para las dos homologías, y obviamente lo mismo vale para los homomorfismos inducidos por las inclusiones, así que el teorema sigue siendo cierto. ■

Más en general, podemos introducir el concepto siguiente:

Definición 9.39 Una *tríada* es una terna (X, U_1, U_2) , donde X es un espacio topológico y U_1, U_2 son subespacios arbitrarios. La tríada es *exacta* si las inclusiones

$$i : (U_1, U_1 \cap U_2) \longrightarrow (U_1 \cup U_2, U_2), \quad i : (U_2, U_1 \cap U_2) \longrightarrow (U_1 \cup U_2, U_1)$$

inducen isomorfismos en los grupos de homología.

Hemos probado que cualquier par de abiertos determina una tríada exacta en un espacio topológico (para la homología reducida hemos de exigir que su intersección sea no vacía).

La técnica que hemos empleado para probar el teorema de escisión nos permite probar un resultado de interés por sí mismo. Necesitamos algunas definiciones:

Definición 9.40 Sea X un espacio topológico y \mathcal{U} un cubrimiento abierto de X . Llamaremos $C_p(X; \mathcal{U})$ al submódulo de $C_p(X)$ generado por los p -símplices cuyo soporte está contenido en un abierto de \mathcal{U} . Para $p \leq 0$, tomamos $C_p(X; \mathcal{U}) = C_p(X)$. Es claro que la frontera de una p -cadena de $C_p(X; \mathcal{U})$ está en $C_{p-1}(X; \mathcal{U})$. Por lo tanto los módulos $C_p(X; \mathcal{U})$ forman un complejo con la restricción del operador frontera. Representaremos por $H_p(X; \mathcal{U})$ a los grupos de homología de este complejo.

Teorema 9.41 Sea X un espacio topológico y \mathcal{U} un cubrimiento abierto de X . Entonces, la inclusión $i : C(X; \mathcal{U}) \longrightarrow C(X)$ induce isomorfismos

$$i_* : H_p(X; \mathcal{U}) \longrightarrow H_p(X).$$

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 9.31, para cada p -símplice $\sigma \in C_p(X)$, podemos definir $m(c)$ como el menor natural tal que $S^{m(c)}(c) \in C_p(X; \mathcal{U})$. Por (9.5), para cada natural k tenemos la relación

$$S^k(c) - S^{k-1}(c) = \partial H(S^{k-1}(c)) + H(S^{k-1}(\partial c)).$$

Sumando estas igualdades resulta

$$S^{m(\sigma)}(\sigma) - \sigma = \partial H((1 + S + \dots + S^{m(\sigma)-1})(\sigma)) + H((1 + S + \dots + S^{m(\sigma)-1})(\partial\sigma)).$$

Para cada p -símplice σ , definimos

$$T(\sigma) = H((1 + S + \dots + S^{m(\sigma)-1})(\sigma)).$$

Entendemos que si $m(\sigma) = 0$ entonces $T(\sigma) = 0$. Por linealidad, T se extiende a un homomorfismo $T : C_p(X) \rightarrow C_{p+1}(X)$. Definimos $T_p = 0$ para $p < 0$.

Por abreviar, llamemos $\sigma_i = \sigma^\sharp(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p)$, de manera que $\partial\sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i \sigma_i$. Observemos que $m(\sigma_i) \leq m(\sigma)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \partial T(\sigma) + T(\partial\sigma) &= \partial H((1 + S + \dots + S^{m(\sigma)-1})(\sigma)) + \sum_{i=0}^p (-1)^i T(\partial_i\sigma) \\ &= S^{m(\sigma)}(\sigma) - \sigma - \sum_{i=0}^p (-1)^i H((1 + S + \dots + S^{m(\sigma)-1})(\partial_i\sigma)) \\ &\quad + \sum_{i=0}^p (-1)^i H((1 + S + \dots + S^{m(\partial_i\sigma)-1})(\partial_i\sigma)) \\ &= S^{m(\sigma)}(\sigma) - \sigma - \sum_{i=0}^p (-1)^i H(S^{m(\partial_i\sigma)} + \dots + S^{m(\sigma)-1})(\partial_i\sigma). \end{aligned}$$

Ahora definimos

$$\Phi(\sigma) = S^{m(\sigma)}(\sigma) - \sum_{i=0}^p (-1)^i H(S^{m(\partial_i\sigma)} + \dots + S^{m(\sigma)-1})(\partial_i\sigma),$$

siempre entendiendo que el segundo sumando es nulo si $m(\sigma) = 0$. Extendemos la definición hasta un homomorfismo $\Phi : C_p(X) \rightarrow C_p(X; \mathcal{U})$. Es inmediato comprobar que se trata de un homomorfismo de complejos (es decir, que conmuta con las fronteras), y hemos probado la relación

$$T \circ \partial + \partial \circ T = \Phi \circ i - 1.$$

(Notemos que se cumple trivialmente para $p \leq 0$). Así pues, el homomorfismo $\Phi \circ i$ es homotópico a la identidad, y claramente $i \circ \Phi = 1$, luego i_* es un isomorfismo, inverso de Φ_* . ■

Como aplicación podemos probar la equivalencia entre la homología singular y la homología singular diferenciable:

Teorema 9.42 *Si V es una variedad diferencial y $U \subset V$ es un abierto, la inclusión*

$$i : C^\infty(V, U) \rightarrow C(V, U)$$

induce isomorfismos naturales $H_p^\infty(V, U) \rightarrow H_p(V, U)$.

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 1.36, tenemos que V admite un cubrimiento abierto tal que toda intersección finita W de abiertos del cubrimiento es contractible, luego $H_p(W) = 0$ y $H_p^\infty(W) = 0$, para todo $p \geq 1$.

En otras palabras, tenemos un cubrimiento abierto de V tal que todo p -ciclo (diferenciable) en V cuyo soporte esté contenido en una intersección de abiertos de \mathcal{U} (para $p \geq 1$) es la frontera de una $p+1$ -cadena (diferenciable) contenida en esa misma intersección.

Tratamos en primer lugar el caso $U = \emptyset$, para lo cual consideramos el diagrama siguiente, formado por los homomorfismos que inducen las inclusiones:

$$\begin{array}{ccc} H_p^\infty(V; \mathcal{U}) & \longrightarrow & H_p(V; \mathcal{U}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_p^\infty(V) & \longrightarrow & H_p(V) \end{array}$$

Claramente es conmutativo y sabemos que las flechas verticales son isomorfismos, luego basta probar que la flecha superior lo es para que lo sea la inferior, que es lo que queremos demostrar.

Para ello construiremos una inversa homotópica de la inclusión, es decir, un homomorfismo de complejos $\alpha : C(V; \mathcal{U}) \rightarrow C^\infty(V; \mathcal{U})$ de modo que $i_p \circ \alpha_p$ y $\alpha_p \circ i_p$ sean homotópicas a la identidad, con lo que los homomorfismos inducidos por α entre los grupos de homología serán los inversos de los inducidos por la inclusión.

Más concretamente, construiremos α de modo que, para todo $c \in C_p(V; \mathcal{U})$ y todo abierto $U \in \mathcal{U}$ tal que $|c| \subset U$, se cumpla que $|\alpha_p(c)| \subset U$. Más aún, si $c \in C_p^\infty(V; \mathcal{U})$ entonces $\alpha_p(c) = c$.

Tomamos $\alpha_p = 0$ para $p < 0$ y definimos α_0 como la identidad en el módulo $C_0^\infty(V; \mathcal{U}) = C_0(V; \mathcal{U})$. Supongamos construidos α_i para $i \leq p$ de modo que cumplan las condiciones indicadas (en particular de modo que conmuten con el operador frontera).

Sea σ un $p+1$ -símplice en V cuyo soporte esté contenido en alguno de los abiertos de \mathcal{U} , y sea C la intersección de todos los abiertos que contienen a este soporte (que son un número finito porque \mathcal{U} es localmente finito).

Es claro entonces que $|\partial\sigma| \subset C$, luego por hipótesis de inducción tenemos que $|\alpha_p(\partial\sigma)| \subset C$. Además,

$$\partial\alpha_p(\partial\sigma) = \alpha_p(\partial\partial\sigma) = 0.$$

Así pues, $\alpha_p(\partial\sigma)$ es un p -ciclo diferenciable en C , luego es la frontera de una $p+1$ -cadena diferenciable en C , a la que tomamos como $\alpha_{p+1}(\sigma)$. De este modo se cumple que

$$\partial\alpha_{p+1}(\sigma) = \alpha_p(\partial\sigma).$$

Notemos además que si σ es diferenciable entonces $\partial\sigma$ también lo es, y por hipótesis de inducción $\alpha_p(\partial\sigma) = \partial\sigma$, luego podemos tomar $\alpha_{p+1}(\sigma) = \sigma$.

Extendemos la definición de α_{p+1} por linealidad a todas las $p+1$ -cadenas, y es claro que α_{p+1} cumple todos los requisitos.

En particular tenemos que $i_p \circ \alpha_p = 1$, luego sólo nos queda demostrar que $\alpha_p \circ i_p$ es homotópico a la identidad. Así pues, hemos de construir un homomorfismo $H : C(V; \mathcal{U}) \rightarrow C(V; \mathcal{U})$ de grado 1 tal que, para toda cadena $c \in C(V; \mathcal{U})$, se cumpla $\alpha(c) - c = H(\partial c) + \partial H(c)$. Exigiremos también que si $|c| \subset U \in \mathcal{U}$ entonces $|H(c)| \subset U$.

Definimos $H_p = 0$ para $p < 0$ y $H_0(x) = c_x$ (el 1-símplice constante x). Supuesto definido H_{p-1} , tomamos $\sigma \in C_p(V; \mathcal{U})$, y llamamos C a la intersección de los abiertos de \mathcal{U} que contienen a $|\sigma|$. Las hipótesis de inducción implican inmediatamente que $\alpha(\sigma) - \sigma - H_{p-1}(\partial\sigma)$ es un p -ciclo (no necesariamente diferenciable) con soporte contenido en C , luego existe $H_p(\sigma) \in C_{p+1}(V; \mathcal{U})$ con soporte contenido en C tal que $\partial H(\sigma) = \alpha(\sigma) - \sigma - H(\partial\sigma)$. Ahora basta extender la definición por linealidad a todas las p -cadenas y tenemos la homotopía buscada.

Para la homología relativa consideramos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C^\infty(U) & \longrightarrow & C^\infty(V) & \longrightarrow & C^\infty(V, U) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C(U) & \longrightarrow & C(V) & \longrightarrow & C(V, U) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Al formar las sucesiones exactas de homología obtenemos un diagrama conmutativo en el que dos de cada tres flechas verticales son isomorfismos, luego por 4.12 todas lo son. ■

9.7 La sucesión de Mayer-Vietoris

Si (X, U_1, U_2) es una tríada exacta, el teorema de Mayer-Vietoris relaciona los grupos de homología de U_1 , U_2 , $U_1 \cup U_2$ y $U_1 \cap U_2$. En muchos casos esto es suficiente para reducir el cálculo de la homología de un espacio a la de otros más simples.

Observemos que si (X, U_1, U_2) es una tríada de espacios topológicos, podemos considerar a $C(U_1 \cap U_2) = C(U_1) \cap C(U_2)$ como subcomplejo de cada $C(U_i)$, a cada $C(U_i)$ como subcomplejo de $C(X)$ y a $C(U_1) + C(U_2)$ y $C(U_1 \cup U_2)$ como subcomplejos de $C(X)$ (la suma es la suma como submódulos de $C(X)$). Estos dos últimos no son iguales, pero se cumple lo siguiente:

Teorema 9.43 Sean (X, U_1, U_2) y (X, V_1, V_2) dos tríadas exactas de espacios topológicos tales que $V_i \subset U_i$. Entonces el homomorfismo inducido por la inclusión

$$(C(U_1) + C(U_2)) / (C(V_1) + C(V_2)) \longrightarrow C(U_1 \cup U_2) / C(V_1 \cup V_2)$$

induce a su vez isomorfismos

$$H_p((C(U_1) + C(U_2)) / (C(V_1) + C(V_2))) \longrightarrow H_p(U_1 \cup U_2, V_1 \cup V_2).$$

DEMOSTRACIÓN: Las inclusiones inducen el siguiente diagrama conmutativo de homomorfismos de complejos:

$$\begin{array}{ccc} C(U_1, U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & C(U_1 \cup U_2, U_2) \\ \downarrow & \nearrow & \\ (C(U_1) + C(U_2))/C(U_2) & & \end{array}$$

Teniendo en cuenta que $C(U_1, U_1 \cap U_2) = C(U_1)/(C(U_1) \cap C(U_2))$, uno de los teoremas de isomorfía de módulos nos da que la flecha vertical es un isomorfismo, luego induce isomorfismos entre los grupos de homología de ambos complejos. Lo mismo sucede con la flecha horizontal debido a la exactitud de la tríada. Por consiguiente, la flecha oblicua también induce isomorfismos

$$H_p((C(U_1) + C(U_2))/C(U_2)) \longrightarrow H_p(U_1 \cup U_2, U_2). \quad (9.9)$$

Lo mismo es válido para V_1 y V_2 . Consideramos ahora el diagrama conmutativo de complejos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & C(U_1)/C(V_1) & \longrightarrow & (C(U_1) + C(U_2))/C(V_1) & \longrightarrow & (C(U_1) + C(U_2))/C(U_1) & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & C(U_1, V_1) & \longrightarrow & C(U_1 \cup U_2, V_1) & \longrightarrow & C(U_1 \cup U_2, U_1) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Todos los homomorfismos son los inducidos por las inclusiones. Las filas son exactas. El teorema 4.11 nos da un diagrama conmutativo entre los grupos de homología de estos complejos, al que podemos aplicar el teorema anterior. Observemos que los homomorfismos inducidos por la flecha vertical de la izquierda son identidades, y acabamos de probar que los inducidos por la flecha de la derecha son isomorfismos. El teorema anterior nos da que la inclusión induce isomorfismos

$$H_p((C(U_1) + C(U_2))/C(V_1)) \longrightarrow H_p(U_1 \cup U_2, V_1). \quad (9.10)$$

Ahora consideramos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & (C(V_1) + C(V_2))/C(V_1) & \longrightarrow & (C(U_1) + C(U_2))/C(V_1) & \longrightarrow & (C(U_1) + C(U_2))/C(V_1 + C(V_2)) & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & C(V_1 \cup V_2, V_1) & \longrightarrow & C(U_1 \cup U_2, V_1) & \longrightarrow & C(U_1 \cup U_2, V_1 \cup V_2) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

La situación es idéntica a la anterior. Ahora la flecha vertical de la izquierda induce los isomorfismos (9.9) y la del centro los isomorfismos (9.10). El teorema 4.12 nos da entonces los isomorfismos buscados. ■

Con esto ya podemos probar el resultado principal de esta sección:

Teorema 9.44 (Teorema de Mayer-Vietoris) Sean (X, U_1, U_2) y (X, V_1, V_2) dos tríadas exactas tales que $V_i \subset U_i$. Sean

$$\phi_p : H_p(U_1, V_1) \oplus H_p(U_2, V_2) \longrightarrow H_p(U_1 \cup U_2, V_1 \cup V_2),$$

$$\psi_p : H_p(U_1 \cap U_2, V_1 \cap V_2) \longrightarrow H_p(U_1, V_1) \oplus H_p(U_2, V_2)$$

los homomorfismos dados por

$$\phi_p(c_1, c_2) = i_{1*}(c_1) - i_{2*}(c_2), \quad \psi_p(c) = (j_{1*}(c), j_{2*}(c)),$$

donde las aplicaciones i_* , j_* son las inducidas por las inclusiones correspondientes. Entonces existen homomorfismos naturales

$$\Delta_p : H_p(U_1 \cup U_2, V_1 \cup V_2) \longrightarrow H_{p-1}(U_1 \cap U_2, V_1 \cap V_2)$$

tales que la sucesión siguiente es exacta:

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_{p+1}(U_1 \cup U_2, V_1 \cup V_2) &\xrightarrow{\Delta} H_p(U_1 \cap U_2, V_1 \cap V_2) \\ \xrightarrow{\psi} H_p(U_1, V_1) \oplus H_p(U_2, V_2) &\xrightarrow{\phi} H_p(U_1 \cup U_2, V_1 \cup V_2) \xrightarrow{\Delta} \cdots \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos $C(U_1, V_1) \oplus C(U_2, V_2)$, que tiene estructura de complejo de forma natural, es decir, el módulo de las p -cadenas es la suma directa de los módulos correspondientes de cada sumando y la frontera se define componente a componente. Formamos la sucesión exacta

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow C(U_1 \cap U_2, V_1 \cap V_2) &\xrightarrow{f} C(U_1, V_1) \oplus C(U_2, V_2) \\ &\xrightarrow{g} (C(U_1) + C(U_2)) / (C(V_1) + C(V_2)) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

donde $f([c]) = ([c], [c])$ y $g([c_1], [c_2]) = [c_1 - c_2]$.

La sucesión de Mayer-Vietoris es la sucesión de homología asociada a esta sucesión exacta, salvo por el hecho de que en ella aparecen los grupos de homología $H_p((C(U_1) + C(U_2)) / (C(V_1) + C(V_2)))$ en lugar de $H_p(U_1 \cup U_2, V_1 \cup V_2)$, pero el teorema anterior nos permite identificarlos de forma natural. ■

Habitualmente necesitaremos únicamente el caso particular del teorema anterior que se obtiene al hacer $V_1 = V_2 = \emptyset$ (observemos que la tríada $(X, \emptyset, \emptyset)$ es claramente exacta). El enunciado es el siguiente:

Teorema 9.45 (Teorema de Mayer-Vietoris) Sea (X, U_1, U_2) una tríada exacta tal que $X = U_1 \cup U_2$ y llamemos $V = U_1 \cap U_2$. Sean

$$\phi_p : H_p(U_1) \oplus H_p(U_2) \longrightarrow H_p(X), \quad \psi_p : H_p(V) \longrightarrow H_p(U_1) \oplus H_p(U_2)$$

los homomorfismos dados por

$$\phi_p(c_1, c_2) = i_{1*}(c_1) - i_{2*}(c_2), \quad \psi_p(c) = (j_{1*}(c), j_{2*}(c)),$$

donde las aplicaciones i_* , j_* son las inducidas por las inclusiones correspondientes.

Entonces existen homomorfismos naturales

$$\Delta_p : H_p(X) \longrightarrow H_{p-1}(V)$$

tales que la sucesión siguiente es exacta:

$$\cdots \longrightarrow H_{p+1}(X) \xrightarrow{\Delta} H_p(V) \xrightarrow{\psi} H_p(U_1) \oplus H_p(U_2) \xrightarrow{\phi} H_p(X) \xrightarrow{\Delta} \cdots$$

Terminamos con un par de hechos adicionales. El primero es el teorema siguiente, que se prueba sin dificultad teniendo en cuenta 4.11.

Teorema 9.46 *Consideremos dos tríadas exactas (X, U_1, U_2) , (X', U'_1, U'_2) tales que $X = U_1 \cup U_2$, $X' = U'_1 \cup U'_2$. Sean $V = U_1 \cap U_2$, $V' = U'_1 \cap U'_2$. Sea*

$$f : (X, U_1, U_2) \longrightarrow (X', U'_1, U'_2)$$

una aplicación continua. Entonces los homomorfismos inducidos por f hacen conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} H_p(V) & \xrightarrow{\psi} & H_p(U_1) \oplus H_p(U_2) & \xrightarrow{\phi} & H_p(X) & \xrightarrow{\Delta} & H_{p-1}(V) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_p(V') & \xrightarrow{\psi} & H_p(U'_1) \oplus H_p(U'_2) & \xrightarrow{\phi} & H_p(X') & \xrightarrow{\Delta} & H_{p-1}(V') \end{array}$$

Por último observamos que si (X, U_1, U_2) es una tríada exacta, entonces también lo es (X, U_2, U_1) , pero los homomorfismos de conexión en las correspondientes sucesiones de Mayer-Vietoris no son iguales.

Concretamente, vamos a ver que se diferencian en el signo. Mantenemos la notación de la prueba del teorema de Mayer-Vietoris (si bien todo se simplifica al considerar el caso $V_1 = V_2 = \emptyset$.)

Tomamos una clase $[z] \in H_p(X)$. Buscamos una antiimagen por el isomorfismo $i_* : H_p(C(U_1) + C(U_2)) \longrightarrow H_p(X)$, que será una clase $[z_1 + z_2]$, con $z_i \in C(U_i)$. Ahora tomamos una antiimagen de $z_1 + z_2$ por el homomorfismo $g : C(U_1) \oplus C(U_2) \longrightarrow C(U_1) + C(U_2)$. Nos sirve el par $(z_1, -z_2)$. Seguidamente calculamos la frontera: $(\partial z_1, -\partial z_2)$ y buscamos $z' \in Z_{p-1}(V)$ tal que $f(z') = (\partial z_1, -\partial z_2)$, es decir, tal que $\partial z_1 = z'$ y $\partial z_2 = -z'$. Entonces, $\Delta([z]) = [z']$.

Si consideramos la tríada (X, U_2, U_1) y partimos de la misma clase $[z]$, podemos pasar al mismo $[z_1 + z_2]$, de aquí al par $(z_2, -z_1)$, luego a $(\partial z_2, -\partial z_1)$ y por último nos sirve $-z'$, luego ahora $\Delta([z]) = -[z']$, como queríamos probar. ■

En el capítulo siguiente mostraremos muchas aplicaciones de la sucesión de Mayer-Vietoris.

9.8 El teorema de los modelos acíclicos

En la prueba del teorema 9.28 hemos usado un argumento que podemos aislar, generalizar y presentar en un contexto muy general. El resultado es un resultado sobre funtores conocido como el teorema de los modelos acíclicos. No vamos a necesitarlo hasta la prueba del teorema 11.52 (que, a su vez, no será necesario después) y luego hasta el capítulo XII, donde lo usaremos con frecuencia, a partir del teorema 12.7. Por lo tanto, el lector puede omitir temporalmente la lectura de esta sección y pasar directamente al capítulo siguiente, en el que se presentan numerosas aplicaciones de la homología singular.

Definición 9.47 Una *categoría con modelos* es una categoría \mathcal{C} junto con un conjunto \mathcal{M} de objetos de \mathcal{C} llamados *modelos*. Sea G un functor en \mathcal{C} con imágenes en la categoría de los grupos abelianos. Una *base* de G es un conjunto $\{g_i\}_{i \in I}$ tal que $g_i \in G(M_i)$, para cierto $M_i \in \mathcal{M}$ de modo que para todo objeto X de \mathcal{C} el conjunto $\{G(f)(g_i) \mid i \in I, f \in \text{hom}(M_i, X)\}$ es una base de $G(X)$.

Diremos que G es un *functor libre con modelos en \mathcal{M}* si tiene una base con modelos en \mathcal{M} . Si C es un functor con imágenes en la categoría de los complejos de A -módulos, diremos que es *libre con modelos en \mathcal{M}* si cada functor C_p es libre con modelos en \mathcal{M} .

Ejemplo Consideremos la categoría \mathcal{C} de los espacios topológicos, con modelos $\mathcal{M} = \{\Delta_p\}_{p \geq 0}$ (los p -símplices canónicos). Sea C el functor que a cada espacio topológico le hace corresponder su complejo de cadenas singulares. Entonces C es libre con modelos en \mathcal{M} .

En efecto, si $\sigma_p : \Delta_p \rightarrow \Delta_p$ es la identidad, entonces σ_p es una base de C_p , pues si $f \in \text{hom}(\Delta_p, X)$, entonces $C_p(f)(\sigma_p) = f^\#(\sigma_p)$ es un p -símplice singular arbitrario en X , luego al variar f obtenemos una base de $C_p(X)$. ■

Diremos que un complejo \mathcal{C} de \mathbb{A} -módulos es *no negativo* si sus módulos de dimensiones negativas son nulos.

Si C es un functor en una categoría \mathcal{C} con modelos \mathcal{M} y con imágenes en la categoría de los complejos de A -módulos, podemos asociarle los funtores $H_p(C)$ definidos de forma obvia. Diremos que C es *acíclico en dimensiones positivas* si $H_p(C(M)) = 0$ para $p > 0$ y $M \in \mathcal{M}$.

Teorema 9.48 (Teorema de los modelos acíclicos) *Sea \mathcal{C} una categoría con modelos \mathcal{M} . Sean C y C' dos funtores de \mathcal{C} en la categoría de los complejos de A -módulos tales que C es libre no negativo y C' es acíclico en dimensiones positivas. Entonces*

1. *Toda transformación natural $\alpha : H_0(C) \rightarrow H_0(C')$ está inducida por una transformación natural $\phi : C \rightarrow C'$.*
2. *Si dos transformaciones naturales $\phi, \phi' : C \rightarrow C'$ inducen la misma transformación natural $H_0(C) \rightarrow H_0(C')$ entonces son naturalmente homotópicas, es decir, existe una transformación natural $\Delta : C \rightarrow C'$ tal que $\Delta(X)$ es una homotopía entre $\phi(X)$ y $\phi'(X)$ para todo objeto X .*

DEMOSTRACIÓN: Probaremos las dos partes simultáneamente [las frases entre corchetes harán referencia a la parte b]. Para cada objeto X de \mathcal{C} hemos de definir un homomorfismo de complejos $\phi(X) : C(X) \rightarrow C'(X)$ [o una homotopía $\Delta(X) : C(X) \rightarrow C'(X)$] de modo que si $h : X \rightarrow Y$ es un morfismo, entonces

$$C(h) \circ \phi(Y) = \phi(X) \circ C'(h), \quad [C(h) \circ \Delta(Y) = \Delta(X) \circ C'(h)].$$

Para cada $p \geq 0$ fijamos una base $\{c_j\}_{j \in J_p}$ de C_p , de modo que $c_j \in C_p(M_j)$, para cierto $M_j \in \mathcal{M}$. Esto significa que cada A -módulo $C_p(X)$ tiene por base al conjunto $\{C_p(f)(c_j)\}_{j \in J_p}$, $f \in \text{hom}(M_j, X)$.

Por consiguiente, el homomorfismo $\phi_p(X)$ que queremos definir quedará completamente determinado si especificamos $\{\phi_p(M_j)(c_j)\}_{j \in J_p}$ a través de la ecuación

$$\phi_p(X) \left(\sum_{i,j} a_{ij} C_p(f_{ij})(c_j) \right) = \sum_{i,j} a_{ij} C'_p(f_{ij})(\phi_p(M_j)(c_j)) \quad (9.11)$$

[respectivamente, $\{\Delta_p(M_j)(c_j)\}_{j \in J_p}$ y la ecuación siguiente:]

$$\Delta_p(X) \left(\sum_{i,j} a_{ij} C_p(f_{ij})(c_j) \right) = \sum_{i,j} a_{ij} C'_{p+1}(f_{ij})(\Delta_p(M_j)(c_j)). \quad (9.12)$$

Definiremos $\phi_p(X)$ por inducción sobre p de modo que se cumpla

$$\phi_p(X) \circ \partial = \partial \circ \phi_{p-1}(X), \quad (9.13)$$

[respectivamente, $\Delta_p(X)$ tal que:]

$$\Delta_p(X) \circ \partial = \phi'_p(X) - \partial \circ \Delta_{p-1}(X). \quad (9.14)$$

Antes de proceder con la definición escribiremos unas ecuaciones que vamos a usar. En primer lugar, supuesto definido ϕ_i para $i < p$, con $p > 0$, bastará definir $\phi_p(M_j)(c_j)$, para $j \in J_p$, de modo que

$$\partial \phi_p(M_j)(c_j) = \phi_{p-1}(M_j)(\partial c_j), \quad (9.15)$$

[respectivamente, dado Δ_i , para $i < p$, $p > 0$, tendremos que definir $\Delta_p(M_j)(c_j)$ de modo que se cumpla la ecuación siguiente:]

$$\partial \Delta_p(M_j)(c_j) = \phi_p(M_j)(c_j) - \phi'_p(M_j)(c_j) - \Delta_{p-1}(M_j)(\partial c_j). \quad (9.16)$$

Si justificamos que esto es posible, entonces $\phi_p(X)$ [o $\Delta_p(X)$] queda determinado por la ecuación (9.11) [resp. (9.12)] para un objeto X arbitrario. En principio con esto tenemos dos definiciones de $\phi_p(M_j)$, pero haciendo actuar (9.11) sobre $c_j = C_p(1)(c_j)$ obtenemos que coinciden. [Lo mismo vale para Δ]. A continuación es fácil ver que $\phi_p(X)$ [resp. $\Delta_p(X)$] cumple (9.13) [resp. (9.14)] así como la condición de transformación natural.

Para iniciar la inducción, consideramos $\alpha : H_0(C) \rightarrow H_0(C')$ y, para cada $j \in J_0$, definimos $\phi_0(M_j)(c_j) \in C_0(M_j)$ de modo que $[\phi_0(M_j)(c_j)] = \alpha(M_j)([c_j])$. Definimos $\phi_p(X)$ mediante (9.11). Es fácil ver que si $c \in C_0(X)$, entonces $[\phi_0(X)(c)] = \alpha(X)([c])$, es decir, ϕ induce α .

En particular, si $j \in J_1$, entonces $\phi_0(M_j)(\partial c_j)$ es una frontera en $C'_0(M_j)$ y podemos definir $\phi_1(M_j)(c_j) \in C'_1(M_j)$ tal que $\partial\phi_1(M_j)(\partial c_j) = \phi_0(M_j)(\partial c_j)$. La ecuación (9.11) nos define $\phi_1(X)$ para todo X y se cumple (9.13).

Supongamos ahora que ϕ_i está definido para $i < p$, $p > 0$ de modo que se cumple (9.13). Entonces el miembro derecho de (9.15) es un ciclo de $C'_{p-1}(M_j)$ y por hipótesis $H_p(C'_{p-1}(M_j)) = 0$, luego ha de ser una frontera. Por consiguiente podemos definir $\phi_p(M_j)(c_j)$ de modo que se cumpla (9.15). Ahora podemos definir $\phi_p(X)$ mediante (9.11). Esto completa la definición inductiva de ϕ .

La construcción de Δ es similar. Si ϕ y ϕ' inducen la misma transformación natural $H_0(C) \rightarrow H_0(C')$, entonces, para $j \in J_0$, $\phi_0(M_j)(c_j) - \phi'_0(M_j)(c_j)$ ha de ser una frontera, luego podemos definir $\Delta_0(M_j)(c_j) \in C'_1(M_j)$ de modo que $\partial\Delta_0(M_j)(c_j) = \phi_0(M_j)(c_j) - \phi'_0(M_j)(c_j)$. Definimos $\Delta_0(X)$ mediante (9.12). La prueba continúa de forma totalmente análoga al caso anterior. ■

El lector reconocerá sin dificultad el argumento del teorema 9.28 en la prueba del apartado b). En efecto, dicho teorema es consecuencia del teorema de los modelos acíclicos. Basta tomar como \mathcal{C} la categoría de los espacios topológicos y como C y C' el mismo funtor, que a cada espacio le asigna su complejo de cadenas singulares. Según hemos visto, C es libre con los símlices canónicos como modelos, es no negativo y acíclico en dimensiones positivas, pues cada Δ_n es homotópico a un punto, luego $H_p(C(\Delta_n)) = 0$ para $p > 0$. Para obtener la tesis de 9.28 basta comprobar que el operador de subdivisión S y la identidad 1 inducen la misma transformación natural sobre $H_0(C)$, es decir, que si x es un punto de un espacio topológico X , entonces $[S(x)] = [x]$, pero esto es trivialmente cierto, pues $S(x) = x$. ■

Capítulo X

Aplicaciones de la homología singular

En este capítulo calcularemos explícitamente los grupos de homología de diversos espacios topológicos, al tiempo que mostraremos las primeras aplicaciones de la homología singular.

10.1 La homología de las esferas

Como primera aplicación calcularemos la homología de las esferas. Recordemos que $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$, donde la norma considerada es la norma euclídea. Naturalmente no hay inconveniente en llamar también S^n a cualquier espacio homeomorfo. La técnica que seguiremos para calcular los grupos $H_p(S^n)$ la hemos esbozado como introducción al teorema de Mayer-Vietoris. Calculamos primero la homología reducida.

Observemos ante todo que $S^0 = \{\pm 1\}$, luego los teoremas 9.12, 9.13 y 9.14 nos dan su homología:

$$H_p(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } p = 0, \\ 0 & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

(Recordemos que \mathbb{A} es el anillo de coeficientes).

Ahora, la sucesión de Mayer-Vietoris nos reduce la homología de S^n a la de S^{n-1} . Para ello consideramos los abiertos $U_1 = S^n \setminus \{N\}$ y $U_2 = S^n \setminus \{S\}$, donde N y S son los polos de la esfera:

$$N = (0, \dots, 0, 1), \quad S = (0, \dots, 0, -1).$$

La proyección estereográfica muestra que U_1 y U_2 son homeomorfos a \mathbb{R}^n , luego son contractibles, luego $H_p(U_i) = 0$ para todo p . Por otra parte el “ecuador” de la esfera

$$\tilde{S}^{n-1} = \{x \in S^n \mid x_{n+1} = 0\}$$

es un retracts por deformación de $U_1 \cap U_2$ (véanse los ejemplos tras la definición 1.30). Por consiguiente $H_p(U_1 \cap U_2) \cong H_p(\tilde{S}^{n-1}) \cong H_p(S^{n-1})$.

El teorema de Mayer-Vietoris nos da la sucesión exacta

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow H_p(S^{n-1}) &\longrightarrow H_p(U_1) \oplus H_p(U_2) \longrightarrow H_p(S^n) \longrightarrow \\ H_{p-1}(S^{n-1}) &\longrightarrow H_{p-1}(U_1) \oplus H_{p-1}(U_2) \longrightarrow H_{p-1}(S^n) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

Más concretamente, tenemos

$$0 \longrightarrow H_p(S^n) \longrightarrow H_{p-1}(S^{n-1}) \longrightarrow 0,$$

y la exactitud se traduce en que $H_p(S^n) \cong H_{p-1}(S^{n-1})$. Aplicando esta relación n veces llegamos a que $H_p(S^n) \cong H_{p-n}(S^0)$, luego tenemos probado el teorema siguiente:

Teorema 10.1 *La homología reducida de S^n viene dada por*

$$H_p(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } p = n, \\ 0 & \text{si } p \neq n. \end{cases}$$

Por último, el teorema 9.10 nos da que la homología completa es idéntica salvo para $p = 0$. Para este caso aplicamos 9.13 y el resultado es el siguiente:

Teorema 10.2 *La homología completa de S^n viene dada por*

$$\begin{aligned} H_p(S^0) &\cong \begin{cases} \mathbb{A} \oplus \mathbb{A} & \text{si } p = 0, \\ 0 & \text{si } p \neq 0, \end{cases} \\ H_p(S^n) &\cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } p = 0 \text{ o } p = n, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad \text{si } n > 0. \end{aligned}$$

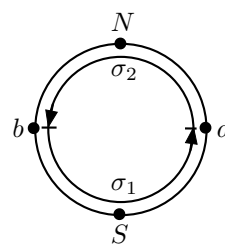
En particular tenemos el hecho intuitivamente evidente, pero formalmente no trivial, de que dos esferas de dimensiones distintas no son homeomorfas (ni siquiera homotópicas).

Un generador de $H^n(S^n)$ Resulta interesante determinar explícitamente un generador de $H_n(S^n)$. Vamos a considerar primero el caso de S^1 y vamos a probar que un generador de $H^1(S^1)$ es la clase de homología de cualquier arco σ que dé una única vuelta completa a la circunferencia.

No perdemos generalidad si suponemos que σ parte del punto $(1, 0)$ y que el giro se realiza en sentido positivo. Llamamos σ_1 y σ_2 a dos arcos como los que muestra la figura, de modo que σ_2 una $(1, 0)$ con $(-1, 0)$ y σ_1 una $(-1, 0)$ con $(1, 0)$, ambos en sentido positivo. Así σ es la concatenación de σ_2 y σ_1 , luego $[\sigma] = [\sigma_1 + \sigma_2]$. Además $\sigma_i^* \subset U_i$. Vamos a calcular la imagen de $[\sigma]$ por el homomorfismo de conexión

$$H_1(S^1) \longrightarrow H_0(S^0)$$

para comprobar que es un generador del segundo grupo. De acuerdo con la observación posterior al teorema 4.10 y con la notación de la prueba del teorema precedente, se calcula como sigue:



1. Tomamos una antiimagen de $\sigma_1 + \sigma_2$ por el homomorfismo

$$C_1(U_1) \oplus C_1(U_2) \longrightarrow C_1(S^1)$$

dado por $(c_1, c_2) \mapsto c_1 - c_2$. En nuestro caso, podemos tomar $(\sigma_1, -\sigma_2)$.

2. Calculamos $\partial(\sigma_1, -\sigma_2) = (a - b, a - b)$.

3. Calculamos una antiimagen del resultado por el homomorfismo

$$C_0(U_1 \cap U_2) \longrightarrow C_0(U_1) \oplus C_0(U_2)$$

dado por $c \mapsto (c, c)$. En nuestro caso sirve $a - b$.

4. La clase $[a - b]$ del ciclo obtenido es un representante de la imagen de $[\sigma]$ en $H_0(U_1 \cap U_2) \cong H_0(S^0)$.

Vemos que es, en efecto, un generador de $H^0(S^0)$, pues $S^0 = \{a, b\}$ y la frontera de una cadena arbitraria es $\partial(na + mb) = (n + m)(\cdot)$, luego los ciclos son las cadenas de la forma $n(a - b)$.

Consideremos ahora el caso de S^n . En virtud del teorema 1.4, podemos identificar S^n con la frontera topológica de Δ_{n+1} . Entonces $\partial\Delta_{n+1} \in Z_n(S^n)$, y vamos a probar que $[\partial\Delta_{n+1}]$ es un generador de $H_n(S^n)$.

Razonamos inductivamente. El caso $n = 0$ es inmediato. Supuesto cierto para $n - 1$, sólo tenemos que modificar ligeramente la prueba del teorema 10.1 para tratar con $\partial\Delta_{n+1}$ en lugar de con S^n . Concretamente, vamos a aplicar el teorema de Mayer-Vietoris tomando $U_1 = S^n \setminus \{x_{n+1}\}$ y como U_2 todo S^n menos un punto interior de la cara $[x_0, \dots, x_n]$.

Tenemos que calcular explícitamente la imagen de $[\partial\Delta_{n+1}]$ por el isomorfismo $H_n(S^n) \cong H_{n-1}(S^{n-1})$. Como antes, el proceso es el siguiente:

1. Tomamos una antiimagen de $\partial\sigma$ por el homomorfismo

$$C_n(U_1) \oplus C_n(U_2) \longrightarrow C_n(S^n)$$

dado por $(c_1, c_2) \mapsto c_1 - c_2$. En nuestro caso, podemos tomar

$$((-1)^{n+1}(x_0, \dots, x_n), (-1)^{n+1}(x_0, \dots, x_n) - \partial\Delta_{n+1}),$$

es decir, por una parte tomamos la única cara de $\partial\Delta_{n+1}$ que no contiene al vértice x_{n+1} (con el signo con que aparece en $\partial\Delta_{n+1}$) y por otra parte todas las demás caras de $\partial\Delta_{n+1}$, que no contienen al punto que hemos quitado para formar S^n .

2. Calculamos la frontera de la cadena elegida. En nuestro caso es

$$((-1)^{n+1}\partial(x_0, \dots, x_n), (-1)^{n+1}\partial(x_0, \dots, x_n)).$$

3. Calculamos una antiimagen del resultado por el homomorfismo

$$C_{n-1}(U_1 \cap U_2) \longrightarrow C_{n-1}(U_1) \oplus C_{n-1}(U_2)$$

dado por $c \mapsto (c, c)$. En nuestro caso, sirve $(-1)^{n+1}\partial(x_0, \dots, x_n)$.

4. La clase del ciclo obtenido es un representante de la imagen de $[\partial\sigma]$ en $H_{n-1}(U_1 \cap U_2) \cong H_{n-1}(S^{n-1})$.

El isomorfismo se debe a que la frontera topológica de (x_0, \dots, x_n) es un retracto por deformación de $U_1 \cap U_2$ y, a través de la proyección que elimina la última componente nula de todos sus puntos, se identifica con $\partial\Delta_n$ (que es la S^{n-1} que estamos considerando aquí). Como la retracción deja invariante a $(-1)^{n+1}\partial(x_0, \dots, x_n)$, concluimos que la imagen de $[\partial\Delta_{n+1}]$ en $H_{n-1}(S^{n-1})$ es $(-1)^{n+1}[\partial\Delta_n]$.

Por hipótesis de inducción, $[\partial\Delta_n]$ genera $H_{n-1}(S^{n-1})$, luego la clase $[\partial\Delta_{n+1}]$ genera $H^n(S^n)$. ■

Podría pensarse que la homología singular no es lo suficientemente potente como para probar que \mathbb{R}^m no es homeomorfo a \mathbb{R}^n cuando $m \neq n$, ya que ambos espacios son homotópicos y la homología no distingue espacios homotópicos. Sin embargo, esto es consecuencia inmediata del teorema anterior:

Teorema 10.3 *Si $m \neq n$, entonces \mathbb{R}^m no es homeomorfo a \mathbb{R}^n .*

DEMOSTRACIÓN: Si existe un homeomorfismo $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$, componiéndolo con una traslación podemos suponer que $f(0) = 0$, de donde concluimos que $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ sería homeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, pero estos espacios son homotópicos a S^{m-1} y S^{n-1} respectivamente, luego, por el teorema anterior, $m-1 = n-1$. ■

10.2 El teorema de la esfera peluda, etc.

Ahora estamos en condiciones de demostrar la generalización del teorema de la esfera peluda a dimensiones arbitrarias, y con él las consecuencias que presentamos en las primeras secciones del capítulo II. En realidad, la más sencilla de probar a partir de los resultados que conocemos es el teorema 2.5. Para ello basta observar lo siguiente:

Teorema 10.4 *Si X es un espacio topológico y U es un retracto de X , entonces la inclusión $i : U \longrightarrow X$ induce monomorfismos $i_* : H_p(U) \longrightarrow H_p(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $r : X \longrightarrow U$ una retracción, entonces $i \circ r = 1$, luego $i_* \circ r_* = 1$, luego i_* es inyectiva. ■

Por lo tanto, como $H_n(S^n) \neq 0$, mientras que $H_n(B^{n+1}) = H_n(\mathbb{R}^{n+1}) = 0$, no puede haber retracciones de B^{n+1} en S^n y queda probado el teorema 2.5.

Más aún, por el mismo argumento tenemos:

Teorema 10.5 Si $U \subset S^n$ es un subespacio homeomorfo a S^m , con $m < n$, entonces U no es un retracto de S^n .

Según observamos tras la prueba del teorema 2.5, el teorema 2.5 implica el caso general del teorema de punto fijo de Brouwer, que queda, por consiguiente, demostrado.

Para probar la versión general del teorema de la esfera peluda observamos lo siguiente: a partir de un campo vectorial $v : S^n \rightarrow S^n$ podemos construir la aplicación $H : I \times S^n \rightarrow S^n$ dada por

$$H_t(x) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)v(x).$$

Es inmediato comprobar que $H_t(x) \cdot H_t(x) = 1$, por lo que ciertamente la imagen de H está en S^n . Además H_0 es la identidad y H_1 es la *aplicación antipodal*, dada por $\alpha(x) = -x$. Así pues, si existe un campo tangente en S^n , la aplicación antipodal es homotópica a la identidad.

Probaremos que esto sólo puede ocurrir si n es impar. Para ello estudiaremos, más en general, las isometrías en S^n . Observemos que toda isometría $g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ se restringe a una aplicación continua $g : S^n \rightarrow S^n$ que la determina completamente, pues $g(0) = 0$ y, para todo $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ no nulo, se cumple que $g(x) = \|x\|g(x/\|x\|)$. Cuando hablemos de una isometría en S^n nos referiremos a las restricción de una isometría en \mathbb{R}^{n+1} . No distinguiremos entre una y otra.

El determinante de la matriz de una aplicación lineal g en una base cualquiera es independiente de la base, y lo representaremos por $\det g$. Si g es una isometría, necesariamente $\det g = \pm 1$. La aplicación antipodal α en S^n es una isometría, y su determinante es $\det \alpha = (-1)^{n+1}$.

Vamos a estudiar los homomorfismos que las aplicaciones isometrías inducen en los grupos de homología de S^n . Para ello estudiaremos primero una aplicación más sencilla que la antipodal, la aplicación $f : S^n \rightarrow S^n$ dada por

$$f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1}). \tag{10.1}$$

Conservando la notación introducida en la sección anterior, tenemos que el ecuador \tilde{S}^{n-1} de la esfera S^n es un retracto por deformación de $U_1 \cap U_2$, lo que significa que la inclusión $i : \tilde{S}^{n-1} \rightarrow U_1 \cap U_2$ induce un isomorfismo $i^* : H_p(\tilde{S}^{n-1}) \rightarrow H_p(U_1 \cap U_2)$.

Notemos que $f : (S^n, U_1, U_2) \rightarrow (S^n, U_2, U_1)$, por lo que induce homomorfismos en todos los grupos de homología que estamos considerando (y es importante que intercambia U_1 con U_2). En particular tenemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_p(\tilde{S}^{n-1}) & \xrightarrow{i^*} & H_p(U_1 \cap U_2) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ H_p(\tilde{S}^{n-1}) & \xrightarrow{i^*} & H_p(U_1 \cap U_2) \end{array}$$

es conmutativo, pero la restricción de f a \tilde{S}^{n-1} es la identidad, luego también lo es f_* sobre $H_p(\tilde{S}^{n-1})$ y, por el diagrama, también lo es f_* en $H_p(U_1 \cap U_2)$.

Ahora aplicamos el teorema 9.46, (para la homología reducida) que nos da la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_p(S^n) & \xrightarrow{\Delta} & H_{p-1}(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & 0 \\ & & f_* \downarrow & & \downarrow f_* & & \\ 0 & \longrightarrow & H_p(S^n) & \xrightarrow{-\Delta} & H_{p-1}(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde el punto crucial es advertir que la aplicación Δ para la tríada (S^n, U_2, U_1) es la opuesta de la correspondiente a (S^n, U_1, U_2) , según observamos al final de la sección 9.7. Es claro entonces que f_* resulta ser la multiplicación por -1 , es decir, para todo $c \in H_p(S^n)$, se cumple $f_*(c) = -c$.

Este hecho se generaliza ahora fácilmente.

Teorema 10.6 *Si $g : S^n \rightarrow S^n$ es una isometría, el isomorfismo que induce en cada grupo de homología es la multiplicación por $\det g$.*

DEMOSTRACIÓN: Por [G 7.34] si $\det g = 1$, entonces g es una composición de giros, y es fácil ver que todo giro es homotópico a la identidad (si el ángulo de giro es α , la homotopía se forma considerando los giros de ángulo $t\alpha$). Por consiguiente g es homotópica a la identidad y $g_* = 1$.

Supongamos ahora que $\det g = -1$ y sea f la aplicación dada por (10.1). Entonces $g \circ f$ es ortogonal y tiene determinante 1 (pues $\det f = -1$), luego sabemos que $g \circ f$ es homotópica a la identidad. Así pues, $g_* \circ f_* = 1$ y, puesto que f_* es la multiplicación por -1 , lo mismo vale para g_* . ■

Ahora ya podemos probar del teorema de la esfera peluda: hemos visto que la existencia de un campo vectorial continuo en S^n que no se anule en ningún punto implica que la aplicación antipodal α es homotópica a la identidad, luego $\alpha_* = 1$, pero por otra parte sabemos que α_* es la multiplicación por $\det \alpha = (-1)^{n+1}$, luego n ha de ser impar. ■

Seguidamente probaremos la versión general 2.17 del teorema de Jordan. Nos apoyaremos en el hecho siguiente:

Teorema 10.7 *Sea $n \geq 0$ y $\tilde{B}^r \subset S^n$ un subespacio homeomorfo a la bola unidad cerrada en \mathbb{R}^r , para cierto $r \geq 0$. Entonces, considerando la homología reducida, para todo $p \geq 0$ se cumple que*

$$H_p(S^n \setminus \tilde{B}^r) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Lo probamos por inducción sobre r . En primer lugar, si $r = 0$ (en cuyo caso se entiende que \tilde{B}^0 es un punto) tenemos que $S^n \setminus \tilde{B}^0$ es contractible (incluso si $n = 0$), por lo que el teorema es trivial. Supongámoslo cierto para $r - 1$.

Sea I^r el cubo unitario (el producto cartesiano de r veces $I = [0, 1]$). Por el teorema 1.4, existe un homeomorfismo $f : I^r \rightarrow B^r$, con el que podemos formar a su vez un homeomorfismo $\phi : I^r \rightarrow \tilde{B}^r$.

Tomamos un ciclo $c \in Z_p(S^n \setminus \tilde{B}^r)$. Hemos de probar que es una frontera. Para cada $t \in I$, sea $\tilde{B}_t^{r-1} = \phi[\{t\} \times I^{r-1}]$. Como $S^n \setminus \tilde{B}^r \subset S^n \setminus \tilde{B}_t^{r-1}$, podemos considerar a c como un ciclo en $S^n \setminus \tilde{B}_t^{r-1}$. Por hipótesis de inducción es una frontera, es decir, existe un $b_t \in C_{p+1}(S^n \setminus \tilde{B}_t^{r-1})$ tal que $c = \partial b_t$.

Sea $|b_t|$ el soporte de b_t . Se trata de un subespacio compacto de $S^n \setminus \tilde{B}_t^{r-1}$. Llamemos $\epsilon_t > 0$ a la distancia de $|b_t|$ a \tilde{B}_t^{r-1} . Como ϕ es uniformemente continua, existe $\delta_t > 0$ tal que si $u, v \in I^r$ distan menos de δ_t , entonces $\phi(u)$ y $\phi(v)$ distan menos de ϵ_t .

Tomemos un intervalo $I'_t \subset I$ abierto en I que contenga a t y de diámetro menor que δ_t . Por el teorema de Lebesgue 1.1, existe un $\rho > 0$ tal que todo intervalo de longitud menor que ρ está contenido en un I'_t . Tomemos un número natural $m > 1/\rho$ y consideremos concretamente los intervalos

$$I_i = \left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m} \right], \quad \text{para } i = 0, \dots, m-1.$$

Tenemos así que cada I_i está contenido en un cierto I'_t , luego si llamamos $\tilde{B}_i^r = \phi[I_i \times I^{r-1}]$, tenemos que $|b_t| \cap \tilde{B}_i^r = \emptyset$, pues cada punto de \tilde{B}_i^r dista de uno de \tilde{B}_t^{r-1} menos de ϵ_t . Llamemos $b_i = b_t$, con lo que b_i es una cadena en $S^n \setminus \tilde{B}_i^r$ tal que $\partial b_i = c$.

El teorema quedará probado en cuanto justifiquemos lo siguiente:

Si J_1 y J_2 son intervalos cerrados en I tales que $J_1 \cap J_2 = \{t\}$, llamamos $\tilde{B}_i = \phi[J_i \times I^{r-1}]$ y existen cadenas $b_i \in C_{p+1}(S^n \setminus \tilde{B}_i)$ tales que $c = \partial b_i$, entonces existe una cadena $b \in C_{p+1}(S^n \setminus (\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2))$ tal que $c = \partial b$.

En efecto, aplicando este hecho $m-1$ veces llegamos a una cadena

$$b \in C_{p+1}\left(S^n \setminus \bigcup_{i=0}^{m-1} \tilde{B}_i^r\right) = C_{p+1}(S^n \setminus \tilde{B}^r)$$

tal que $c = \partial b$, como queremos probar.

Llamemos $\tilde{B}_t^{r-1} = \phi[\{t\} \times I^{r-1}] = \tilde{B}_1 \cap \tilde{B}_2$. Sea $X = S^n \setminus \tilde{B}_t^{r-1}$, sea $U_i = S^n \setminus \tilde{B}_i$ y sea $V = U_1 \cap U_2 = S^n \setminus (\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2)$.

El espacio $\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2$ es homeomorfo a un cubo, luego es homotópico a un punto, luego es distinto de S^n . Por consiguiente $V \neq \emptyset$. Esto hace que la tríada (X, U_1, U_2) sea exacta para la homología reducida, por lo que podemos aplicar el teorema de Mayer-Vietoris.

Por hipótesis de inducción, $H_{p+1}(X) = H_{p+1}(S^n \setminus \tilde{B}_t^{r-1}) = 0$. Consideramos el fragmento siguiente de la sucesión de Mayer-Vietoris:

$$0 = H_{p+1}(X) \rightarrow H_p(V) \xrightarrow{\psi} H_p(U_1) \oplus H_p(U_2).$$

Ahora bien, $\psi([c]) = (j_{*1}([c]), j_{*2}([c]))$, donde j_1 y j_2 son las inclusiones de V en U_1 y U_2 . Estamos suponiendo que c es una frontera en cada U_i , pero esto significa que $\psi([c]) = 0$, y la sucesión muestra que ψ es inyectiva, luego $[c] = 0$ en $H_p(V)$, es decir, c es una frontera en $S^n \setminus (\tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2)$. ■

Para obtener las primeras consecuencias de este resultado consideramos un subespacio $\tilde{S}^r \subset S^n$ homeomorfo a S^r , con $r \leq n$. Si $n = r$ supondremos además que $\tilde{S}^n \neq S^n$ (pero vamos a ver que este caso no puede darse).

Fijemos un homeomorfismo entre S^r y \tilde{S}^r y llamemos \tilde{B}_+^r y \tilde{B}_-^r a los subespacios de \tilde{S}^r correspondientes a los hemisferios cerrados de S^r , de modo que $\tilde{S}^{r-1} = \tilde{B}_+^r \cap \tilde{B}_-^r$ es la imagen del ecuador. Tomemos

$$X = S^n \setminus \tilde{S}^{r-1}, \quad U_1 = S^n \setminus \tilde{B}_+^r, \quad U_2 = S^n \setminus \tilde{B}_-^r, \quad V = U_1 \cap U_2 = S^n \setminus \tilde{S}^r.$$

Para probar que la tríada (X, U_1, U_2) es exacta para la homología reducida hemos de justificar que $V \neq \emptyset$, es decir, que $\tilde{S}^r \neq S^n$. Si $r = n$ esto es cierto por hipótesis, mientras que si $r < n$ es consecuencia de que $H^r(\tilde{S}^r) \not\cong H^n(S^n)$.

El teorema anterior nos da que $H_p(U_i) = 0$ para todo p . La sucesión de Mayer-Vietoris es, entonces

$$0 = H_{p+1}(U_1) \oplus H_{p+1}(U_2) \longrightarrow H_{p+1}(X) \longrightarrow H_p(V) \longrightarrow H_p(U_1) \oplus H_p(U_2) = 0,$$

luego

$$H_{p+1}(S^n \setminus \tilde{S}^{r-1}) \cong H_p(S^n \setminus \tilde{S}^r).$$

Aplicando esto r -veces concluimos que $H_p(S^n \setminus \tilde{S}^r) \cong H_{p+r}(S^n \setminus \tilde{S}^0)$. Ahora bien, \tilde{S}^0 está formado por dos puntos, y la esfera S^n menos dos puntos es homotópica a S^{n-1} , luego $H_{p+r}(S^n \setminus \tilde{S}^0) \cong H_{p+r}(S^{n-1})$. Por consiguiente hemos llegado a la relación

$$H_p(S^n \setminus \tilde{S}^r) \cong H_{p+r}(S^{n-1}).$$

Si $r = n$ esto es contradictorio, pues nos da que

$$H_{-1}(S^n \setminus \tilde{S}^n) \cong H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{A},$$

cuando, por otra parte, el miembro izquierdo ha de ser trivial. Esta contradicción viene de suponer que S^n contenía un subespacio propio homeomorfo a sí mismo. En total hemos probado lo siguiente:

Teorema 10.8 Sean n y r números naturales. Entonces:

1. Si $r > n$, entonces S^n no contiene copias homeomorfas de S^r .
2. La única copia homeomorfa de S^n en S^n es él mismo.
3. Si $r < n$ y \tilde{S}^r es cualquier copia homeomorfa de S^r en S^n , entonces la homología reducida de $S^n \setminus \tilde{S}^r$ es

$$H_p(S^n \setminus \tilde{S}^r) \cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } p = n - r - 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El apartado 1) se debe a que si $r > n$ entonces S^r contiene (propiamente) una copia homeomorfa de S^n . Teniendo en cuenta que podemos identificar a S^n con la compactificación de Alexandroff de \mathbb{R}^n , los apartados 1) y 2) nos dan inmediatamente una prueba alternativa de la invarianza de la dimensión:

Teorema 10.9 *Si $r \geq n$, entonces \mathbb{R}^n no contiene copias de S^r . En particular \mathbb{R}^m es homeomorfo a \mathbb{R}^n si y sólo si $m = n$.*

Ahora ya podemos probar:

Teorema 10.10 (Teorema de Jordan-Brouwer) *Si $n \geq 1$, toda copia \tilde{S}^{n-1} de S^{n-1} contenida en S^n divide a S^n en dos componentes conexas, ambas con frontera igual a \tilde{S}^{n-1} .*

DEMOSTRACIÓN: Del apartado 3) de 10.8 se desprende que $S^n \setminus \tilde{S}^r$ es arcoconexo excepto si $r = n - 1$, en cuyo caso se cumple $H_0(S^n \setminus \tilde{S}^{n-1}) = \mathbb{A}$ (para la homología reducida), lo que significa (teorema 9.13) que $S^n \setminus \tilde{S}^{n-1}$ tiene exactamente dos componentes arcoconexas, llamémoslas U_1 y U_2 . Puesto que la esfera S^n es localmente arcoconexa, las componentes U_1 y U_2 son abiertas, luego son también las componentes conexas de $S^n \setminus \tilde{S}^{n-1}$ y es claro que $\partial U_i \subset \tilde{S}^{n-1}$.

Tomemos ahora $x \in \tilde{S}^{n-1}$ y un entorno G en S^n . Hemos de probar que G corta a U_1 y U_2 . De este modo x estará en la frontera de ambos. Fijemos un homeomorfismo $\phi : S^{n-1} \rightarrow \tilde{S}^{n-1}$, sea $\phi(x_0) = x$. Sea H un entorno de x_0 homeomorfo a una bola abierta en \mathbb{R}^{n-1} y tal que $\tilde{H} = \phi[H] \subset G$.

Es claro que $S^{n-1} \setminus H$ es homeomorfo a una bola cerrada B^{n-1} en \mathbb{R}^{n-1} , luego $\tilde{B}^{n-1} = \phi[S^{n-1} \setminus H]$ es homeomorfo a la bola unidad cerrada de \mathbb{R}^{n-1} . Podemos aplicar el teorema 10.7 y concluir que (para la homología reducida) $H_0(S^n \setminus \tilde{B}^{n-1}) = 0$. Por consiguiente, el espacio $S^n \setminus \tilde{B}^{n-1}$ es arcoconexo.

Tomemos puntos $y_i \in U_i$. Existe un arco γ en $S^n \setminus \tilde{B}^{n-1}$ que une y_1 con y_2 . Necesariamente, γ ha de cortar a \tilde{S}^{n-1} y, como no corta a \tilde{B}^{n-1} , ha de ser $\gamma^* \cap \tilde{H} \neq \emptyset$ (donde γ^* es la imagen de γ). Puesto que esta intersección es cerrada en γ^* , su antiimagen por γ ha de ser un cerrado con un mínimo y un máximo elemento, t_0 y t_1 , respectivamente. Así, si llamamos $s_i = \gamma(t_i) \in \gamma^* \cap \tilde{H} \subset G$, tenemos que G contiene puntos $\gamma(t_0 - \epsilon) \in U_1$ y $\gamma(t_1 + \epsilon) \in U_2$. ■

Por el teorema 10.8,

$$H_p(S^n \setminus \tilde{S}^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } p = 0, \\ 0 & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

Para la homología completa sólo hemos de cambiar que $H_0(S^n \setminus \tilde{S}^{n-1}) \cong \mathbb{A} \oplus \mathbb{A}$. Por el teorema 9.12, los grupos de homología completa de las componentes conexas de $S^n \setminus \tilde{S}^{n-1}$ son

$$H_p(U_i) \cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } p = 0, \\ 0 & \text{si } p \neq 0. \end{cases}$$

Los grupos de homología reducida son todos nulos. Así pues, las componentes U_i tienen los mismos grupos de homología que las bolas abiertas. Sin embargo, la esfera cornuda de Alexander 8.39 prueba que no son necesariamente bolas abiertas.

Supongamos ahora que tenemos $\tilde{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. El teorema de Jordan-Brouwer vale para la compactificación de Alexandroff de \mathbb{R}^n , pues es homeomorfa a S^n , luego $\mathbb{R}_\infty^n \setminus \tilde{S}^{n-1}$ tiene dos componentes conexas, U_1 y U_2 , ambas con frontera \tilde{S}^{n-1} . Digamos que $\infty \in U_1$. Es claro entonces que $U_1 \setminus \{\infty\}$ sigue siendo conexo, luego concluimos que $\mathbb{R}^n \setminus \tilde{S}^{n-1}$ tiene también dos componentes conexas, ambas con frontera \tilde{S}^{n-1} . Recogemos esto en el teorema siguiente:

Teorema 10.11 *Si $n \geq 1$, toda copia \tilde{S}^{n-1} de S^{n-1} contenida en \mathbb{R}^n divide a \mathbb{R}^n en dos componentes conexas, ambas con frontera igual a \tilde{S}^{n-1} .*

Continuando con la notación previa al teorema, es claro que $U_1 \setminus \{\infty\}$ no está acotado en \mathbb{R}^n (pues contiene un entorno reducido de ∞ , es decir, el complementario de un compacto), mientras que U_2 sí lo está. De este modo, de las dos componentes conexas que una copia de S^{n-1} determina en \mathbb{R}^n , una está acotada y la otra no. Podemos llamar *interior* de \tilde{S}^{n-1} a la componente acotada y *exterior* a la componente no acotada. Esto se interpreta como que \tilde{S}^{n-1} es siempre una hipersuperficie cerrada que “encierra” una porción de espacio, pero no debemos olvidar que el interior de \tilde{S}^{n-1} no es necesariamente homeomorfo a una bola abierta de \mathbb{R}^n .

Teorema 10.12 *Para $n \geq 2$, sea $f : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua e inyectiva. Sea $\tilde{S}^{n-1} = f[S^{n-1}]$ y sea A el interior de \tilde{S}^{n-1} . Entonces $f[\overset{\circ}{B}^n] = A$.*

DEMOSTRACIÓN: Notemos que como S^{n-1} es compacto y la restricción de f es inyectiva y continua, de hecho es un homeomorfismo, luego tiene sentido hablar del interior de \tilde{S}^{n-1} . Sea $\tilde{B}^n = f[B^n]$. Podemos considerar $\mathbb{R}^n \subset S^n$, identificando S^n con la compactificación de Alexandroff de \mathbb{R}^n . Por el teorema 10.7 tenemos que $S^n \setminus \tilde{B}^n$ es arcoconexo, luego $\mathbb{R}^n \setminus \tilde{B}^n$ también lo es. Como $\tilde{S}^{n-1} \subset \tilde{B}^n$, tenemos también que $\mathbb{R}^n \setminus \tilde{B}^n$ no corta a \tilde{S}^{n-1} y, como no es acotado, ha de estar contenido en el exterior E de \tilde{S}^{n-1} .

Así pues, $A \cup \tilde{S}^{n-1} = \mathbb{R}^n \setminus E \subset \tilde{B}^n = f[\overset{\circ}{B}^n] \cup \tilde{S}^{n-1}$. Como f es inyectiva, $f[\overset{\circ}{B}^n] \cap \tilde{S}^{n-1} = \emptyset$, luego $A \subset f[\overset{\circ}{B}^n]$.

Ahora bien, $f[\overset{\circ}{B}^n]$ es un conjunto arcoconexo que no corta a \tilde{S}^{n-1} . Por la maximalidad de A , ha de ser $A = f[\overset{\circ}{B}^n]$. ■

De aquí se sigue ya fácilmente la versión general del teorema de invarianza de los dominios 2.9:

Si $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación continua e inyectiva definida en un abierto G de \mathbb{R}^n , se cumple que es abierta, pues si $U \subset G$ es un abierto e $y \in f[U]$, entonces $y = f(x)$, para cierto $x \in U$. Tomemos una bola cerrada B^n tal que $x \in \overset{\circ}{B}^n \subset B^n \subset U$. Entonces tenemos que $f(x) \in f[\overset{\circ}{B}^n] \subset f[U]$ y $f[\overset{\circ}{B}^n]$ es abierto por el teorema anterior. Así pues, $f[U]$ es entorno de y .

De aquí se siguen las consecuencias que dedujimos en la sección 2.4, entre ellas el teorema 2.11.

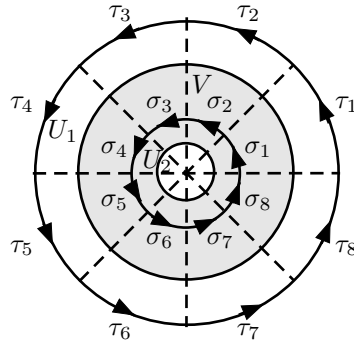
Así, de los teoremas cuya prueba habíamos dejado pendiente en el capítulo II, el único que nos queda por probar en el caso general (aparte del teorema de Schoenflies, que no vamos a probar en este libro) es el teorema de Borsuk-Ulam 2.13, que requiere bastante más aparato teórico del que tenemos ahora a nuestra disposición.

10.3 La homología de las superficies compactas

Según el teorema 3.20, toda superficie compacta (conexa) es homeomorfa a una de las superficies M_g o N_h definidas en 3.18. En 8.32 vimos que éstas no son homotópicas entre sí calculando sus grupos fundamentales. Ahora llegaremos a la misma conclusión a partir de sus grupos de homología.

Consideremos uno de los espacios M_g o N_h . Por unificar el argumento lo representaremos por F_r , donde $r = 2g$ o $r = h$ según el caso. De este modo, F_r se obtiene identificando dos a dos las aristas de un polígono de $2r$ lados. Por comodidad podemos sustituir el polígono por el disco unidad cerrado B^2 .

Llamamos τ_1, \dots, τ_{2r} a los arcos de amplitud π/r que se muestran en la figura siguiente, orientados en sentido positivo. La aplicación cociente $\phi : B^2 \rightarrow F_r$ identifica estos arcos a pares según los patrones de M_g o N_h , de modo que si τ_i debe identificarse con τ_j , la identificación consiste concretamente en que $\phi(\tau_i(t)) = \phi(\tau_j(t))$ para todo $t \in I$ o bien $\phi(\tau_i(t)) = \phi(\tau_j(1-t))$, para todo $t \in I$. Si F_r es de tipo N_h las identificaciones son todas de la primera forma, si es de tipo M_g son todas de la segunda.



Observemos que los tipos de identificaciones que estamos considerando hacen que todos los vértices (los extremos de los τ_i) tengan la misma imagen en F_r , por lo que los 1-símplices $\tilde{\tau}_i = \phi^\#(\tau_i)$ son 1-ciclos en F_r . Más concretamente, si F_r es de tipo M_g y ϕ identifica τ_i con τ_j , entonces $[\tilde{\tau}_i] = [-\tilde{\tau}_j]$ en $H_1(F_r)$, mientras que si F_r es de tipo N_h entonces $[\tilde{\tau}_i] = [\tilde{\tau}_j]$.

Sea U_1 el complementario en B^2 de un disco cerrado de centro 0 y U_2 un disco abierto de radio mayor. Llamaremos \tilde{U}_1 y \tilde{U}_2 a las imágenes por ϕ de U_1 y U_2 , que claramente son abiertas en F_r . Las intersecciones $V = U_1 \cap U_2$ y $\tilde{V} = \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$ son coronas circulares.

Determinemos ahora la estructura de $H_1(\tilde{U}_1)$. Para ello usamos que el espacio $G_r = \phi[S^1]$ es un retracto por deformación de \tilde{U}_1 . En efecto, es claro que la aplicación $r : U_1 \rightarrow S^1$ dada por $r(x) = x/\|x\|$ es una retracción, que induce a su vez una retracción $\tilde{r} : \tilde{U}_1 \rightarrow G_r$ dada por $\tilde{r}([x]) = [r(x)]$.

También es claro que r es homotópica a la identidad. Además, la homotopía $H : I \times U_1 \rightarrow U_1$ induce a su vez una homotopía $\tilde{H} : I \times \tilde{U}_1 \rightarrow \tilde{U}_1$ entre \tilde{r} y la identidad definida por $\tilde{H}_t([x]) = [H_t(x)]$. De este modo, tenemos el isomorfismo $\tilde{r}_* : H_1(\tilde{U}_1) \rightarrow H_1(G_r)$.

Al identificar S^1 a través de ϕ para obtener G_r , podemos empezar identificando los extremos de los arcos τ_i , con lo que obtenemos una rosa de $2r$ pétalos. Cada arco τ_i recorre uno de estos pétalos, pero éstos han de identificarse dos a dos, con lo que obtenemos una rosa con r pétalos, cada uno recorrido por dos de los arcos $\tilde{\tau}_i$. Por el teorema 9.36 tenemos que $H_1(G_r) \cong \mathbb{A}^r$.

Más aún, según la nota tras el teorema 9.35, una base de $H_1(G_r)$ está formada por las clases de homología de cualquier conjunto de arcos que generen el grupo de homología de cada pétalo, es decir, según hemos visto tras el teorema 10.2, un conjunto de arcos que den una vuelta completa a cada una de las circunferencias. En nuestro contexto, una base de $H_1(G_r)$ la forman la mitad de las clases $[\tilde{\tau}_i]$, que, por tanto, son también una base de $H_1(\tilde{U}_1)$.

Necesitamos estudiar con detalle el homomorfismo $i_* : H_1(\tilde{V}) \rightarrow H_1(\tilde{U}_1)$ inducido por la inclusión. Para ello consideramos una circunferencia \tilde{S}^1 de centro 0 contenida en V . Claramente \tilde{S}^1 es un retracto por deformación de V , luego la inclusión induce un isomorfismo $H_1(\tilde{S}^1) \cong H_1(V)$. Usamos de nuevo que una base de $H^1(\tilde{S}^1)$ la forma la clase de cualquier arco σ que dé una vuelta completa a la circunferencia. Podemos tomarlo, concretamente, de tal modo que su extremo inicial (y final) esté alineado con el 0 y el extremo común de los arcos τ_1 y τ_{2r} en S^1 . A su vez, podemos dividir σ en $2r$ arcos σ_i homotéticos a los arcos τ_i tal y como indica la figura. Sabemos que σ es homólogo a la cadena $\sigma_1 + \dots + \sigma_{2r}$. Así pues, $[\sigma] = [\sigma_1 + \dots + \sigma_{2r}]$ es una base de $H_1(\tilde{S}^1)$, luego también de $H_1(V)$. Si llamamos $\tilde{\sigma}_i = \phi^\sharp(\sigma_i)$, entonces, dado que ϕ se restringe a un homeomorfismo entre V y \tilde{V} , tenemos que $[\tilde{\sigma}] = [\tilde{\sigma}_1 + \dots + \tilde{\sigma}_{2r}]$ es una base de $H_1(\tilde{V})$.

La imagen de $[\sigma]$ por el homomorfismo $H_1(V) \rightarrow H_1(U_1)$ inducido por la inclusión es también $[\sigma] = [\sigma_1 + \dots + \sigma_{2r}]$, pero considerando ahora las clases en $H_1(U_1)$. Teniendo en cuenta las conmutatividades obvias, podemos concluir que

$$i_*([\tilde{\sigma}]) = [\tilde{\sigma}] = [\tilde{\sigma}_1 + \dots + \tilde{\sigma}_{2r}],$$

considerando ahora las clases en $H_1(\tilde{U}_1)$. El homomorfismo i_* está completamente determinado por esta imagen.

Para estudiarla consideramos su imagen en $H_1(G_r)$ a través de \tilde{r} . Teniendo en cuenta la construcción de \tilde{r} es fácil ver que $\tilde{r}_*([\tilde{\sigma}]) = \phi_*(r_*([\sigma]))$, es decir, que para calcular la imagen de $[\tilde{\sigma}]$ por \tilde{r}_* podemos calcular la imagen de $[\sigma]$ por r_* y luego aplicar ϕ . Ahora bien, es claro que $r^\sharp(\sigma_i) = \tau_i$, por lo que

$$r_*([\tilde{\sigma}]) = \phi_*([\tau_1 + \dots + \tau_{2r}]) = [\tilde{\tau}_1] + \dots + [\tilde{\tau}_{2r}].$$

Ahora aplicamos el homomorfismo inverso de \tilde{r} , es decir, el inducido por la inclusión $G_r \rightarrow \tilde{U}_1$, y obtenemos que

$$[\tilde{\sigma}] = [\tilde{\tau}_1] + \cdots + [\tilde{\tau}_{2r}],$$

donde ahora las clases son de $H_1(\tilde{U}_1)$.

Si $F_r = M_g$, sabemos que estas clases se anulan a pares, con lo que resulta $r_*([\tilde{\sigma}]) = 0$, luego $[\tilde{\sigma}] = 0$ y por consiguiente i_* es el homomorfismo nulo. Si $F_r = N_h$ entonces $[\tilde{\tau}_{2k-1}] = [\tilde{\tau}_{2k}]$, por lo que

$$[\tilde{\sigma}] = 2[\tilde{\tau}_2] + 2[\tilde{\tau}_4] + \cdots + 2[\tilde{\tau}_{2r}].$$

Además sabemos que las clases de la derecha son una base de $H_1(\tilde{U}_1)$. Otra base la constituyen las clases

$$[\tilde{\tau}_2], \dots, [\tilde{\tau}_{2(r-1)}], [\tilde{\tau}_2] + \cdots + [\tilde{\tau}_{2r}].$$

Respecto a esta base, $[\tilde{\sigma}]$ tiene coordenadas $(0, \dots, 0, 2)$, luego tenemos el isomorfismo

$$H_1(\tilde{U}_1)/\text{Im } i_* \cong \mathbb{A}^{r-1} \oplus (\mathbb{A}/2\mathbb{A}).$$

Por otra parte, si $a[\tilde{\sigma}]$ es un elemento arbitrario de $H_1(V)$, donde $a \in \mathbb{A}$, tenemos que $i_*(a[\tilde{\sigma}]) = 0$ si y sólo si $2a[\tilde{\tau}_2] + \cdots + 2a[\tilde{\tau}_{2r}] = 0$, si y sólo si $2a = 0$, si y sólo si $2a[\tilde{\sigma}] = 0$, luego el núcleo de i_* es el núcleo de la multiplicación por 2 en $H_1(V)$.

Ahora podemos calcular la sucesión de Mayer-Vietoris para la homología reducida:

$$0 \rightarrow H_2(F_r) \rightarrow H_1(V) \xrightarrow{i_*} H_1(U_1) \rightarrow H_1(F_r) \rightarrow 0.$$

Observemos que donde debería aparecer $H_1(U_1) \oplus H_1(U_2)$ hemos eliminado el segundo sumando porque es nulo. El homomorfismo correspondiente se reduce entonces a i_* . Prolongando la sucesión se comprueba que $H_p(F_r) = 0$ para $p > 2$. Si $F_r = M_g$ entonces $i_* = 0$, lo que implica que $H_2(M_g) \cong H_1(V) \cong \mathbb{A}$, así como que $H_1(M_g) \cong H_1(U_1) \cong \mathbb{A}^{2g}$.

Si $F_r = N_h$, entonces $H_2(N_h) \cong H_1(V)_{(2)} \cong \mathbb{A}_{(2)}$, donde, en general, $L_{(2)}$ denota al núcleo de la multiplicación por 2 en el \mathbb{A} -módulo L . Por otra parte, el teorema de isomorfía nos da que

$$H_1(N_h) \cong H_1(U_1)/\text{Im } i_* \cong \mathbb{A}^{h-1} \oplus (\mathbb{A}/2\mathbb{A}).$$

Resumimos a continuación lo que hemos obtenido:

Teorema 10.13 *Los grupos de homología reducida de las superficies compactas son:*

$$H_p(M_g) \cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } p = 2, \\ \mathbb{A}^{2g} & \text{si } p = 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

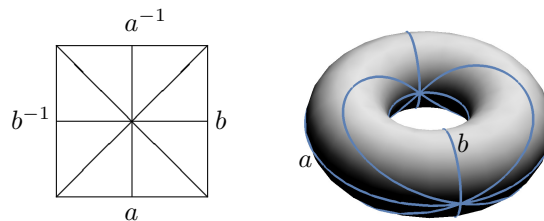
$$H_p(N_h) \cong \begin{cases} \mathbb{A}_{(2)} & \text{si } p = 2, \\ \mathbb{A}^{h-1} \oplus (\mathbb{A}/2\mathbb{A}) & \text{si } p = 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En particular las superficies M_g y N_h son no homotópicas dos a dos y los números g y h son invariantes topológicos. Por consiguiente, dos superficies compactas son homeomorfas si y sólo si son homotópicas.

Como es habitual, para la homología completa sólo hemos de cambiar que $H_0(M_g) \cong H_0(N_h) \cong \mathbb{A}$. Observemos que, salvo elecciones patológicas del anillo \mathbb{A} , de hecho tenemos que $H_2(N_h) = 0$.

La demostración muestra que unos generadores de $H_1(M_g)$ son las clases de los $2g$ ciclos que se forman al identificar los $4g$ lados del polígono a partir del cual se construye la superficie. Por ejemplo, en el caso del toro de la figura se trata de un arco a que recorra el “tubo” longitudinalmente y de otro b que lo rodee.

Más adelante demostraremos (teorema 10.54) que un generador de $H_2(M_g)$ se obtiene triangulando la superficie, es decir, cubriéndola con 2-símplices biyectivos (que sean homeomorfismos de Δ_2 en su imagen) de modo que dos triángulos tengan a lo sumo un vértice o un lado en común. Entonces es posible sumar y restar estos símplexes para que la suma con los signos adecuados sea un 2-ciclo, es decir, de modo que cada lado compartido por dos triángulos se recorra en sentidos opuestos al calcular sus fronteras, con lo que la frontera total es nula. Entonces la clase de homología de dicho 2-ciclo es un generador de $H_2(M_g)$. La figura muestra una triangulación de un toro, sobre el cuadrado que da lugar a la superficie al identificar sus lados y sobre la superficie del toro.



Para interpretar el hecho de que en los espacios N_h haya clases de homología (de dimensión 1) de orden 2 podemos pensar en el plano proyectivo N_1 . Podemos verlo como el disco B^2 en el que hemos identificado cada punto de S^1 con su antípoda. Una base de $H_1(N_1)$ está formada por la clase de un arco σ que describa media circunferencia. Entonces, $\sigma + \sigma$ es homotópico a un arco que describe una circunferencia completa, pero éste es homotópico a la frontera de un 2-símplice cuya imagen sea el disco abierto, luego $2[\sigma] = 0$.

10.4 La homología de los complejos celulares

Ahora vamos a comprobar que a partir de una estructura de complejo celular es posible calcular los grupos de homología de un espacio topológico de la forma esbozada en la introducción, es decir, considerando únicamente ciclos formados por celdas.

Según hemos señalado inmediatamente después de la definición de complejo celular, si X es un complejo celular tenemos homeomorfismos relativos

$$g_k : (B_1^k \oplus \cdots \oplus B_{r_k}^k, S_1^{k-1} \oplus \cdots \oplus S_{r_k}^{k-1}) \longrightarrow (X^k, X^{k-1}).$$

Es obvio que $S_1^{n-1} \oplus \cdots \oplus S_{r_k}^{n-1}$ es un retracto por deformación fuerte de un entorno compacto en $B_1^n \oplus \cdots \oplus B_{r_k}^n$, y el teorema 3.26 afirma lo mismo del par (X^k, X^{k-1}) (para $k > 0$). Por consiguiente podemos aplicar el teorema del homeomorfismo relativo 9.37 para concluir que

$$H_p(X^k, X^{k-1}) \cong H_p\left(\bigoplus_{j=1}^{r_k} B_j^k, \bigoplus_{j=1}^{r_k} S_j^{k-1}\right) \cong \bigoplus_{j=1}^{r_k} H_p(B^k, S^{k-1}).$$

Como B^k es contractible, la sucesión exacta del par (B^k, S^k) nos proporciona el isomorfismo $H_p(B^k, S^{k-1}) \cong H_{p-1}(S^{k-1})$, con lo que tenemos probado el teorema siguiente:

Teorema 10.14 *Si X es un complejo celular, el módulo $H_p(X^k, X^{k-1})$ es trivial salvo si $p = k$, en cuyo caso es un \mathbb{A} -módulo libre de rango igual al número de celdas k -dimensionales de X .*

Notemos que este teorema es trivialmente cierto para $k \leq 0$ si consideramos que $X^k = \emptyset$ cuando $k < 0$. Para $k = 0$ hemos de considerar la homología completa.

Para $p \geq 1$ el isomorfismo $H_p(B^p, S^{p-1}) \cong H_{p-1}(S^{p-1})$ dado por el homomorfismo de conexión implica que un generador de $H_p(B^p, S^{p-1})$ es cualquier clase $[c]$ tal que $[\partial c]$ sea un generador de $H_{p-1}(S^{p-1})$, y su imagen en $H_p(X^p, X^{p-1})$ es $[g_{k*}[c]]$.

Llamaremos $\tilde{C}_p(X) = H_p(X^p, X^{p-1})$. A los elementos de este módulo los llamaremos *p-cadenas celulares*. Los módulos $\tilde{C}_p(X)$ determinan un \mathbb{A} -módulo graduado que se convierte en un complejo si definimos el operador frontera

$$\partial_p : H_p(X^p, X^{p-1}) \longrightarrow H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2})$$

como el homomorfismo de conexión δ_* de la sucesión exacta correspondiente a la terna (X^p, X^{p-1}, X^{p-2}) . Notemos que se trata simplemente del homomorfismo $[c] \mapsto [\partial c]$, lo que implica que $\partial^2 = 0$. Otra forma de verlo más elegantemente es considerar el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & H_{p-2}(X^{p-2}) & & \\ & & \uparrow \delta_* & \searrow i_* & \\ H_p(X^p, X^{p-1}) & \xrightarrow{\partial_p} & H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2}) & \xrightarrow{\partial_{p-1}} & H_{p-2}(X^{p-2}, X^{p-3}) \\ & \searrow \delta_* & \uparrow i_* & & \\ & & H_{p-1}(X^{p-1}) & & \end{array}$$

Los triángulos conmutan por el teorema 9.22 aplicado a la identidad

$$i : (X^p, X^{p-1}, \emptyset) \longrightarrow (X^p, X^{p-1}, X^{p-2})$$

para el primer triángulo y a la aplicación correspondiente al cambiar p por $p - 1$ para el segundo. Ahora bien, la sucesión vertical es un tramo de la sucesión exacta del par (X^{p-1}, X^{p-2}) , luego $i_* \circ \delta_* = 0$, de donde se sigue que $\partial_p \circ \partial_{p-1} = 0$.

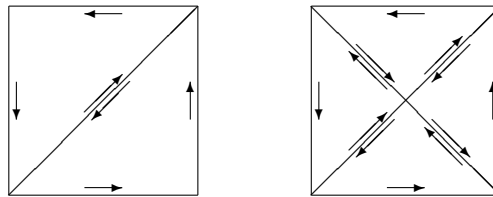
Si X es un complejo celular, llamaremos $\tilde{H}_p(X)$ a los grupos de homología del complejo $\tilde{C}(X)$.

Ejemplo Consideremos la enumeración de los vértices y las aristas de un cubo considerada en la página x. Considerando la superficie del cubo como complejo celular, tenemos que $\tilde{C}_0(X) = H_0(X^0, X^{-1}) = H_0(X^0)$, y los generadores (para la homología completa) son las clases de los símlices constantes correspondientes a cada vértice de X , que podemos identificar con los vértices v_1, \dots, v_8 , es decir, estamos llamando $v_i \in \tilde{C}_0(X)$ a la clase de homología del 0-símlice que toma el valor v_i .

Para $p = 1$, un generador de $H_1(B^1, S^0)$ es la clase de homología de cualquier arco σ que recorra el intervalo $B^1 = I$ de extremo a extremo, pues entonces la clase de $\partial\sigma = \sigma(1) - \sigma(0)$ genera $H_0(S^0)$, luego una base de $\tilde{C}_1(X) = H^1(X^1, X^0)$ está formada por las clases de arcos que recorran cada arista del cubo. Podemos elegir las de acuerdo con la figura de la página x. Así, podemos llamar, por ejemplo, a_1 a la clase de homología relativa de cualquier arco que una el vértice v_1 con el vértice v_2 , y con ello tenemos que $\tilde{C}_1(X)$ es el \mathbb{A} -módulo libre generado por las doce aristas a_1, \dots, a_{12} .

Similarmente, los generadores de $\tilde{C}_2(X) = H_2(X^2, X^1)$ son las imágenes por g_{2*} de los generadores de los módulos $H_2(B_j^2, S_j^1)$, los cuales son a su vez las clases de homología relativa $[c]$ tales que $[\partial c]$ genera S_j^1 .

Podemos transformar B_j^2 en un cuadrado de modo que g_{2*} transforme las cuatro aristas del cuadrado en cuatro aristas de una de las caras del cubo X . Entonces podemos tomar como generador de $H_2(B_j^2, S_j^1)$ la clase de homología relativa de cualquiera de las dos cadenas indicadas en la figura siguiente:



pues cualquiera de ellas cumple que su frontera da una única vuelta al cuadrado.

Por ejemplo, si c_1 es la cara anterior del cubo, entonces g_2 transforma el cuadrado en dicha cara y su frontera en el arco que recorre las aristas a_1, a_{10}, a_5 y (en sentido inverso) a_9 . Si llamamos c a la imagen por g_{2*} de la clase los símlices de cualquier de las dos figuras, tenemos que $c_1 = [c]$ y $[\partial c] = a_1 + a_{10} + a_5 - a_9$. Así resulta que $\tilde{C}_2(X)$ es el \mathbb{A} -módulo libre generado por las seis caras c_1, \dots, c_6 .

Además, por ejemplo, tenemos que $\partial a_1 = v_1 - v_1$ y $\partial c_1 = a_1 + a_{10} + a_5 - a_9$ y, en general, el complejo $(\tilde{C}(X), \partial)$ es justamente el definido en la introducción. ■

Ahora ya podemos demostrar que los grupos de homología de un complejo celular X se pueden calcular a partir de su estructura, es decir, a partir del complejo $\tilde{C}(X)$:

Teorema 10.15 *Sea X un complejo celular. Entonces $H_p(X) \cong \tilde{H}_p(X)$, para todo entero p (considerando la homología completa).*

DEMOSTRACIÓN: Hemos de considerar la sucesión

$$H_{p+1}(X^{p+1}, X^p) \xrightarrow{\partial_{p+1}} H_p(X^p, X^{p-1}) \xrightarrow{\partial_p} H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2})$$

y comprobar que $H_k(X)$ es isomorfo al núcleo de ∂_p sobre la imagen de ∂_{p+1} . Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & H_p(X^{p+1}, X^{p-2}) & & \\
 & & & & \downarrow j_* & & \\
 H_{p+1}(X^{p+1}, X^p) & \xrightarrow{\partial_{p+1}} & H_p(X^p, X^{p-1}) & \xrightarrow{i_*} & H_p(X^{p+1}, X^{p-1}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \searrow \partial_p & & \downarrow \delta_* & & \\
 & & & & H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2}) & &
 \end{array}$$

La fila y la columna son sucesiones exactas de ternas. El triángulo conmuta por el teorema 9.22.

Si $x \in N(\partial_p)$, entonces $\delta_*(i_*(x)) = 0$, luego $i_*(x) = j_*(y)$, para cierta clase $y \in H_p(X^{p+1}, X^{p-2})$. Como j_* es un monomorfismo, y está unívocamente determinado. Podemos definir, pues,

$$\phi : N(\partial_p) \longrightarrow H_p(X^{p+1}, X^{p-2})$$

mediante $\phi(x) = y$, y es fácil ver que se trata de un homomorfismo.

Si $y' \in H_p(X^{p+1}, X^{p-2})$, entonces $j_*(y') \in \text{Im } i_*$, pues i_* es suprayectivo. Así pues, existe un $x' \in H_p(X^p, X^{p-1})$ tal que $j_*(y') = i_*(x')$, de donde

$$\partial_p x' = \delta_*(i_*(x')) = \delta_*(j_*(y')) = 0,$$

lo que implica que $x' \in N(\partial_p)$ y $\phi(x') = y'$. Así pues, ϕ es un epimorfismo.

Como $\partial_{p+1} \circ i_* = 0$, es claro que $\text{Im}(\partial_{p+1}) \subset N(\phi)$. De hecho se da la igualdad, pues si $x \in N(\phi) \subset N(\partial_p)$, entonces $i_*(x) = 0$, luego $x \in \text{Im}(\partial_{p+1})$.

Así pues, $N(\phi) = \text{Im}(\partial_{p+1})$, y el teorema de isomorfía nos da que ϕ induce un isomorfismo de módulos

$$\phi : \tilde{H}_p(X) \longrightarrow H_p(X^{p+1}, X^{p-2}).$$

Ahora probaremos que $H_p(X^{p+1}, X^{p-2}) \cong H_p(X)$. Sea n la dimensión del complejo X , de modo que $H_p(X) = H_p(X^n, X^{-1})$. Las inclusiones entre pares inducen homomorfismos

$$H_p(X) \longrightarrow H_p(X^n, X^{-1}) \longrightarrow H_p(X^n, X^0) \longrightarrow \dots \longrightarrow H_p(X^n, X^{p-2}).$$

Cada uno de estos homomorfismos forma parte de una sucesión exacta

$$H_p(X^i, X^{i-1}) \longrightarrow H_p(X^n, X^{i-1}) \longrightarrow H_p(X^n, X^i) \longrightarrow H_{p-1}(X^i, X^{i-1}),$$

y el teorema 10.14 nos da que los extremos de esta sucesión son triviales, luego cada homomorfismo es en realidad un isomorfismo. Concluimos, pues, que

$$H_p(X) \cong H_p(X^n, X^{p-2}).$$

Similarmente, los homomorfismos

$$H_p(X^{p+1}, X^{p-2}) \longrightarrow H_p(X^{p+2}, X^{p-2}) \longrightarrow \dots \longrightarrow H_p(X^n, X^{p-2})$$

inducidos por las inclusiones son isomorfismos, con lo que

$$H_p(X^n, X^{p-2}) \cong H_p(X^{p+1}, X^{p-2}).$$

Uniendo estos dos isomorfismos obtenemos el que necesitábamos. ■

El isomorfismo dado por el teorema anterior es natural en la categoría de los complejos celulares tomando como morfismos las aplicaciones que conservan la estructura celular:

Definición 10.16 Una aplicación continua $f : X \longrightarrow Y$ entre complejos celulares es *celular* si cumple $f[X^p] \subset Y^p$ para todo p .

Una aplicación celular f induce aplicaciones entre pares

$$f : (X^p, X^{p-1}) \longrightarrow (Y^p, Y^{p-1}),$$

luego induce homomorfismos

$$f_* : H_p(X^p, X^{p-1}) \longrightarrow H_p(Y^p, Y^{p-1}).$$

A este homomorfismo lo llamaremos $\tilde{f}_p : \tilde{C}_p(X) \longrightarrow \tilde{C}_p(Y)$. El teorema 9.22 implica inmediatamente que \tilde{f} conmuta con el operador frontera de $\tilde{C}(X)$, es decir, que es un homomorfismo de complejos, por lo que induce homomorfismos

$$\tilde{f}_{*p} : \tilde{H}_p(X) \longrightarrow \tilde{H}_p(Y).$$

Teorema 10.17 Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación celular entre dos complejos celulares. Entonces el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_p(X) & \longrightarrow & H_p(X) \\ \tilde{f}_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ \tilde{H}_p(Y) & \longrightarrow & H_p(Y) \end{array}$$

donde las flechas horizontales representan los isomorfismos construidos en el teorema 10.15.

DEMOSTRACIÓN: Si analizamos la prueba del teorema 10.15, veremos que el isomorfismo construido se descompone en tres isomorfismos, de acuerdo con el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_p(X) & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & H_p(X^{p+1}, X^{p-2}) & \longrightarrow & H_p(X, X^{p-2}) & \longleftarrow & H_p(X) \\ \tilde{f}_* \downarrow & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ \tilde{H}_p(Y) & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & H_p(Y^{p+1}, Y^{p-2}) & \longrightarrow & H_p(Y, Y^{p-2}) & \longleftarrow & H_p(Y) \end{array}$$

Las flechas horizontales sin nombre representan los homomorfismos inducidos por las inclusiones. Es claro entonces que el cuadrado central y el derecho son conmutativos. Sólo falta probar que lo mismo sucede con el izquierdo.

Con la notación de 10.15, el homomorfismo $\tilde{\phi}$ está determinado por los homomorfismos i_* y j_* . Concretamente, si $x \in \tilde{Z}_p(X)$, tenemos que $\tilde{\phi}([x]) = \phi(x)$, donde $\phi(x)$ está determinado por la relación $i_*(x) = j_*(\phi(x))$. Como f_* conmuta con i_* y j_* , tenemos que $i_*(f_*(x)) = j_*(f_*(\phi(x)))$, lo que significa que $f_*(\phi(x)) = \phi(f_*(x))$, donde la segunda ϕ es la correspondiente al complejo Y .

Tomando clases en $\tilde{H}_p(X)$ y $\tilde{H}_p(Y)$, concluimos que

$$f_*(\tilde{\phi}([x])) = f_*(\phi(x)) = \phi(f_*(x)) = \tilde{\phi}([f_*(x)]) = \tilde{\phi}(\tilde{f}_*([x])).$$

■

Vamos a ver varias aplicaciones de esta representación de los grupos de homología. Para empezar observamos que ahora la homología de los espacios proyectivos complejos se calcula inmediatamente. Basta recordar que $P^n(\mathbb{C})$ se obtiene a partir de $P^{n-1}(\mathbb{C})$ adjuntando una celda de dimensión $2n$, lo que nos da una estructura de complejo celular en $P^n(\mathbb{C})$ con una única celda de dimensión $2k$ para cada $k \leq n$ (y ninguna celda de dimensión impar). Por consiguiente

$$\tilde{C}_p(P^n(\mathbb{C})) \cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } 0 \leq p = 2k \leq 2n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Necesariamente, entonces, el operador frontera ha de ser trivial, lo que nos da el teorema siguiente:

Teorema 10.18 *La homología (completa) del espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ viene dada por*

$$H_p(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } 0 \leq p = 2k \leq 2n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

También vamos a calcular la homología de los espacios proyectivos reales, pero esto requiere argumentos más sutiles. Antes veremos algunos ejemplos más sencillos.

La homología de las superficies compactas Usaremos ahora 10.15 para calcular de nuevo la homología de las superficies compactas que ya hemos calculado en la sección anterior. Por simplicidad calcularemos la homología de N_3 , aunque el método es general y aplicable igualmente a las superficies M_g .

Observamos que N_3 es un complejo celular que puede ser construido como sigue: X^0 consta de un único vértice v . Representaremos por σ_v su 0-símplice asociado en $C_0(X^0)$. Ahora construimos X^1 adjuntando tres aristas a, b, c con ambos extremos en v , con lo que obtenemos una rosa de tres pétalos. Específicamente, la adjunción se realiza a través de la aplicación

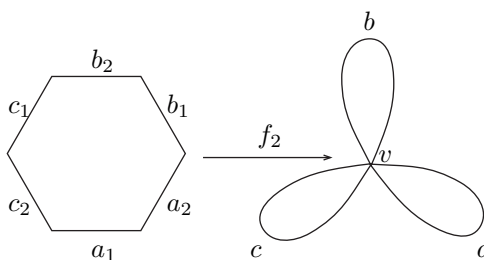
$$f_1 : S_1^0 \oplus S_2^0 \oplus S_3^0 \longrightarrow X^0$$

constante igual a v , con la que obtenemos

$$g_1 : B_1^1 \oplus B_2^1 \oplus B_3^1 \longrightarrow X^1$$

de manera que $\sigma_a = g_1|_{B_1^1}$, $\sigma_b = g_1|_{B_2^1}$, $\sigma_c = g_1|_{B_3^1}$, son tres 1-símplices en $C_1(X^1)$ que parametrizan cada uno de los tres pétalos a, b, c .

Para formar X^2 , dividimos S^1 en seis arcos iguales (podemos identificar a S^1 con un hexágono regular, y entonces tales arcos son los lados). Parametrizamos dichos arcos mediante 1-símplices $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ordenados como indica la figura. Se entiende que todos están recorridos en sentido antihorario, de modo que la 1-cadena $a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2$ es un 1-ciclo que genera $H_1(S^1)$.



Mediante a_1^{-1} biyectamos el lado a_1^* con B_1^1 , y a continuación aplicamos g_1 , con lo que tenemos una aplicación continua de a_1^* en X^1 . Hacemos lo mismo con a_2 , mientras que b_1 y b_2 los hacemos corresponder con B_2^1 y c_1, c_2 con B_3^1 . De este modo obtenemos seis aplicaciones continuas de cada uno de los lados

del hexágono en X^1 . Como todas ellas hacen corresponder los extremos con el punto v , se pueden unir en una única aplicación continua

$$f_2 : S^1 \longrightarrow X^1,$$

a través de la cual adjuntamos al complejo una única cara k .

Así obtenemos una aplicación $g_2 : B^2 \longrightarrow X^2$ que restringida a $\overset{\circ}{B}^2$ es un homeomorfismo en su imagen y en la frontera cumple

$$g_2^\#(a_1) = g_2^\#(a_2) = \sigma_a, \quad g_2^\#(b_1) = g_2^\#(b_2) = \sigma_b, \quad g_2^\#(c_1) = g_2^\#(c_2) = \sigma_c.$$

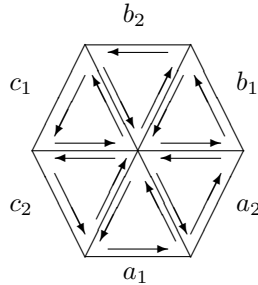
De aquí se sigue inmediatamente que el complejo $X = X^2$ es homeomorfo a N_3 . Si llamamos $v = [\sigma_v] \in H_0(X^0)$, tenemos que

$$\tilde{C}_0(X) = \langle v \rangle.$$

Similarmente, sabemos que $\tilde{C}_1(X)$ está generado por las imágenes por g_{1*} de un generador de cada grupo $H_1(B_i^1, S_i^1)$. Este grupo está generado por la clase de la identidad $B_i^1 \longrightarrow B_i^1$, y su imagen es la clase del simplejo $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ correspondiente. Así pues, tomando clases en $H_1(X^1, X^0)$, llamamos $a = [\sigma_a]$, $b = [\sigma_b]$ y $c = [\sigma_c]$, y se cumple que

$$\tilde{C}_1(X) = \langle a, b, c \rangle.$$

Finalmente, consideramos en B^2 (identificado con el hexágono) la 2-cadena σ_k indicada en la figura:



Puesto que

$$\partial\sigma_k = a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2$$

es un ciclo cuya clase genera $H^1(S^1)$, tenemos que $k = g_{2*}([\sigma_k])$ es el generador de $H^2(X^2, X^1)$ correspondiente a la única cara de N_3 . Así pues,

$$\tilde{C}_2(X) = \langle k \rangle.$$

Ahora calculamos el operador frontera del complejo $\tilde{C}(X)$. Trivialmente, $\partial v = 0$. Por otra parte,

$$\partial a = \delta_*([\sigma_a]) = [\partial\sigma_a] = [v - v] = 0,$$

e igualmente $\partial b = \partial c = 0$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\partial k &= \delta_*([g_2^\sharp(\sigma_k)]) = [\partial g_2^\sharp(\sigma_k)] = [g_2^\sharp(\partial\sigma_k)] = [g_2^\sharp(a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2)] \\ &= [2\sigma_a] + [2\sigma_b] + [2\sigma_c] = 2a + 2b + 2c.\end{aligned}$$

Por consiguiente, rk , para $r \in \mathbb{A}$ es un ciclo si y sólo si $2r = 0$, es decir, si y sólo si r pertenece al núcleo $\mathbb{A}_{(2)}$ de la multiplicación por 2 en \mathbb{A} y, por consiguiente, $H_2(X) \cong \mathbb{A}_{(2)}$. Por otra parte,

$$H_1(X) = \langle a, b, c \rangle / \langle 2a + 2b + 2c \rangle \cong \mathbb{A}^2 \oplus (\mathbb{A}/2\mathbb{A}),$$

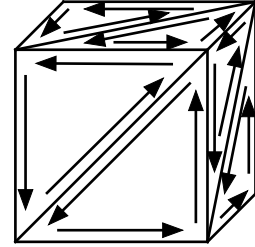
y claramente $H_0(X) \cong \mathbb{A}$. ■

La homología del cubo con las caras opuestas identificadas Consideremos nuevamente la variedad tridimensional compacta \mathcal{C} que resulta de identificar las caras opuestas de un cubo (véase el penúltimo ejemplo de la sección 3.4).

Teorema 10.19 $H_0(\mathcal{C}) \cong \mathbb{A}$, $H_1(\mathcal{C}) \cong H_2(\mathcal{C}) \cong \mathbb{A}^3$, $H_3(\mathcal{C}) \cong \mathbb{A}$.

DEMOSTRACIÓN: Según la prueba del teorema 10.14, sabemos que el grupo de 3-cadenas celulares de \mathcal{C} es de la forma $\tilde{C}_3(\mathcal{C}) = \langle z \rangle$, donde $z \in H^3(X^3, X^2)$ se corresponde a través del homeomorfismo relativo $(B^3, S^2) \rightarrow (X^3, X^2)$ a través del cual se realiza la adjunción a X^2 de la única celda tridimensional de \mathcal{C} con la clase de una cadena $c_0 \in C_3(X^3)$ tal que $H^2(S^2) = \langle [\partial c_0] \rangle$.

Podemos identificar B^3 con el cubo I^3 , y entonces sirve como c_0 la cadena formada por doce 3-símplices resultantes de dividir en dos triángulos cada cara del cubo y formar con cada uno de ellos un tetraedro cuyo cuarto vértice sea el centro del cubo. Más precisamente, elegimos los símplices $\sigma : \Delta_3 \rightarrow I^3$ como biyecciones afines que hacen corresponder los vértices de Δ_3 y del cada tetraedro de modo que al calcular $\partial\partial\sigma$ las aristas de la superficie del cubo sean recorridas como indica la figura, es decir, de modo que cada triángulo visto desde fuera del cubo sea recorrido en sentido antihorario.



Esto hace que si σ_1 y σ_2 tienen una cara en común (en el interior del cubo) ésta aparezca con signos opuestos en $\partial\sigma_1$ y $\partial\sigma_2$, por lo que la 3-cadena c_0 formada por los doce símplices que parametrizan los doce tetraedros cumple que ∂c_0 es el 2-ciclo formado exclusivamente por los doce triángulos situados en la superficie del cubo, ya que los triángulos interiores se cancelan dos a dos. En particular $[\partial c_0] \in H^2(\partial I^3)$ y se cumple que es un generador.¹

¹Omitimos la prueba de este hecho porque más adelante será inmediato, por el teorema 10.54, según el cual la clase de todo ciclo obtenido a partir de una triangulación de una superficie compacta orientable es un generador. Notemos que $X^2 \cong S^2$ es una superficie compacta orientable.

Así pues, podemos tomar $z = \pi_*([c_0])$, donde $\pi : I^3 \rightarrow \mathcal{C}$ es la proyección en el cociente, que, a través de la identificación $I^3 \cong S^3$, coincide con el homeomorfismo que adjunta a \mathcal{C} su celda tridimensional.

Ahora observamos que $\partial z = 0$, pues ∂c_0 está formado por los doce triángulos (2-símplices) en que hemos dividido las caras del cubo, pero es fácil ver que si σ es uno de ellos y σ' es el que ocupa su misma posición en la cara opuesta, entonces $\pi^\sharp(\sigma) = -\pi^\sharp(\sigma')$, por lo que, al aplicar π^\sharp a ∂c_0 , los doce triángulos que la componen se cancelan dos a dos.

Esto hace que el grupo de las 2-fronteras en $\tilde{C}_2(\mathcal{C})$ sea nulo. Sabemos que $\tilde{C}_2(\mathcal{C}) = \langle C_1, C_2, C_3 \rangle$, donde cada clase C_i está asociada a una de las tres caras de \mathcal{C} . Concretamente, C_i es la imagen por π_* de la clase de una 2-cadena c_i en una de las dos caras C^* de I^3 cuya imagen en \mathcal{C} es la cara correspondiente con la propiedad de que $[\partial c_i]$ genere $H_1(\partial C^*)$. Sirve la suma $c_i = \sigma + \sigma'$ de los dos triángulos en que hemos descompuesto la cara, pues ciertamente ∂c_i está formado por cuatro 1-símplices (hay dos lados que se cancelan mutuamente) que forman un 1-ciclo en ∂C^* que da exactamente una vuelta a ∂C^* , luego $[\partial c_i]$ genera $H_1(\partial C^*)$.

Ahora bien, es claro que la imagen por π_* de cada lado de una cara de I^3 es el 1-símplice opuesto a la imagen del lado opuesto, por lo que los cuatro 1-símplices que forman $\partial \pi^\sharp(c_i)$ se cancelan dos a dos, y por consiguiente $\partial C_i = 0$.

Finalmente, como \mathcal{C} tiene un único vértice, sucede que $\tilde{C}_0(\mathcal{C}) = \langle v \rangle$, donde v es el 0-símplice correspondiente a dicho vértice, y la frontera de cualquier 1-símplice tiene que ser nula. Resulta, pues, que el complejo $\tilde{C}(\mathcal{C})$ es de la forma

$$0 \longrightarrow \langle z \rangle \longrightarrow \langle C_1, C_2, C_3 \rangle \longrightarrow \langle a, b, c \rangle \longrightarrow \langle v \rangle \longrightarrow 0$$

y el operador frontera es nulo, luego los grupos de homología son los indicados en el enunciado. ■

La homología de la esfera homológica de Poincaré Ya podemos explicar por qué la esfera homológica de Poincaré (véase el último ejemplo de la sección 3.4) recibe ese nombre. En general, una *esfera homológica* es una variedad topológica X de dimensión n cuyos grupos de homología coinciden con los de la esfera S^n , es decir, que son $H_0(X) \cong H_n(X) \cong \mathbb{A}$, $H_p(X) = 0$ para $p \neq 0, n$.

Teorema 10.20 *La esfera homológica de Poincaré es una esfera homológica tridimensional.*

La esfera S^2 es la única superficie compacta S que cumple $H^1(S) = 0$. En 1900 Poincaré conjeturó que toda variedad topológica compacta tridimensional con grupos de homología isomorfos a los de la esfera tridimensional S^3 es homeomorfa a S^3 . Sin embargo, en 1904 encontró la que hoy se conoce como esfera homológica de Poincaré, que refutaba su conjetura. (Más adelante se descubrieron muchas más, aunque puede probarse que la de Poincaré es la única que tiene grupo fundamental finito.) Poincaré se preguntó entonces si sería cierto lo que pasaría a conocerse como *conjetura de Poincaré* (si bien nunca declaró que pensara que la respuesta a su pregunta debiera de ser afirmativa):

Toda variedad topológica compacta tridimensional simplemente conexa es homeomorfa a S^3 .

La conjetura permaneció olvidada hasta la década de 1930, cuando Henry Whitehead afirmó haberla demostrado, si bien no tardó en retractarse. Desde entonces resistió numerosos intentos de ser demostrada hasta que el matemático ruso Grigori Perelman la probó en 2003.

DEMOSTRACIÓN: El razonamiento es completamente análogo al del ejemplo anterior, así que omitiremos los detalles técnicos que se precisan o justifican del mismo modo. Como antes, podemos triangular un dodecaedro regular dividiendo cada cara pentagonal en tres triángulos (o cinco, si por simplicidad preferimos tomar el centro del pentágono como vértice auxiliar) y formando tetraedros que tienen el centro del dodecaedro como cuarto vértice. Esto nos da una 3-cadena cuya proyección en el cociente genera $\tilde{C}(\mathcal{C}) = \langle z \rangle$. Igualmente se razona que $\partial z = 0$, luego $H_3(\mathcal{C}) \cong \mathbb{A}$.

A su vez, $\tilde{C}_2(\mathcal{C}) = \langle C_1, \dots, C_{10} \rangle$, donde cada C_i es la imagen por la proyección π_* de la cadena c_i formada por los tres (o cinco) triángulos que cubren una de las caras del dodecaedro, de modo que al calcular ∂c_i se cancelan todos los simplices correspondientes a aristas interiores y quedan los cinco correspondientes a los lados del pentágono recorridos en sentido antihorario. Esta vez las cinco aristas de cada cara del dodecaedro siguen siendo aristas distintas en \mathcal{C} . Remitimos al lector a la figura de la página 138 para comprobar que el operador frontera $\partial : \tilde{C}_2(\mathcal{C}) \rightarrow \tilde{C}_1(\mathcal{C})$ es el determinado por la matriz siguiente:²

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
C_0	1	1	1	1	-1	0	0	0	0	0
C_1	0	-1	0	0	1	-1	0	0	1	-1
C_2	-1	0	-1	0	0	1	-1	0	0	1
C_3	0	-1	0	-1	0	-1	1	1	0	0
C_4	0	0	-1	0	1	0	-1	-1	1	0
C_5	-1	0	0	-1	0	0	0	1	-1	1

Aquí a_i son las 10 aristas de \mathcal{C} , entendiendo que, si los vértices son p, q, r, s, t , cada a_i es el 1-símplex que tiene por origen al vértice anterior en orden alfabético. Por ejemplo, a_1 es el arco que va de p a q y a_5 es el arco que va de p a t . Así, la primera fila de la tabla indica que $\partial C_0 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - a_5$, que corresponde a recorrer los vértices $p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow s \rightarrow t \rightarrow p$ de la cara C_0 de \mathcal{C} en sentido antihorario.

Si calculamos el determinante de la submatriz formada por las seis primeras columnas resulta que da 1, lo cual se interpreta como que el operador frontera es inyectivo, luego en $\tilde{C}_2(\mathcal{C})$ no hay más ciclos que el trivial, luego $H_2(\mathcal{C}) = 0$.

²Los resultados teóricos que obtendremos más adelante nos permitirán llegar a este mismo resultado sin necesidad de cálculo alguno (véase la nota de la página 517). No obstante, presentamos los cálculos para ilustrar cómo el cálculo de grupos de homología de complejos celulares se reduce a cálculos rutinarios de álgebra lineal.

Por otra parte, $\partial : \tilde{C}_1(\mathcal{C}) \rightarrow \tilde{C}_0(\mathcal{C})$ es el homomorfismo determinado por la tabla siguiente:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
p	-1	0	0	0	-1	-1	0	-1	0	0
q	1	-1	0	0	0	0	-1	0	-1	0
r	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	-1
s	0	0	1	-1	0	1	0	0	1	0
t	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1

Por ejemplo, la primera columna expresa que $\partial a_1 = q - p$. Si multiplicamos la matriz anterior por la traspuesta de ésta obtenemos la matriz nula, lo que expresa que $\partial^2 = 0$. Resolviendo el sistema de ecuaciones $(x_1, \dots, x_{10})A^t = 0$ (donde A es la matriz de la tabla anterior), obtenemos una base de $Z_1(\mathcal{C})$, que resulta estar formado por 6 ciclos:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
z_1	-1	-1	-1	-1	1	0	0	0	0	0
z_2	-1	-1	-1	0	0	1	0	0	0	0
z_3	0	-1	-1	-1	0	0	1	0	0	0
z_4	-1	-1	0	0	0	0	0	1	0	0
z_5	0	-1	-1	0	0	0	0	0	1	0
z_6	0	0	-1	-1	0	0	0	0	0	1

Por último, expresamos cada fila de la primera tabla (cada frontera generadora del grupo de fronteras) como combinación lineal de estos ciclos, con lo que obtenemos la matriz siguiente:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

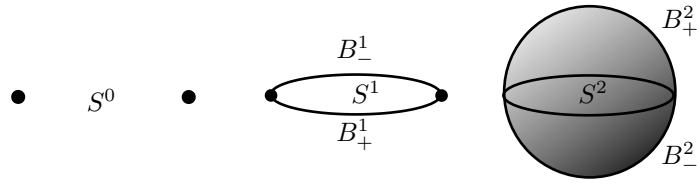
Su determinante resulta ser -1 , lo que expresa que $F_1(\mathcal{C}) = Z_1(\mathcal{C})$, luego $H_1(\mathcal{C}) = 0$ y, por la conexión de \mathcal{C} , sabemos que $H_0(\mathcal{C}) \cong \mathbb{A}$. ■

Nos ocupamos ahora de la homología de $P^n(\mathbb{R})$. Para ello hemos de describir con detalle una estructura de complejo celular en la esfera S^n . Identificando a S^p con los puntos de S^n cuyas últimas coordenadas son nulas, vamos a considerar a S^n como complejo celular X de modo que el esqueleto de dimensión p será $X^p = S^p$.

Para ello basta observar que S^p puede obtenerse a partir de S^{p-1} adjuntando dos celdas:

$$B_+^p = \{x \in S^p \mid x_{p+1} > 0\}, \quad B_-^p = \{x \in S^p \mid x_{p+1} < 0\}.$$

Específicamente, tenemos la aplicación $g_p : B_1^p \oplus B_2^p \rightarrow S^p$ que restringida a B_1^p es $g_p(x) = (x, \sqrt{1 - \|x\|})$ y restringida a B_2^p es $g_p(x) = (x, -\sqrt{1 - \|x\|})$.



(Notemos que estamos sustituyendo el espacio cociente determinado por la restricción de g_p a la suma de las fronteras por un espacio homeomorfo, a saber, la realización de S^p como subespacio de \mathbb{R}^{n+1} . Esto no supone ningún cambio teórico sustancial.)

Consideremos ahora la aplicación antipodal $\alpha : S^n \rightarrow S^n$. Ciertamente es celular, luego induce homomorfismos $\tilde{\alpha}^\#$ entre los grupos $\tilde{C}_p(S^n)$. Si llamamos $\beta : B^p_1 \oplus B^p_2 \rightarrow B^p_1 \oplus B^p_2$ a la aplicación que envía $x \in B^p_1$ a $-x \in B^p_2$ y viceversa, tenemos que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} B^p_1 \oplus B^p_2 & \xrightarrow{g_p} & S^p \\ \beta \downarrow & & \downarrow \alpha \\ B^p_1 \oplus B^p_2 & \xrightarrow{g_p} & S^p \end{array}$$

Por lo tanto, el diagrama siguiente también conmuta:

$$\begin{array}{ccc} H_p(B^p_1 \oplus B^p_2, S^{p-1}_1 \oplus S^{p-1}_2) & \xrightarrow{g_{p*}} & \tilde{C}_p(S^n) \\ \beta_* \downarrow & & \downarrow \tilde{\alpha}^\# \\ H_p(B^p_1 \oplus B^p_2, S^{p-1}_1 \oplus S^{p-1}_2) & \xrightarrow{g_{p*}} & \tilde{C}_p(S^n) \end{array}$$

Ahora bien, es claro que β_* se restringe a un isomorfismo entre $H_p(B^p_1, S^{p-1}_1)$ y $H_p(B^p_2, S^{p-1}_2)$, luego, fijado un generador (libre) c del primer módulo, podemos tomar a $\beta_*(c)$ como generador (libre) del segundo. Esto se traduce en que como base de $\tilde{C}_p(S^n)$ podemos tomar un par de clases $e_p, \tilde{\alpha}^\#(e_p)$.

Para estudiar el operador frontera consideramos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} H_p(S^p, S^{p-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{p-1}(S^{p-1}, S^{p-2}) & & \\ \delta_* \searrow & & \nearrow i_* & & \\ & H_{p-1}(S^{p-1}) & & & \\ \tilde{\alpha}^\# \downarrow & & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \tilde{\alpha}^\# \\ & H_{p-1}(S^{p-1}) & & & \\ \delta_* \nearrow & & \searrow i_* & & \\ H_p(S^p, S^{p-1}) & \xrightarrow{\partial} & H_{p-1}(S^{p-1}, S^{p-2}) & & \end{array}$$

Según el teorema 10.6, el homomorfismo α_* que aparece en el centro del diagrama es la multiplicación por $(-1)^p$. Vemos, pues, que

$$\partial\tilde{\alpha}^\sharp(e_p) = i_*(\alpha_*(\delta_*(e_p))) = (-1)^p i_*(\delta_*(e_p)) = (-1)^p \partial e_p.$$

En particular, la cadena $e_p + (-1)^{p+1}\tilde{\alpha}^\sharp(e_p)$ es un ciclo. Vamos a ver que si $p > 0$ es, de hecho, una base de $\tilde{Z}_p(S^n)$. Ciertamente es libre. Un ciclo arbitrario ha de ser de la forma $z = a_1 e_p + a_2 \tilde{\alpha}^\sharp(e_p)$, para ciertos $a_1, a_2 \in \mathbb{A}$, sujeto a la condición

$$0 = \partial(a_1 e_p + a_2 \tilde{\alpha}^\sharp(e_p)) = (a_1 + (-1)^p a_2) \partial e_p.$$

Si probamos que ∂e_p es libre, concluiremos que $a_1 + (-1)^p a_2 = 0$, con lo que

$$z = a_1(e_p + (-1)^{p+1}\tilde{\alpha}^\sharp(e_p)),$$

como queríamos probar. Para ello consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_p(B_1^p, S_1^{p-1}) & \xrightarrow{g_{p*}} & H_p(S^p, S^{p-1}) \\ \delta_* \downarrow & & \downarrow \delta_* = \partial \\ H_{p-1}(S^{p-1}) & \xrightarrow{i_*} & H_{p-1}(S^{p-1}, S^{p-2}) \end{array}$$

Las flechas horizontales son las inducidas por la restricción

$$g_p : (B_1^p, S_1^{p-1}, \emptyset) \longrightarrow (S^p, S^{p-1}, S^{p-2}),$$

ambas son monomorfismos: la superior porque es la restricción de un isomorfismo, la inferior porque, en la sucesión de homología del par (S^{p-1}, S^{p-2}) , el término anterior es $H_{p-1}(S^{p-2}) = 0$. Por otra parte, la flecha vertical izquierda es un isomorfismo y sabemos que e_p es la imagen por g_{p*} de una base de $H_p(B_1^p, S_1^{p-1})$, luego ∂e_p es la imagen por i_* de una base de $H_{p-1}(S^{p-1})$. Es claro entonces que ∂e_p es libre, como queríamos probar.

Si $0 < p < n$, es claro que $\tilde{F}_p(S^n) = \langle \partial e_{p+1} \rangle$. Por otra parte, sabemos que $\tilde{H}_p(S^n) \cong H_p(S^n) = 0$, luego

$$\tilde{Z}_p(S^n) = \langle e_p + (-1)^{p+1}\tilde{\alpha}^\sharp(e_p) \rangle = \langle \partial e_{p+1} \rangle = \tilde{F}_p(S^n).$$

Por consiguiente,

$$\partial e_{p+1} = \epsilon(e_p + (-1)^{p+1}\tilde{\alpha}^\sharp(e_p)),$$

donde $\epsilon \in \mathbb{A}$ es una unidad. Podemos cambiar e_p por ϵe_p y así $\epsilon = 1$, es decir, tenemos la relación

$$\partial e_{p+1} = e_p + (-1)^{p+1}\tilde{\alpha}^\sharp(e_p).$$

Una comprobación directa muestra que esta fórmula vale igualmente si $p = 0$. Con esto tenemos completamente determinado el complejo $\tilde{C}(S^n)$.

Ahora consideramos la proyección canónica $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, que claramente es celular, luego induce homomorfismos

$$\tilde{\pi}^\# : \tilde{C}_p(S^n) \rightarrow \tilde{C}_p(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})).$$

La restricción $\pi : (B_+^p, S^{p-1}) \rightarrow (\mathbb{P}^p(\mathbb{R}), \mathbb{P}^{p-1}(\mathbb{R}))$ es un homeomorfismo relativo, luego $\tilde{\pi}^\#$ se restringe a un isomorfismo entre $H_p(B_+^p, S^{p-1})$ y $\tilde{C}_p(\mathbb{P}^p(\mathbb{R}))$. Por consiguiente, $e'_p = \tilde{\pi}^\#(e_p)$, es una base de $\tilde{C}_p(\mathbb{P}^p(\mathbb{R}))$. Por otra parte,

$$\tilde{\pi}^\#(\tilde{\alpha}^\#(e_p)) = \widetilde{\alpha \circ \pi}^\#(e_p) = \tilde{\pi}^\#(e_p) = e'_p.$$

Con esto podemos calcular el operador frontera:

$$\begin{aligned} \partial e'_{p+1} &= \partial \tilde{\pi}^\#(e_{p+1}) = \tilde{\pi}^\#(\partial e_{p+1}) \\ &= \tilde{\pi}^\#(e_p + (-1)^{p+1} \tilde{\alpha}^\#(e_p)) = (1 + (-1)^{p+1}) e'_p. \end{aligned}$$

Explícitamente:

$$\partial e'_{p+1} = \begin{cases} 2e'_p & \text{si } p \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } p \text{ es impar.} \end{cases}$$

Ahora es inmediato el teorema siguiente:

Teorema 10.21 *La homología (completa) del espacio proyectivo real $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ es la dada por*

$$H_p(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \cong \begin{cases} 0 & \text{si } p < 0 \text{ o } p > n, \\ \mathbb{A} & \text{si } p = 0, \\ \mathbb{A}_{(2)} & \text{si } 1 \leq p = 2k \leq n, \\ \mathbb{A}/2\mathbb{A} & \text{si } 1 \leq p = 2k + 1 < n, \\ \mathbb{A} & \text{si } p = 2k + 1 = n, \end{cases}$$

donde $\mathbb{A}_{(2)}$ es el núcleo de la multiplicación por 2 en \mathbb{A} .

10.5 Los números de Betti y la característica de Euler

En esta sección supondremos que el anillo de coeficientes \mathbb{A} sobre el que construimos los grupos de homología es un dominio de ideales principales (como \mathbb{Z}). En tal caso, si M es un \mathbb{A} -módulo finitamente generado y $T(M)$ es el *submódulo de torsión*, es decir, el submódulo formado por los elementos $m \in M$ tales que existe un $a \in \mathbb{A}$ no nulo tal que $am = 0$, se cumple [Al 4.45] que $M/T(M)$ es un \mathbb{A} -módulo libre (finitamente generado). Al rango de este cociente se le llama *rango* de M . Además [Al 4.41], todo submódulo de un \mathbb{A} -módulo libre de rango finito r es libre y de rango menor o igual que r .

Definición 10.22 Sea X un espacio topológico y p un entero tal que el \mathbb{A} -módulo $H_p(X)$ sea finitamente generado. Entonces se define el *número de Betti* de X de dimensión p como el rango $b_p(X)$ de $H_p(X)$. Cuando no se especifica el anillo \mathbb{A} se sobrentiende que es \mathbb{Z} .

La homología considerada es la completa, de modo que $b_0(X)$ es el número de componentes arcoconexas de X (supuesto que sea finito).

Hay dos amplias clases de espacios topológicos para los que están definidos los números de Betti:

Teorema 10.23 *Si X es un complejo celular de dimensión n , entonces todos los \mathbb{A} -módulos $H_p(X)$ son finitamente generados, luego están definidos todos los números de Betti de X . Además $b_p(X) \neq 0$ a lo sumo si $0 \leq p \leq n$.*

DEMOSTRACIÓN: Si X es un complejo celular, sabemos que $\tilde{C}_p(X)$ es un \mathbb{A} -módulo libre finitamente generado, luego también lo es el submódulo de ciclos $\tilde{Z}_p(X)$, y su cociente $\tilde{H}_p(X)$ es finitamente generado. Además $\tilde{C}_p(X) = 0$ si $p \geq n$, luego $b_p(X) = 0$. ■

Teorema 10.24 *Si un compacto $X \subset \mathbb{R}^m$ es un retracto de un entorno, sus grupos de homología son finitamente generados, luego también están definidos todos sus números de Betti, y son todos nulos salvo a lo sumo un número finito de ellos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea U un entorno de X en \mathbb{R}^m tal que exista una retracción $r : U \rightarrow X$. Sea $\epsilon = d(V, \mathbb{R}^m \setminus U)$. Podemos descomponer \mathbb{R}^m en una cuadrícula de cubos de diámetro menor que ϵ . La unión K de los cubos que cortan a X es un complejo celular $X \subset K \subset U$ y r se restringe a una retracción $r : K \rightarrow X$, la cual induce a su vez epimorfismos

$$r_* : H_p(K) \rightarrow H_p(X).$$

(Son suprayectivos porque $i_* \circ r_* = 1$, donde $i : X \rightarrow K$ es la inclusión.)

Sabemos que los módulos $H_p(K)$ de los complejos celulares son finitamente generados, luego lo mismo vale para los módulos $H_p(X)$. ■

El teorema anterior se aplica en particular si X es una variedad topológica, pues puede sumergirse en \mathbb{R}^m por 1.22 y es un retracto absoluto de entornos por 1.41. En 10.49 veremos que si X tiene dimensión n , entonces, más concretamente, $H_p(X) = 0$ para $p > n$.

Definición 10.25 Si X es un espacio topológico cuyos números de Betti están todos definidos y todos son nulos salvo a lo sumo una cantidad finita, definimos la *característica de Euler* de X como

$$\chi(X) = \sum_p (-1)^p b_p(X).$$

Tenemos, pues, que la característica de Euler está definida para todo complejo celular. Por ejemplo, con los cálculos que tenemos hechos, es inmediato comprobar que

$$\chi(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 2 & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases} \quad \chi(M_g) = 2 - 2g, \quad \chi(N_h) = 2 - h,$$

$$\chi(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) = n + 1, \quad \chi(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 1 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

En particular, vemos que este invariante es suficiente para distinguir entre sí las superficies M_g y también las N_h (aunque $\chi(M_g) = \chi(N_{2g})$).

Observemos que los números de Betti pueden depender del anillo de coeficientes. Un ejemplo nos lo proporcionan las superficies N_h , para las cuales $b_1 = h - 1$ si \mathbb{A} no tiene característica 2 y $b_1 = h$ en caso contrario. Ahora bien, la característica de Euler resulta invariante porque b_2 compensa esta diferencia. El teorema 10.28, que probaremos un poco más abajo, prueba en general que la característica de Euler de un complejo celular no depende del anillo de coeficientes.

Vamos a ver que la característica de Euler es muy fácil de calcular en espacios concretos. Para ello necesitamos algunas cuentas con sucesiones exactas. El teorema siguiente es trivial si \mathbb{A} es un cuerpo y, por consiguiente, los módulos son espacios vectoriales.

Teorema 10.26 *Consideremos una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \longrightarrow M_r \longrightarrow 0,$$

de módulos finitamente generados sobre un dominio de ideales principales \mathbb{A} . Entonces

$$\sum_p (-1)^p \text{rang } M_p = 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Lo probaremos por inducción sobre r . Para $r = 1, 2$ es inmediato. Veámoslo para $r = 3$. Tenemos, pues,

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \longrightarrow 0.$$

Vamos a reducirlo al caso en que el anillo es un cuerpo. Para ello consideramos el cuerpo de cocientes \mathbb{K} de \mathbb{A} . Llamemos $\overline{M}_i = M_i/T(M_i)$, que es un \mathbb{A} -módulo libre del mismo rango que M_i (por definición). Es fácil ver que la sucesión dada induce una sucesión

$$0 \longrightarrow \overline{M}_1 \xrightarrow{\overline{f}_1} \overline{M}_2 \xrightarrow{\overline{f}_2} \overline{M}_3 \longrightarrow 0.$$

Esta sucesión es exacta en \overline{M}_1 y en \overline{M}_3 , aunque no necesariamente en \overline{M}_2 . Además, $\overline{f}_1 \circ \overline{f}_2 = 0$. (Las comprobaciones son simples: veamos, por ejemplo, la inyectividad de \overline{f}_1 . Si $\overline{f}_1([m]) = 0$, entonces $f_1(m) \in T(M_2)$, luego existe $a \in \mathbb{A}$ no nulo tal que $f_1(am) = 0$, luego $am = 0$, luego $m \in T(M_1)$ y $[m] = 0$.)

Si $r_i = \text{rang } M_i$, fijando una base en cada \overline{M}_i podemos considerar el isomorfismo coordinado $\phi_i : \overline{M}_i \longrightarrow \mathbb{A}^{r_i}$. A través de estos isomorfismos los homomorfismos \overline{f}_1 y \overline{f}_2 se transforman en homomorfismos j_1 y j_2 , los cuales

se extienden de forma única a aplicaciones lineales j'_1 y j'_2 entre los espacios vectoriales \mathbb{K}^{r_i} .

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & \overline{M}_1 & \xrightarrow{\overline{f}_1} & \overline{M}_2 & \xrightarrow{\overline{f}_2} & \overline{M}_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \phi_1 \downarrow & & \phi_2 \downarrow & & \phi_3 \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{A}^{r_1} & \xrightarrow{j_1} & \mathbb{A}^{r_2} & \xrightarrow{j_2} & \mathbb{A}^{r_3} & \longrightarrow & 0 \\
 & & i \downarrow & & i \downarrow & & i \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{K}^{r_1} & \xrightarrow{j'_1} & \mathbb{K}^{r_2} & \xrightarrow{j'_2} & \mathbb{K}^{r_3} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Concretamente, j'_1 es la extensión a \mathbb{K}^{r_1} de la restricción de j_1 a la base canónica de \mathbb{A}^{r_1} . Similarmente con j'_2 .

Ya hemos comentado que la primera fila no es necesariamente exacta en \overline{M}_2 , luego la segunda (que es una réplica) tampoco tiene por qué serlo. No obstante probamos a continuación que la tercera lo es.

En general, si $x \in \mathbb{K}^{r_1}$, existe un $a \in \mathbb{A}$ no nulo (el producto de los denominadores de las componentes de x) tal que $ax \in \mathbb{A}^{r_1}$, luego $j_1(ax) = j'_1(ax) = 0$, luego $ax = 0$ y también $x = 0$.

Similarmente se prueba que j'_2 es suprayectiva, así como que $j'_1 \circ j'_2 = 0$. Tomemos ahora $x \in N(j'_2)$ y, como antes, consideramos $a \in \mathbb{A}$ no nulo tal que $ax \in \mathbb{A}^{r_2}$. Sea $ax = \phi_2([m])$. Entonces $\overline{f}_2([m]) = 0$, es decir, $f_2(m)$ es un elemento de torsión, existe $b \in \mathbb{A}$ no nulo tal que $f_2(bm) = 0$, luego $bm \in \text{Im } f_1$, luego $[bm] \in \text{Im } \overline{f}_1$, luego $baax \in \text{Im } j'_1$, y también $x \in \text{Im } j'_1$.

Ahora es clara la relación $r_2 = r_1 + r_3$. Si $r > 3$ dividimos la sucesión exacta dada en las sucesiones

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \text{Im } f_2 \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow \text{Im } f_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_r \longrightarrow 0.$$

Como ambas tienen longitud menor que r , podemos aplicarles la hipótesis de inducción y, sumando las igualdades que obtenemos, llegamos a la conclusión. ■

Aunque hemos definido los números de Betti y la característica de Euler para el caso de un espacio topológico, es claro que la definición vale igualmente para pares de espacios. Para probar el teorema siguiente basta aplicar el resultado anterior a la sucesión exacta de homología del par (X, U) del enunciado:

Teorema 10.27 *Sea (X, U) un par de espacios topológicos de modo que estén definidas las características de Euler de X , U y (X, U) . Entonces se da la relación*

$$\chi(X) = \chi(U) + \chi(X, U).$$

Ahora podemos probar:

Teorema 10.28 Sea X un complejo celular de dimensión n formado por c_p celdas de cada dimensión p . Entonces

$$\chi(X) = \sum_{p=0}^n (-1)^p c_p.$$

DEMOSTRACIÓN: Lo probamos por inducción sobre n . Si $n = 0$ tenemos que X es un espacio finito de c_0 puntos. Ciertamente entonces, su único grupo de homología no trivial es el de dimensión 0 y $\chi(X) = b_0(X) = c_0$.

Supuesto cierto para $n - 1$, aplicamos el teorema anterior al par (X, X^{n-1}) , que nos da la relación $\chi(X) = \chi(X^{n-1}) + \chi(X, X^{n-1})$. Según el teorema 10.14, tenemos que $\chi(X, X^{n-1}) = (-1)^n c_n$, con lo que la conclusión es inmediata. ■

Aquí es esencial que la característica de Euler depende únicamente de la topología de X , de modo que si consideramos distintas descomposiciones de X como complejo celular, la fórmula del teorema anterior da siempre el mismo resultado.

La fórmula de Euler Sea P un poliedro en el sentido tradicional, es decir, un espacio formado por caras poligonales homeomorfo a una esfera. Entonces, si P está formado por V vértices, A aristas y C caras, se cumple la relación

$$V + C - A = 2,$$

conocida como la fórmula de Euler. ■

El teorema anterior nos permite probar fácilmente una última relación:

Teorema 10.29 Sean X e Y dos complejos celulares. Entonces

$$\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y).$$

DEMOSTRACIÓN: En la prueba del teorema 3.25 hemos visto que $X \times Y$ admite una estructura de complejo celular en la que

$$c_p(X \times Y) = \sum_{i+j=p} c_i(X)c_j(Y).$$

El resultado es ahora un simple cálculo a partir del teorema anterior. ■

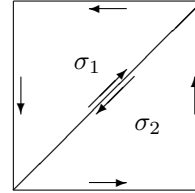
Ejemplo $\chi(S^2 \times S^2) = 4$, luego $S^2 \times S^2$ no es homeomorfo a S^4 . ■

10.6 Relación con el grupo fundamental

Si X es un espacio topológico arcoconexo, hay una relación muy simple entre su grupo fundamental $\pi_1(X)$ y su grupo de homología singular $H_1(X)$ calculado con $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$. En general, no son isomorfos, pues $H_1(X)$ es siempre un grupo abeliano, mientras que el grupo fundamental no tiene por qué serlo, pero lo que sucede es que $H_1(X)$ es la abelianización de $\pi_1(X)$, es decir, el cociente sobre su subgrupo derivado.

Fijado un punto $x_0 \in X$ sobre el que construir el grupo fundamental $\pi_1(X) = \pi_1(X, x_0)$, la relación con el grupo de homología se basa en que toda clase de equivalencia en $\pi_1(X)$ es de la forma $[\gamma]$, para cierto arco cerrado $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$, pero $[0, 1] = \Delta_1$, luego γ es una 1-cadena y, como el arco es cerrado, se trata de hecho de un 1-ciclo. Esto nos permite definir $h : \pi_1(X) \rightarrow H_1(X)$ mediante $h([\gamma]) = [\gamma]$, donde la primera es una clase de homotopía y la segunda de homología. Para que la aplicación h esté bien definida es necesario justificar que arcos homotópicos son ciclos homólogos.

En efecto, si $[\gamma_0] = [\gamma_1]$ en $\pi_1(X)$, existe una homotopía $H : I \times I \rightarrow X$ tal que $H_0 = \gamma_0$ y $H_1 = \gamma_1$, y además $H_t(0) = H_t(1) = x_0$ para todo t . Podemos cubrir el cuadrado $I \times I$ mediante una 2-cadena $\sigma_1 + \sigma_2$, como indica la figura. Aplicando H_* obtenemos una 2-cadena en X cuya frontera es



$$\partial(H_*(\sigma_1 + \sigma_2)) = H_*(\partial\sigma_1) + H_*(\partial\sigma_2) = -\gamma_0 + d - c_{x_0} + c_{x_0} + \gamma_1 - d,$$

donde d es la imagen por H_* de la restricción de σ_1 a la arista de Δ_2 cuya imagen es la diagonal del cuadrado. Como los arcos constantes c_{x_0} son fronteras, al tomar clases de homología resulta que $-\gamma_0 + \gamma_1 = 0$, luego también $[\gamma_0] = [\gamma_1]$ en $H_1(X)$. Así tenemos probada una parte del teorema siguiente:

Teorema 10.30 *Si X es un espacio topológico arcoconexo, entonces la aplicación $h : \pi_1(X) \rightarrow H_1(X)$ dada por $h([\gamma]) = [\gamma]$ (donde la homología se calcula sobre el anillo $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$) es un epimorfismo de grupos, cuyo núcleo es el subgrupo derivado de $\pi_1(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Acabamos de ver que h está bien definida. Para probar que es un homomorfismo tomamos $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \pi_1(X)$. En la sección 9.3 vimos que la cadena $\gamma_1\gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_2$ es una frontera, y en este caso los tres sumandos son ciclos, luego tenemos que $[\gamma_1\gamma_2] = [\gamma_1] + [\gamma_2]$, es decir, $h([\gamma_1][\gamma_2]) = h([\gamma_1]) + h([\gamma_2])$.

Para probar que h es suprayectiva tomamos una clase $[c] \in H_1(X)$, donde $c = n_1\sigma_1 + \dots + n_k\sigma_k$ es un 1-ciclo en X . Admitiendo que los σ_i se repitan podemos suponer que $n_i = \pm 1$, y sustituyendo σ_i por su arco opuesto podemos suponer que $n_i = 1$, y $c = \sigma_1 + \dots + \sigma_k$. Entonces

$$0 = \partial c = \sigma_1(1) - \sigma_1(0) + \dots + \sigma_k(1) - \sigma_k(0).$$

Si $\sigma_i(0) \neq \sigma_i(1)$, para que la suma se cancele tiene que haber un $j \neq i$ tal que $\sigma_i(1) = \sigma_j(0)$, pero entonces podemos reemplazar $\sigma_i + \sigma_j$ por la concatenación $\sigma_i\sigma_j$ y obtenemos otro ciclo homólogo a c . Aplicando este proceso un número finito de veces, podemos suponer que todos los simplices σ_i , vistos como arcos, son cerrados, es decir, que cumplen $\sigma_i(1) = \sigma_i(0) = x_i$.

Recordemos que estamos llamando x_0 al punto sobre el que calculamos $\pi_1(X)$. Como X es arcoconexo, podemos tomar arcos τ_i que unan x_0 con x_i . La concatenación $\tau_i\sigma_i\tau_i^{-1}$ es homóloga a σ_i , luego podemos suponer que todos los σ_i tienen ambos extremos iguales a x_0 , con lo que podemos formar las clases $[\sigma_i] \in \pi_1(X)$ y es claro que $h([\sigma_1 \dots \sigma_k]) = [c]$.

Como $H_1(X)$ es un grupo abeliano, tenemos que el subgrupo derivado $\pi_1'(X)$ de $\pi_1(X)$ está contenido en el núcleo de h , luego h induce un epimorfismo

$$h_* : \pi_1(X)/\pi_1(X)' \longrightarrow H_1(X).$$

Basta probar que se trata de un isomorfismo, para lo cual construiremos su inverso. Fijamos arcos λ_x que unan x_0 con cada punto $x \in X$. Para cada 1-símplice σ en X , es decir, para cada arco en X , formamos el arco cerrado $\tilde{\sigma} = \lambda_{\sigma(0)}\sigma\lambda_{\sigma(1)}^{-1}$, que a su vez determina una clase $[\tilde{\sigma}] \in \pi_1(X)$ y a su vez una clase en $\pi_1(X)/\pi_1(X)'$. Como este grupo es abeliano (es un \mathbb{Z} -módulo) y $C_1(X)$ es un \mathbb{Z} -módulo libre, podemos extender la aplicación $\sigma \mapsto [[\tilde{\sigma}]]$ a un homomorfismo

$$\tilde{h} : C_1(X) \longrightarrow \pi_1(X)/\pi_1(X)'.$$

Vamos a probar que todas las fronteras están en su núcleo. Por linealidad, basta probarlo para la frontera de un 2-símplice $\sigma : \Delta_2 \longrightarrow X$. Si llamamos p_1, p_2, p_3 a las imágenes de los vértices de Δ_2 , entonces $\partial\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, donde σ_1 va de p_1 a p_2 , σ_2 va de p_2 a p_3 y σ_3 va de p_3 a p_1 . Entonces

$$\tilde{h}([\partial\sigma]) = [[\lambda_{p_1}\sigma_1\lambda_{p_2}^{-1}\lambda_{p_2}\sigma_2\lambda_{p_3}^{-1}\lambda_{p_3}\sigma_3\lambda_{p_1}^{-1}]].$$

Es claro que, mediante homotopías, podemos cancelar los pares $\lambda_{p_2}^{-1}\lambda_{p_2}$ y $\lambda_{p_3}^{-1}\lambda_{p_3}$, con lo que

$$\tilde{h}([\partial\sigma]) = [[\lambda_{p_1}\sigma_1\sigma_2\sigma_3\lambda_{p_1}^{-1}]].$$

Pero es inmediato que la frontera topológica de Δ_2 es homotópica a uno cualquiera de sus vértices (mediante una homotopía que deja fijo al vértice en todo momento), y aplicando σ esto se traduce en que el arco $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ es homotópico al arco constante c_{p_1} , mediante una homotopía que fija a p_1 en todo momento, por lo que

$$\tilde{h}([\partial\sigma]) = [[\lambda_{p_1}c_{p_1}\lambda_{p_1}^{-1}]] = [[\lambda_{p_1}\lambda_{p_1}^{-1}]] = 1.$$

Por consiguiente, \tilde{h} induce un homomorfismo

$$\tilde{h}_* : H_1(X) \longrightarrow \pi_1(X)/\pi_1(X)'.$$

Si tomamos $\lambda_{x_0} = c_{x_0}$, tenemos que

$$\tilde{h}_*(h_*([\gamma])) = \tilde{h}_*([\gamma]) = [[c_{x_0}\gamma c_{x_0}^{-1}]] = [[\gamma]].$$

Sólo falta probar que la composición opuesta también es la identidad. La asignación $x \mapsto \lambda_x$ se extiende a un homomorfismo $\lambda : C_0(X) \longrightarrow C_1(X)$. Observamos ahora que si σ es un 1-símplice en X , entonces

$$h_*(\tilde{h}(\sigma)) = [\sigma - \lambda_{\partial\sigma}].$$

En efecto:

$$h_*(\tilde{h}(\sigma)) = h_*([\lambda_{\sigma(0)}\sigma\lambda_{\sigma(1)}^{-1}]) = [\lambda_{\sigma(0)}\sigma\lambda_{\sigma(1)}^{-1}] = [\lambda_{\sigma(0)} + \sigma - \lambda_{\sigma(1)}] = [\sigma - \lambda_{\partial\sigma}].$$

Por linealidad, la igualdad vale también si σ es cualquier 1-cadena, y en particular vale para 1-ciclos, en cuyo caso se reduce a $h_*(\tilde{h}(\sigma)) = [\sigma]$, luego también $h_*(\tilde{h}_*([\sigma])) = [\sigma]$ y el teorema queda probado. ■

En particular, todo espacio X simplemente conexo cumple $H_1(X) = 0$, pero el recíproco no es cierto. Por ejemplo, tras el teorema 10.10 hemos probado que, si $\tilde{S} \subset \mathbb{R}^3$ es la esfera cornuda de Alexander, (definición 8.39), las componentes conexas de $S^3 \setminus \tilde{S}$ cumplen $H_1(U_i) = 0$, pero una de ellas no es simplemente conexa.

En realidad, si V es la componente conexa no acotada de $S^3 \setminus \tilde{S}$, cuando calculamos $\pi_1(V)$ vimos también que $H_1(V) = 0$, pues vimos que la abelianización de $\pi_1(V)$ es trivial. Más aún, vimos que, para cualquier elemento x del sistema generador de $H_1(V)$ que obtuvimos, existen otros dos generadores a y b tales que $x = b^{-1}a^{-1}ab$, luego cualquier ciclo cuya clase sea x no es contractible en V , pero sí que es una frontera, pues su clase de homología es $-b - a + a + b = 0$.

Otro ejemplo lo proporciona la esfera homológica de Poincaré, cuyo grupo fundamental lo calculamos al final de la sección 8.4 y vimos que no es trivial, pero que tiene abelianización trivial.

En cambio, la única superficie compacta que cumple $H_1(V) = 0$ es la esfera, que es simplemente conexa. En el caso no compacto, el teorema 8.34 nos da que $H_1(V) = 0$ sólo puede ocurrir cuando $\pi_1(V) = 0$, luego tenemos probado el teorema siguiente:

Teorema 10.31 *Una superficie topológica V es simplemente conexa (es decir, cumple $\pi_1(V) = 1$) si y sólo si $H_1(V) = 0$.*

10.7 Orientación de variedades

En esta sección veremos que la homología singular permite extender el concepto de orientación de variedades diferenciales al caso de las variedades topológicas. En particular veremos que el concepto de orientación es puramente topológico, en el sentido de que podemos hablar de homeomorfismos entre variedades que conservan o invierten la orientación sin necesidad de que sean diferenciables.

Determinar una orientación en una variedad es un problema doble: localmente consiste en distinguir entre ciertas alternativas simétricas, como izquierda y derecha, giro horario y antihorario, etc.; globalmente consiste en escoger coherentemente una orientación en cada punto de forma consistente con desplazamientos continuos.

Localmente, la idea básica en la que nos vamos a apoyar es que una orientación local puede determinarse sin más que especificar un cierto símplice singular. Por ejemplo, si V es una variedad de dimensión 1, entonces un 1-símplice inyectivo $\sigma : \Delta_1 \rightarrow V$ determina una orientación de los puntos de su soporte, pues determina un sentido de movimiento: de $\sigma(0)$ hacia $\sigma(1)$. Por supuesto $-\sigma$ determina la orientación opuesta. Equivalentemente, esta información está

contenida en $\partial\sigma$, que distingue el vértice inicial con signo negativo y el final con signo positivo.

Análogamente, si V es una variedad bidimensional, un 2-símplice inyectivo $\sigma : \Delta_2 \rightarrow V$ determina una orientación en su soporte. Por ejemplo, nos permite convenir que el sentido de giro positivo es el que marca su frontera $\partial\sigma$, es decir, el que nos lleva de $\sigma(0,0)$ a $\sigma(1,0)$, de aquí a $\sigma(0,1)$ y de aquí de vuelta a $\sigma(0,0)$. El teorema siguiente es el punto de partida para incorporar estas ideas a la teoría:

Teorema 10.32 *Sea V una variedad topológica de dimensión n y $x \in V$. Entonces*

$$H_n(V, V \setminus \{x\}) \cong \mathbb{A}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea U un entorno de x en V homeomorfo a una bola abierta en \mathbb{R}^n . Podemos aplicar el teorema de escisión para cortar el cerrado $V \setminus U$ del abierto $U \setminus \{x\}$. Así, la inclusión induce un isomorfismo

$$i_* : H_n(U, U \setminus \{x\}) \rightarrow H_n(V, V \setminus \{x\}).$$

Como U es homotópico a un punto, la sucesión exacta de homología del par $(U, U \setminus \{x\})$ (para la homología reducida) nos da el isomorfismo

$$\delta_* : H_n(U, U \setminus \{x\}) \rightarrow H_{n-1}(U \setminus \{x\}).$$

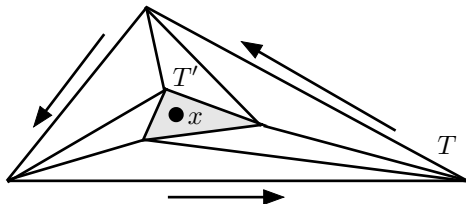
Pero en $U \setminus \{x\}$ podemos encontrar un retracto por deformación \tilde{S}^{n-1} homeomorfo a S^{n-1} , con lo que la inclusión induce un isomorfismo

$$i_* : H_{n-1}(\tilde{S}^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(U \setminus \{x\}).$$

Puesto que $H_{n-1}(\tilde{S}^{n-1}) \cong \mathbb{A}$, el teorema está probado. ■

Conviene explicitar los isomorfismos que han aparecido en la prueba. En primer lugar notemos que como espacio \tilde{S}^{n-1} podemos tomar la frontera de un n -símplice inyectivo $\sigma : \Delta_n \rightarrow U$ tal que x esté en el interior de su soporte. Tras el teorema 10.2 hemos visto que $[\partial\sigma]$ es un generador de $H_{n-1}(\tilde{S}^{n-1})$. Su imagen en $H_{n-1}(U \setminus \{x\})$ es $[\partial\sigma]$, su imagen en $H_n(U, U \setminus \{x\})$ es $[\sigma]$ y su imagen en $H_n(V, V \setminus \{x\})$ es $[\sigma]$. Así pues, un generador de $H_n(V, V \setminus \{x\})$ es la clase de cualquier símplice inyectivo cuyo soporte esté contenido en un abierto homeomorfo a una bola y contenga a x en su interior.

En el caso en que $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$ (más en general, si \mathbb{A} tiene característica distinta de 2), sucede que dos símplices homólogos en estas condiciones determinan la misma orientación. Sería difícil probar esto, pues requeriría una definición previa de orientación, cuando nuestro propósito es definirla en términos de la homología, pero la figura siguiente ilustra la idea geométrica subyacente:



Tenemos dos triángulos T y T' junto con seis triángulos que forman una 2-cadena c tal que $\partial c = T - T'$. Notemos que si la orientación de T es la que indican las flechas, para que la frontera de c sea la indicada es necesario que todos sus símlices estén orientados en sentido antihorario como T , lo que a su vez obliga a que la orientación de T' sea también antihoraria, es decir, la misma que la de T .

Nota La misma prueba del teorema anterior demuestra que $H_i(V, V \setminus \{x\}) = 0$ para todo $i < n$. ■

Definición 10.33 Una \mathbb{A} -orientación local en un punto x de una variedad V de dimensión n es un generador del \mathbb{A} -módulo $H_n(V, V \setminus \{x\})$. A las \mathbb{Z} -orientaciones las llamaremos simplemente *orientaciones*.

Puesto que \mathbb{Z} tiene exactamente dos generadores, toda variedad tiene exactamente dos orientaciones locales en cada punto. En cambio, tiene una única $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -orientación local en cada punto.

Ahora hemos de ocuparnos del problema de elegir coherentemente una orientación local en cada punto de una variedad. Una condición necesaria de coherencia es que un mismo n -símplice singular inyectivo σ determine la misma orientación respecto de cualquiera de sus puntos interiores, es decir, que si x e y son dos puntos del interior del soporte de σ y escogemos $[\sigma]$ como orientación positiva en x , entonces la orientación positiva en y ha de ser también $[\sigma]$ (notemos que estamos hablando de clases de homología en grupos distintos). Los teoremas siguientes justifican parcialmente que esto es así.

Teorema 10.34 Sea x un punto de una variedad topológica n -dimensional V y $\alpha_x \in H_n(V, V \setminus \{x\})$. Entonces existe un entorno abierto U de x y una clase $\alpha \in H_n(V, V \setminus U)$ tal que $\alpha_x = j_x^U(\alpha)$, donde

$$j_x^U : H_n(V, V \setminus U) \longrightarrow H_n(V, V \setminus \{x\})$$

es el homomorfismo inducido por la inclusión.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\alpha_x = [z]$. Como z es un ciclo relativo, se cumple que $|\partial z| \subset V \setminus \{x\}$ es un espacio compacto que no contiene a x . Basta tomar $U = V \setminus |\partial z|$ y $\alpha = [z]$. ■

Nuestra intención es fijar un $\alpha \in H_n(V, V \setminus U)$ y definir $\alpha_x = j_x^U(\alpha)$ para cada $x \in U$, lo que nos garantizará que, tal y como queríamos, un mismo símlice determine la misma orientación en todo punto de U . Pero para que esto sea viable hemos de garantizar que las clases $j_x^U(\alpha)$ generan los grupos de homología correspondientes. Ello se sigue del próximo teorema.

Teorema 10.35 Sea x un punto en una variedad topológica n -dimensional V . Cada entorno W de x contiene un entorno U tal que para cada $y \in U$ la aplicación j_y^U es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN: Sea $B \subset W$ un entorno de x homeomorfo a una bola abierta en \mathbb{R}^n y tomemos un abierto $U \subset B$ que contenga a x y que se corresponda con una bola abierta de radio menor. Para $y \in U$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(V, V \setminus U) & \longleftarrow & H_n(B, B \setminus U) & \longrightarrow & H_{n-1}(B \setminus U) \\ j_y^U \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_n(V, V \setminus \{y\}) & \longleftarrow & H_n(B, B \setminus \{y\}) & \longrightarrow & H_{n-1}(B \setminus \{y\}) \end{array}$$

donde los isomorfismos horizontales de la izquierda son escisiones y los de la derecha son homomorfismos de conexión. Las flechas verticales son los homomorfismos inducidos por las inclusiones correspondientes. La de la derecha es un isomorfismo porque $B \setminus U$ es un retracto por deformación de $B \setminus \{y\}$. Por consiguiente j_y^U también es un isomorfismo. ■

Nota 1 Más adelante necesitaremos la observación siguiente sobre la demostración que acabamos de ver: Las únicas propiedades que hemos usado de U son que $(B, B \setminus U) \rightarrow (V, V \setminus U)$ es una escisión y que la inclusión $B \setminus U \rightarrow B \setminus \{y\}$ induce un isomorfismo $H_{n-1}(B \setminus U) \rightarrow H_{n-1}(B \setminus \{y\})$ entre los grupos de homología reducida. Estas propiedades se cumplen también si tomamos como U la imagen de un cubo de dimensión n que contenga a x . La primera propiedad es clara. Para la segunda, tomamos una esfera $\tilde{S}^{n-1} \subset B \setminus U$. Entonces la inclusión $i_1 : \tilde{S}^{n-1} \rightarrow B \setminus \{y\}$ induce un isomorfismo entre los grupos de homología (pues \tilde{S}^{n-1} es un retracto por deformación de $B \setminus \{y\}$) y lo mismo sucede con la inclusión $i_2 : \tilde{S}^{n-1} \rightarrow B \setminus U$. Entonces, el homomorfismo inducido por la inclusión $i : B \setminus U \rightarrow B \setminus \{y\}$ es $i_* = i_{2*}^{-1} \circ i_{1*}$, luego es un isomorfismo. ■

Nota 2 La misma prueba del teorema anterior junto con la nota que sigue al teorema 10.32 implican que, para todo abierto U suficientemente pequeño, se cumple $H_{n-1}(V, V \setminus U) = 0$. ■

Ahora estamos en condiciones de relacionar orientaciones locales:

Definición 10.36 Sea V una variedad topológica n -dimensional y U un abierto en V . Una \mathbb{A} -orientación local sobre U es una clase $\alpha \in H_n(V, V \setminus U)$ tal que para todo $y \in U$ se cumple que $\alpha_y = j_y^U(\alpha)$ es un generador de $H_n(V, V \setminus \{y\})$.

En los dos últimos teoremas, el abierto U se puede sustituir por cualquier otro abierto menor, por lo que podemos tomar uno que cumpla los dos al mismo tiempo. Así, dada una \mathbb{A} -orientación local α_x en un punto x , existe un entorno U y una clase $\alpha \in H_n(V, V \setminus U)$ tal que $\alpha_x = j_x^U(\alpha)$ y para todo $y \in U$ el homomorfismo j_y^U es un isomorfismo. Por consiguiente, α ha de ser un generador de $H_n(V, V \setminus U)$, de donde a su vez cada α_y es un generador de $H_n(V, V \setminus \{y\})$. A su vez esto implica que α es una orientación local sobre U . Además, el hecho de que j_x^U sea un isomorfismo implica que α es la única \mathbb{A} -orientación sobre U que extiende a α_x . Así pues:

Teorema 10.37 Si α_x es una \mathbb{A} -orientación local en un punto x de una variedad n -dimensional V , existe un entorno U de x en el cual α_x se extiende de forma única a una \mathbb{A} -orientación local sobre U .

Supongamos que $U_1 \subset U_2 \subset V$ son dos abiertos en la variedad V . Llamaremos

$$j_{U_1}^{U_2} : H_n(V, V \setminus U_2) \longrightarrow H_n(V, V \setminus U_1)$$

al homomorfismo inducido por la inclusión. Es claro que si α es una \mathbb{A} -orientación sobre U_2 entonces $j_{U_1}^{U_2}(\alpha)$ es una \mathbb{A} -orientación sobre U_1 .

Finalmente estamos en condiciones de definir el concepto de orientación global en una variedad topológica:

Definición 10.38 Una \mathbb{A} -orientación de una variedad topológica n -dimensional V sobre un abierto W es una función α que a cada $x \in W$ le hace corresponder una \mathbb{A} -orientación local $\alpha_x \in H_n(V, V \setminus \{x\})$ de modo que todo $x \in W$ tiene un entorno $U \subset W$ donde hay definida una \mathbb{A} -orientación local α_U tal que $\alpha_y = j_y^U(\alpha_U)$ para todo $y \in U$. En tal caso se diremos que α_U es una *determinación local* de α en U .

A las \mathbb{Z} -orientaciones las llamaremos simplemente *orientaciones*. Una variedad es \mathbb{A} -orientable (resp. *orientable*) si tiene una \mathbb{A} -orientación (resp. una orientación) definida sobre todos los puntos de V .

Es claro que si α_U es una determinación local de una \mathbb{A} -orientación α en un abierto U y U' es un abierto menor, entonces $j_{U'}^U(\alpha_U)$ es una determinación local de α en U' , por lo que una \mathbb{A} -orientación tiene determinaciones locales en abiertos arbitrariamente pequeños alrededor de un punto dado.

Si W es un abierto en una variedad V , entonces él es por sí mismo una variedad de la misma dimensión. En principio, son dos cosas distintas que V admita una \mathbb{A} -orientación sobre W o que W sea \mathbb{A} -orientable como variedad topológica. Sin embargo, vamos a ver que ambas propiedades son equivalentes.

Ante todo, observemos que si $x \in W$ el teorema de escisión nos da que la inclusión induce un isomorfismo $H_n(W, W \setminus \{x\}) \cong H_n(V, V \setminus \{x\})$. Por consiguiente, una \mathbb{A} -orientación local en x viene determinada por un generador de cualquiera de los dos módulos. Por otra parte, una aplicación $x \mapsto \alpha_x$ sobre los puntos de W y con imágenes en los grupos $H_n(W, W \setminus \{x\})$ determina otra $x \mapsto \alpha'_x$ con imágenes en los grupos $H_n(V, V \setminus \{x\})$ y viceversa. Sólo hay que comprobar que una es una \mathbb{A} -orientación si y sólo si lo es la otra.

Supongamos que α' es una \mathbb{A} -orientación de V sobre W . Dado $x \in W$, tomemos un entorno abierto $U \subset W$ en el que α' tenga una determinación local α'_U , que verifique el teorema 10.35 y de modo que $V \setminus W$ esté contenido en el interior de $V \setminus U$. Esto nos permite aplicar el teorema de escisión, en virtud del cual la inclusión induce un isomorfismo $H_n(W, W \setminus U) \cong H_n(V, V \setminus U)$. Llamemos α_U a la clase del primer grupo que se corresponde con α'_U .

Para cada $y \in U$ tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(V, V \setminus U) & \longrightarrow & H_n(V, V \setminus \{y\}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_n(W, W \setminus U) & \longrightarrow & H_n(W, W \setminus \{y\}) \end{array}$$

De él se deduce que $j_y^U(\alpha_U) = \alpha_y$, por lo que α es una \mathbb{A} -orientación de W . El recíproco se prueba igualmente.

Ahora es claro que una variedad V es \mathbb{A} -orientable si y sólo si puede ser cubierta por una familia de abiertos con \mathbb{A} -orientaciones que coinciden en las intersecciones. En particular, si tenemos descompuesta una variedad V en unión de una familia de abiertos disjuntos dos a dos, V es \mathbb{A} -orientable si y sólo si lo es cada uno de los abiertos. Más concretamente todavía, una variedad topológica es \mathbb{A} -orientable si y sólo si lo son sus componentes conexas. En las variedades conexas tenemos el siguiente teorema de unicidad:

Teorema 10.39 *Dos \mathbb{A} -orientaciones en una variedad topológica conexa son iguales si y sólo si coinciden en un punto.*

DEMOSTRACIÓN: Sea V una variedad topológica conexa y sea A el conjunto de los puntos de V donde dos orientaciones dadas coinciden. Por el teorema 10.35 tanto A como $V \setminus A$ son abiertos. ■

En particular, dado que \mathbb{Z} tiene exactamente dos generadores:

Teorema 10.40 *Una variedad topológica conexa y orientable tiene exactamente dos orientaciones.*

A su vez, ahora podemos distinguir entre los homeomorfismos que conservan o invierten la orientación:

Definición 10.41 Si $f : V \rightarrow W$ es un homeomorfismo entre dos variedades topológicas, claramente induce isomorfismos

$$f_* : H_n(V, V \setminus \{x\}) \rightarrow H_n(W, W \setminus \{f(x)\}),$$

para cada $x \in V$. Si α es una \mathbb{A} -orientación en V , es inmediato comprobar que f induce una \mathbb{A} -orientación en W dada por $f_*(\alpha)_{f(x)} = f_*(\alpha_x)$.

Si hemos fijado orientaciones α en V y β en W , diremos que f *conserva la orientación* si $f_*(\alpha) = \beta$.

Si las variedades son conexas y $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$, de modo que sólo hay dos orientaciones posibles en cada variedad, se dice también que f *invierte la orientación* cuando no la conserva, pero esto no tiene sentido cuando hay varias componentes conexas, pues entonces un homeomorfismo puede conservar la orientación en algunas componentes y no en otras.

Orientación en esferas Veamos que S^n es una variedad topológica orientable. Para ello observamos que si $p \in S^n$, puesto que $S^n \setminus \{p\}$ es contractible, la inclusión induce un isomorfismo $H_n(S^n) \cong H_n(S^n, S^n \setminus \{p\})$. Esto hace que si α es un generador de $H_n(S^n)$ entonces $\alpha_p = j_p^{S^n}(\alpha)$ determina una orientación de S^n (la definición de orientación se cumple en todo punto con $U = S^n$). El argumento se generaliza fácilmente para probar que todas las superficies M_g son orientables, aunque después veremos una prueba más elegante. ■

Orientación en \mathbb{R}^n No podemos usar $H_n(\mathbb{R}^n)$ para definir una orientación en \mathbb{R}^n porque es el grupo trivial, pero como la compactificación de Alexandroff de \mathbb{R}^n es homeomorfa a S^n , sucede que \mathbb{R}^n y, más en general, todo abierto U en \mathbb{R}^n , es orientable. Identificando $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, tenemos isomorfismos

$$H_n(S^n) \longrightarrow H_n(S^n, S^n \setminus \{p\}) \longleftarrow H_n(U, U \setminus \{p\}),$$

de modo que si fijamos uno de los dos generadores $\alpha \in H_n(S^n)$ (para la homología reducida), el homomorfismo de conexión seguido de la escisión nos da una orientación local α_p en cada punto p de U .

Si $f : U \longrightarrow V$ es un homeomorfismo entre dos abiertos de \mathbb{R}^n y consideramos en ambos la orientación determinada por un mismo $\alpha \in H_n(S^n)$, podemos plantearnos si, dado $p \in U$, se cumple que f conserva o invierte la orientación local en p , es decir, si $f_*(\alpha_p) = \alpha_p$ o bien $f_*(\alpha_p) = -\alpha_p$.

Notemos que para ello que podemos cambiar U por un entorno menor U_0 y V por un abierto mayor (que puede ser el propio \mathbb{R}^n), pues si consideramos $f : U_0 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(U, U \setminus \{p\}) & \xrightarrow{f_*} & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{f(p)\}) \\ \uparrow i_* & \searrow f_* & \uparrow i_* \\ H_n(U_0, U_0 \setminus \{p\}) & \xrightarrow{f_*} & H_n(V, V \setminus \{f(p)\}) \end{array}$$

y las flechas verticales son isomorfismos por el teorema de escisión, y hacen corresponder el α_p de un abierto en el del otro.

Supongamos ahora que f es un difeomorfismo y consideremos la aplicación afín $L(x) = f(p) + df|_p(x - p)$. Las mismas consideraciones que hemos hecho en general para f valen en particular para L , y vamos a probar que, considerando a ambas como aplicaciones $U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, cumplen que $f_*(\alpha_p) = L_*(\alpha_p)$. Por consiguiente, f_* conserva o invierte la orientación en p (como homeomorfismo de U en V) si y sólo si lo hace L (como homeomorfismo de \mathbb{R}^n en sí mismo).

Según la definición de diferenciabilidad tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - L(x)}{\|x - p\|} = 0.$$

Por otra parte, $df|_p$ es un automorfismo de \mathbb{R}^n , luego no se anula sobre S^{n-1} y, por compacidad, $K = \inf_{y \in S^{n-1}} \|df|_p(y)\| > 0$. Tomamos $\epsilon > 0$ tal que si $0 < \|x - p\| < \epsilon$ entonces $x \in U$ y

$$\|f(x) - L(x)\| < K\|x - p\| \leq \|x - p\| \left\| df|_p \left(\frac{x - p}{\|x - p\|} \right) \right\| = \|L(x) - f(p)\|.$$

De aquí se sigue que el segmento que une a $f(x)$ con $L(x)$ no contiene a $f(p)$, lo que nos permite probar que f y L son homotópicas como aplicaciones $(U, U \setminus \{p\}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{f(p)\})$. En efecto, una homotopía es

$$H_t(x) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda L(x).$$

Esto implica que $f_*, L_* : H_n(U, U \setminus \{p\}) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{f(p)\})$ son la misma aplicación, luego, en efecto, $f_*(\alpha_p) = L_*(\alpha_p)$.

Es fácil comprobar que las traslaciones conservan la orientación. En efecto, si f es una traslación, podemos extenderla a un homeomorfismo de S^n en sí mismo mediante $\tilde{f}(\infty) = \infty$, y es fácil ver que el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc} H_n(S^n) & \xrightarrow{\tilde{f}_*} & H_n(S^n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_n(U, U \setminus \{p\}) & \xrightarrow{f_*} & H_n(V, V \setminus \{p\}) \end{array}$$

y \tilde{f} es homotópica a la identidad. Aplicando esto dos veces concluimos que L conserva la orientación si y sólo si lo hace $df|_p$.

En resumen, tenemos que f conserva la orientación en p en el sentido topológico que hemos introducido aquí si y sólo si lo hace $df|_p$. Por otra parte, sabemos que f conserva la orientación en el sentido de la geometría diferencial si y sólo si lo hace $df|_p$. Por consiguiente, si queremos probar que ambos conceptos de orientación son equivalentes sólo necesitamos probarlo para automorfismos de \mathbb{R}^n .

Para estudiar un automorfismo f de \mathbb{R}^n basta estudiar el automorfismo que induce en $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Todo automorfismo f de determinante positivo se expresa como composición de una homotecia de razón $r > 0$, es decir, una aplicación de la forma $f(x) = rx$, y un automorfismo de determinante 1, el cual, según [A1 6.22], se expresa como producto de transvecciones, que son aplicaciones de la forma $f(x) = x + u(x)h$, para cierto $h \in \mathbb{R}^n$ no nulo y cierta aplicación lineal $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple $u(h) = 0$.

Ahora bien, tanto las homotecias de razón positiva como las transvecciones son homotópicas a la identidad en $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Una homotopía es, respectivamente,

$$H_t(x) = ((1 - t)r + t)x, \quad H_t(x) = x + tu(x)h.$$

Así pues, los automorfismos de determinante positivo conservan la orientación.

Para probar que los automorfismos de determinante negativo invierten la orientación basta probar que así sucede con uno en concreto α , ya que si β es cualquier otro, entonces $\beta = \alpha \circ (\alpha^{-1} \circ \beta)$, y el segundo tiene determinante positivo, luego conserva la orientación. Más aún, basta probar que existe un difeomorfismo f que invierte la orientación, pues su diferencial en un punto será entonces el automorfismo que buscamos.

Según el teorema 10.6, una aplicación ortogonal en \mathbb{R}^{n+1} induce en $H_n(S^n)$ el automorfismo ± 1 , donde el signo es el de su determinante. Podemos tomar una simetría (con determinante -1) que deje fijo a ∞ , y al componerla con la proyección estereográfica obtenemos un difeomorfismo de \mathbb{R}^n en sí mismo que invierte la orientación.

En resumen, ahora sabemos que un difeomorfismo f entre dos abiertos de \mathbb{R}^n conserva la orientación en un punto p si y sólo si $df|_p$ tiene determinante positivo. Esto implica claramente el caso global:

Un difeomorfismo entre dos abiertos conexos de \mathbb{R}^n conserva la orientación si y sólo si su determinante jacobiano es positivo.

En otras palabras, f conserva la orientación en el sentido topológico si y sólo si lo hace en el sentido de la geometría diferencial. ■

Ahora generalizamos esto a variedades arbitrarias:

Teorema 10.42 *Una variedad diferencial V es orientable si y sólo si tiene un atlas tal que si x e y son dos cualesquiera de sus cartas entonces el difeomorfismo $x^{-1} \circ y$ tiene determinante jacobiano positivo.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que α es una orientación en V y fijemos una orientación β en \mathbb{R}^n . Diremos que una carta $x : U \rightarrow \tilde{U}$ está orientada si para todo $p \in U$ se cumple que $x_*(\alpha_p) = \beta_{x(p)}$.

Notemos que $x_*(\alpha)$ es una orientación de \tilde{U} , luego si U es conexo ha de ser $x_*(\alpha) = \pm\beta$. Así pues, x está orientada si y sólo si lo está en uno cualquiera de sus puntos. Además, si no lo está, al componerla con una simetría en \mathbb{R}^n obtenemos una carta orientada. Por consiguiente, todo punto tiene al menos una carta orientada a su alrededor o, equivalentemente, las cartas orientadas forman un atlas. Si x e y son dos cartas orientadas con dominio conexo común, el difeomorfismo $x^{-1} \circ y$ conserva la orientación, luego tiene determinante positivo.

Recíprocamente, si existe un atlas como el indicado, cada carta orientada induce una orientación en su dominio (la correspondiente a una ordenación prefijada en \mathbb{R}^n) y la condición sobre el determinante hace que dos cartas x e y alrededor de un mismo punto p induzcan en él la misma orientación:

$$x_*^{-1}(\alpha_{x(p)}) = y_*^{-1}(y_*(x_*^{-1}(\alpha_{x(p)}))) = y_*^{-1}(\alpha_{y(p)}).$$

Por consiguiente V es orientable. ■

La caracterización que acabamos de probar es la definición usual de orientabilidad de una variedad diferencial. Al relacionarla con la definición topológica hemos probado algo nada trivial: que la orientabilidad de una variedad depende únicamente de su topología, y no de su estructura diferencial.

10.8 La variedad de orientaciones

El problema de la orientación de las variedades consiste en que en cada punto tenemos dos orientaciones posibles, y no siempre es posible escoger una de forma globalmente consistente. Para estudiar este problema resulta útil asociar a cada variedad V otra variedad orientable, que llamaremos \tilde{V}_1 , definida de modo que cada punto $x \in V$ se corresponde con dos puntos $x_1, x_2 \in \tilde{V}_1$, y las dos orientaciones de x en V se corresponden con la misma orientación de \tilde{V}_1 en los puntos x_1 y x_2 . Por razones técnicas conviene introducir una variedad \tilde{V} que es más grande que \tilde{V}_1 , aunque contiene la misma información sobre V y sus orientaciones.

Definición 10.43 Sea V una variedad topológica n -dimensional. Definimos

$$\tilde{V} = \{(x, \alpha_x) \mid x \in V, \alpha_x \in H_n(V, V \setminus \{x\})\}.$$

Notemos que no exigimos que α_x sea un generador del grupo de homología.

Llamaremos $p : \tilde{V} \rightarrow V$ a la proyección en la primera componente. Para cada abierto U de V y cada $\alpha_U \in H_n(V, V \setminus U)$ definimos

$$\langle U, \alpha_U \rangle = \{(x, j_x^U(\alpha_U)) \mid x \in U\} \subset \tilde{V}.$$

Veamos que estos conjuntos son la base de una topología en \tilde{V} con la cual adquiere estructura de variedad topológica n -dimensional.

Por el teorema 10.34 los conjuntos indicados cubren \tilde{V} . Supongamos ahora que $(x, \alpha_x) \in \langle U, \alpha_U \rangle \cap \langle U', \alpha_{U'} \rangle$. Por el teorema 10.35 el punto x tiene un entorno $U'' \subset U \cap U'$ tal que $j_x^{U''}$ es un isomorfismo. Tomamos como $\alpha_{U''}$ la antiimagen de α_x por $j_x^{U''}$ y basta probar que $\langle U'', \alpha_{U''} \rangle \subset \langle U, \alpha_U \rangle \cap \langle U', \alpha_{U'} \rangle$. Ahora bien,

$$j_x^{U''}(j_{U''}^U(\alpha_U)) = j_x^U(\alpha_U) = \alpha_x = j_x^{U''}(\alpha_{U''}),$$

luego $j_{U''}^U(\alpha_U) = \alpha_{U''}$ y si $(y, \alpha_y) \in \langle U'', \alpha_{U''} \rangle$ entonces

$$\alpha_y = j_y^{U''}(\alpha_{U''}) = j_y^{U''}(j_{U''}^U(\alpha_U)) = j_y^U(\alpha_U),$$

luego $(y, \alpha_y) \in \langle U, \alpha_U \rangle$. La otra inclusión se prueba análogamente.

Con esto tenemos que \tilde{V} es un espacio topológico. La proyección p es continua, pues $p^{-1}[U]$ es la unión de todos los abiertos $\langle U', \alpha_{U'} \rangle$ con $U' \subset U$ y $\alpha_{U'} \in H_n(V, V \setminus U')$. También es claro que p es abierta. Más aún, las restricciones $p : \langle U, \alpha_U \rangle \rightarrow U$ son homeomorfismos, pues si $p(y, \alpha_y) = p(z, \alpha_z)$, entonces $y = z$ y, por consiguiente, $\alpha_y = j_y^U(\alpha_U) = j_z^U(\alpha_U) = \alpha_z$.

De aquí se desprende, en particular, que \tilde{V} es una variedad topológica de dimensión n (dejamos al lector comprobar que es de Hausdorff).

La variedad \tilde{V} contiene la misma información repetida varias veces. Para descomponerla en partes más simples necesitamos algunos conceptos adicionales. Ante todo recordemos que dos elementos de \mathbb{A} son *asociados* si se diferencian en un factor unitario (es decir, con inverso en \mathbb{A}). Representaremos mediante $\tilde{\mathbb{A}}$ el conjunto de clases de equivalencia de elementos asociados de \mathbb{A} , incluyendo la clase formada únicamente por el 0. Representaremos por 1 la clase de $1 \in \mathbb{A}$, es decir, la clase de las unidades de \mathbb{A} .

Por ejemplo, en el caso de mayor interés, $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$, podemos considerar que $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{N}$. Si \mathbb{A} es un cuerpo tenemos que $\tilde{\mathbb{A}} = \{0, 1\}$.

Si M es un \mathbb{A} -módulo libre de rango 1, podemos definir $m : M \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}$ como la función dada por $m(ag) = [a]$, donde g es cualquier base de M . Es claro que al tomar clases módulo unidades la aplicación m no depende de la elección de la base g . Un elemento $x \in M$ es un generador de M si y sólo si $m(x) = 1$.

Dada una variedad V , definimos $m : \tilde{V} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}$ como la aplicación dada por $m(x, \alpha_x) = m(\alpha_x)$. Vamos a probar que m es continua cuando en $\tilde{\mathbb{A}}$ consideramos la topología discreta. Esto es tanto como afirmar que m es localmente constante. En efecto, dado un punto $(x, \alpha_x) \in \tilde{V}$, tomamos un entorno U de x en las condiciones del teorema 10.35. Si $j_x^U(\alpha_U) = \alpha_x$, entonces $\langle U, \alpha_U \rangle$ es un entorno de (x, α_x) donde m es constante.

Claramente m es suprayectiva. Para cada $k \in \tilde{\mathbb{A}}$ llamaremos $\tilde{V}_k = m^{-1}(k)$. Así, \tilde{V}_k es abierto y cerrado en \tilde{V} . En particular es también una variedad topológica n -dimensional.

Observemos ahora que si $n \in \tilde{\mathbb{A}}$, $n \neq 0$, entonces \tilde{V}_n es homeomorfa a \tilde{V}_1 . En efecto, si $n = [a]$, un homeomorfismo $\phi_a : \tilde{V}_1 \rightarrow \tilde{V}_n$ viene dado por $\phi_a(x, \alpha_x) = \phi(x, a\alpha_x)$.

Así pues, toda la información sobre V contenida en \tilde{V} está en realidad en las variedades \tilde{V}_0 y \tilde{V}_1 . La primera contiene simplemente la topología de V , pues la aplicación $\phi_0 : V \rightarrow \tilde{V}_0$ dada por $\phi_0(x) = (x, 0)$ es un homeomorfismo.

En definitiva, la información relevante está contenida en \tilde{V}_1 , como ya anticipábamos, aunque por razones técnicas es más sencillo trabajar con \tilde{V} .

Definición 10.44 Si V es una variedad topológica, a la variedad \tilde{V}_1 que acabamos de construir la llamaremos *variedad de \mathbb{A} -orientaciones de V* .

Sabemos que \tilde{V}_1 es una variedad topológica de la misma dimensión que V . Está formada por los pares (x, α_x) tales que α_x es una \mathbb{A} -orientación local en x . Una base de \tilde{V}_1 la forman los conjuntos $\langle U, \alpha_U \rangle$, donde U es abierto en V y α_U es una orientación local sobre U . Cada punto de V tiene tantas antiimágenes por p en \tilde{V}_1 como generadores admite \mathbb{A} , es decir, como unidades tiene \mathbb{A} .

Veamos ahora que \tilde{V}_1 es \mathbb{A} -orientable. Para ello observamos que si $\langle U, \alpha_U \rangle$ es un abierto básico, entonces α_U define una \mathbb{A} -orientación en U y, como la

restricción de p a $\langle U, \alpha_U \rangle$ es un homeomorfismo, podemos transportar α_U a $\langle U, \alpha_U \rangle$ mediante p_* . Sólo hemos de comprobar que estas \mathbb{A} -orientaciones son consistentes dos a dos. Ahora bien, puesto que la intersección de dos abiertos básicos es un nuevo abierto básico, basta probar que si

$$(x, \alpha_x) \in \langle U, \alpha_U \rangle \subset \langle U', \alpha_{U'} \rangle$$

entonces las \mathbb{A} -orientaciones definidas en el punto con uno y otro abierto inducen el mismo elemento de $H_n(\langle U', \alpha_{U'} \rangle, \langle U', \alpha_{U'} \rangle \setminus \{(x, \alpha_x)\})$. Esto se sigue de considerar el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_n(\langle U', \alpha_{U'} \rangle, \langle U', \alpha_{U'} \rangle \setminus \{(x, \alpha_x)\}) & \xrightarrow{p_*} & H_n(U', U' \setminus \{x\}) \\ \uparrow i_* & & \uparrow i_* \\ H_n(\langle U, \alpha_U \rangle, \langle U, \alpha_U \rangle \setminus \{(x, \alpha_x)\}) & \xrightarrow{p_*} & H_n(U, U \setminus \{x\}) \end{array}$$

A la derecha tenemos α_x visto como elemento de cualquiera de los dos grupos y a la izquierda tenemos las \mathbb{A} -orientaciones en (x, α_x) . Como las de la derecha se corresponden, las de la izquierda también.

Por simplicidad, supongamos ahora que $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$. Para cada punto $x \in V$, podemos tomar un entorno U que cumpla el teorema 10.35. Si α_U es un generador de $H_n(V, V \setminus U)$, el otro posible es $-\alpha_U$. Éstas son las dos únicas orientaciones locales sobre U , y determinan dos abiertos $U_1 = \langle U, \alpha_U \rangle$ y $U_2 = \langle U, -\alpha_U \rangle$ en \tilde{V}_1 tales que $p^{-1}[U] = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ y, si trasladamos a través de las restricciones de p las orientaciones que \tilde{V}_1 induce en cada U_i , obtenemos las dos orientaciones de U .

La relación esencial entre la variedad de orientaciones de una variedad V y la orientabilidad de V viene dada por el teorema siguiente:

Teorema 10.45 *Una variedad conexa V es orientable si y sólo si su variedad de orientaciones es disconexa, y en tal caso consta exactamente de dos componentes conexas, ambas homeomorfas a V a través de la proyección.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que V es orientable, y sea α una orientación. Llamemos $U_1 = \{(x, \alpha_x) \mid x \in V\}$ y $U_2 = \{(x, -\alpha_x) \mid x \in V\}$. Es fácil ver que son dos abiertos disjuntos en \tilde{V}_1 , que $\tilde{V}_1 = U_1 \cup U_2$ y que la restricción de p determina homeomorfismos $U_i \cong V$.

Supongamos ahora que \tilde{V}_1 es disconexa. Si C es una componente conexa, $p[C]$ es abierto en V . Veamos que también es cerrado. En efecto, para cada $x \in V \setminus p[C]$, tomamos un entorno abierto conexo U de x que cumpla 10.35. Entonces $p^{-1}[U] = \langle U, \alpha_U \rangle \cup \langle U, -\alpha_U \rangle$, donde α_U es una orientación en U . Ninguno de estos dos abiertos básicos puede cortar a C , luego $U \subset V \setminus p[C]$. Así pues, $p[C] = V$. A su vez, esto implica que \tilde{V}_1 tiene exactamente dos componentes conexas y que p restringida a cada una de ellas es biyectiva. Como también es continua y abierta, es de hecho un homeomorfismo. Como \tilde{V}_1 es orientable, lo mismo le sucede a sus componentes conexas y también a V . ■

Para entender mejor este resultado conviene tener algún ejemplo concreto:

El plano proyectivo Sea V el plano proyectivo real $P^2(\mathbb{R})$. Vamos a probar que su superficie de orientaciones es homeomorfa a la esfera S^2 . Consideramos la proyección canónica $p : S^2 \rightarrow P^2(\mathbb{R})$. Abreviaremos $x' = p(x)$, $U' = p[U]$.

Fijemos un generador α de $H_2(S^2)$. Para cada $x \in S^2$, tomamos un entorno U donde p sea inyectiva (es decir, que no llegue a abarcar un hemisferio). Entonces p_* transforma la restricción de α_x , visto como elemento de $H_2(U, U \setminus \{x\})$, en una orientación local en x' , que representaremos por α'_x . Definimos la aplicación $\phi : S^2 \rightarrow \tilde{V}_1$ mediante $\phi(x) = (x', \alpha'_x)$. Vamos a demostrar que ϕ es un homeomorfismo que (obviamente) hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{p} & P^2(\mathbb{R}) \\ \phi \downarrow & \nearrow p & \\ \tilde{V}_1 & & \end{array}$$

Para probar que ϕ es biyectiva es suficiente demostrar que para todo $x \in S^2$ se cumple que $\phi(x) \neq \phi(-x)$, pues entonces estas dos imágenes serán las dos únicas antiimágenes de x' en \tilde{V}_1 , con lo que ϕ biyectará cada par de antiimágenes de cada punto de V en S^2 con su par correspondiente de antiimágenes en \tilde{V}_1 .

Sea $f : S^2 \rightarrow S^2$ la aplicación antipodal. Sea U un entorno de x donde p sea inyectiva. Consideramos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} H_2(S^2) & \xrightarrow{i_*} & H_2(S^2, S^2 \setminus \{x\}) & \xleftarrow{i_*} & H_2(U, U \setminus \{x\}) & \xrightarrow{p_*} & H_2(U', U' \setminus \{x'\}) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow 1 \\ H_2(S^2) & \xrightarrow{i_*} & H_2(S^2, S^2 \setminus \{-x\}) & \xleftarrow{i_*} & H_2(-U, -U \setminus \{-x\}) & \xrightarrow{p_*} & H_2(U', U' \setminus \{x'\}) \end{array}$$

Si partimos de α en la esquina superior izquierda y recorremos la fila superior acabamos en α'_x . Similarmente, si recorremos la fila inferior partiendo de α llegamos a α'_{-x} . Ahora bien, según el teorema 10.6, el isomorfismo f_* de la izquierda es la multiplicación por -1 . Esto nos lleva a que $\alpha'_x = -\alpha'_{-x}$, luego $\phi(x) \neq \phi(-x)$.

Para probar que ϕ es un homeomorfismo basta observar que si U es un abierto en S^2 que no contenga pares de puntos antípodas, entonces $\phi[U] = \langle U, j_U^{S^2}(\alpha) \rangle$.

Si a S^2 le quitamos dos casquetes antípodas, obtenemos una superficie cilíndrica, y si a $P^2(\mathbb{R})$ le quitamos la imagen común de estos casquetes obtenemos el espacio que resulta de identificar los pares de puntos antípodas en el cilindro, que, como es fácil ver, es una cinta de Möbius. Por otra parte, también es fácil convencerse de que la imagen por ϕ del cilindro es la superficie de orientaciones de la cinta de Möbius, luego ya sabemos su estructura topológica.

Según el teorema anterior, hemos probado que el plano proyectivo y la cinta de Möbius son superficies no orientables. Sabemos que todas las superficies N_h

contienen abiertos homeomorfos a cintas de Möbius, luego ninguna de ellas es orientable. De todos modos, luego probaremos esto de forma más elegante.

Ahora tenemos un ejemplo de que la orientabilidad no se conserva por homotopías: la cinta de Möbius es homotópica a la circunferencia.

Para terminar la discusión de estos ejemplos, tratemos de dar una interpretación intuitiva de los resultados que hemos obtenido:

Consideremos un punto x de una cinta de Möbius V y supongamos que trazamos un triángulo a su alrededor, especificando un sentido de giro en su frontera. Esto es tanto como especificar un 2-símplice, que a su vez determina una orientación local α_x . Con esto podemos pensar que, no sólo estamos en un punto de la cinta V , sino de hecho en el punto (x, α_x) de su superficie de orientaciones. Si movemos el triángulo a lo largo de la cinta, con ello vamos especificando orientaciones locales en los puntos sobre los que pasamos, todas ellas consistentes entre sí. Por consiguiente, el desplazamiento determina un desplazamiento sobre la superficie de orientaciones. Pero cuando damos una vuelta completa a la cinta, la orientación que el triángulo determina en x resulta ser $-\alpha_x$, por lo que no hemos dado una vuelta completa en \tilde{V}_1 , sino tan sólo media vuelta: estamos en el punto $(x, -\alpha_x)$, antípoda del punto de partida. Sólo cuando damos una segunda vuelta completamos un arco cerrado en la superficie de orientaciones. ■

Definición 10.46 Sea V una variedad topológica y $A \subset V$. Una *sección* sobre A es una aplicación continua $s : A \rightarrow \tilde{V}$ tal que $p(s(x)) = x$ para todo $x \in A$. Llamaremos $\Gamma[A]$ al conjunto de todas las secciones sobre A . Las secciones sobre V se llaman *secciones globales*.

Para cada $x \in A$, representaremos por $s'(x)$ a la segunda componente de $s(x)$ de modo que $s(x) = (x, s'(x))$. El conjunto $\Gamma[A]$ adquiere estructura de \mathbb{A} -módulo con las operaciones dadas por

$$(s_1 + s_2)(x) = (x, s'_1(x) + s'_2(x)), \quad (as)(x) = (x, as'(x)).$$

El elemento neutro es la *sección nula* dada por $s(x) = (x, 0)$.

Observemos que un abierto $U \subset V$ es \mathbb{A} -orientable si y sólo si existe una sección $s \in \Gamma[U]$ tal que $s[U] \subset \tilde{V}_1$, pues en tal caso $\alpha_x = s'(x)$ es una \mathbb{A} -orientación en U y, recíprocamente, si α es una \mathbb{A} -orientación en U , entonces $s(x) = (x, \alpha_x)$ es una sección en las condiciones indicadas.

Esto nos permite generalizar la noción de orientación a subconjuntos no necesariamente abiertos. Diremos que una variedad topológica V es \mathbb{A} -orientable sobre un subconjunto arbitrario A si existe una sección $s \in \Gamma[A]$ con imágenes en \tilde{V}_1 . No hay riesgo de confusión si a tales secciones las llamamos simplemente \mathbb{A} -orientaciones en A . Hemos probado que si A es abierto esta noción coincide con la que ya teníamos definida. El teorema siguiente determina la estructura de los módulos $\Gamma[A]$:

Teorema 10.47 *Si V es una variedad topológica \mathbb{A} -orientable sobre un subconjunto A entonces existe un homeomorfismo $\phi : p^{-1}[A] \rightarrow A \times \mathbb{A}$ (considerando a \mathbb{A} como espacio discreto) que hace conmutativo el diagrama siguiente:*

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}[A] & \xrightarrow{\phi} & A \times \mathbb{A} \\ & \searrow p & \downarrow \pi \\ & & A \end{array}$$

(donde π es la proyección en la primera componente).

Por consiguiente $\Gamma[A]$ es isomorfo al módulo de todas las aplicaciones continuas de A en \mathbb{A} . Si A tiene un número finito k de componentes conexas, entonces $\Gamma[A] \cong \mathbb{A}^k$.

DEMOSTRACIÓN: Dada una \mathbb{A} -orientación $s : A \rightarrow \tilde{V}_1$, para cada $x \in A$ tenemos que $s'(x)$ es un generador del módulo $H_n(V, V \setminus \{x\})$, luego para cada $(x, \alpha_x) \in p^{-1}[A]$ existe un único $a_x \in \mathbb{A}$ tal que $\alpha_x = a_x s'(x)$. Definimos $\phi(x, \alpha_x) = (x, a_x)$.

Si U es un entorno abierto de x donde α_x tiene una prolongación única α_U , entonces ϕ biyecta $\langle U, \alpha_U \rangle \cap p^{-1}[A]$ con $(U \cap A) \times \{a_x\}$. De aquí se sigue que ϕ es un homeomorfismo. Claramente cumple lo pedido.

El isomorfismo indicado en el enunciado es el que a cada función continua $f : A \rightarrow \mathbb{A}$ le hace corresponder la composición de $a \mapsto (a, f(a))$ con ϕ^{-1} . ■

Observemos que, a través del isomorfismo descrito en el teorema anterior, las orientaciones de A se corresponden con las aplicaciones continuas $f : A \rightarrow \mathbb{A}$ cuya imagen está formada por unidades. Por consiguiente, si A tiene k componentes conexas, las orientaciones de A se corresponden a través del isomorfismo $\Gamma[A] \cong \mathbb{A}^k$ con los vectores formados por unidades de \mathbb{A} . En particular, si A es conexo las orientaciones de A son simplemente los generadores (bases) de $\Gamma[A]$.

Por otra parte tenemos un homomorfismo canónico

$$j_A : H_n(V, V \setminus A) \rightarrow \Gamma[A]$$

dado por $j_A(\alpha)(x) = (x, j_x^A(\alpha))$.

Hemos de comprobar que $j_A(\alpha)$ es continua. En efecto, sea $\alpha = [z]$. Sea $U = V \setminus \{\partial z\}$. Como z es un cociclo relativo, $A \subset U$. Sea $\alpha_U = [z] \in H_n(V, V \setminus U)$. Claramente $\alpha = j_A^U(\alpha_U)$.

Dado $x \in A$, sea $U_0 \subset U$ un entorno abierto de x en V tal que $j_x^A(\alpha)$ se prolongue a $\alpha_{U_0} \in H_n(V, V \setminus U_0)$. Notemos que $\langle U_0, \alpha_{U_0} \rangle$ es un entorno básico de $j_A(\alpha)(x) = (x, j_x^A(\alpha))$. Ahora basta observar que $j_A(\alpha)[U_0 \cap A] \subset \langle U_0, \alpha_{U_0} \rangle$. ■

Observemos que si $A \subset B \subset V$, tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_n(V, V \setminus B) & \xrightarrow{j_B} & \Gamma[B] \\ j_A^B \downarrow & & \downarrow r \\ H_n(V, V \setminus A) & \xrightarrow{j_A} & \Gamma[A] \end{array} \quad (10.2)$$

donde r es la restricción a A .

Diremos que una sección $s \in \Gamma[A]$ tiene *soporte compacto* si existe un subespacio compacto $K \subset A$ tal que s coincide con la sección nula en $A \setminus K$. Llamaremos $\Gamma_c[A]$ al conjunto de las secciones de A con soporte compacto, que claramente es un submódulo de $\Gamma[A]$. Se entiende que si A es compacto entonces $\Gamma_c[A] = \Gamma[A]$.

El teorema siguiente tiene grandes repercusiones sobre la homología de las variedades topológicas:

Teorema 10.48 *Sea V una variedad topológica n -dimensional y A un subconjunto cerrado de V . Entonces*

1. Para todo $p > n$ se cumple $H_p(V, V \setminus A) = 0$.
2. $j_A : H_n(V, V \setminus A) \longrightarrow \Gamma_c[A]$ es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN: Notemos que el teorema es obvio si $A = \emptyset$. También es fácil ver que $j_A : H_n(V, V \setminus A) \longrightarrow \Gamma_c[A]$, pues si $\alpha = [z] \in H_n(V, V \setminus A)$, entonces $K = A \cap |z|$ es un compacto tal que $j_A(\alpha)$ se anula en $A \setminus K$. Dividimos la prueba en varios pasos:

1) Si el teorema vale para los cerrados A_1 , A_2 y $A_1 \cap A_2$, entonces vale para $A = A_1 \cup A_2$.

Consideramos la sucesión de Mayer-Vietoris asociada a la tríada exacta $(V, V \setminus A_1, V \setminus A_2)$. Para $p > n$ nos da inmediatamente que $H_p(V, V \setminus A) = 0$. Para $p = n$ formamos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(V, V \setminus A) & \longrightarrow & H_n(V, V \setminus A_1) \oplus H_n(V, V \setminus A_2) & \longrightarrow & H_n(V, V \setminus (A_1 \cap A_2)) \\ & & j_A \downarrow & & j_{A_1} \oplus j_{A_2} \downarrow & & j_{A_1 \cap A_2} \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma_c[A] & \xrightarrow{(r_1, -r_2)} & \Gamma_c[A_1] \oplus \Gamma_c[A_2] & \xrightarrow{r_1 + r_2} & \Gamma_c[A_1 \cap A_2] \end{array}$$

La fila superior es la sucesión de Mayer-Vietoris, los homomorfismos del centro y la derecha son isomorfismos por hipótesis, y el teorema 4.12 nos da que j_A también es un isomorfismo.

2) El teorema se cumple si A es un compacto contenido en un abierto U homeomorfo a una bola de \mathbb{R}^n y que cumple el teorema 10.35.

En primer lugar veamos que podemos suponer que $V = U$. El teorema de escisión nos da el isomorfismo $H_p(U, U \setminus A) \cong H_p(V, V \setminus A)$, luego la primera parte del enunciado podemos probarla sobre U . Similarmente, el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(V, V \setminus A) & \xrightarrow{j_A} & \Gamma[A] \\ \uparrow i_* & \nearrow j_A & \\ H_n(U, U \setminus A) & & \end{array}$$

reduce la segunda parte al caso $V = U$. Más aún, ahora es claro que podemos suponer que U es de hecho una bola abierta en \mathbb{R}^n . Distinguimos tres casos:

2.1) A es un cubo de dimensión $\leq n$.

Como U es contractible, la sucesión de homología del par $(U, U \setminus A)$ nos da, para $p > n$,

$$H_p(U, U \setminus A) \cong H_{p-1}(U \setminus A) \cong H_{p-1}(S^{n-1}) = 0.$$

Respecto a la segunda parte, por la nota tras el teorema 10.35 sabemos que A cumple dicho teorema (cumple lo que allí se afirma sobre U), es decir, que si tomamos $x \in A$ tenemos que j_x^A es un isomorfismo. Sea $\alpha_x \in H_n(U, U \setminus x)$ una orientación local en x y $\alpha_U \in H_n(U, U \setminus A)$ tal que $j_x^A(\alpha_U) = \alpha_x$. Tenemos, pues, que $H_n(U, U \setminus A)$ es un módulo libre de rango 1 y α_U es una base. Por otra parte, el teorema 10.47 nos dice que mismo sucede con el módulo $\Gamma[A]$, luego basta probar que $j_A(\alpha_U)$ es una base de $\Gamma[A]$.

Este mismo teorema nos hace corresponder los elementos de $\Gamma[A]$ con las aplicaciones constantes de A en \mathbb{A} y, de aquí, con los elementos de \mathbb{A} . Concretamente, la imagen de $j_A(\alpha_U)$ es la segunda componente de $\phi(j_A(\alpha_U)(x))$. Calculamos $\phi(j_A(\alpha_U)(x)) = \phi(x, \alpha_x) = (x, 1)$ y, como 1 es una base de \mathbb{A} , tenemos la conclusión.

2.2) $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$ es una unión finita de cubos.

Razonamos por inducción sobre m . El caso $m = 1$ es el anterior. Si vale para menos de m cubos, entonces vale para $A' = A_1 \cup \dots \cup A_{m-1}$, también para A_m y para $A' \cap A_m$, que es unión de a lo sumo $m - 1$ cubos (tal vez de dimensiones menores, pero eso no importa). Por el caso 1 el teorema vale también para A .

2.3) $A \subset U$ es un compacto arbitrario.

Veamos en primer lugar que j_A es suprayectiva. Tomamos $s \in \Gamma[A]$. Al cortar con $s[A]$ las componentes conexas de \tilde{V} obtenemos una partición en abiertos disjuntos, y como $s[A]$ es compacto sólo puede cortar a un número finito de componentes. Como s es un homeomorfismo en la imagen, tenemos una descomposición $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$ en compactos disjuntos, de modo que cada $s[A_i]$ está contenido en una componente conexa de \tilde{V} .

Veamos que podemos suponer que $m = 1$ o, dicho de otro modo, que si probamos que cada restricción $s|_{A_i}$ tiene una antiimagen en $H_n(U, U \setminus A_i)$ entonces s tiene una antiimagen en $H_n(U, U \setminus A)$.

En efecto, digamos que $j_{A_i}(\alpha_i) = s|_{A_i}$, para $i = 1, \dots, m$. Sean U_i abiertos disjuntos dos a dos tales que $A_i \subset U_i \subset U$. El teorema de escisión nos da el isomorfismo $H_n(U_i, U_i \setminus A_i) \cong H_n(U, U \setminus A_i)$, por lo que podemos tomar un cociclo relativo $z_i \in Z_n(U_i, U_i \setminus A_i)$ tal que $\alpha_i = [z_i]$.

Definimos $\alpha = [z_1 + \dots + z_m]$. Entonces, si $x \in A_i$, tenemos que

$$j_A(\alpha)(x) = (x, j_x^A(\alpha)) = (x, [z_i]) = (x, j_x^{A_i}(\alpha_i)) = s|_{A_i}(x) = s(x).$$

Por consiguiente $s = j_A(\alpha)$.

Según esto, podemos suponer que $s[A]$ está contenido en una componente conexa C de \tilde{V} . Observemos ahora que $p|_C : C \rightarrow U$ es un homeomorfismo. En efecto, tomemos un punto cualquiera de C , que será de la forma $(x, a\alpha_x)$, donde $a \in \mathbb{A}$ y α_x es una orientación local en x . Si β es una orientación en U , entonces $\alpha_x = b\beta_x$, para cierta unidad $b \in \mathbb{A}$, y $\alpha = b\beta$ es una orientación en U que extiende a α_x . Es fácil ver que $C = \{(y, a\alpha_y) \mid y \in U\}$, de donde se sigue inmediatamente nuestra afirmación sobre $p|_C$.

Por consiguiente, $s^* = (p|_C)^{-1} \in \Gamma[U]$ es una extensión de s . Para cada punto $x \in A$ tomamos un cubo que contenga a x en su interior. Por compacidad podemos extraer una unión finita A' de estos cubos tal que $A \subset A'$. Consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(U, U \setminus A') & \xrightarrow{j_{A'}} & \Gamma[A'] \\ j_{A'} \downarrow & & \downarrow r \\ H_n(U, U \setminus A) & \xrightarrow{j_A} & \Gamma[A] \end{array}$$

En $\Gamma[A']$ tenemos a $s^*|_{A'}$, que, por el apartado anterior, tiene antiimagen respecto a $j_{A'}$. Por otra parte, $r(s^*|_{A'}) = s$, luego la conmutatividad nos da que s también tiene antiimagen.

Tomemos ahora $\alpha \in H_p(U, U \setminus A)$, con $p \geq n$. Si $p = n$ suponemos además que $j_A(\alpha) = 0$. Hemos de probar que $\alpha = 0$, con lo que tendremos a la vez a) y la parte de b) que nos falta.

Sea $\alpha = [z]$ y $U' = U \setminus |\partial z|$. Como z es un cociclo relativo tenemos que $A \subset U' \subset U$. Además U' es abierto en U . Llamemos $\alpha' = [z] \in H_p(U, U \setminus U')$.

Si $p = n$ tenemos que para todo $x \in A$ se cumple $j_x^{U'}(\alpha') = j_x^A(\alpha) = 0$. Por el teorema 10.35 el punto x tiene un entorno $U_x \subset U$ de modo que si $y \in U_x$ entonces $j_y^{U'}(\alpha') = 0$. La unión de estos entornos es un abierto $U'' \subset U$ que contiene a A y de modo que $j_x^{U'}(\alpha') = 0$ para todo $x \in U''$. Formamos una unión finita de cubos A' igual que antes, de modo que $A \subset A' \subset U''$, con lo que $j_{A'}(j_{A'}^{U'}\alpha') = 0$.

Si $p > n$ tomamos directamente $A \subset A' \subset U'$. En cualquier caso, el apartado anterior nos permite concluir que $j_{A'}^{U'}(\alpha') = 0$, luego $\alpha = j_A^{A'}(j_{A'}^{U'}(\alpha')) = 0$.

3) *El teorema se cumple si A es un compacto arbitrario.*

Para cada $x \in A$ tomamos un entorno U_x en las condiciones del apartado anterior. A su vez consideramos un abierto tal que $x \in W_x \subset \overline{W}_x \subset U_x$. Extraemos un subcobrimiento finito de los W_x . Así A es unión de un número finito de compactos $A \cap \overline{W}_x$, cada uno de los cuales está en las hipótesis del caso anterior. Concluimos por inducción sobre el número de estos compactos, usando el paso 1.

4) Si U es un abierto en V de clausura compacta y A es cerrado en U (no necesariamente en V) entonces el teorema se cumple para U (como variedad) y para A .

Vamos a considerar la sucesión de homología asociada a la terna

$$(V, U \cup (V \setminus \overline{U}), (U \setminus A) \cup (V \setminus \overline{U})),$$

pero antes observamos que el teorema de escisión nos da el isomorfismo

$$H_p(U, U \setminus A) \cong H_p(U \cup (V \setminus \overline{U}), (U \setminus A) \cup (V \setminus \overline{U})).$$

Las hipótesis del teorema de escisión se cumplen porque $V \setminus \overline{U}$ es abierto y cerrado en $U \cup (V \setminus \overline{U})$. Teniendo en cuenta este isomorfismo, la sucesión exacta indicada queda así:

$$H_{p+1}(V, U \cup (V \setminus \overline{U})) \longrightarrow H_p(U, U \setminus A) \longrightarrow H_p(V, (U \setminus A) \cup (V \setminus \overline{U})).$$

Los grupos de los extremos son, respectivamente, $H_{p+1}(V, V \setminus (\overline{U} \setminus U))$ y $H_p(V, V \setminus A \cup (\overline{U} \setminus U))$. El hecho de que A sea cerrado en U se traduce en que su clausura en V cumple $\overline{A} \setminus A \subset \overline{U} \setminus U$, por lo que $A \cup (\overline{U} \setminus U) = \overline{A} \cup (\overline{U} \setminus U)$. Teniendo esto en cuenta, ambos grupos son nulos (para $p > n$) por el caso anterior, luego también $H_p(U, U \setminus A) = 0$. Para $p = n$ tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & H_n(U, U \setminus A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(V, (U \setminus A) \cup (V \setminus \overline{U})) & \xrightarrow{i_*} & H_n(V, U \cup (V \setminus \overline{U})) \\ & & \downarrow j_A & & \downarrow j_{\overline{A} \cup (\overline{U} \setminus U)} & & \downarrow j_{\overline{U} \setminus U} \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma_c[A] & \xrightarrow{e} & \Gamma[\overline{A} \cup (\overline{U} \setminus U)] & \xrightarrow{r} & \Gamma[\overline{U} \setminus U] \end{array}$$

Observemos que $\Gamma_c[A]$ se refiere a la variedad U , mientras que los otros dos módulos se refieren a la variedad V . De todos modos, podemos identificar \tilde{U} con $p^{-1}[U] \subset \tilde{V}$ identificando cada grupo $H_n(U, U \setminus \{x\})$ con $H_n(V, V \setminus \{x\})$. El homomorfismo e asigna a cada $s \in \Gamma_c[A]$ su extensión \tilde{s} a $\overline{A} \cup (\overline{U} \setminus U)$ dada por $\tilde{s}(x) = (x, 0)$ para todo $x \notin A$. El hecho de que s tenga soporte compacto garantiza que \tilde{s} es continua.

La fila inferior es exacta, pues si $s \in \Gamma[\overline{A} \cup (\overline{U} \setminus U)]$ se anula en $\overline{U} \setminus U$, teniendo en cuenta que $\overline{A} \setminus A \subset \overline{U} \setminus U$, tenemos que el conjunto de puntos donde s no se anula está contenido en A , y es cerrado en \overline{A} (por la continuidad de la aplicación $m : \tilde{V} \rightarrow \tilde{A}$), luego $s|_A$ tiene soporte compacto y $e(s|_A) = s$.

Los dos homomorfismos verticales de la derecha son isomorfismos por el caso anterior, luego el teorema 4.12 nos da que j_A también lo es. ■

5) *El caso general.*

Dado $s \in \Gamma_c[A]$ con soporte compacto K , tomamos un abierto U que contenga a K y que tenga clausura compacta (cubrimos K con un número finito de cerrados homeomorfos a bolas cerradas de \mathbb{R}^n). Consideramos $A' = A \cap U$ y $s' = s|_{A'}$. El caso anterior aplicado a A' y la conmutatividad del diagrama siguiente nos dan que s tiene antiimagen por j_A .

$$\begin{array}{ccc} H_n(U, U \setminus A') & \xrightarrow{i_*} & H_n(V, V \setminus A) \\ j_{A'} \downarrow & & \downarrow j_A \\ \Gamma_c[A'] & \xrightarrow{e} & \Gamma_c[A] \end{array}$$

Ahora tomamos $\alpha \in H_p(V, V \setminus A)$ y para $p = n$ suponemos además que $j_A(\alpha) = 0$. Basta probar que $\alpha = 0$. Sea $\alpha = [z]$ y tomemos un abierto U de clausura compacta que contenga al soporte $|z|$. Tomamos $A' = A \cap U$ y $\alpha' = [z] \in H_p(U, U \setminus A')$. Si $p > n$ tenemos que $\alpha' = 0$ y $\alpha = i_*(\alpha') = 0$. Si $p = n$ el mismo diagrama anterior (teniendo en cuenta que e es inyectiva) nos da que $j_{A'}(\alpha') = 0$, luego $\alpha' = 0$ y de nuevo $\alpha = 0$. ■

Si aplicamos el teorema para $A = X$ obtenemos:

Teorema 10.49 *Si V es una variedad topológica de dimensión n , entonces se cumple que $H_p(V) = 0$ para todo $p > n$.*

Así pues, la homología de una variedad topológica n -dimensional es no trivial a lo sumo en el intervalo de dimensiones de 0 a n . Si no es compacta, el grupo de dimensión n también es nulo:

Teorema 10.50 *Sea V una variedad topológica n -dimensional y $A \subset V$ un cerrado conexo no compacto. Entonces $H_n(V, V \setminus A) = 0$. En particular, si V es conexa y no compacta, $H_n(V) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que $\Gamma_c[A] = 0$, pero si $s \in \Gamma_c[A]$, entonces por conexión $s \circ m$ es constante, y como s se anula fuera de un compacto (que no puede ser A), necesariamente $s \circ m = 0$, es decir, $s = 0$. ■

Aplicando el teorema 10.47 concluimos:

Teorema 10.51 *Sea V una variedad topológica n -dimensional y $A \subset V$ un subconjunto compacto \mathbb{A} -orientable con un número finito k de componentes conexas. Entonces $H_n(V, V \setminus A) \cong \mathbb{A}^k$.*

Para las variedades compactas conexas tenemos una caracterización muy simple de la orientabilidad en términos de su homología:

Teorema 10.52 Si V es una variedad n -dimensional compacta y conexa y \mathbb{A} es un dominio íntegro,³ entonces

$$H_n(V) \cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } V \text{ es } \mathbb{A}\text{-orientable,} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: Si V es \mathbb{A} -orientable (para cualquier \mathbb{A}) basta aplicar el teorema anterior. Supongamos ahora que $H_n(V) \neq 0$ y veamos que V es orientable. Tenemos entonces que $\Gamma[V] \neq 0$, es decir, que existe una sección global $s \in \Gamma[V]$, $s \neq 0$. Por conexión, $s \circ m$ es constante y no nulo. Digamos que $m(s(x)) = [a]$ para todo $x \in V$. Esto significa que $s(x) = as'(x)$, para cierto generador $s'(x) \in H_n(V, V \setminus \{x\})$ unívocamente determinado (aquí suponemos que \mathbb{A} es un dominio íntegro). La aplicación $x \mapsto (x, s'(x))$ es claramente continua, por lo que s' es una \mathbb{A} -orientación de V . ■

Ahora es inmediato que las variedades compactas S^n , M_g son orientables, mientras que las variedades N_h no lo son. Igualmente, los espacios proyectivos $P^{2n+1}(\mathbb{R})$ y $P^n(\mathbb{C})$ son variedades topológicas orientables, mientras que los espacios proyectivos $P^{2n}(\mathbb{R})$ no son orientables.

Podemos reducir una \mathbb{A} -orientación de una variedad compacta conexa a una clase de homología:

Teorema 10.53 Si V es una variedad compacta conexa \mathbb{A} -orientable n -dimensional, las \mathbb{A} -orientaciones de V están en correspondencia biunívoca con los generadores de $H_n(V)$, de modo que si $\zeta \in H_n(V)$ es un generador, su orientación α asociada es la dada por $\alpha_x = j_x^V(\zeta)$.

DEMOSTRACIÓN: Según la observación posterior al teorema 10.47 tenemos que las \mathbb{A} -orientaciones de V (entendidas como secciones) son los generadores de $\Gamma[V]$, luego por 10.48 se corresponden con los generadores de $H_n(V)$ a través del isomorfismo j_V . Si $\zeta \in H_n(V)$, su orientación asociada α es la determinada por la sección $j_V(\zeta)$, o sea, la que cumple $j_V(\zeta)(x) = (x, \alpha_x)$, luego, por definición de j_V , es $\alpha_x = j_x^V(\zeta)$. ■

En las condiciones del teorema anterior, la clase ζ que determina una \mathbb{A} -orientación de V prefijada se llama *clase fundamental* de V (respecto a dicha \mathbb{A} -orientación).

Orientación de superficies compactas La clasificación de las superficies compactas se basa en el teorema 2.29, que afirma que toda superficie compacta es triangulable. Recordemos que una triangulación es una familia de símlices inyectivos $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ cuyas imágenes cubren toda la superficie S y la intersección de dos cualesquiera de ellas sea vacía o bien consista en un vértice o en una arista común.

Una vez sabemos que toda superficie compacta orientable es homeomorfa a una superficie M_g , podemos obtener triangulaciones especialmente útiles:

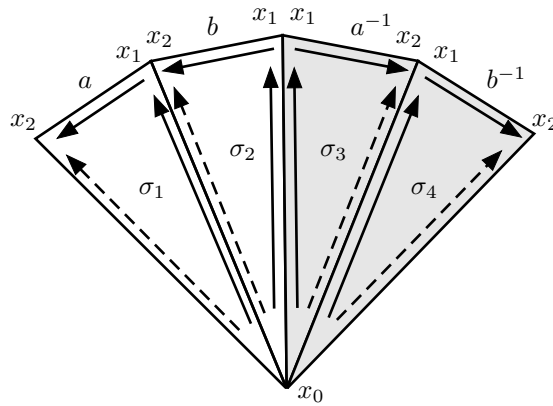
³Para anillos arbitrarios véase el teorema 12.4

Teorema 10.54 *Una superficie compacta es orientable si y sólo si admite una triangulación $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ tal que, eligiendo adecuadamente signos $\epsilon_i = \pm 1$, se cumple que $\zeta = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \sigma_i \in Z_2(S)$, y entonces $[\zeta]$ es una clase fundamental de S .*

DEMOSTRACIÓN: No perdemos generalidad si suponemos que $S = M_g$. Recordemos que si $\sigma_i : \Delta_2 \rightarrow S$, entonces

$$\partial\sigma_i = \sigma_i^\#(x_0, x_1) + \sigma_i^\#(x_1, x_2) - \sigma_i^\#(x_0, x_2),$$

de modo que dos 1-símplices de $\partial\sigma_i$ aparecen con signo positivo y uno con signo negativo. Consideramos la triangulación de M_g que indica la figura:



Los símplexes σ_1 y σ_2 aparecen en ζ con signo positivo, mientras que σ_3 y σ_4 tienen signo negativo. Las flechas discontinuas indican los arcos $\sigma_i^\#(x_0, x_2)$, que en $\partial\sigma_i$ aparecen con signo negativo. Vemos entonces que todos los arcos se cancelan al calcular $\partial\zeta$:

- El lado común de σ_1 y σ_2 aparece en $\partial\sigma_1$ con signo positivo y en $\partial\sigma_2$ con signo negativo, luego ambos se cancelan mutuamente.
- A la izquierda de σ_1 habrá otro símplex análogo a σ_4 , de modo que el lado común aparece en ambas fronteras con signo negativo, pero como σ_4 aparece en ζ también con signo negativo, los dos segmentos se cancelan también.
- Si la identificación entre a y a^{-1} se realiza mediante una biyección afín (cosa que siempre podemos exigir), entonces el lado a^{-1} de σ_3 se corresponde en el cociente exactamente con el mismo lado a de σ_1 , y ambos aparecen con signo positivo en las fronteras respectivas, pero como σ_3 tiene signo negativo en ζ , los dos lados se cancelan.

Así hemos comprobado que todos los lados de σ_1 se cancelan con sus parejas correspondientes al calcular $\partial\zeta$. Igualmente se comprueba que sucede lo mismo con los otros tres triángulos, luego $\partial\zeta = 0$.

Veamos ahora que si ζ es cualquier ciclo obtenido a partir de una triangulación (no necesariamente la que hemos considerado para probar la existencia de tales ciclos), entonces $[\zeta]$ genera $H_2(S)$. En efecto, basta tomar un punto p en el interior, por ejemplo, del s3mplice σ_1 . Entonces los dem3s s3mplices tienen imagen en $S \setminus \{p\}$, luego son ciclos nulos en $H_2(S, S \setminus \{p\})$, luego la imagen de $[\zeta]$ por el isomorfismo $H_2(S) \rightarrow H_2(S, S \setminus \{p\})$ es $[\epsilon_1 \sigma_1]$, y sabemos que $[\sigma_1]$ es un generador de $H_2(S, S \setminus \{p\})$, luego $[\zeta]$ genera $H_2(S)$.

El r3ciproco es obvio, pues un ciclo ζ construido con s3mplices distintos dos a dos no es nulo, y no puede ser una frontera, pues $F_2(S) = 0$, luego $H_2(S) \neq 0$, y esto implica que S es orientable. ■

Capítulo XI

Cohomología

En [GD 5.39] asociamos a cada variedad diferencial V sus grupos de cohomología de De Rham $H^p(V)$ como cocientes de espacios de formas diferenciales. A pesar de que su definición involucra de forma esencial la estructura diferencial de la variedad, en el capítulo XIII demostraremos que están completamente determinados por su estructura topológica. Concretamente, veremos que son isomorfos a otros grupos de cohomología que pueden definirse en cualquier espacio topológico y que vamos a estudiar en este capítulo, aunque previamente estudiaremos la cohomología de De Rham a un nivel de profundidad mayor que el considerado en [GD].

Para seguir este capítulo el lector deberá conocer los resultados de las secciones 5.1 y 5.2.

11.1 La cohomología de De Rham

Recordemos [GD 3.47] que, si V es una variedad diferencial de dimensión n , el álgebra de Grassmann $\Lambda(V)$ [GD 3.24] adquiere estructura de complejo inverso con la diferencial exterior:

$$0 \longrightarrow \Lambda^0(V) \xrightarrow{d} \Lambda^1(V) \xrightarrow{d} \dots \longrightarrow \Lambda^{n-1}(V) \xrightarrow{d} \Lambda^n(V) \longrightarrow 0.$$

Recordemos, más concretamente, que $\Lambda^0(V) = C^\infty(V)$ es simplemente el espacio de las funciones diferenciables $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$.

Los grupos de cohomología de De Rham de V [GD 5.39] se definen simplemente como los grupos de cohomología de este complejo, y los representaremos por $H^p(V)$. Conviene considerar el \mathbb{R} -espacio vectorial graduado

$$H^*(V) = \bigoplus_{p=0}^n H^p(V).$$

Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación diferenciable entre variedades, el teorema [GD 3.48] prueba que la retracción $f^* : \Lambda(W) \longrightarrow \Lambda(V)$ es un homomorfismo de

complejos, luego induce un homomorfismo graduado $\bar{f}^* : H^*(W) \rightarrow H^*(V)$, lo que convierte a H^* (y a cada H^p) en un funtor contravariante.

Es interesante observar que $\Lambda(V)$ tiene estructura de \mathbb{R} -álgebra graduada con el producto exterior, y el hecho de que la diferencial sea una antiderivación, es decir, que cumple

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2, \quad \omega_1 \in \Lambda^p(V), \quad \omega_2 \in \Lambda^q(V),$$

se traduce en que el producto exterior induce un producto entre los grupos de cohomología. En efecto, vemos que el producto de dos cociclos (es decir, de dos formas diferenciales cerradas) es un cociclo y que el producto de un cociclo por una cofrontera (en cualquier orden) es una cofrontera. Por lo tanto, podemos definir un producto

$$H^p(V) \times H^q(V) \rightarrow H^{p+q}(V)$$

mediante $[\omega_1] \wedge [\omega_2] = [\omega_1 \wedge \omega_2]$, y estos homomorfismos inducen a su vez un producto graduado asociativo

$$H^*(V) \times H^*(V) \rightarrow H^*(V).$$

Por lo tanto, podemos hablar del *álgebra de cohomología de De Rham* de una variedad diferencial, que es una \mathbb{R} -álgebra graduada.

Si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación diferenciable entre variedades, entonces $f^* : \Lambda(W) \rightarrow \Lambda(V)$ es un homomorfismo de álgebras graduadas, luego lo mismo vale para $\bar{f}^* : H^*(W) \rightarrow H^*(V)$. Por consiguiente, podemos considerar a H^* como un funtor contravariante de la categoría de las variedades diferenciales en la categoría de las \mathbb{R} -álgebras graduadas.

Definición 11.1 Si V es una variedad diferencial y $U \subset V$ es un abierto, definimos $\Lambda^p(V, U)$ como el subespacio de $\Lambda^p(U)$ formado por las formas diferenciales que se anulan en U . Es claro que estos subespacios determinan de hecho un subcomplejo de $\Lambda(U)$ (la diferencial de una forma diferencia que se anula en U se anula también en U).

Llamaremos $H^p(V, U)$ a los grupos de cohomología del complejo $\Lambda(V, U)$.

Si $f : (V, U) \rightarrow (W, U')$ es una aplicación diferenciable entre pares de variedades diferenciales, es claro que la retracción $f^* : \Lambda(W) \rightarrow \Lambda(V)$ se restringe a un homomorfismo de complejos $f^* : \Lambda(W, U') \rightarrow \Lambda(V, U)$, por lo que induce un homomorfismo graduado $\bar{f}^* : H^*(W, U') \rightarrow H^*(V, U)$, de modo que H^* (o cada H^p) es un funtor contravariante definido en la categoría de pares de variedades diferenciales.

Puesto que tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \Lambda(V, U) \rightarrow \Lambda(V) \rightarrow \Lambda(U) \rightarrow 0$$

(el epimorfismo es la restricción), el teorema 4.10 nos da el teorema siguiente:

Teorema 11.2 (La sucesión exacta de cohomología) *Si U es abierto en una variedad diferencial V , existen homomorfismos de conexión*

$$\delta_p : \Lambda^p(U) \longrightarrow \Lambda^{p+1}(V, U)$$

tales que la sucesión

$$\dots \longrightarrow H^p(V, U) \xrightarrow{\bar{j}^*} H^p(V) \xrightarrow{\bar{i}^*} H^p(U) \xrightarrow{\delta_p} H^{p+1}(V, U) \longrightarrow \dots$$

es exacta, donde $i : U \longrightarrow V$ es la inclusión y $j : (V, \emptyset) \longrightarrow (V, U)$ es la identidad.

Es fácil probar que cada aplicación diferenciable entre pares de variedades diferenciales induce un homomorfismo entre las sucesiones exactas largas correspondientes.

El teorema [GD 5.42] se generaliza fácilmente a aplicaciones entre pares de variedades:

Teorema 11.3 (Teorema de homotopía) *Si $f, g : (V, U) \longrightarrow (W, U')$ son aplicaciones diferenciables homotópicas entre pares de variedades diferenciales, las retracciones $f^*, h^* : \Lambda(W, U) \longrightarrow \Lambda(V, U')$ son homotópicas. Por consiguiente $\bar{f}^* = \bar{g}^*$.*

DEMOSTRACIÓN: En la prueba de [GD 5.42] se ve que si $H : I \times V \longrightarrow W$ es una homotopía entre f y g , entonces

$$h = H^* \circ i_{\partial_t} \circ I_0^1 : \Lambda(W) \longrightarrow \Lambda(V),$$

es una homotopía de complejos, es decir, que cumple $g^* - f^* = d \circ h + h \circ d$. Sólo tenemos que observar que si¹ $H : (I \times V, I \times U) \longrightarrow (W, U')$, entonces h se restringe a una homotopía

$$h : \Lambda(W, U') \longrightarrow \Lambda(V, U)$$

entre las restricciones de f^* y g^* . ■

En particular tenemos el lema de Poincaré [GD 5.44]:

Teorema 11.4 *Si V es una variedad contractible, entonces*

$$H^k(V) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

Es fácil determinar la cohomología de De Rham en dimensión 0. El teorema siguiente es un poco más fino que [GD 5.40]:

¹Recordemos que la diferenciabilidad de H se interpreta como que, en realidad, está definida y es diferenciable en $J \times V$, donde J es un intervalo abierto que contiene a I , con lo que podemos sustituir $(I \times V, I \times U)$ por el par de variedades $(J \times V, J \times U)$.

Teorema 11.5 Si (V, U) es un par de variedades diferenciales, $H^0(V, U)$ es isomorfo al espacio vectorial de las funciones diferenciables $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ localmente constantes y que se anulan en U .

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que $\Lambda^0(V, U)$ es el espacio de las funciones diferenciables $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ que se anulan en U y $H^0(V, U) = Z^0(V, U)$ está formado por las funciones que además cumplen $df = 0$, lo cual equivale a que sean localmente constantes (es decir, constantes en cada componente conexa de V). ■

Otro hecho elemental relacionado es el siguiente:

Teorema 11.6 Si una variedad $V = \bigcup_{k=0}^{\infty} V_k$ se descompone en unión de abiertos disjuntos y $U \subset V$ es otro abierto, las inclusiones $i_k : (V_k, V_k \cap U) \rightarrow (V, U)$ inducen un isomorfismo

$$\prod_k \bar{i}_k^* : H^p(V, U) \rightarrow \prod_{k=0}^{\infty} H^p(V_k, V_k \cap U).$$

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que

$$\Lambda^p(V, U) \cong \prod_{k=0}^{\infty} \Lambda^p(V_k, V_k \cap U),$$

donde el isomorfismo no es sino $\omega \mapsto (\omega|_{V_k})_k$, es decir, es el producto de los homomorfismos inducidos por las inclusiones. De ahí se sigue fácilmente que el producto de los homomorfismos \bar{i}_k es también un isomorfismo. ■

Teorema 11.7 (La sucesión de Mayer-Vietoris) Sea V una variedad diferencial y U_1, U_2 dos abiertos en V de modo que $V = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Sean

$$\alpha : \Lambda^*(V) \rightarrow \Lambda^*(U_1) \oplus \Lambda^*(U_2), \quad \beta : \Lambda^*(U_1) \oplus \Lambda^*(U_2) \rightarrow \Lambda^*(U_1 \cap U_2)$$

los homomorfismos dados por

$$\alpha(\omega) = (i_1^*(\omega), i_2^*(\omega)), \quad \beta(\omega_1, \omega_2) = j_1^*(\omega_1) - j_2^*(\omega_2),$$

donde

$$j_1 : U_1 \cap U_2 \rightarrow U_1, \quad j_2 : U_1 \cap U_2 \rightarrow U_2, \quad i_1 : U_1 \rightarrow V, \quad i_2 : U_2 \rightarrow V.$$

son las inclusiones. Entonces existen homomorfismos naturales

$$\Delta_k : H^k(U_1 \cap U_2) \rightarrow H^{k+1}(V)$$

que hacen exacta la sucesión

$$\dots \rightarrow H^k(V) \xrightarrow{\bar{\alpha}} H^k(U_1) \oplus H^k(U_2) \xrightarrow{\bar{\beta}} H^k(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\Delta} H^{k+1}(V) \rightarrow \dots$$

DEMOSTRACIÓN: Es claro que α y β determinan homomorfismos de complejos

$$0 \longrightarrow \Lambda(V) \xrightarrow{\alpha} \Lambda(U_1) \oplus \Lambda(U_2) \xrightarrow{\beta} \Lambda(U_1 \cap U_2) \longrightarrow 0.$$

Por el teorema 4.10, basta probar que la sucesión anterior es exacta.

En primer lugar probamos que β es suprayectiva. Fijemos una partición de la unidad p_1, p_2 en V subordinada al cubrimiento U_1, U_2 , es decir, $p_1 + p_2 = 1$, $\text{sop } p_1 \subset U_1, \text{sop } p_2 \subset U_2$.

Tomemos $\omega \in \Lambda(U_1 \cap U_2)$. La función $i_1^*(p_2)$ está definida en U_1 y se anula en un entorno de cada punto de $U_1 \setminus U_2$, luego la forma $\omega_1 = (i_1^*(p_2))\omega$ se puede extender a U_1 haciéndola nula en $U_1 \setminus U_2$. Similarmente tenemos $\omega_2 = (i_2^*(p_2))\omega \in \Lambda(U_2)$. Es inmediato comprobar que $\omega = \beta(\omega_1, -\omega_2)$.

La inyectividad de α es obvia: si $\alpha(\omega) = 0$ entonces ω se anula en U_1 y en U_2 , luego se anula en V .

Es claro que $\alpha \circ \beta = 0$. Tomemos ahora $(\omega_1, \omega_2) \in \text{N}\beta$, de modo que $\omega_1(p) = \omega_2(p)$ para todo $p \in U_1 \cap U_2$ y consecuentemente podemos definir $\omega \in \Lambda(V)$ que extienda simultáneamente a ω_1 y a ω_2 , pero esto equivale a decir que $\alpha(\omega) = (\omega_1, \omega_2)$. ■

Nota Aunque hemos supuesto que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, es fácil ver que en caso contrario la aplicación α es un isomorfismo, por lo que también tenemos trivialmente una sucesión de Mayer–Vietoris en la que cada $H^k(U_1 \cap U_2) = 0$. ■

La prueba del teorema siguiente es inmediata:

Teorema 11.8 Si $f : (V, U_1, U_2) \longrightarrow (W, U'_1, U'_2)$ es una aplicación diferenciable entre tríadas de abiertos en las variedades V y W , entonces los homomorfismos inducidos por f hacen conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} H^p(V) & \longrightarrow & H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) & \longrightarrow & H^p(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & H^{p+1}(V) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ H^p(W) & \longrightarrow & H^p(U'_1) \oplus H^p(U'_2) & \longrightarrow & H^p(U'_1 \cap U'_2) & \longrightarrow & H^{p+1}(W) \end{array}$$

La variedad de orientaciones Recordemos la variedad de orientaciones de una variedad topológica V , definida en 10.44 (para $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$). Se trata de un cubrimiento de V de orden 2, es decir, que tenemos definida una proyección $\pi : \tilde{V}_1 \longrightarrow V$ tal que cada punto $p \in V$ tiene un entorno fundamental U de modo que $\pi^{-1}[U]$ tiene exactamente dos componentes conexas U_1 y U_2 y π se restringe a un homeomorfismo sobre ambas.

Si V es una variedad diferencial y $p \in \tilde{V}_1$, podemos tomar un entorno fundamental U de $\pi(p)$ que sea además sea el dominio de una carta x . Si U_1 es la componente conexa de $\pi^{-1}[U]$ que contiene a p , entonces $\pi|_{U_1} \circ x$ es una carta alrededor de p , y es fácil ver que las cartas construidas de este modo determinan una estructura diferencial en \tilde{V}_1 . De hecho se tiene el teorema siguiente:

Teorema 11.9 *Si V es una variedad diferencial y W es su variedad de orientaciones, entonces existe una única estructura diferencial en W respecto a la cual la proyección canónica $\pi : W \rightarrow V$ es un difeomorfismo local.*

Ejercicio: Construir directamente la variedad de orientaciones de una variedad diferencial V (tomando como puntos las clases de equivalencia de cartas igualmente orientadas alrededor de cada punto de V). Demostrar directamente que la variedad de orientaciones es orientable, así como que es conexa si y sólo si V no es orientable y tiene dos componentes conexas en caso contrario.

Si $J : W \rightarrow W$ es la aplicación que a cada $x \in W$ le asigna la otra antiimagen de $\pi(x)$, es claro que J es un difeomorfismo que invierte la orientación. Tenemos que J es una *involución* de W , es decir, es un difeomorfismo tal que $J \circ J = I$ (donde I es la identidad en W). Consecuentemente $J^* : \Lambda(W) \rightarrow \Lambda(W)$ es un automorfismo con la misma propiedad: $J^* \circ J^* = I$. Podemos descomponer $\Lambda(W) = \Lambda_+(W) \oplus \Lambda_-(W)$, donde

$$\Lambda_+(W) = \{\omega \in \Lambda(W) \mid J^*(\omega) = \omega\}, \quad \Lambda_-(W) = \{\omega \in \Lambda(W) \mid J^*(\omega) = -\omega\}.$$

En efecto, basta tener en cuenta que

$$\omega = \frac{\omega + J^*(\omega)}{2} + \frac{\omega - J^*(\omega)}{2}.$$

Es claro que $\Lambda_+(W)$ y $\Lambda_-(W)$ son subcomplejos de $\Lambda(W)$, y es fácil ver que $H(W) = H_+(W) \oplus H_-(W)$, donde

$$H_+(W) = \{\alpha \in H(W) \mid J^*(\alpha) = \alpha\}, \quad H_-(W) = \{\alpha \in H(W) \mid J^*(\alpha) = -\alpha\}.$$

El teorema siguiente está implícito en el argumento con el que en [GD 5.48] calculamos la cohomología de los espacios proyectivos:

Teorema 11.10 *Sea $\pi : W \rightarrow V$ un difeomorfismo local entre variedades, es decir, π es diferenciable y suprayectiva y todo punto de W tiene un entorno abierto U tal que $\pi[U]$ es abierto en V y $\pi|_U$ es un difeomorfismo en su imagen. Sea J una involución en W y supongamos que para todo $p \in V$ se cumple $\pi^{-1}(p) = \{q, J(q)\}$, para cierto $q \in W$. Entonces $H^k(V) \cong H_+^k(W)$.*

DEMOSTRACIÓN: Basta probar que $\pi^* : \Lambda(V) \rightarrow \Lambda_+(W)$ es un isomorfismo. Puesto que $J \circ \pi = \pi$, tenemos que $\pi^* \circ J^* = \pi^*$, luego la imagen de π^* —que en principio estaría en $\Lambda(W)$ — está en $\Lambda_+(W)$.

Para probar que es inyectiva tomemos $\omega \in \Lambda^k(V)$ no nula y veamos que su imagen es no nula. Tenemos que existe $p \in V$ y $v_1, \dots, v_k \in T_p(V)$ de modo que $\omega_p(v_1, \dots, v_k) \neq 0$. Sea $p = \pi(q)$, con $q \in W$. El hecho de que π sea un difeomorfismo local se traduce en que $d\pi|_q$ es un isomorfismo, con lo que existen vectores w_1, \dots, w_k tales que $d\pi|_q(w_i) = v_i$. Es claro entonces que

$$\pi^*(\omega)_q(w_1, \dots, w_k) = \omega_p(v_1, \dots, v_k) \neq 0,$$

luego $\pi^*(\omega) \neq 0$.

Tomemos ahora $\omega \in \Lambda_+^k(W)$ y veamos que tiene una antiimagen. Fijemos un punto $p \in V$. Sea $q \in W$ tal que $\pi(q) = p$. Sea U un entorno de q en el cual π sea un difeomorfismo. Sea $\omega^p = (\pi|_U^{-1})^*(\omega|_{\pi[U]})$, que es una k -forma en $\pi[U]$.

Veamos que ω^p no depende de ninguna de las elecciones que hemos hecho para construirla. Si p' es cualquier punto en $\pi[U]$ y q' es su antiimagen en U , entonces

$$\omega_{p'}^p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{q'}(d\pi_{q'}^{-1}(v_1), \dots, d\pi_{q'}^{-1}(v_k)). \quad (11.1)$$

Esta expresión no depende más que de ω salvo por el hecho de que hemos escogido la antiimagen q' de p' . Sólo hay otra alternativa, pues p' no tiene más antiimágenes que q' y $J(q')$. Ahora bien, si en (11.1) sustituimos q' por $J(q')$ el miembro derecho se convierte en $\omega_{J(q')}$ actuando sobre los vectores $d\pi_{J(q')}^{-1}(v_i)$, pero se cumple que $J \circ \pi = \pi$, y por consiguiente $d\pi|_{q'} = dJ|_{q'} \circ d\pi|_{J(q')}$, luego $d\pi_{J(q')}^{-1}(v_i) = dJ|_{q'}(d\pi_{q'}^{-1}(v_i))$ y, en definitiva, el miembro derecho de (11.1) se transforma en $\omega_{J(q')}$ actuando sobre los vectores $dJ|_{q'}(d\pi_{q'}^{-1}(v_i))$, pero esto es lo mismo que

$$J^*(\omega)_{q'}(d\pi_{q'}^{-1}(v_1), \dots, d\pi_{q'}^{-1}(v_k)),$$

que da el mismo resultado, porque $\omega \in \Lambda_+(W)$.

De este modo, para cada punto $p \in V$ hemos construido una forma ω^p en un entorno que al actuar sobre un punto q' cualquiera da un resultado que sólo depende de ω . Por lo tanto, dos formas ω^p y $\omega^{p'}$ coincidirán en su dominio común, luego la familia de formas que hemos definido determina una única forma $\omega^* \in \Lambda^k(V)$, que en un entorno de cada punto viene dada por (11.1). Es inmediato que $\pi^*(\omega^*) = \omega$. ■

En particular tenemos una representación de la cohomología de una variedad diferencial V en términos de la cohomología de su variedad de orientaciones W , lo cual interesa esencialmente porque la variedad de orientaciones siempre es orientable.

11.2 La cohomología de De Rham con soportes compactos

En [GD 4.18] consideramos a menudo formas diferenciales con soporte compacto, esencialmente porque así tenemos garantizado que son integrables. Allí definimos $\Lambda_c^p(V)$ como el subespacio de $\Lambda^p(V)$ formado por las formas diferenciales con soporte compacto. La diferencial exterior de una forma con soporte compacto tiene soporte compacto, por lo que estos espacios forman un complejo $\Lambda_c^*(V)$:

Definición 11.11 Si V es una variedad diferencial, definimos los *grupos de cohomología de De Rham de v con soportes compactos* como los grupos de cohomología del complejo $\Lambda_c^*(V)$ determinado por las formas diferenciales con soporte compacto (con la diferencial exterior como operador cofrontera). Los representaremos por $H_c^p(V)$.

En este punto hay que prestar atención al hecho de que, en general, dada una aplicación diferenciable $f : V \rightarrow W$ entre variedades, no es necesariamente cierto que la retracción $f^* : \Lambda(W) \rightarrow \Lambda(V)$ se restrinja a un homomorfismo $f^* : \Lambda_c(W) \rightarrow \Lambda_c(V)$. Lo máximo que podemos afirmar es que si $\omega \in \Lambda^p(W)$, entonces $\text{sop } f^*(\omega) \subset f^{-1}[\text{sop}(\omega)]$, pero esto no garantiza la compacidad del soporte de $f^*(\omega)$ aunque ω tenga soporte compacto.

En general, una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ entre dos espacios topológicos es *propia* si cuando $K \subset Y$ es compacto, se cumple que $f^{-1}[K]$ también es compacto.

Es claro que la composición de aplicaciones propias es propia, así como que si $f : V \rightarrow W$ es una aplicación diferenciable propia entre variedades, su retracción sí que transforma formas con soporte compacto en formas con soporte compacto, es decir, que se restringe a un homomorfismo $f^* : \Lambda_c(W) \rightarrow \Lambda_c(V)$, el cual induce a su vez un homomorfismo $f^* : H_c^*(W) \rightarrow H_c^*(V)$ de espacios graduados.

Así pues, Λ_c^* y H_c^* (al igual que cada Λ_c^p y H_c^p) son funtores definidos en la categoría las variedades diferenciales con los morfismos dados por las aplicaciones diferenciables propias. Puesto que los difeomorfismos son obviamente aplicaciones propias, esto basta para asegurar que Λ_c^p y H_c^p se conservan por difeomorfismos.

Esto no nos ayuda en mucho pues, por ejemplo, si $U \subset V$ es un abierto en una variedad diferencial, la inclusión $i : U \rightarrow V$ no es propia o, equivalentemente, la restricción a U de una forma diferencial en V con soporte compacto no tiene por qué tener soporte compacto, por lo que no está definida $i^* : \Lambda_c(V) \rightarrow \Lambda_c(U)$. En cambio, sucede que podemos definir de forma natural un homomorfismo en sentido inverso:

Definición 11.12 Si $U \subset V$ es un abierto en una variedad diferencial, definimos $i_*^p : \Lambda_c^p(U) \rightarrow \Lambda_c^p(V)$ como la aplicación que a cada $\omega \in \Lambda^p(U)$ la extiende de modo que, para todo $x \in V \setminus U$, la forma $i_*^p(\omega)|_x \in T_x(V)$ sea la forma nula.

Si K es el soporte de ω , entonces tenemos que $i_*^p(\omega)|_U = \omega$ así como que $i_*^p(\omega)|_{V \setminus K} = 0$, por lo que $i_*^p(\omega)$ se restringe a formas diferenciales en dos abiertos que cubren V , lo que prueba que es ciertamente una forma diferencial.

Además, las aplicaciones lineales i_*^p conmutan con la diferencial, por lo que determinan un homomorfismo de complejos $i_* : \Lambda_c(U) \rightarrow \Lambda_c(V)$, que a su vez induce homomorfismos $\bar{i}_* : H_c^*(U) \rightarrow H_c^*(V)$.

Esto significa que podemos considerar a Λ_c^* y H_c^* como funtores covariantes en la categoría de las variedades diferenciales tomando como únicos morfismos las inclusiones entre abiertos.

Esto nos permite probar un resultado análogo a 11.6:

Teorema 11.13 Si una variedad $V = \bigcup_{k=0}^{\infty} V_k$ se descompone en unión de abiertos disjuntos, las inclusiones $i_k : V_k \rightarrow V$ inducen un isomorfismo

$$\bigoplus_k \bar{i}_{k*} : \bigoplus_{k=0}^{\infty} H_c^p(V_k) \rightarrow H_c^p(V).$$

DEMOSTRACIÓN: Notemos que cada V_k es también cerrado, luego la restricción a V_k de una forma con soporte compacto tiene también soporte compacto. Es claro que tenemos un isomorfismo de complejos:

$$\bigoplus_k i_{k*} : \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda_c^p(V_k) \rightarrow \Lambda_c^p(V).$$

La clave está en que si una forma diferencial tiene soporte compacto, éste sólo puede cortar a un número finito de los abiertos V_k , luego se descompone en suma de un número finito de formas con soporte en un cierto V_k . A su vez, este isomorfismo induce claramente el isomorfismo del enunciado. ■

También podemos construir sucesiones de Mayer-Vietoris:

Teorema 11.14 (La sucesión de Mayer-Vietoris) Sea V una variedad diferencial y sean U_1, U_2 abiertos en V tales que $V = U_1 \cup U_2$. Sean

$$i : \Lambda_c(U_1 \cap U_2) \rightarrow \Lambda_c(U_1) \oplus \Lambda_c(U_2), \quad j : \Lambda_c(U_1) \oplus \Lambda_c(U_2) \rightarrow \Lambda_c(V)$$

los homomorfismos dados por $i(\omega) = (\omega, \omega)$, $j(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 - \omega_2$ (aquí identificamos cada forma con sus extensiones). Entonces existen homomorfismos naturales $\Delta_p : H_c^p(V) \rightarrow H_c^{p+1}(U_1 \cap U_2)$ que hacen exacta la sucesión

$$\cdots \rightarrow H_c^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\bar{i}} H_c^p(U_1) \oplus H_c^p(U_2) \xrightarrow{\bar{j}} H_c^p(V) \xrightarrow{\Delta_p} H_c^{p+1}(U_1 \cap U_2) \rightarrow \cdots$$

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que los homomorfismos del enunciado forman una sucesión exacta de complejos inversos

$$0 \rightarrow \Lambda_c(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{i} \Lambda_c(U_1) \oplus \Lambda_c(U_2) \xrightarrow{j} \Lambda_c(V) \rightarrow 0$$

a la que podemos aplicar el teorema 4.10. ■

El teorema siguiente muestra que la cohomología con soportes compactos difiere de la usual:

Teorema 11.15 Se cumple

$$H_c^k(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{si } k \neq n. \end{cases}$$

Para probar este hecho demostraremos antes un resultado auxiliar. Dada una variedad V y un punto $x \in V$, definimos $I_x^k(V)$ como el conjunto de las k -formas diferenciales en V que se anulan en un entorno de x . Es claro que los espacios $I_x^k(V)$ determinan un subcomplejo $I_x(V)$ de $\Lambda(V)$, por lo que podemos considerar el complejo cociente $G_x(V)$, a cuyos elementos (de dimensión k) llamaremos *gérmenes* de k -formas diferenciales alrededor de x .

Teorema 11.16 Si V es una variedad diferencial y $x \in V$, se cumple que

$$H^k(G_x(V)) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $\pi : \Lambda(V) \rightarrow G_x(V)$ la proyección canónica. Un cociclo de $G_x^0(V)$ es de la forma $\pi(f)$, con $f \in \Lambda^0(V)$, tal que $d\pi(f) = \pi(df) = 0$. Esto significa que $df \in I_x^0(V)$, es decir, que df se anula en un entorno de x . Es claro entonces que f es constante en un entorno de x , luego $\pi(f) = \pi(f(x))$. Así pues, $H^0(G_x(V))$ está formado por las clases de las funciones constantes y es, por consiguiente, isomorfo a \mathbb{R} .

Tomemos ahora un cociclo $\pi(\omega) \in G_x^k(V)$, con $k \geq 1$. Como antes, $d\omega$ se anula en un entorno U de x , que podemos tomar contractible. Entonces existe $\eta \in \Lambda^{k-1}(U)$ tal que $\omega|_U = d\eta$. Multiplicando η por una función que valga 1 en un entorno de x y se anule fuera de U obtenemos una forma en $\Lambda^{k-1}(V)$ (a la que seguiremos llamando η) que coincide con η en un entorno de p , luego $d\eta = \omega$ en un entorno de x . De este modo $\pi(\omega) = \pi(d\eta) = d(\pi(\eta))$, lo que prueba que $H^k(G_p(V)) = 0$. ■

DEMOSTRACIÓN (de 11.15): Identificamos a \mathbb{R}^n con $S^n \setminus \{x\}$, donde $x \in S^n$ es cualquier punto, y así podemos identificar $\Lambda_c(\mathbb{R}^n) = I_x(S^n)$. Basta considerar la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \Lambda_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda(S^n) \rightarrow G_x(S^n) \rightarrow 0.$$

Es fácil comprobar directamente que $H_c^0(\mathbb{R}^n) = 0$ (está formado por las funciones constantes de soporte compacto, es decir, sólo por la función nula), con lo que tenemos las sucesiones exactas

$$0 \rightarrow H^0(S^n) \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H_c^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^1(S^n) \rightarrow 0$$

y

$$0 \rightarrow H_c^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^k(S^n) \rightarrow 0, \quad \text{para } k \geq 2.$$

La cohomología de De Rham de las esferas está calculada en [GD 5.45], en particular $H^0(S^n) \cong \mathbb{R}$ y un monomorfismo de \mathbb{R} en \mathbb{R} es un isomorfismo, luego la primera sucesión implica que la segunda también se cumple para $k = 1$. De aquí se sigue 11.15. ■

A partir de aquí vamos a aprovechar el hecho de que las formas con soporte compacto se pueden integrar. Si particularizamos el teorema de Stokes [GD 5.11] al caso de una variedad diferencial sin frontera orientable V de dimensión n , vemos que si $\omega \in \Lambda_c^{n-1}(V)$, entonces

$$\int_V d\omega = 0.$$

Por consiguiente la integración en V define una aplicación lineal sobre $H_c^n(V)$:

Definición 11.17 Sea V una variedad orientable de dimensión n . Representaremos por

$$\int_V^* : H_c^n(V) \longrightarrow \mathbb{R}$$

a la aplicación lineal inducida por la integración sobre V (respecto de una orientación de V prefijada).

Es fácil probar que existen formas diferenciales con soporte compacto e integral no nula (basta definir una en una bola abierta de \mathbb{R}^n , transportarla al dominio de una carta de V y extenderla como la forma nula fuera de dicho dominio). Por lo tanto, la aplicación lineal que acabamos de definir no es nula, y por lo tanto es un epimorfismo.

A su vez podemos definir el *producto de Poincaré* en V (siempre respecto a una orientación prefijada) como la aplicación bilineal

$$H^k(V) \times H_c^{n-k}(V) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\langle \omega, \eta \rangle = \int_V^* \omega \wedge \eta$$

Observemos que $\omega \wedge \eta \in H_c^n(V)$, por lo que la integral está bien definida. Si convenimos que $\langle \omega, \eta \rangle = 0$ cuando las dimensiones de ω y η no suman n , podemos considerar el producto definido en $H(V) \times H_c(V)$. Obviamente se cumple que $\langle \omega \wedge \eta, \rho \rangle = \langle \omega, \eta \wedge \rho \rangle$.

El producto de Poincaré define aplicaciones lineales

$$D_V^k : H^k(V) \longrightarrow H_c^{n-k}(V)^*$$

mediante $D_V^k(\omega)(\eta) = \langle \omega, \eta \rangle$. A su vez, con ellos podemos formar una aplicación lineal $D_V : H^*(V) \longrightarrow H_c^*(V)^*$.

El teorema siguiente determina completamente la cohomología con soportes compactos a partir de la usual (y viceversa):

Teorema 11.18 (Teorema de dualidad de Poincaré) *Si V es una variedad diferencial orientable, entonces la aplicación $D_V : H^*(V) \longrightarrow H_c^*(V)^*$ es un isomorfismo.*

Vamos a demostrar algunos resultados previos:

A) Si $V = \mathbb{R}^n$ entonces D_V es un isomorfismo.

En efecto, si $k \neq 0$ tenemos que $H^k(\mathbb{R}^n) \cong H_c^{n-k}(\mathbb{R}^n) = 0$, luego basta probar que $D_V^0 : H^0(V) \longrightarrow H_c^n(V)^*$ es un isomorfismo. Sabemos que ambos espacios son isomorfos a \mathbb{R} , luego basta ver que $D_V^0(1) \neq 0$, pero $D_V^0(1)$ es simplemente la integral sobre V , que claramente es una aplicación lineal no nula. ■

Observemos ahora que si U es abierto en V , entonces el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H(V) & \xrightarrow{i^*} & H(U) \\ D_V \downarrow & & \downarrow D_U \\ H_c(V)^* & \xrightarrow{i_*} & H_c(U)^* \end{array} \quad (11.2)$$

(Recordemos que $i_* : H_c(U) \rightarrow H_c(V)$ es la inclusión que extiende cada k -forma de U con el valor 0 fuera de U .)

En efecto, si $\omega \in H^k(V)$, $\eta \in H_c(U)$, tenemos que

$$i_*^*(D_V(\omega))(\eta) = D_V(\omega)(i_*(\eta)) = \int_V \omega \wedge i_*(\eta) = \int_U i^*(\omega) \wedge \eta = D_U(i^*(\omega))(\eta).$$

Supongamos ahora que $V = U_1 \cup U_2$ y consideremos el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} H^k(V) & \longrightarrow & H^k(U_1) \oplus H^k(U_2) & \longrightarrow & H^k(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & H^{k+1}(V) \\ \downarrow D_V & & \downarrow D_{U_1} \oplus D_{U_2} & & \downarrow D_{U_1 \cap U_2} & & \downarrow D_V \\ H_c^{n-k}(V)^* & \longrightarrow & H_c^{n-k}(U_1)^* \oplus H_c^{n-k}(U_2)^* & \longrightarrow & H_c^{n-k}(U_1 \cap U_2)^* & \longrightarrow & H_c^{n-k-1}(V)^* \end{array}$$

La fila superior es la sucesión de Mayer-Vietoris, mientras que la inferior es la dualización de la sucesión de Mayer-Vietoris para la cohomología con soportes compactos.

Los dos primeros cuadrados conmutan por la conmutatividad de (11.2). Vamos a probar que el tercero conmuta salvo signo.

Tomamos clases $[\omega] \in H^k(U_1 \cap U_2)$ y $[\eta] \in H_c^{n-k-1}(V)$. Hemos de probar que $\langle \Delta([\omega]), [\eta] \rangle = \pm \langle [\omega], \Delta([\eta]) \rangle$.

Para calcular $\Delta([\omega])$ tomamos $\omega_i \in \Lambda^k(U_i)$ tales que $\omega = \omega_1|_{U_1 \cap U_2} - \omega_2|_{U_1 \cap U_2}$ y $\tilde{\omega} \in \Lambda^{k+1}(V)$ tal que $\tilde{\omega}|_{U_i} = d\omega_i$. Entonces $\Delta([\omega]) = [\tilde{\omega}]$.

Similarmente, tomamos $\eta_i \in \Lambda_c^{n-k}(U_i)$ tales que $\eta = \eta_1 - \eta_2$, de modo que $\Delta([\eta]) = [d\eta_1] = [d\eta_2]$. Calculamos:

$$\langle \Delta([\omega]), [\eta] \rangle = \int_V \tilde{\omega} \wedge \eta = \int_V \tilde{\omega} \wedge \eta_1 - \int_V \tilde{\omega} \wedge \eta_2 = \int_{U_1} d\omega_1 \wedge \eta_1 - \int_{U_2} d\omega_2 \wedge \eta_2.$$

Como $d(\omega_i \wedge \eta_i) = d\omega_i \wedge \eta_i + (-1)^k \omega_i \wedge d\eta_i$ y la integral de las formas exactas es nula, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \Delta([\omega]), [\eta] \rangle &= (-1)^{k+1} \int_{U_1} \omega_1 \wedge d\eta_1 - (-1)^{k+1} \int_{U_2} \omega_2 \wedge d\eta_2 \\ &= (-1)^{k+1} \int_{U_1 \cap U_2} (\omega_1 - \omega_2) \wedge d\eta_1 = (-1)^{k+1} \int_{U_1 \cap U_2} \omega \wedge d\eta_1 = \langle [\omega], \Delta([\eta]) \rangle. \end{aligned}$$

El teorema 4.12 implica ahora lo siguiente:

B) Si U_1 y U_2 son abiertos en V tales que D_{U_1} y D_{U_2} son isomorfismos, entonces $D_{U_1 \cap U_2}$ es un isomorfismo si y sólo si lo es $D_{U_1 \cup U_2}$.

A continuación probamos que

C) Si $V = \bigcup_i U_i$ es una unión numerable de abiertos disjuntos y cada D_{U_i} es un isomorfismo, también lo es D_V .

En efecto, sabemos que las inclusiones inducen isomorfismos

$$H(V) \cong \prod_i H(U_i), \quad H_c(V) \cong \bigoplus_i H_c(U_i),$$

el segundo de los cuales induce a su vez un isomorfismo

$$H_c(V)^* \cong \prod_i H_c(U_i)^*.$$

Una comprobación rutinaria muestra que, a través de estos isomorfismos, D_V se corresponde con el producto de los isomorfismos D_{U_i} , luego también es un isomorfismo. ■

Ahora conviene aislar un hecho general:

Teorema 11.19 Si \mathcal{B} es una base de una variedad diferencial V , entonces todo abierto U de V se expresa como $U = U_1 \cup U_2$, donde U_1 , U_2 y $U_1 \cap U_2$ son uniones disjuntas de uniones finitas de abiertos de \mathcal{B} .

DEMOSTRACIÓN: Podemos suponer que $U = V$. Sea $\{G_n\}_n$ una familia de abiertos según el teorema [GD 1.18]. Cubrimos \bar{G}_0 por una unión finita H_0 de abiertos de \mathcal{B} con clausura contenida en G_1 ; cubrimos $\bar{G}_1 \setminus G_0$ por una unión finita H_1 de abiertos de \mathcal{B} con clausura contenida en G_2 ; cubrimos $\bar{G}_2 \setminus G_1$ con una unión finita H_2 de abiertos de \mathcal{B} con clausura contenida en $G_3 \setminus \bar{H}_0$ y, en general, cubrimos $\bar{G}_n \setminus G_{n-1}$ por una unión finita H_n de abiertos de \mathcal{B} con $\bar{H}_n \subset G_{n+1} \setminus \bar{H}_{n-2}$. Basta tomar

$$U_1 = \bigcup_n H_{2n}, \quad U_2 = \bigcup_n H_{2n+1}. \quad \blacksquare$$

DEMOSTRACIÓN (de 11.18): La propiedad B) precedente implica que si D_U es un isomorfismo para los abiertos de una base \mathcal{B} de V cerrada para intersecciones finitas entonces lo es para las uniones finitas de abiertos de \mathcal{B} (se prueba por inducción sobre el número de abiertos de la unión). Por el teorema anterior y la propiedad C) concluimos que D_U es un isomorfismo para todo abierto de V .

En particular, por A) tenemos que D_U es un isomorfismo cuando U es un cubo abierto en \mathbb{R}^n . Puesto que los cubos son una base de \mathbb{R}^n cerrada para intersecciones finitas, según lo que acabamos de indicar D_U es un isomorfismo para todo abierto de \mathbb{R}^n .

Ahora, si V es una variedad diferencial arbitraria (orientable), los abiertos de U difeomorfos a abiertos de \mathbb{R}^n son una base de V cerrada para intersecciones finitas, y D_U es un isomorfismo para cada uno de estos abiertos, luego D_U es un isomorfismo para todo abierto de V , en particular para V . ■

Algunas consecuencias Si V es una variedad compacta y orientable de dimensión n , tenemos isomorfismos

$$D_V^k : H^k(V) \longrightarrow H^{n-k}(V)^*.$$

Por lo tanto el espacio vectorial $H^*(V)$ es isomorfo a su dual, lo cual implica que tiene dimensión finita, es decir, que todos los grupos de cohomología $H^k(V)$ son espacios vectoriales de dimensión finita. Si V no es orientable, su variedad de orientaciones W sí lo es, y es fácil ver que es compacta, luego $H(W)$ tiene dimensión finita. Según el teorema 11.10, el espacio $H(V)$ es isomorfo al subespacio $H(W)_+$ de $H(W)$, luego también tiene dimensión finita.

Por otro lado, si V es una variedad diferencial n -dimensional conexa y orientable, entonces $H_c^n(V) \cong \mathbb{R}$. De hecho, la integración sobre V nos proporciona un isomorfismo canónico

$$\int_V^* : H_c^n(V) \longrightarrow \mathbb{R}$$

(es un isomorfismo porque obviamente no es la aplicación nula).

La clase O_V constituida por las n -formas de integral 1 se llama *clase de la orientación* de V , y depende únicamente de la orientación, en el sentido de que la clase correspondiente a la orientación opuesta de V es $-O_V$. De este modo, tenemos la representación $H_c^n(V) = \{\lambda O_V \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Por ejemplo, es claro que, en un producto de variedades, la orientación producto viene dada por $O_{V_1 \times V_2} = O_{V_1} \times O_{V_2} = \pi_1^*(O_{V_1}) \wedge \pi_2^*(O_{V_2})$.

Si V es una variedad de Riemann compacta orientable, otra clase destacada de $H^n(V)$ es la *clase del volumen* de V , es decir, la clase del elemento de volumen, a la que representaremos por dm_V , donde la d en esta notación no guarda relación alguna con la diferencial exterior. ■

11.3 Homología con coeficientes en un módulo

En la sección siguiente definiremos una cohomología singular análoga a la cohomología de De Rham, pero que puede construirse en cualquier espacio topológico. Sin embargo, antes conviene generalizar ligeramente la homología singular que ya conocemos para situarla al mismo nivel de generalidad que vamos a manejar al estudiar la cohomología.

En el capítulo IX hemos definido la homología singular de un par de espacios topológicos (X, U) con coeficientes en un anillo unitario arbitrario \mathbb{A} (por simplicidad vamos a restringirnos al caso en que \mathbb{A} es también conmutativo). Es fácil relacionar la construcción de la homología con coeficientes en \mathbb{A} y la construcción de la homología con coeficientes en \mathbb{Z} . Basta observar que

$$C_p^{\mathbb{A}}(X, U) \cong \bigoplus_{\sigma} \mathbb{A}\sigma \cong \bigoplus_{\sigma} \langle \sigma \rangle_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{A} \cong C_p(X, U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{A},$$

donde σ recorre los p -símplices singulares en X no contenidos en U . El isomorfismo hace corresponder $a\sigma$ con $\sigma \otimes a$. Esto vale igual para $p = -1$ con la homología reducida.

Estos isomorfismos de módulos conmutan con los operadores frontera, por lo que de hecho determinan un isomorfismo de complejos de \mathbb{A} -módulos

$$C^{\mathbb{A}}(X, U) \cong C(X, U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}.$$

(Estamos adoptando el convenio de que el anillo de coeficientes es \mathbb{Z} cuando no se especifica.)

Esto nos permite definir, más en general, los *grupos de homología singular* del par (X, U) con coeficientes en un \mathbb{A} -módulo N como la homología $H_p^N(X, U)$ del complejo de \mathbb{A} -módulos $C(X, U) \otimes_{\mathbb{Z}} N$.

Toda aplicación continua $f : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ entre pares de espacios topológicos induce un homomorfismo de complejos formado por los homomorfismos

$$f_p^{\#} = f_p^{\#} \otimes 1 : C_p(X, U) \otimes_{\mathbb{Z}} N \rightarrow C_p(Y, V) \otimes_{\mathbb{Z}} N,$$

el cual a su vez induce homomorfismos $f_* : H_p^N(X, U) \rightarrow H_p^N(Y, V)$.

Esto convierte a H_p^N en un funtor covariante de la categoría de los espacios topológicos en la categoría de los \mathbb{A} -módulos.

Cuando $N = \mathbb{A}$ es un anillo, recuperamos los grupos de cohomología con coeficientes en \mathbb{A} que ya teníamos definidos y que hemos venido estudiando hasta ahora.

Nota Con esto hemos relacionado *la construcción* de los grupos de homología respecto de anillos —y ahora módulos— distintos, lo cual no es lo mismo que relacionar los grupos de homología obtenidos con coeficientes distintos.

El teorema 12.1 nos dará la relación exacta entre la homología con coeficientes en \mathbb{Z} y en un módulo de coeficientes arbitrario. De momento, el teorema 5.1 nos asegura que si el funtor $- \otimes_{\mathbb{Z}} N$ es exacto, es decir, cuando N es un \mathbb{Z} -módulo plano, se cumple que

$$H_p^N(X, U) \cong H_p(X, U) \otimes_{\mathbb{Z}} N.$$

Según 5.33, esto sucede si y sólo si N es un \mathbb{Z} -módulo libre de torsión. Por ejemplo, si N es un anillo de característica 0. ■

Las demostraciones dadas en el capítulo IX de los resultados básicos sobre homología singular con coeficientes en un anillo se generalizan fácilmente al caso de un módulo de coeficientes arbitrario. En efecto:

Homología completa y reducida La homología completa y la reducida coinciden salvo a lo sumo cuando $U = \emptyset$ y $p = 0$. La prueba de este hecho dada en 9.10 se completa pasando de que $C_{-1}(X, U) = 0$ a que $C_{-1}(X, U) \otimes_{\mathbb{Z}} N = 0$, y a partir de ahí el argumento continúa igualmente. En la segunda parte de la prueba tenemos que $Z_{-1}^N(X) = C_{-1}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} N$ porque $\partial_{-1} \otimes 1 = 0$, etc. Esto hace que $H_p^N(X; U) = 0$ para $p = -1$ luego también para todo $p < 0$. ■

Homología de un punto Según se ve en la prueba de 9.14, si p es impar entonces $\partial_p = 0$, mientras que si p es par entonces $\partial_p : C_p(X) \rightarrow C_{p-1}(X)$ es un isomorfismo. Lo mismo vale entonces para $\partial_p \otimes 1$, y la prueba vale igualmente. De hecho, el argumento vale también si $p = 0$ para la homología reducida. Para la completa tenemos que $\partial_0 \otimes 1 = 0$, luego

$$Z_0^N(X) = C_0(X) \otimes_{\mathbb{Z}} N \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} N \cong N$$

y $F_0^N(X) = 0$, luego $H_0^N(X) \cong N$. ■

Homotopía Si $f, g : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ son aplicaciones continuas homotópicas, sabemos que existe una homotopía $\Delta : C(X, U) \rightarrow C(Y, V)$ entre $f_{\mathbb{Z}}^{\#}$ y $g_{\mathbb{Z}}^{\#}$, y es claro que $\Delta \otimes 1$ es una homotopía entre $f_N^{\#}$ y $g_N^{\#}$, luego $f_* = g_*$. ■

La sucesión exacta de homología Si $V \subset U \subset X$ son espacios topológicos, el teorema 9.19 nos da sucesiones exactas

$$0 \rightarrow C_p(U, V) \xrightarrow{i^{\#}} C_p(X, V) \xrightarrow{j^{\#}} C_p(X, U) \rightarrow 0.$$

entre \mathbb{Z} -módulos libres (cada uno tiene por base el conjunto de los p -símplices que no están contenidos en el segundo espacio del par). El teorema 5.8 nos da que la sucesión se escinde, y 5.29 implica entonces que también es exacta la sucesión

$$0 \rightarrow C_p(U, V) \otimes_{\mathbb{Z}} N \xrightarrow{i^{\#} \otimes 1} C_p(X, V) \otimes_{\mathbb{Z}} N \xrightarrow{j^{\#} \otimes 1} C_p(X, U) \otimes_{\mathbb{Z}} N \rightarrow 0.$$

A partir de aquí la prueba del teorema 9.20 vale igualmente, así como la de los demás teoremas de su sección. ■

El teorema de escisión Bajo las hipótesis del teorema de escisión, la inclusión $i : (X \setminus V, U \setminus V) \rightarrow (X, U)$ induce el homomorfismo de complejos $i^{\#} : C(X \setminus V, U \setminus V) \rightarrow C(X, U)$ que a su vez induce isomorfismos entre los grupos de homología. Por el teorema 4.18, existe un homomorfismo $f : C(X, U) \rightarrow C(X \setminus V, U \setminus V)$ que induce el inverso de i_* . Por consiguiente, $f \otimes 1$ induce el inverso del homomorfismo inducido por $i^{\#} \otimes 1$. De aquí se sigue a su vez la versión general del teorema 9.38 sobre tríadas exactas. ■

La sucesión de Mayer-Vietoris La prueba del teorema de Mayer-Vietoris se generaliza sin dificultad sin más que observar que la sucesión exacta de la que parte la demostración está formada por complejos de \mathbb{Z} -módulos libres (el tercero es $C(U_1 \cup U_2, V_1 \cup V_2)$, cuyo término p -ésimo tiene por base los p -símplices contenidos en $U_1 \cup U_2$ pero no en $V_2 \cup V_2$), lo que permite aplicar $- \otimes_{\mathbb{Z}} N$ sin perder la exactitud, y el resto de la prueba vale igualmente. ■

Es posible generalizar las pruebas de otros teoremas, como 9.12 y 9.13, pero no merece la pena entrar en ello, pues las generalizaciones serán inmediatas más adelante, a partir del teorema 12.1.

11.4 Cohomología singular

Del mismo modo que la homología singular de un par de espacios topológicos (X, U) con coeficientes en un \mathbb{A} -módulo N se obtiene aplicando el funtor $-\otimes_{\mathbb{Z}} N$ al complejo de cadenas singulares de (X, U) con coeficientes en \mathbb{Z} y calculando la homología del complejo resultante, la cohomología singular se obtiene por el mismo procedimiento, pero usando el funtor $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, N)$. La única diferencia es que, como se trata de un funtor contravariante, el complejo directo de partida se transforma en un complejo inverso.

Más detalladamente, si (X, U) es un par de espacios topológicos, definimos los grupos de *cohomología singular* de (X, U) con coeficientes en un \mathbb{A} -módulo N como los grupos de cohomología del complejo inverso $C^*(X, U) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C(X, U), N)$ formado por los \mathbb{A} -módulos

$$C_N^p(X, U) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_p(X, U), N),$$

con el operador cofrontera $d_p = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\partial_{p+1}, N)$:

$$\dots \longrightarrow C^2(X, U) \xrightarrow{d_2} C_N^1(X, U) \xrightarrow{d_1} C_N^0(X, U) \xrightarrow{d_0} 0$$

(Para la homología reducida hay un término adicional $C_N^{-1}(X, U) \cong N$.) Conviene tener presente la definición explícita del operador cofrontera:

$$df(c) = f(\partial c), \quad f \in C_N^p(X, U), \quad c \in C_{p+1}^N(X, U).$$

A los elementos de $C_N^p(X, U)$ los llamaremos *cocadenas singulares*. Usaremos la notación $Z_N^p(X, U)$, $F_N^p(X, U)$, $H_N^p(X, U)$ para los correspondientes módulos de cociclos, cofronteras y cohomología singular. La cohomología será *completa* o *reducida* según si partimos del complejo de cadenas correspondiente a la homología completa o reducida.

Si $f : (X, U) \longrightarrow (Y, V)$ es una aplicación continua entre pares de espacios topológicos, y N es un \mathbb{A} -módulo, entonces la aplicación

$$f_{\sharp}^p = (f_p^{\sharp})^t : C_N^p(Y, V) \longrightarrow C_N^p(X, U)$$

es un homomorfismo de complejos inversos que induce a su vez homomorfismos

$$f^* : H_N^p(Y, V) \longrightarrow H_N^p(X, U).$$

Esto convierte a H_N^p en un funtor contravariante de la categoría de los espacios vectoriales en la categoría de los \mathbb{A} -módulos.

Nota Observemos que si C es un A -módulo y M en un A - \mathbb{A} -bimódulo y N es un \mathbb{A} -módulo, es pura rutina comprobar que existe un isomorfismo natural

$$\text{Hom}_{\mathbb{A}}(C \otimes_A M, N) \cong \text{Hom}_A(C, \text{Hom}_{\mathbb{A}}(M, N)),$$

y lo mismo vale si sustituimos C por un complejo \mathcal{C} de A -módulos.

Esto significa que extender a M los coeficientes de un complejo de A -módulos \mathcal{C} y luego pasar al complejo inverso respecto de N es equivalente a calcular el complejo inverso del complejo original respecto de un módulo de coeficientes adecuado, concretamente $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(M, N)$. En particular:

$$\text{Hom}_{\mathbb{A}}(C \otimes_A \mathbb{A}, N) \cong \text{Hom}_A(C, N),$$

de modo que los complejos inversos de \mathcal{C} y $\mathcal{C} \otimes_A \mathbb{A}$ son naturalmente isomorfos, con lo que la extensión de coeficientes resulta irrelevante.

En el caso concreto de la cohomología singular tenemos que

$$\text{Hom}_{\mathbb{A}}(C_p^{\mathbb{A}}(X, U), N) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_p(X, U), N),$$

por lo que no estamos perdiendo generalidad por considerar únicamente el functor $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}$. No obstante, si N es un \mathbb{A} -módulo, a veces resulta más natural representar el módulo $C_N^p(X, U)$ como $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(C_p^{\mathbb{A}}(X, U), N)$ en lugar de como $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_p(X, U), N)$. ■

Las cocadenas relativas admiten una interpretación más simple que la definición que hemos dado. Para verlo consideramos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow C_p^{\mathbb{A}}(U) \xrightarrow{i} C_p^{\mathbb{A}}(X) \xrightarrow{j} C_p^{\mathbb{A}}(X, U) \longrightarrow 0,$$

que se escinde porque $C_p^{\mathbb{A}}(X, U)$ es un \mathbb{A} -módulo libre (teorema 5.8). Por consiguiente (teorema 5.7), tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow C_N^p(X, U) \xrightarrow{j^t} C_N^p(X) \xrightarrow{i^t} C_N^p(U) \longrightarrow 0.$$

Esto nos permite identificar a $C_N^p(X, U)$ con un submódulo de $C_N^p(X)$. Concretamente, podemos considerar que $C_N^p(X, U)$ es el submódulo formado por todas las cocadenas $\omega \in C_N^p(X)$ tales que $i^t(\omega) = 0$, es decir, que se anulan sobre los símlices contenidos en U . Puesto que j^t conmuta con el operador cofrontera, a través de esta identificación la cofrontera de $C_N^p(X, U)$ pasa a ser la restricción de la cofrontera de $C_N^p(X)$.

Los cociclos de $Z_N^p(X)$ son claramente las cocadenas que se anulan sobre $F_p^{\mathbb{A}}(X)$, luego los cociclos relativos de $Z_N^p(X, U)$ son las cocadenas que se anulan tanto sobre $C_p^{\mathbb{A}}(U)$ como sobre $F_p^{\mathbb{A}}(X)$.

Podemos definir una aplicación bilineal

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H_p^N(X, U) \times H_N^p(X, U) \longrightarrow N$$

mediante

$$\langle [c], [f] \rangle = f(c)$$

En efecto, la definición no depende de los representantes de las clases de homología y cohomología, pues si f es un cociclo $f(\partial c) = df(c) = 0$ y si c es un ciclo $df(c) = f(\partial c) = 0$.

Esto nos permite definir un homomorfismo

$$h : H_N^p(X, U) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{A}}(H_p^N(X, U), N)$$

dado por $h([f])([c]) = \langle [c], [f] \rangle$. En muchos casos se trata de un isomorfismo, pero esto no es cierto en general. La situación general nos la dará el teorema 12.9. De momento podemos considerar el teorema 5.1, según el cual, si N es un \mathbb{Z} -módulo inyectivo (por ejemplo, si es un cuerpo de característica 0, por 5.11), se cumple que

$$H_N^p(X, U) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_p(X, U), N) \cong \text{Hom}_{\mathbb{A}}(H_p^{\mathbb{A}}(X, U), N)$$

(y es fácil ver que el isomorfismo es precisamente h). Si K es un cuerpo de característica 0 y además $H_p(X, U)$ es un \mathbb{Z} -módulo finitamente generado de rango r , entonces

$$H_K^p(X, U) \cong K^r,$$

pues $H_p(X, U) \cong \mathbb{Z}^r \oplus T$, donde T es un \mathbb{Z} -módulo de torsión, y

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_p(X, U), K) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^r, K) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(T, K) = K^r,$$

pues todo homomorfismo de T en K es nulo (la imagen de un elemento de torsión debe ser un elemento de torsión y K es libre de torsión). ■

Razonamientos completamente análogos a los que hemos empleado para generalizar los resultados básicos de la homología singular al caso de coeficientes arbitrarios nos permiten ahora probar estos mismos resultados para la cohomología singular:

Teorema 11.20 *Sea X un espacio topológico y $U \subset X$. Entonces los grupos de cohomología completa $H^p(X, U)$ coinciden con los de cohomología reducida salvo a lo sumo en el caso $p = 0$, $X \neq \emptyset$, $U = \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN: Siguiendo la prueba de 9.10, si $U \neq \emptyset$ se cumple que $C_{-1}(X, U) = 0$, luego también $C_N^{-1}(X, U) = 0$, luego $H^{-1}(X, U) = 0$, para ambas cohomologías. Como $\partial_0 = 0$, también $d_{-1} = 0$, luego $H_N^1(X, U)$ es el mismo en ambas cohomologías.

Si $U = \emptyset$, para la homología reducida, para cada $f \in C_N^{-1}(X)$ se cumple que $(df)(x) = f(\partial x) = f(\cdot)$, luego $df = 0$ si y sólo si $f = 0$. Así pues, $Z_N^{-1}(X) = 0$, luego $H^{-1}(X) = 0$. ■

Teorema 11.21 *Si $U \subset X$ son espacios topológicos, entonces $H_N^0(X, U)$ para la cohomología completa es isomorfo al \mathbb{A} -módulo de las funciones $X \rightarrow N$ que son constantes en cada componente arcoconexa de X y que se anulan en U . Si $U = \emptyset$, para la cohomología reducida es el cociente de este módulo sobre el submódulo de las funciones constantes.*

DEMOSTRACIÓN: Si $f \in C_N^0(X, U)$, en principio se trata de un homomorfismo $f : C_0(X, U) \rightarrow N$, pero podemos identificarlo con su restricción a la base formada por los 0-símplices, y a su vez con una aplicación arbitraria $f : X \rightarrow N$ que se anule en U .

Tenemos que $df(\sigma) = f(\partial\sigma) = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0))$, luego $df = 0$ si y sólo si f es constante sobre las componentes arcoconexas de X . Como $F_N^0(X, U) = 0$, tenemos que $H_N^0(X, U) = Z_N^0(X, U)$ es el módulo descrito en el enunciado.

Con la homología reducida $F_N^0(X, U)$ está formado por las funciones constantes que se anulan en U . Si $U \neq \emptyset$ es $F_N^0(X, U) = 0$, pero en caso contrario $H_N^0(X, U)$ es el cociente de $Z_N^0(X, U)$ sobre el submódulo de las funciones constantes. ■

Teorema 11.22 (Cohomología de un punto) *Sea $X = \{x\}$ un espacio topológico formado por un punto. Entonces $H^p(X) = 0$ salvo si $p = 0$ con la homología completa, en cuyo caso $H_0(X) \cong N$.*

DEMOSTRACIÓN: Según se ve en la prueba de 9.14, si p es impar entonces $\partial_p = 0$, mientras que si p es par entonces $\partial_p : C_p(X) \rightarrow C_{p-1}(X)$ es un isomorfismo. Por consiguiente, la cofrontera $d_{p-1} : H_N^{p-1}(X) \rightarrow H_N^p(X)$ es el homomorfismo nulo si p es par y un isomorfismo si p es impar.

De ahí se sigue fácilmente que todos los grupos de cohomología son nulos, salvo a lo sumo cuando $p = 0$ con la cohomología completa. En ese caso, para $f \in C^0(X)$, tenemos que $df(\sigma) = f(\partial\sigma) = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)) = 0$, pues X sólo tiene un punto. Así pues, $Z_N^0(X) = C_N^0(X) \cong N$ y también $H_N^0(X) \cong N$. ■

Teorema 11.23 (Teorema de homotopía) *Si $f, g : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ son aplicaciones homotópicas, entonces $f^* = g^*$.*

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que una homotopía entre f y g induce una homotopía $\Delta : C(X, U) \rightarrow C(Y, V)$ entre $f_{\mathbb{Z}}^{\#}$ y $g_{\mathbb{Z}}^{\#}$, y es claro que $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Delta, N)$ es una homotopía entre $f_N^{\#}$ y $g_N^{\#}$, luego $f^* = g^*$. ■

Teorema 11.24 (La sucesión exacta de cohomología) *Sean $V \subset U \subset X$ espacios topológicos y sean*

$$i : (U, V) \rightarrow (X, V), \quad j : (X, V) \rightarrow (X, U)$$

*la inclusión y la identidad, respectivamente. Entonces existen homomorfismos $\delta_{*p} : H_N^p(X, U) \rightarrow H_N^{p+1}(U, V)$ que forman una sucesión exacta larga:*

$$\cdots \rightarrow H_N^p(X, U) \xrightarrow{j^{*p}} H_N^p(X, V) \xrightarrow{i^{*p}} H_N^p(U, V) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_N^{p+1}(X, U) \rightarrow \cdots$$

DEMOSTRACIÓN: El teorema 9.19 nos da sucesiones exactas

$$0 \rightarrow C_p(U, V) \xrightarrow{i^{\#}} C_p(X, V) \xrightarrow{j^{\#}} C_p(X, U) \rightarrow 0.$$

entre \mathbb{Z} -módulos libres (cada uno tiene por base el conjunto de los p -símplices que no están contenidos en el segundo espacio del par). El teorema 5.8 nos da que la sucesión se escinde, y 5.7 implica entonces que también es exacta la sucesión

$$0 \rightarrow C_N^p(X, U) \xrightarrow{j^{\#\dagger}} C_N^p(X, V) \xrightarrow{i^{\#\dagger}} C_N^p(U, V) \rightarrow 0.$$

A partir de aquí la prueba del teorema 9.20 vale igualmente, así como la de los demás teoremas de su sección. ■

Teorema 11.25 (Teorema de escisión) Sean $V \subset U \subset X$ espacios topológicos tales que $\bar{V} \subset \overset{\circ}{U}$. Entonces la inclusión

$$i : (X \setminus V, U \setminus V) \longrightarrow (X, U)$$

induce isomorfismos

$$i^* : H_N^p(X, U) \longrightarrow H_N^p(X \setminus V, U \setminus V)$$

para la homología completa.

DEMOSTRACIÓN: Por la versión del teorema de escisión para la homología singular, la inclusión $i : (X \setminus V, U \setminus V) \longrightarrow (X, U)$ induce el homomorfismo de complejos $i^\# : C(X \setminus V, U \setminus V) \longrightarrow C(X, U)$ que a su vez induce isomorfismos entre los grupos de homología. Por el teorema 4.18, existe un homomorfismo $f : C(X, U) \longrightarrow C(X \setminus V, U \setminus V)$ que induce el inverso de i_* . Por consiguiente, f^t induce el inverso del homomorfismo inducido por $i^{\#t}$, luego i^* es un isomorfismo. ■

De aquí se sigue a su vez la versión para cohomología del teorema 9.38 sobre tríadas exactas.

Teorema 11.26 (Teorema de Mayer-Vietoris) Sean dos tríadas exactas (X, U_1, U_2) y (X, V_1, V_2) tales que $V_i \subset U_i$. Sean

$$\phi_p : H_N^p(U_1 \cup U_2, V_1 \cup V_2) \longrightarrow H_N^p(U_1, V_1) \oplus H_N^p(U_2, V_2),$$

$$\psi_p : H_N^p(U_1, V_1) \oplus H_N^p(U_2, V_2) \longrightarrow H_N^p(U_1 \cap U_2, V_1 \cap V_2)$$

los homomorfismos dados por

$$\phi_p(\omega_1, \omega_2) = (j_1^*(\omega), j_2^*(\omega)), \quad \psi_p(\omega) = i_1^*(\omega_1) - i_2^*(\omega_2),$$

donde las aplicaciones i^* , j^* son las inducidas por las inclusiones correspondientes. Entonces existen homomorfismos

$$\Delta_p : H_N^p(U_1 \cap U_2, V_1 \cap V_2) \longrightarrow H_N^{p+1}(U_1 \cup U_2, V_1 \cup V_2)$$

tales que la sucesión siguiente es exacta:

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow H_N^{p-1}(U_1 \cap U_2, V_1 \cap V_2) \xrightarrow{\Delta} H_N^p(U_1 \cup U_2, V_1 \cup V_2) \\ &\xrightarrow{\phi} H_N^p(U_1, V_1) \oplus H_N^p(U_2, V_2) \xrightarrow{\psi} H_N^p(U_1 \cap U_2, V_1 \cap V_2) \xrightarrow{\Delta} \dots \end{aligned}$$

Esto se prueba con el mismo argumento que hemos empleado para generalizar la sucesión de Mayer-Vietoris a la homología con coeficientes en un módulo.

Cocadenas subordinadas a un cubrimiento También se cumple la versión correspondiente del teorema 9.41. Si X es un espacio topológico y \mathcal{U} es un cubrimiento abierto, definimos $C_N^p(X; \mathcal{U}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_p(X; \mathcal{U}), N)$ que, para un \mathbb{A} -módulo N , puede identificarse con $\text{Hom}_{\mathbb{A}}(C_p^{\mathbb{A}}(X; \mathcal{U}), N)$. Representaremos por $H_N^p(X; \mathcal{U})$ a los grupos de cohomología de este complejo.

Teorema 11.27 *Sea X un espacio topológico y \mathcal{U} un cubrimiento abierto de X . Entonces las restricciones $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_p(X), N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_p(X; \mathcal{U}), N)$ inducen isomorfismos $H_N^p(X) \rightarrow H_N^p(X; \mathcal{U})$ entre los grupos de cohomología.*

DEMOSTRACIÓN: Basta tener en cuenta que en la prueba de 9.41 se construye un homomorfismo de complejos $\Phi : C_p(X) \rightarrow C_p(X; \mathcal{U})$ tal que, si $i : C_p(X; \mathcal{U}) \rightarrow C_p(X)$ es la inclusión, entonces $i \circ \Phi$ es la identidad y $\phi \circ i$ es homotópica a la identidad. Al aplicar el funtor $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, N)$ tenemos que i se corresponde con la restricción y concluimos que tiene una inversa homotópica, lo que nos da la conclusión. ■

La versión para la cohomología singular del teorema 9.12 es ligeramente distinta:

Teorema 11.28 *Sea $X = \bigcup_k X_k$ un espacio topológico descompuesto en una unión disjunta de subespacios tales que cada uno de ellos sea unión de componentes arcoconexas de X . Sea $U \subset X$ y sea $U_k = U \cap X_k$. Sean*

$$i_k : (X_k, U_k) \rightarrow (X, U)$$

las inclusiones. Entonces

$$\prod_k i_k^* : H_N^p(X, U) \rightarrow \prod_k H_N^p(X_k, U_k)$$

es un isomorfismo de módulos para la cohomología completa.

DEMOSTRACIÓN: En la prueba de 9.12 se ve que

$$i_p = \bigoplus_k i_k^{\#} : \bigoplus_k C_p(X_k, U_k) \rightarrow C_p(X, U)$$

es un isomorfismo. Aplicando (5.1) obtenemos que

$$C^p(X, U) \cong \prod_k \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_p(X_k, U_k), N).$$

Concretamente, cada $\omega \in C^p(X, U)$ se corresponde con sus restricciones a cada módulo $C_p(X_k, U_k)$. Los productos de la derecha constituyen un complejo inverso si consideramos como cofrontera el producto del operador cofrontera de cada factor. Los isomorfismos obtenidos determinan entonces un isomorfismo de complejos, de modo que

$$H_N^p(X, U) \cong H^p(\prod_k \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C(X_k, U_k), N)) \cong \prod_k H_N^p(X_k, U_k).$$

El primer isomorfismo hace corresponder a cada clase $[\omega] \in H_N^p(X, U)$ la clase del producto de las restricciones de ω a cada $C_p(X_k, U_k)$, mientras que el segundo lo pasa al producto de las clases de cohomología de las restricciones. Es fácil ver que se trata del isomorfismo indicado en el enunciado. ■

Cohomología singular diferenciable En 9.42 hemos visto que si V es una variedad diferencial y $U \subset V$ es abierto, la inclusión $i : C^\infty(V, U) \rightarrow C(V, U)$ induce isomorfismos entre los grupos de homología singular y los grupos de homología singular diferenciable. Esta inclusión induce una aplicación dual $i^* : C_N^*(V, U) \rightarrow C_N^{\infty*}(V, U)$ entre los complejos inversos duales, la cual induce también isomorfismos entre los grupos de cohomología:

$$H_N^p(V, U) \rightarrow H_N^{\infty p}(V, U).$$

(pues su inversa es la aplicación dual de la inversa homotópica de i). Tenemos así la *cohomología singular diferenciable* de V . Explícitamente, el isomorfismo entre $H_N^p(V, U)$ y $H_N^{\infty p}(V, U)$ asigna a la clase del cociclo ω la clase de su restricción a $C^{\infty p}(V)$. ■

11.5 La cohomología de Alexander-Spanier

En la sección anterior hemos construido la cohomología singular de un espacio topológico X a partir de su complejo de cadenas singulares. Sin embargo, sucede que es posible construir una cohomología con propiedades muy similares a las de la cohomología singular (y veremos que ambas son equivalentes sobre variedades topológicas) por un procedimiento mucho más simple, que no requiere construir una homología previa.

La idea principal es sustituir un p -símplice en X por el conjunto de sus $p + 1$ vértices. Si pensamos que $\sigma = (x_0, \dots, x_p) \in X^{p+1}$ representa un p -símplice, entonces su “cara” i -ésima es $\sigma^i = (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p)$, donde el circunflejo indica que hemos suprimido la componente i -ésima.

Si \mathbb{A} es un anillo y N es un \mathbb{A} -módulo, definimos $A_N^p(X)$ como el conjunto de todas las aplicaciones de X^{p+1} en N , que es un \mathbb{A} -módulo con las operaciones definidas puntualmente. El operador cofrontera $d_p : A_N^p(X) \rightarrow A_N^{p+1}(X)$ se define mediante

$$(d_p f)(\sigma) = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i f(\sigma^i).$$

Una comprobación sencilla muestra que $d_p \circ d_{p+1} = 0$, por lo que tenemos un complejo inverso de \mathbb{A} -módulos $A_N(X)$:

$$0 \rightarrow A_N^0(X) \xrightarrow{d_0} A_N^1(X) \xrightarrow{d_1} A_N^2(X) \rightarrow \dots$$

Como en el caso de la cohomología singular, si $X \neq \emptyset$, podemos definir una variante reducida llamando $A_N^{-1}(X) = N$ y extendiendo el complejo a

$$0 \rightarrow A_N^{-1}(X) \xrightarrow{d_{-1}} A_N^0(X) \xrightarrow{d_0} A_N^1(X) \xrightarrow{d_1} A_N^2(X) \rightarrow \dots$$

donde $d_{-1}(n)$ es la función constante igual a n . (Notemos que se cumple también que $d_{-1} \circ d_0 = 0$.)

La cohomología que pretendemos definir no es la cohomología de estos complejos, pues sucede que es trivial:

Teorema 11.29 *La sucesión*

$$0 \longrightarrow A_N^{-1}(X) \xrightarrow{d_{-1}} A_N^0(X) \xrightarrow{d_0} A_N^1(X) \xrightarrow{d_1} A_N^2(X) \longrightarrow \dots$$

es exacta.

DEMOSTRACIÓN: La exactitud en A^{-1} es inmediata, pues d_{-1} es claramente inyectiva. La exactitud en A^0 se debe a que si $f \in A_N^0(X)$ cumple que $df = 0$, entonces, para $x, y \in X$, tenemos que $0 = df(x, y) = f(y) - f(x)$, luego f es constante. Por último, para probar la exactitud en $A_N^p(X)$ (para $p \geq 1$) tomamos $f \in A_N^p(X)$ tal que $df = 0$ y fijamos un $x_0 \in X$. Entonces, para cada $\tau = (a_0, \dots, a_p) \in X^{p+1}$, se cumple que

$$0 = df(x_0, \tau) = f(\tau) - \sum_{i=0}^p (-1)^i f(x_0, \tau^i).$$

Esto significa que si definimos $g \in A^{p-1}(X)$ mediante $g(\sigma) = f(x_0, \sigma)$, entonces

$$f(\tau) = \sum_{i=0}^p (-1)^i g(\tau^i) = dg(\tau),$$

luego $f = dg$ y tenemos la exactitud en A^p . ■

Por lo tanto el complejo $A_N(X)$ para la cohomología completa es exacto salvo en $A_N^0(X)$, donde el grupo de cohomología es isomorfo a N .

No es de extrañar que no hayamos obtenido nada interesante hasta ahora, porque no hemos usado para nada la topología de X .

Diremos que una función $f \in A_N^p(X)$ es *localmente nula* si existe un cubrimiento abierto \mathcal{U} de X tal que $f|_{U^{p+1}} = 0$ para todo $U \in \mathcal{U}$.

Definición 11.30 Si X es un espacio topológico, \mathbb{A} es un anillo, N es un \mathbb{A} -módulo y $A_N^p(X)$ es el conjunto de aplicaciones $X^{p+1} \rightarrow N$, llamaremos $A_N^p(X)_0$ al submódulo de $A_N^p(X)$ formado por las funciones f localmente nulas. El *grupo de p -cocadenas de Alexander-Spanier* con coeficientes en N es el cociente

$$A_{\text{as}}^p(X; N) = A_N^p(X) / A_N^p(X)_0.$$

Es claro que los submódulos $A_N^p(X)_0$ forman un subcomplejo de $A_N(X)$, es decir, que la cofrontera de una función localmente nula es localmente nula. Por consiguiente, el operador cofrontera induce otro en los cocientes, con lo que tenemos un complejo $A_{\text{as}}(X; N)$:

$$0 \longrightarrow A_{\text{as}}^0(X; N) \longrightarrow A_{\text{as}}^1(X; N) \longrightarrow A_{\text{as}}^2(X; N) \longrightarrow \dots$$

cuyos grupos de cohomología $H_{\text{as}}^p(X; N)$ reciben el nombre de *grupos de cohomología de Alexander-Spanier* de X con coeficientes en N .

En el caso reducido entenderemos que $A_N^{-1}(X)_0 = A_N^{-1}(X)$, con lo que $H_{\text{as}}^{-1}(X; N) = 0$. Obviamente, la cohomología completa y la reducida se diferencian a lo sumo en A^0 .

Toda aplicación $h : X \rightarrow Y$ entre dos espacios topológicos induce homomorfismos

$$h_{\#} : A_N^p(Y) \rightarrow A_N^p(X)$$

mediante $h_{\#}(f)(x_0, \dots, x_p) = f(h(x_0), \dots, h(x_p))$. Se comprueba fácilmente que conmutan con los operadores cofrontera, por lo que determinan un homomorfismo de complejos.

Si h es continua y f se anula en un cubrimiento abierto \mathcal{U} de Y , entonces $\mathcal{V} = \{h^{-1}[U] \mid U \in \mathcal{U}\}$ es un cubrimiento abierto de X en el que se anula $h_{\#}(f)$, luego $h_{\#}$ induce un homomorfismo de complejos

$$h_{\#} : A_{\text{as}}(Y; N) \rightarrow A_{\text{as}}(X; N),$$

el cual induce a su vez homomorfismos

$$h^* : H_{\text{as}}^p(Y; N) \rightarrow H_{\text{as}}^p(X; N).$$

Esto convierte a cada $H_{\text{as}}^p(-; N)$ en un funtor contravariante de la categoría de los espacios topológicos en la categoría de los \mathbb{A} -módulos.

Cohomología relativa Si (X, U) es un par de espacios topológicos, la inclusión $i : U \rightarrow X$ induce un homomorfismo $i_{\#} : A_{\text{as}}(X; N) \rightarrow A_{\text{as}}(U; N)$, cuyo núcleo será un subcomplejo de $A_{\text{as}}(X; N)$, que representaremos mediante $A_{\text{as}}(X, U; N)$. Llamaremos $H_{\text{as}}^p(X, U; N)$ a sus grupos de cohomología.

Si $h : (X, U) \rightarrow (Y, V)$ es una aplicación continua, es claro que el homomorfismo $h_{\#} : A_{\text{as}}(Y; N) \rightarrow A_{\text{as}}(X; N)$ se restringe a un homomorfismo $h_{\#} : A_{\text{as}}(Y, V; N) \rightarrow A_{\text{as}}(X, U; N)$, el cual induce a su vez homomorfismos

$$h^* : H_{\text{as}}^p(Y, V; N) \rightarrow H_{\text{as}}^p(X, U; N).$$

Esto convierte a $H^p(-; N)$ en un funtor contravariante en la categoría de los pares de espacios topológicos.

Para la cohomología reducida, como $A_{\text{as}}^{-1}(X; N) = A_{\text{as}}^{-1}(U; N)$, se cumple que $A_{\text{as}}^{-1}(X, U; N) = 0$, al igual que para la cohomología completa, luego $H_{\text{as}}^{-1}(X, U; N) = 0$ y, por otra parte, la cofrontera d_{-1} es nula en ambos casos, luego $H_{\text{as}}^0(X, U; N)$ es el mismo para ambas cohomologías.

En resumen: la cohomología completa difiere de la reducida a lo sumo para $p = 0$ cuando $U = \emptyset$.

Hemos definido $A_{\text{as}}(X, U; N)$ a partir de $A_{\text{as}}(X; N)$, pero también es posible hacerlo a partir de $A_N(X)$. Para ello, dado un par (X, U) de espacios topológicos, definimos $A_N^p(X, U)$ como el submódulo de $A_N^p(X)$ formado por las funciones localmente nulas en U . Así tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow A_N^p(X, U) \rightarrow A_N^p(X) \rightarrow A_{\text{as}}^p(U; N) \rightarrow 0$$

y $A_N^p(X)_0 \subset A_N^p(X, U)$, luego también es exacta

$$0 \rightarrow A_N^p(X, U)/A_N^p(X)_0 \rightarrow A^p(X; N) \rightarrow A_{\text{as}}^p(U; N) \rightarrow 0.$$

De aquí se sigue que

$$A_{\text{as}}^p(X, U; N) = A_N^p(X, U) / A_N^p(X)_0. \quad \blacksquare$$

Teorema 11.31 (Cohomología de un punto) *Si $X = \{x\}$ es un espacio topológico con un solo punto, entonces $H_{\text{as}}^p(X; N) = 0$, salvo si $p = 0$ con la cohomología completa, en cuyo caso $H_{\text{as}}^0(X; N) \cong N$.*

DEMOSTRACIÓN: Observamos que $A_N^p(X)_0 = 0$, para todo p , luego tenemos que $A_{\text{as}}(P; N) = A_N(P)$ y entonces basta tener en cuenta el teorema 11.29 y la observación posterior. \blacksquare

Teorema 11.32 (La sucesión exacta de cohomología) *Sean $V \subset U \subset X$ espacios topológicos y sean*

$$i : (U, V) \longrightarrow (X, V), \quad j : (X, V) \longrightarrow (X, U)$$

*la inclusión y la identidad, respectivamente. Entonces existen homomorfismos $\delta_{*p} : H_{\text{as}}^p(X, U; N) \longrightarrow H_{\text{as}}^{p+1}(U, V; N)$ que forman una sucesión exacta larga:*

$$\cdots \longrightarrow H_{\text{as}}^p(X, U; N) \xrightarrow{j^{*p}} H_{\text{as}}^p(X, V; N) \xrightarrow{i^{*p}} H_{\text{as}}^p(U, V; N) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{\text{as}}^{p+1}(X, U; N) \longrightarrow \cdots$$

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que tenemos una sucesión exacta de complejos:

$$0 \longrightarrow A_{\text{as}}(X, U; N) \xrightarrow{j_{\#}} A_{\text{as}}(X, V; N) \xrightarrow{i_{\#}} A_{\text{as}}(U, V; N) \longrightarrow 0,$$

y aplicar el teorema 4.10. \blacksquare

Es fácil ver que homomorfismos entre ternas de espacios topológicos inducen homomorfismos entre las sucesiones exactas correspondientes.

El teorema de escisión se prueba para la cohomología de Alexander-Spanier mucho más fácilmente que para la (co)homología singular:

Teorema 11.33 (Teorema de escisión) *Sean $V \subset U \subset X$ espacios topológicos tales que V tiene un entorno abierto $V \subset V' \subset \bar{V}' \subset \overset{\circ}{U}$. Entonces la inclusión*

$$i : (X \setminus V, U \setminus V) \longrightarrow (X, U)$$

induce isomorfismos

$$i_{\#} : A_{\text{as}}^p(X, U; N) \longrightarrow A_{\text{as}}^p(X \setminus V, U \setminus V; N)$$

para la homología completa. Por lo tanto, también induce isomorfismos

$$i^* : H_{\text{as}}^p(X, U; N) \longrightarrow H_{\text{as}}^p(X \setminus V, U \setminus V; N).$$

DEMOSTRACIÓN: El diagrama siguiente es conmutativo y sus filas son exactas:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_N^p(X)_0 & \longrightarrow & A_N^p(X, U) & \longrightarrow & A_{\text{as}}^p(X, U; N) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow j_{\#} & & \downarrow i_{\#} \\
 0 & \longrightarrow & A_N^p(X \setminus V)_0 & \longrightarrow & A_N^p(X \setminus V, U \setminus V) & \xrightarrow{k} & A_{\text{as}}^p(X \setminus V, U \setminus V; N) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Basta ver que $j_{\#} \circ k$ es suprayectiva y que $(j_{\#})^{-1}[A_N^p(X \setminus V)] = A_N^p(X)_0$.

En efecto, la primera condición implica que $i_{\#}$ es suprayectiva y, por otra parte, si $x \in A_{\text{as}}^p(X, U; N)$ cumple $i_{\#}(x) = 0$, cualquier antiimagen $y \in A_N^p(X, U)$ de x cumple $k(j_{\#}(y)) = 0$, luego $j_{\#}(y) \in A_N^p(X \setminus V)_0$, luego $y \in A_N^p(X)_0$, luego $x = 0$ y resulta que $i_{\#}$ es biyectiva.

Si $f \in A_N^p(X \setminus V, U \setminus V)$, definimos $f' \in A_N^p(X; U)$ mediante

$$f'(x_0, \dots, x_p) = \begin{cases} f(x_0, \dots, x_p) & \text{si } x_0, \dots, x_p \in X \setminus V', \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Si \mathcal{V} es un cubrimiento abierto de $U \setminus V$ sobre el que f se anula, entonces $\mathcal{U} = \mathcal{V} \cup \{V'\}$ es un cubrimiento abierto de U en el que se anula f' . Por lo tanto $f' \in A_N^p(X; U)$.

Claramente $j_{\#}(f') - f$ se anula en $\mathcal{W} = \{G \cap \overset{\circ}{U} \mid G \in \mathcal{V}\} \cup \{X \setminus \overline{V'}\}$, que es un cubrimiento abierto de $X \setminus V$. Por lo tanto $j_{\#}(f') - f \in A_N^p(X \setminus V)_0$, luego $k(j_{\#}(f')) = k(f)$ y, como k es suprayectiva, lo mismo vale para $j_{\#} \circ k$.

Sea ahora $f \in A_N^p(X, U)$ tal que $j_{\#}(f) \in A_N^p(X \setminus V)$. Entonces existe un cubrimiento abierto \mathcal{U}_1 de U en el que f se anula y otro \mathcal{U}_2 de $X \setminus V$ en el que se anula $j_{\#}(f)$. Sean

$$\mathcal{V}_1 = \{U_1 \cap \overset{\circ}{U} \mid U_1 \in \mathcal{U}_1\}, \quad \mathcal{V}_2 = \{U_2 \cap (X \setminus \overline{V}) \mid U_2 \in \mathcal{U}_2\}.$$

Entonces $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ es un cubrimiento abierto de X en el que se anula f . Por lo tanto $f \in A_N^p(X)_0$. ■

Nota La hipótesis del teorema anterior se puede reducir a que $\overline{V} \subset \overset{\circ}{U}$, como en el caso de la cohomología singular, si X es un espacio normal, pues esto garantiza la existencia del entorno V' requerido por el teorema. ■

Teorema 11.34 Si $U \subset X$ son espacios topológicos, entonces, para la cohomología completa, $H_{\text{as}}^0(X, U; N)$ es isomorfo al \mathbb{A} -módulo de las funciones localmente constantes de X en N que se anulan sobre U . Si $U = \emptyset$, para la cohomología reducida $H_{\text{as}}^0(X, U; N)$ es isomorfo al cociente de este módulo sobre el submódulo de las funciones constantes en X .

DEMOSTRACIÓN: Claramente, $A_N^0(X)_0 = 0$, luego

$$A_{\text{as}}^0(X, U; N) = A_N^0(X, U), \quad A_{\text{as}}^1(X, U; N) = A_N^1(X, U)/C_N^1(X)_0$$

y $H_{\text{as}}^0(X, U; N)$ es el núcleo de la composición

$$A_N^0(X, U) \xrightarrow{d_0} A_N^1(X, U) \longrightarrow A_{\text{as}}^1(X, U; N).$$

Pero $A_N^0(X, U)$ es el módulo formado por las funciones $f : X \rightarrow N$ que se anulan en U , y $df(x_0, x_1) = f(\partial(x_0, x_1)) = f(x_1) - f(x_0)$. Se cumple que $df \in C_N^1(X)_0$ si y sólo si existe un cubrimiento abierto \mathcal{U} de X en el cual se anula. Equivalentemente, si f es constante en cada abierto de \mathcal{U} . Así pues, $H_{\text{as}}^0(X, U; N) = Z^0(X, U; N)$ está formado por las funciones localmente constantes que se anulan en U .

Para la cohomología reducida $H_{\text{as}}^0(X; N)$ es el cociente de $Z^0(X; N)$ sobre el $F^0(X; N)$, que es el submódulo de las funciones constantes. ■

Nota Si $X \neq \emptyset$, el teorema anterior nos da que $H_{\text{as}}^0(X; N) \cong N$ para la cohomología completa (o $H_{\text{as}}^0(X; N) = 0$ para la reducida) si y sólo si X es conexo, pues la conexión de un espacio topológico equivale a que las funciones localmente constantes sean constantes.

En cambio, el teorema 11.21 implica que $H_N^0(X) \cong N$ (o $H_N^0(X) = 0$ para la cohomología reducida) si y sólo si X es arcoconexo. Por lo tanto, en un espacio topológico conexo no arcoconexo, la cohomología de Alexander-Spanier difiere de la cohomología singular en dimensión 0 (por lo menos respecto a módulos que cumplan $N \oplus N \cong N$). ■

Veamos ahora una versión de 9.12:

Teorema 11.35 Si $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ es una descomposición de X en unión de abiertos disjuntos dos a dos, entonces existen isomorfismos

$$H_{\text{as}}^p(X; N) \cong \prod_{i \in I} H_{\text{as}}^p(U_i; N).$$

DEMOSTRACIÓN: La restricción induce isomorfismos

$$A_N^p(X) \longrightarrow \prod_{i \in I} A_N^p(U_i),$$

que claramente hacen corresponder $A_N^p(X)_0$ con $A_N^p(U_i)_0$, por lo que inducen isomorfismos

$$A_{\text{as}}^p(X; N) \longrightarrow \prod_{i \in I} A_{\text{as}}^p(U_i; N),$$

que claramente inducen el isomorfismo del enunciado. ■

La única propiedad básica de la cohomología de Alexander-Spanier que no es fácil de probar es el teorema de homotopía. Aunque se trata, sin duda, de una propiedad fundamental, no la vamos a necesitar en ningún momento, pero, no obstante, la demostraremos en la sección 11.8

11.6 Inmersiones tensas

Vamos a presentar ahora una propiedad notable de la cohomología de Alexander-Spanier que no comparte con la cohomología singular.

Sea X un espacio topológico y consideremos subespacios $B \subset A \subset X$. Llamaremos *entorno* del par (A, B) en X a cualquier par (U, V) de entornos $V \subset U$ tales que $B \subset V$ y $A \subset U$.

Es claro que los entornos de (A, B) forman un conjunto dirigido, en el sentido de la definición 4.23, con el orden dado por $(U_1, V_1) \leq (U_2, V_2)$ si y sólo si $U_2 \subset U_1$, $V_2 \subset V_1$. Por lo tanto, podemos definir

$$\check{H}^p(A, B) = \varinjlim_{(U, V)} H^p(U, V),$$

donde H^p es cualquier funtor contravariante definido sobre los pares (U, V) de subespacios de X con los morfismos dados por las inclusiones. Concretamente, nos interesará aplicar esta definición a los grupos de cohomología de Alexander-Spanier, pero también a los de la cohomología singular.

Notemos que si $B = \emptyset$ el límite inductivo no se altera si consideramos únicamente entornos de la forma (U, \emptyset) , lo cual equivale a tratar únicamente con entornos de A .

El teorema 4.31 implica además que si en la definición de $\check{H}^p(A, B)$ admitimos únicamente pares de entornos abiertos de (A, B) , el resultado es el mismo.

Observemos que las inclusiones $(A, B) \rightarrow (U, V)$ definen homomorfismos $H^p(U, V) \rightarrow H^p(A, B)$, los cuales determinan a su vez un homomorfismo

$$j : \check{H}^p(A, B) \rightarrow H^p(A, B).$$

Definición 11.36 En las condiciones anteriores, diremos que el par (A, B) está *tensamente sumergido* en X respecto de H^p si $j : \check{H}^p(A, B) \rightarrow H^p(A, B)$ es un isomorfismo.

Diremos que (A, B) está tensamente sumergido en X respecto de la cohomología de Alexander-Spanier, o respecto a la cohomología singular, si lo está respecto a todos los funtores $H_{\text{as}}^q(-, -; N)$ o $H_N^q(-, -)$, respectivamente.

El resultado fundamental que vamos a probar es que todo par de subespacios cerrados de un espacio paracompacto está tensamente sumergido respecto de la cohomología de Alexander-Spanier. Para ello necesitamos algunos resultados previos.

Teorema 11.37 *Sea X un espacio topológico y $B \subset A \subset X$. Si dos de los tres pares (A, \emptyset) , (B, \emptyset) o (A, B) están tensamente sumergidos en X respecto de la cohomología singular o la de Alexander-Spanier, también lo está el tercero.*

DEMOSTRACIÓN: Representamos por H a cualquiera de las dos cohomologías. Para cada entorno (U, V) de (A, B) , consideramos la sucesión exacta larga de cohomología:

$$\cdots \longrightarrow H^p(U, V) \longrightarrow H^p(U) \longrightarrow H^p(V) \longrightarrow H^{p+1}(U, V) \longrightarrow \cdots$$

Si $(U, V) \leq (U', V')$, la inclusión $i : (U', V') \longrightarrow (U, V)$ determina un homomorfismo entre las dos sucesiones exactas largas y, como los límites inductivos de sucesiones exactas son sucesiones exactas, tenemos una sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow \check{H}^p(A, B) \longrightarrow \check{H}^p(A) \longrightarrow \check{H}^p(B) \longrightarrow \check{H}^{p+1}(A, B) \longrightarrow \cdots$$

Por otra parte, las inclusiones $(A, B) \longrightarrow (U, V)$ dan lugar a diagramas conmutativos

$$\begin{array}{cccccccc} \cdots & \longrightarrow & \check{H}^p(U, V) & \longrightarrow & \check{H}^p(U) & \longrightarrow & \check{H}^p(V) & \longrightarrow & \check{H}^{p+1}(U, V) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H^p(A, B) & \longrightarrow & H^p(A) & \longrightarrow & H^p(B) & \longrightarrow & H^{p+1}(A, B) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

y tomando límites obtenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{cccccccc} \cdots & \longrightarrow & \check{H}^p(A, B) & \longrightarrow & \check{H}^p(A) & \longrightarrow & \check{H}^p(B) & \longrightarrow & \check{H}^{p+1}(A, B) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H^p(A, B) & \longrightarrow & H^p(A) & \longrightarrow & H^p(B) & \longrightarrow & H^{p+1}(A, B) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Por hipótesis, dos de cada tres flechas verticales son isomorfismos, luego el teorema 4.12 nos da que las restantes también lo son. ■

Ahora necesitamos un resultado topológico técnico:

Teorema 11.38 *Sea X un espacio topológico y $A \subset X$. Sea \mathcal{V} un cubrimiento abierto de X . Entonces existe un entorno U de A y una función $f : U \longrightarrow A$ (no necesariamente continua) de modo que:*

1. Para todo $x \in A$, se cumple $f(x) = x$.
2. Para todo $V \in \mathcal{V}$, se cumple que $f[V \cap U] \subset V_{\mathcal{V}}^*$,

donde $V_{\mathcal{V}}^* = \bigcup \{V' \in \mathcal{V} \mid V' \cap V \neq \emptyset\}$.

DEMOSTRACIÓN: Si $A = \emptyset$ el enunciado se cumple trivialmente con $U = \emptyset$. En otro caso, tomamos $U = \bigcup \{V \in \mathcal{V} \mid V \cap A \neq \emptyset\}$. Definimos $f : U \longrightarrow A$ como $f(x) = x$ para $x \in A$ y, para $x \in U \setminus A$, tomamos $f(x) \in A$ de modo que exista $V \in \mathcal{V}$ tal que $x, f(x) \in V$. Esto es posible por la definición de U .

Así, si $V \in \mathcal{V}$ y $x \in V \cap U$, existe $V' \in \mathcal{V}$ tal que $x, f(x) \in V'$. De este modo $x \in V \cap V'$, luego $V' \subset V_{\mathcal{V}}^*$, luego $f(x) \in V_{\mathcal{V}}^*$. ■

Teorema 11.39 *Si X es un espacio topológico paracompacto, todo par (A, B) de subespacios cerrados de X está tensamente sumergido en X para la cohomología de Alexander-Spanier.*

DEMOSTRACIÓN: Fijamos un anillo \mathbb{A} y un \mathbb{A} -módulo de coeficientes N . Por el teorema 11.37 podemos tomar $B = \emptyset$.

Si $A \subset U \subset U'$, llamaremos $i_{U',U} : U \rightarrow U'$ y $j_U : A \rightarrow U$ a las inclusiones, que determinan homomorfismos

$$i_{U',U}^* : H_{\text{as}}^p(U'; N) \rightarrow H_{\text{as}}^p(U; N), \quad j_U^* : H_{\text{as}}^p(U; N) \rightarrow H_{\text{as}}^p(A; N).$$

Llamaremos $i_U : H_{\text{as}}^p(U; N) \rightarrow \check{H}_{\text{as}}^p(A; N)$ a las inmersiones canónicas en el límite inductivo y $j : \check{H}_{\text{as}}^p(A; N) \rightarrow H_{\text{as}}^p(A; N)$ al homomorfismo inducido por los homomorfismos j_U^* . Tenemos que probar que j es un isomorfismo.

Veamos en primer lugar que es suprayectivo. Para ello tomamos una clase $[[g]] \in H_{\text{as}}^p(A; N)$. Entonces $[g]$ es un cociclo, lo cual significa que dg se anula en un cubrimiento abierto \mathcal{W} de A . Consideramos $\mathcal{U} = \{W \cup (X \setminus A) \mid W \in \mathcal{W}\}$, que es un cubrimiento abierto de X , luego por el teorema 1.20 tiene un refinamiento estrella (abierto) \mathcal{V} . Sea U un entorno de A y $f : U \rightarrow A$ en las condiciones del teorema anterior.

Así $f_{\#}(g) \in A_N^p(U)$ (recordemos que $f_{\#}$ está definido aunque f no sea continua) y $d(f_{\#}(g)) = f_{\#}(dg)$. Vamos a ver que se anula en $\{V \cap U \mid V \in \mathcal{V}\}$, que es un cubrimiento abierto de U .

Si $V \in \mathcal{V}$, entonces $f[V \cap U] \subset V_{\#}^*$, luego, por definición de refinamiento estrella, existe un $U' \in \mathcal{U}$ tal que $f[V \cap U] \subset U' \cap A = W$, con $W \in \mathcal{W}$. Entonces dg se anula en W^{q+2} , luego $d(f_{\#}(g))$ se anula en $(V \cap U)^{q+2}$, luego $[f_{\#}(g)] \in Z^q(U; N)$, luego $[[f_{\#}(g)]] \in H_{\text{as}}^p(U; N)$ y, como $f|_A$ es la identidad, se cumple que $j_U^*([[f_{\#}(g)]]) = [[g]]$. Por lo tanto, $x = i_U([[f_{\#}(g)]]) \in \check{H}_{\text{as}}^p(A; N)$ cumple que $j(x) = j(i_U([[f_{\#}(g)]])) = j_U^*([[f_{\#}(g)]]) = [[g]]$.

Veamos ahora que j es inyectiva. Tomemos $x \in \check{H}_{\text{as}}^p(A; N)$ tal que $j(x) = 0$, que será de la forma $x = i_{U_0}([[g]])$, para cierto entorno abierto U_0 de A y cierta clase $[[g]] \in H_{\text{as}}^p(U_0; N)$. Como los espacios paracompactos son normales, podemos tomar un abierto $A \subset G \subset \bar{G} \subset U_0$. Así \bar{G} es un entorno (cerrado) paracompacto de A .

Como $[g]$ es un cociclo, dg se anula en un cubrimiento abierto \mathcal{W} de U_0 . Por otra parte, $j_{U_0}^*([[g]]) = j(i_{U_0}([[g]])) = j(x) = 0$, luego $[j_{U_0\#}(g)] = [dg']$ para cierto $g' \in A_N^{p-1}(A)$, lo cual a su vez significa que $j_{U_0\#}(g) - dg'$ se anula en un cubrimiento abierto \mathcal{W}' de A .

Sea $\mathcal{U} = \{W' \cup (\bar{G} \setminus A) \mid W' \in \mathcal{W}'\}$, que es un cubrimiento abierto de \bar{G} . Las intersecciones de abiertos de \mathcal{W} y \mathcal{U} forman un cubrimiento abierto de \bar{G} y, si tomamos un refinamiento estrella \mathcal{V} de dicho cubrimiento, tenemos que es un refinamiento estrella tanto de \mathcal{W} como de \mathcal{U} . Sea U' un entorno de A en \bar{G} y $f' : U' \rightarrow A$ en las condiciones del teorema anterior. Sea $U = U' \cap G$, que es un entorno abierto de A en X y sea $f = f'|_U : U \rightarrow A$.

Si $V \in \mathcal{V}$, entonces $f[V \cap U] \subset V_{\#}^* \subset W''' \in \mathcal{U}$, pero entonces tenemos que $W' = W''' \cap A \in \mathcal{W}'$ y $f[V \cap U] \subset W'$. Por lo tanto, $f_{\#}(j_{U_0\#}(g) - dg')$ se anula en

$V \cap U$ o, lo que es lo mismo, $f_{\#}(j_{U_0\#}(g)) = f_{\#}(dg') = df_{\#}(g')$ en $V \cap U$, para todo $V \in \mathcal{V}$, luego $[f_{\#}(j_{U_0\#}(g))] = d[f_{\#}(g')]$, luego $[[f_{\#}(j_{U_0\#}(g))]] = 0$ en $H_{\text{as}}^p(U; N)$.

Finalmente probamos que $i_{U_0, U}^*([g]) = [[i_{U_0, U\#}(g)]] = [[f_{\#}(j_{U_0\#}(g))]] = 0$, de donde se sigue que $x = i_{U_0}([g]) = i_U(i_{U_0, U}([g])) = 0$.

Para ello definimos $D : A_N^p(U) \rightarrow A_N^{p-1}(U)$ mediante

$$(Dh)(x_0, \dots, x_{p-1}) = \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^j h(x_0, \dots, x_j, f(x_j), \dots, f(x_{p-1})).$$

Un simple cálculo muestra que

$$d(Dh) + D(dh) = f_{\#}(j_{U\#}(h)) - h.$$

Si $V \in \mathcal{V}$, entonces $f[V \cap U] \subset V_{\mathcal{W}}^* \subset W$, para cierto $W \in \mathcal{W}$. Más aún, $V \cap U \subset V_{\mathcal{W}}^*$, luego de hecho $(V \cap U) \cup f[V \cap U] \subset W$. Por lo tanto, aplicando la relación precedente a $h = i_{U_0, U\#}(g)$, tenemos que

$$d(D(i_{U_0, U\#}(g))) + D(i_{U_0, U\#}(dg)) = f_{\#}(j_{U_0\#}(g)) - i_{U_0, U\#}(g),$$

pero dg se anula en \mathcal{W} , luego $D(i_{U_0, U\#}(dg))$ se anula en $V \cap U$ y, sobre puntos de este conjunto, tenemos

$$d(D(i_{U_0, U\#}(g))) = f_{\#}(j_{U_0\#}(g)) - i_{U_0, U\#}(g).$$

Como esto vale para todo $V \in \mathcal{V}$, concluimos que

$$[f_{\#}(j_{U_0\#}(g))] - [i_{U_0, U\#}(g)] = d[D(i_{U_0, U\#}(g))],$$

de donde se sigue la igualdad que necesitábamos. ■

Ejemplo El teorema anterior es falso para la cohomología singular. Por ejemplo, consideremos el espacio $A = A_1 \cup A_2$, donde $A_1 = \{0\} \times [-1, 1]$ y

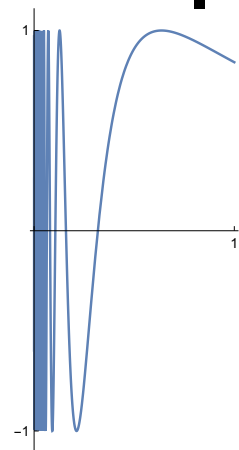
$$A_2 = \{(x, \text{sen}(1/x)) \mid 0 < x \leq 1\}.$$

No es difícil probar que A es un espacio conexo, pero con dos componentes arcoconexas, A_1 y A_2 . Por lo tanto, $H^0(A) \cong \mathbb{Z}^2$. Por otra parte, si U es un entorno abierto de A en \mathbb{R}^2 , se cumple que A está contenido en una componente conexa $A \subset U_0 \subset U$ de U . Por 4.31 tenemos que

$$\check{H}^0(A) \cong \varinjlim_{U_0} H^0(A),$$

donde U_0 recorre los entornos conexos de A . Por consiguiente $\check{H}^0(A) \cong \mathbb{Z}$ y concluimos que el compacto $A \subset \mathbb{R}^2$ no está tensamente sumergido en \mathbb{R}^2 para la cohomología singular. ■

Veamos una condición suficiente para que un cerrado esté tensamente sumergido respecto de la cohomología singular. Sucede que toda variedad topológica con una base numerable es metrizable (porque puede sumergirse en un \mathbb{R}^m). El teorema 1.22 lo prueba para el caso de las variedades compactas.



Teorema 11.40 *Sea V una variedad topológica metrizable y A un subespacio cerrado de V . Si A es un retracto de un entorno abierto en V , entonces el homomorfismo natural $j : \check{H}^p(A) \rightarrow H^p(A)$ es un epimorfismo. Si V y A son retracts absolutos de entornos, entonces j es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $r : U \rightarrow A$ una retracción, donde U es un entorno abierto de A en V y sea $j_U : A \rightarrow U$ la inclusión. Entonces $j_U \circ r = 1$, luego $r^* \circ j_U^* = 1$, lo que prueba que $j_U^* : H^p(U) \rightarrow H^p(A)$ es un epimorfismo, y es claro entonces que j también lo es.

Supongamos ahora que V y A son retracts absolutos de entornos. Sea U un entorno de A , sea U' un entorno menor con una retracción $r : U' \rightarrow A$. Vamos a hallar un entorno aún menor W tal que si $j_{U'} : A \rightarrow U'$ e $i_{U'W} : W \rightarrow U'$ son las inclusiones entonces $(r|_W) \circ j_{U'}$ es homotópica a $i_{U'W}$, de modo que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 H^p(U) & \xrightarrow{j_U^*} & H^p(A) \\
 i_{UU'}^* \downarrow & & \uparrow j_W^* \\
 H^p(U') & \xrightarrow{i_{U'W}^*} & H^p(W) \\
 & \searrow j_{U'}^* & \nearrow (r|_W)^* \\
 & & H^p(A)
 \end{array}$$

De este modo, si $\alpha \in \check{H}^p(A)$ cumple $j(\alpha) = 0$, ha de existir un entorno U de A tal que $\alpha = i_U(\alpha')$, con $\alpha' \in H^p(U)$. Así

$$j_{U'}^*(i_{UU'}^*(\alpha')) = j(i_{U'}(i_{UU'}^*(\alpha'))) = j(i_U(\alpha')) = j(\alpha) = 0,$$

luego también $i_{UW}^*(\alpha') = i_{U'W}^*(i_{UU'}^*(\alpha')) = 0$ y así $\alpha = i_W(i_{UW}^*(\alpha')) = 0$.

Definimos en $(\{0\} \times U') \cup (I \times A) \cup (\{1\} \times U')$ (subespacio cerrado de $I \times U'$) la aplicación

$$F(t, x) = \begin{cases} x & \text{si } t = 0 \text{ y } x \in U', \\ r(x) & \text{si } t = 1 \text{ y } x \in U', \\ x & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

Claramente F es continua y, como U' es un retracto absoluto de entornos (por ser abierto en V), se extiende a una aplicación continua en un entorno de su dominio, el cual contendrá un subespacio de la forma $I \times W$, donde W es un entorno de A contenido en U' . La extensión de F a este entorno (es decir, la restricción de la extensión) es la homotopía buscada. ■

11.7 Cohomología con soportes compactos

En la sección 11.2 hemos estudiado la cohomología de De Rham con soportes compactos, que interviene en el enunciado (y, por supuesto, en la prueba)

del teorema de Dualidad de Poincaré. Ahora vamos a definir una cohomología singular con soportes compactos y en el capítulo siguiente la usaremos para generalizar el teorema de dualidad a variedades topológicas arbitrarias. Consideraremos en todo momento la cohomología con coeficientes en un \mathbb{A} -módulo N , aunque no lo explicitaremos en la notación.

Definición 11.41 Si X es un espacio de Hausdorff, definimos

$$C_c^p(X) = \bigcup_K C^p(X, X \setminus K),$$

donde K recorre los subconjuntos compactos de X . Equivalentemente, se trata del conjunto de las cocadenas singulares de dimensión p que se anulan sobre los simplices cuyo soporte está fuera de un cierto compacto. Las llamaremos *cocadenas singulares con soporte compacto*.

Es claro que $C_c^p(X)$ es un submódulo de $C^p(X)$. Más aún, es claro que la cofrontera de una cocadena con soporte compacto tiene soporte compacto, por lo que los módulos $C_c^p(X)$ forman un complejo $C_c(X)$. A los grupos de cohomología de este complejo los llamaremos *grupos de cohomología singular con soporte compacto* de X , y los representaremos por $H_c^p(X)$.

Obviamente, si X es compacto entonces $H_c^p(X) = H^p(X)$ para todo p .

La cohomología singular con soportes compactos se relaciona con la cohomología singular a través de un límite inductivo. Notemos que si $K \subset K'$, entonces la inclusión $i : (X, X \setminus K') \rightarrow (X, X \setminus K)$ induce la inclusión

$$i_*^p : C^p(X, X \setminus K') \rightarrow C^p(X, X \setminus K),$$

de modo que los módulos $\{C^p(X, X \setminus K)\}_K$ forman un sistema inductivo cuando consideramos la familia de subconjuntos compactos de X como conjunto dirigido con el orden dado por la inclusión.

En general, si $\{M_i\}_{i \in I}$ es un sistema inductivo formado por submódulos de un módulo M y se cumple $i \leq j$ si y sólo si $M_i \subset M_j$, entonces el límite inductivo de los módulos M_i respecto a las inclusiones es $\bigcup M_i$ (también con las inclusiones). La comprobación es inmediata. De aquí se sigue que

$$C_c^p(X) = \varinjlim_K C^p(X, X \setminus K).$$

Más aún, según el teorema 4.27, podemos escribir

$$C_c(X) = \varinjlim_K C^*(X, X \setminus K)$$

como límite de complejos. A su vez, el teorema 4.28 nos da que

$$H_c^p(X) = \varinjlim_K H^p(X, X \setminus K),$$

donde los homomorfismos del sistema de grupos de cohomología son los inducidos por las inclusiones $\iota_{KK'} = i^{*p} : H^p(X, X \setminus K) \rightarrow H^p(X, X \setminus K')$. Además, los homomorfismos $\iota_K : H^p(X, X \setminus K) \rightarrow H_c^p(X)$ son los inducidos por las inclusiones $C^p(X, X \setminus K) \rightarrow C_c^p(X)$.

Como en el caso diferenciable, una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ no determina un homomorfismo entre los grupos de cohomología con soporte compacto, pero esto sí que sucede si es propia.

En efecto, si f es una aplicación propia y $K \subset Y$ es compacto, entonces $f[X \setminus f^{-1}[K]] \subset Y \setminus K$, luego f induce homomorfismos

$$H^p(Y, Y \setminus K) \longrightarrow H^p(X, X \setminus f^{-1}[K]).$$

Componiendo con $\iota_{f^{-1}[K]}$ obtenemos homomorfismos

$$f_K^* : H^p(Y, Y \setminus K) \longrightarrow H_c^p(X).$$

Estos homomorfismos conmutan obviamente con los $\iota_{KK'}$, por lo que inducen un homomorfismo

$$f^* : H_c^p(Y) \longrightarrow H_c^p(X).$$

Ahora es fácil ver que H_c^p es un funtor contravariante en la categoría de los espacios de Hausdorff tomando como morfismos las aplicaciones propias.

Cohomología singular diferenciable con soportes compactos Si V es una variedad diferenciable, podemos definir igualmente la cohomología singular diferenciable con soportes compactos. Sabemos que la restricción

$$r : C^p(V, V \setminus K) \longrightarrow C^{\infty p}(V, V \setminus K)$$

induce isomorfismos

$$H^p(V, V \setminus K) \longrightarrow H^{\infty p}(V, V \setminus K)$$

entre los grupos de cohomología, que claramente conmutan con los homomorfismos que determinan las cohomologías con soporte compacto como límites inductivos, por lo que determinan isomorfismos

$$H_c^p(V) \longrightarrow H_c^{\infty p}(V).$$

Esto hace que sea indiferente trabajar con la homología singular o la homología singular diferenciable. ■

Si X es un espacio de Hausdorff y $U \subset X$, la inclusión $i : U \rightarrow X$ no tiene por qué ser propia, por lo que, en principio, no define un homomorfismo entre los módulos de cocadenas con soportes compactos, ni entre los grupos de cohomología con soportes compactos. Sin embargo, podemos hacer algo análogo a lo que hicimos con la cohomología de De Rham:

Si U es abierto y $K \subset U$ es un subespacio compacto, el teorema de escisión nos da que la inclusión $i : (U, U \setminus K) \rightarrow (X, X \setminus K)$ induce un isomorfismo entre los grupos de cohomología. Los isomorfismos inversos

$$j_K : H^p(U, U \setminus K) \longrightarrow H^p(X, X \setminus K)$$

conmutan con las inclusiones que obtenemos al cambiar K por otro compacto mayor, por lo que determinan un único homomorfismo

$$i_* : H_c^p(U) \longrightarrow H_c^p(X).$$

Estos homomorfismos son funtoriales, es decir, si $V \subset U \subset X$ se cumple que $i_{V,U*} \circ i_{U,X*} = i_{V,X*}$. Basta observar que un compacto $K \subset V$ da lugar al diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccccc}
 H^p(V, V \setminus K) & \xrightarrow{\iota_K} & H_c^p(V) & & \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow i_{V,X*} & \searrow i_{V,U*} & \\
 & H^p(U, U \setminus K) & \xrightarrow{\iota_K} & H_c^p(U) & \\
 \swarrow & \downarrow & \downarrow i_{U,X*} & \swarrow i_{U,X*} & \\
 H^p(X, X \setminus K) & \xrightarrow{\iota_K} & H_c^p(X) & &
 \end{array}$$

Las caras rectangulares del prisma son conmutativas por las propiedades elementales de los límites directos, y la base triangular de la izquierda lo es porque los homomorfismos son inversos de escisiones. Como esto vale para todo $K \subset V$, también conmuta el triángulo de la derecha.

Ahora podemos construir sucesiones de Mayer-Vietoris:

Teorema 11.42 (La sucesión de Mayer-Vietoris) *Sea X un espacio topológico regular y sean U_1, U_2 abiertos en X tales que $X = U_1 \cup U_2$. Sea $U = U_1 \cap U_2$. Entonces existen homomorfismos naturales $\delta_p : H_c^p(X) \rightarrow H_c^{p+1}(U)$ que hacen exacta la sucesión*

$$\dots \rightarrow H_c^p(U) \xrightarrow{i} H_c^p(U_1) \oplus H_c^p(U_2) \xrightarrow{j} H_c^p(X) \xrightarrow{\delta_p} H_c^{p+1}(U) \rightarrow \dots$$

donde $i(\alpha) = (\alpha, \alpha)$, $j(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2$ (identificando cada clase de cohomología con su imagen por las inclusiones oportunas)

DEMOSTRACIÓN: Sean $K_i \subset U_i$ subespacios compactos y consideremos la sucesión de Mayer-Vietoris de las tríadas (X, X, X) y $(X, X \setminus K_1, X \setminus K_2)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow & H^p(X, X \setminus (K_1 \cap K_2)) & \xrightarrow{\alpha} & H^p(X, X \setminus K_1) \oplus H^p(X, X \setminus K_2) & \xrightarrow{\beta} & H^p(X, X \setminus (K_1 \cup K_2)) & \rightarrow \dots \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & H^p(U, U \setminus (K_1 \cap K_2)) & & H^p(U_1, U_1 \setminus K_1) \oplus H^p(U_2, U_2 \setminus K_2) & & &
 \end{array}$$

donde las flechas verticales son los isomorfismos dados por el teorema de escisión. Las flechas horizontales son

$$\alpha_{K_1, K_2}(x) = (i_1^*(x), i_2^*(x)), \quad \beta_{K_1, K_2}(x) = j_1^*(x) - j_2^*(x),$$

donde

$$i_l : (X, X \setminus K_l) \rightarrow (X, X \setminus (K_1 \cap K_2)), \quad j_l : (X, X \setminus (K_1 \cup K_2)) \rightarrow (X, X \setminus K_l)$$

son las inclusiones.

Podemos sustituir los grupos de arriba por los de abajo, con lo que tenemos otra sucesión exacta

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H^p(U, U \setminus (K_1 \cap K_2)) &\xrightarrow{\alpha'} H^p(U_1, U_1 \setminus K_1) \oplus H^p(U_2, U_2 \setminus K_2) \\ &\xrightarrow{\beta'} H^p(X, X \setminus (K_1 \cup K_2)) \longrightarrow \dots \end{aligned} \quad (11.3)$$

donde $\alpha'(x) = (\alpha'_1(x), \alpha'_2(x))$, $\beta'(x) = \beta'_1(x) - \beta'_2(x)$, de modo que α'_i y β'_i son las composiciones de α y β con los isomorfismos de escisión adecuados. Por ejemplo, α'_1 es, concretamente, la composición

$$\begin{aligned} H^p(U, (U) \setminus (K_1 \cap K_2)) &\longrightarrow H^p(X, X \setminus (K_1 \cap K_2)) \xrightarrow{i_1^*} \\ &H^p(X, X \setminus K_1) \longrightarrow H^p(U_1, U_1 \setminus K_1). \end{aligned}$$

Vamos a probar que la sucesión del enunciado es el límite inductivo de estas sucesiones, por lo que será exacta por el teorema 4.29, pero esto requiere algunas precisiones, ya que en principio $H_c(U)$, $H_c(U_i)$ y $H_c(X)$ son límites inductivos respecto de sistemas inductivos sobre conjuntos dirigidos distintos.

Ahora bien, es fácil ver que podemos ver estos cuatro espacios como límites inductivos sobre el conjunto dirigido de los pares (K_1, K_2) de espacios compactos $K_l \subset U_l$, con el orden dado por $(K_1, K_2) \leq (K'_1, K'_2)$ si y sólo si $K_1 \subset K'_1$ y $K_2 \subset K'_2$.

En efecto, lo único que estamos haciendo es introducir repeticiones en los sistemas inductivos, lo cual no afecta al límite inductivo. En el caso de $H_c(X)$ hay que tener en cuenta que todo compacto $K \subset X$ puede expresarse en la forma $K = K_1 \cup K_2$, con $K_l \subset U_l$. Aquí es donde interviene la regularidad de X que hemos pedido en el enunciado, porque por regularidad todo punto de K está contenido en un entorno cerrado contenido en un U_l y extrayendo un subcubrimiento finito de estos entornos obtenemos cerrados C_1 y C_2 tales que $K \subset C_1 \cup C_2$, con $C_l \subset U_l$, y basta tomar $K_l = K \cap C_l$.

Consideremos dos pares de compactos $(K_1, K_2) \leq (K'_1, K'_2)$, con los que podemos formar el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} H^p(U, U \setminus (K_1 \cap K_2)) & \longrightarrow & H^p(U, U \setminus (K'_1 \cap K'_2)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^p(X, X \setminus (K_1 \cap K_2)) & \longrightarrow & H^p(X, X \setminus (K'_1 \cap K'_2)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^p(X, X \setminus K_l) & \longrightarrow & H^p(X, X \setminus K'_l) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^p(U_l, U_l \setminus K_l) & \longrightarrow & H^p(U_l, U_l \setminus K'_l) \end{array}$$

Las columnas son α'_l para cada par de compactos, y todas las flechas representan homomorfismos inducidos por inclusiones, luego el diagrama es conmutativo. Así pues, tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^p(U, U \setminus (K_1 \cap K_2)) & \xrightarrow{\alpha'} & H^p(U_1, U_1 \setminus K_1) \oplus H^p(U_2, U_2 \setminus K_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^p(U, U \setminus (K'_1 \cap K'_2)) & \xrightarrow{\alpha'} & H^p(U_1, U_1 \setminus K'_1) \oplus H^p(U_2, U_2 \setminus K'_2) \end{array}$$

De aquí concluimos que los homomorfismos α'_{K_1, K_2} inducen un homomorfismo $\alpha' : H_c^p(U_1 \cap U_2) \rightarrow H_c^p(U_1) \oplus H_c^p(U_2)$ que hace conmutativos los diagramas

$$\begin{array}{ccc} H^p(U, U \setminus (K_1 \cap K_2)) & \xrightarrow{\alpha'} & H^p(U_1, U_1 \setminus K_1) \oplus H^p(U_2, U_2 \setminus K_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_c^p(U) & \xrightarrow{\alpha'} & H_c^p(U_1) \oplus H_c^p(U_2) \end{array}$$

Ahora bien, sucede que α' no es sino $\alpha'(x) = (i_{1*}(x), i_{2*}(x))$. Para probarlo consideramos el diagrama siguiente, en el que todas las flechas que componen el triángulo son homomorfismos inducidos por inclusiones, por lo que el triángulo es conmutativo, mientras que el cuadrado lo es por definición de i_{l*} . Además, el lado vertical del triángulo no es sino α'_l .

$$\begin{array}{ccc} & & H^p(U, U \setminus (K_1 \cap K_2)) \\ & \nearrow & \uparrow \\ & & H^p(X, X \setminus (K_1 \cap K_2)) \\ & & \downarrow \\ & & H^p(X, X \setminus K_l) \\ & \swarrow & \downarrow \\ H^p(U, U \setminus K_l) & \xleftarrow{j_{K_l}} & H^p(U_l, U_l \setminus K_l) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_c^p(U) & \xrightarrow{i_{l*}} & H_c^p(U_l) \end{array}$$

De aquí se sigue fácilmente que $\alpha'_l = i_{l*}$, luego α' no es sino el homomorfismo que en el enunciado hemos llamado i . Similarmente se demuestra que los homomorfismos β_{K_1, K_2} inducen un homomorfismo β' que no es sino el homomorfismo j del enunciado.

Esto prueba que la sucesión del enunciado es el límite inductivo de sucesiones exactas, luego es exacta. ■

Supongamos ahora que V es una variedad topológica compacta y que $A \subset V$ es un subespacio cerrado. Para cada entorno abierto W de A en V , tenemos que $K = V \setminus W$ es un subespacio compacto de $U = V \setminus A$. Consideramos la composición

$$H^p(W) \xrightarrow{\delta^*} H^{p+1}(V, W) \longrightarrow H^{p+1}(U, U \setminus K),$$

donde δ^* es el homomorfismo de conexión y el segundo homomorfismo es la escisión. Es inmediato comprobar que si cambiamos W por un entorno menor obtenemos un diagrama conmutativo, por lo que podemos formar el límite inductivo de estos homomorfismos

$$\delta^* : \check{H}^p(A) \longrightarrow H_c^{p+1}(U).$$

Sucede que son los homomorfismos de conexión de una sucesión exacta:

Teorema 11.43 *Si V es una variedad topológica compacta, A es un subespacio cerrado y $U = V \setminus A$, entonces la sucesión*

$$\dots \longrightarrow H_c^p(U) \xrightarrow{i} H^p(V) \xrightarrow{j} \check{H}^p(A) \xrightarrow{\delta^*} H_c^{p+1}(U) \longrightarrow \dots$$

es exacta.

DEMOSTRACIÓN: Sea K un subconjunto compacto de U . Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} H^p(U, U \setminus K) & \longrightarrow & H^p(V, V \setminus K) & \longrightarrow & H^p(V) & \longrightarrow & H^p(V \setminus K) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow \\ H_c^p(U) & \xrightarrow{i} & H_c^p(V) & \xrightarrow{1} & H^p(V) & \xrightarrow{j} & \check{H}^p(A) \end{array}$$

Es fácil ver que la composición de los homomorfismos de la fila superior es nula, luego también $ij = 0$ (más concretamente, para cada $\alpha \in H_c^p(U)$ encontramos un K tal que α tiene antiimagen en la primera fila, etc.)

Si $\alpha \in H^p(V)$ cumple $j(\alpha) = 0$, existe un K tal que la imagen de α en $H^p(V \setminus K)$ es nula. Por exactitud, α tiene una antiimagen en $H^p(V, V \setminus K)$, luego también tiene una antiimagen por i . Esto prueba la exactitud en $H^p(V)$.

Para $\check{H}^p(A)$ razonamos de forma análoga con el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} H^p(V) & \longrightarrow & H^p(W) & \longrightarrow & H^{p+1}(V, W) & \longrightarrow & H^{p+1}(U, U \setminus K) \\ \downarrow 1 & & \downarrow & & & & \downarrow \\ H^p(V) & \xrightarrow{j} & \check{H}^p(A) & \xrightarrow{\delta^*} & H_c^{p+1}(U) & & \end{array}$$

donde W es un entorno de A y $K = V \setminus W$.

En efecto, dada $\alpha \in H^p(V)$, será $j(\alpha) = \iota_W(\beta)$, para cierto entorno W de A y cierto $\beta \in H^p(W)$. Así, si $\alpha = [\omega]$, entonces $\beta = [\omega|_{C_p(W)}]$. Al continuar el recorrido por la fila superior pasamos a $[d\omega] = 0$. Así pues, la imagen de α en $H_c^{p+1}(U)$ por la fila superior es nula, luego también por la fila inferior, es decir, $j \circ \delta^* = 0$.

Por otra parte, si $\alpha \in \check{H}^p(A)$ cumple $\delta^*(\alpha) = 0$, tomemos W tal que $\alpha = \iota_W(\beta)$, para cierto $\beta \in H^p(W)$. Tomando W suficientemente pequeño podemos exigir que la imagen de β en $H^{p+1}(U, U \setminus K)$ sea nula, con lo que también lo será su imagen en $H^{p+1}(V, W)$ (porque el tramo que media es un isomorfismo). Ahora bien, la sucesión $H^p(V) \rightarrow H^p(W) \rightarrow H^{p+1}(W)$ es exacta, luego β tiene antiimagen en $H^p(V)$, la cual es, a su vez, una antiimagen de α por j .

Finalmente, para probar la exactitud en $H_c^{p+1}(U)$ consideramos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^p(W) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{p+1}(V, W) & \longrightarrow & H^{p+1}(U, U \setminus K) & \longrightarrow & H^{p+1}(V, W) \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 \check{H}^p(A) & \xrightarrow{\delta^*} & H_c^{p+1}(U) & \xrightarrow{i} & H^{p+1}(V) & &
 \end{array}$$

Observamos que los dos últimos homomorfismos de la fila superior son mutuamente inversos (son la escisión y su inversa), luego al componer toda la fila superior y la columna derecha obtenemos la sucesión exacta de cohomología $H^p(W) \rightarrow H^{p+1}(W) \rightarrow H^{p+1}(V)$. De aquí se sigue inmediatamente que $\delta^* \circ i = 0$.

Por otra parte, si $\alpha \in H_c^{p+1}(U)$, tomamos un compacto K tal que $\alpha = \iota_K(\beta)$, con $\beta \in H^{p+1}(U, U \setminus K)$. Tenemos que la imagen de β en $H^{p+1}(V, W)$ tiene imagen nula en $H^{p+1}(V)$ luego, por la exactitud de la sucesión de cohomología, dicha imagen tiene una antiimagen en $H^p(W)$. A su vez, la imagen de ésta en $\check{H}^p(A)$ es una antiimagen de α por δ^* . ■

Como aplicación de esta sucesión exacta damos una interpretación de la cohomología con soportes compactos en un caso particular:

Teorema 11.44 *Sea V una variedad topológica compacta y U un abierto en V . Sea $A = V \setminus U$. Entonces los homomorfismos*

$$H^p(U, U \setminus K) \rightarrow H^p(V, V \setminus K) \rightarrow H^p(V, A)$$

(la inversa de la escisión seguida de la inclusión) inducen al tomar límite en K un isomorfismo $H_c^p(U) \cong H^p(V, A)$.

DEMOSTRACIÓN: Consideramos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{cccccccc}
 \dots & \longrightarrow & \check{H}^{p-1}(A) & \longrightarrow & H_c^p(U) & \longrightarrow & H^p(V) & \longrightarrow & \check{H}^p(A) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow \kappa & & \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow j & & \\
 \dots & \longrightarrow & H^{p-1}(A) & \longrightarrow & H^p(V, A) & \longrightarrow & H^p(V) & \longrightarrow & H^p(A) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

(Dejamos como ejercicio comprobar que es, efectivamente, conmutativo.)

Por el teorema 11.40 (teniendo en cuenta 1.41 y que toda variedad compacta es metrizable por 1.22) tenemos que los homomorfismos j son isomorfismos, luego basta aplicar el teorema 4.12. ■

Por ejemplo, considerando a \mathbb{R}^n como subespacio de S^n , vemos que la cohomología con soportes compactos de \mathbb{R}^n es la cohomología de S^n relativa a un punto, que a su vez es la cohomología reducida de S^n , es decir, que

$$H_c^p(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } p = n, \\ 0 & \text{si } p \neq n. \end{cases}$$

En particular vemos que $H_c^p(\mathbb{R}^n)$ depende de n , por lo que la cohomología singular con soportes compactos no se conserva por homotopías (pues todos los espacios \mathbb{R}^n son homotópicos a un punto).

11.8 El teorema de homotopía en la cohomología de Alexander-Spanier

La prueba del axioma de homotopía para la cohomología de Alexander-Spanier requiere algún trabajo previo.

Complejos simpliciales abstractos Vamos a desarrollar brevemente una aproximación a lo que sería una “homología de Alexander-Spanier”. Para ello necesitamos generalizar el concepto de deltaedro abstracto a dimensiones arbitrarias:

Definición 11.45 Un *complejo simplicial abstracto* (tal vez infinito) es un conjunto K formado por conjuntos finitos no vacíos y de modo que si $F \in K$ y $\emptyset \neq F' \subset F$, entonces $F' \in K$.

Por ejemplo, si \mathcal{U} es un cubrimiento de X , entonces el conjunto $K(\mathcal{U})$ formado por los subconjuntos finitos de X no vacíos contenidos en un elemento de \mathcal{U} es claramente un complejo simplicial. En particular, esto se aplica al complejo $K(X)$, formado por todos los subconjuntos finitos de X no vacíos.

Vamos a considerar a los complejos simpliciales abstractos como categoría tomando como morfismos únicamente a las inclusiones, de modo que se cumple $\text{hom}(K, K') = \emptyset$ salvo si $K \subset K'$, en cuyo caso el único morfismo es la inclusión.

El *complejo simplicial ordenado* $C(K)$ asociado a un complejo simplicial abstracto K es el complejo directo

$$C(K) = \bigcup_{p=0}^{\infty} C(K)_p,$$

donde $C(K)_p$ es el \mathbb{Z} -módulo libre que tiene por base a todas las $p+1$ -tuplas de elementos de X contenidos en un mismo elemento de K . En $C(K)$ consideramos

el operador frontera determinado por la relación

$$\partial(x_0, \dots, x_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p).$$

Se comprueba sin dificultad que $\partial^2 = 0$, como requiere la definición de complejo.

Obviamente, si $K \subset K'$, entonces $C(K)$ es un subcomplejo de $C(K')$, y la inclusión es un homomorfismo de complejos, por lo que podemos ver a C como un funtor covariante de la categoría de complejos simpliciales abstractos en la categoría de los complejos directos de \mathbb{Z} -módulos.

A su vez, podemos considerar los grupos de homología de los complejos $C(K)$. Podemos considerar dos variantes, completa y reducida, donde los grupos de homología reducida se obtienen extendiendo el complejo $C(K)$ con $C_{-1}(K) = \mathbb{Z}$ y con el homomorfismo $\partial_0 : C(K)_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ dado por $\partial(x) = 1$. Observamos que sigue siendo cierto que $\partial_1 \circ \partial_0 = 0$.

Es claro que la homología completa y la homología reducida de un complejo $C(K)$ difieren únicamente en $H_0(C(K))$.

Un hecho elemental es el siguiente:

Teorema 11.46 *Si X es cualquier conjunto no vacío, entonces los grupos de cohomología reducida $H_p(C(X))$ son todos nulos.*

DEMOSTRACIÓN: Fijemos $a \in X$ y consideremos el homomorfismo de grado 1

$$\Delta : C(X) \rightarrow C(X)$$

dado por $\Delta_p(x_0, \dots, x_p) = (a, x_0, \dots, x_p)$, donde se entiende que $\Delta_{-1}(1) = (a)$. Si $\sigma = (x_0, \dots, x_p) \in C(X)_p$, entonces

$$\partial\Delta(\sigma) = \sigma - \Delta(\partial\sigma),$$

y por linealidad lo mismo vale para toda cadena $c \in C(X)_p$. Por lo tanto, si se trata de un ciclo, resulta que $c = \partial\Delta(c)$, luego c es también una frontera. ■

Si K y K' son complejos simpliciales abstractos, también lo son $K \cup K'$ y $K \cap K'$ (si no es vacío), y sus grupos de homología están relacionados por una sucesión de Mayer-Vietoris:

Teorema 11.47 (Sucesión de Mayer-Vietoris) *Si K y K' son complejos simpliciales abstractos tales que $K \cap K' \neq \emptyset$, existe una sucesión exacta*

$$\begin{aligned} \cdots &\rightarrow H_p(C(K \cap K')) \rightarrow H_p(C(K)) \oplus H(C(K')) \\ &\rightarrow H_p(C(K \cup K')) \rightarrow H_{p-1}(C(K \cap K')) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

(tanto para la homología completa como para la reducida).

DEMOSTRACIÓN: Basta aplicar el teorema 4.10 a la sucesión exacta de homomorfismos de complejos directos

$$0 \rightarrow C(K \cap K') \xrightarrow{i} C(K) \oplus C(K') \xrightarrow{j} C(K \cup K') \rightarrow 0$$

dada por $i(c) = (c, c)$, $j(c, c') = c - c'$. ■

Una caracterización de la cohomología de Alexander-Spanier A continuación probaremos que los grupos de cohomología de Alexander-Spanier pueden expresarse como límites inductivos de otros grupos de cohomología asociados a cubrimientos abiertos.

Definición 11.48 Sea (X, A) un par de conjuntos, con $A \subset X$ y sea $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ un cubrimiento de (X, A) , es decir, un par formado por un cubrimiento \mathcal{U} de X y un cubrimiento $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ de A . Notemos que los elementos de \mathcal{U}' no tienen por qué ser subconjuntos de A , pero podemos considerar

$$\mathcal{U}' \cap A = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{U}'\}.$$

Representaremos por $C(\mathcal{U})$ el complejo simplicial ordenado asociado a $K(\mathcal{U})$. Claramente, $K(\mathcal{U}' \cap A) \subset K(\mathcal{U})$, por lo que $C(\mathcal{U}' \cap A)$ es un subcomplejo de $C(\mathcal{U})$, y podemos considerar el complejo cociente

$$C(\mathcal{U}, \mathcal{U}') = C(\mathcal{U})/C(\mathcal{U}' \cap A).$$

Es claro que C es un funtor covariante en la categoría formada por las cuádruplas $(X, A, \mathcal{U}, \mathcal{U}')$ con los morfismos $f : (X, A, \mathcal{U}, \mathcal{U}') \rightarrow (Y, B, \mathcal{V}, \mathcal{V}')$ determinados por aplicaciones $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ tales que el cubrimiento \mathcal{U} refina a $f^{-1}[\mathcal{V}]$ y \mathcal{U}' refina a $f^{-1}[\mathcal{V}']$.

En efecto, un morfismo en estas condiciones da lugar a inclusiones entre los complejos $K(\mathcal{U}) \subset K(f^{-1}[\mathcal{V}])$ y $K(\mathcal{U}' \cap A) \subset K(f^{-1}[\mathcal{V}'])$, que a su vez inducen homomorfismos

$$f^\# : C(\mathcal{U}) \rightarrow C(\mathcal{V}), \quad f^\# : C(\mathcal{U}' \cap A) \rightarrow C(\mathcal{V}' \cap B)$$

dados por $f^\#(x_0, \dots, x_p) = (f(x_0), \dots, f(x_p))$, los cuales definen a su vez un homomorfismo de complejos

$$f^\# : C(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \rightarrow C(\mathcal{V}, \mathcal{V}').$$

Si \mathbb{A} es un anillo conmutativo y unitario y N es un \mathbb{A} -módulo, consideramos el complejo $C_N^*(\mathcal{U}, \mathcal{U}') = \text{Hom}(C(\mathcal{U}, \mathcal{U}'), N)$ (definición 7.10). Claramente, las cocadenas $f \in C_N^p(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ pueden identificarse con aplicaciones

$$f : C_p(\mathcal{U}) \rightarrow N$$

que se anulan sobre $C_p(\mathcal{U}' \cap A)$. El operador cofrontera es el determinado por

$$df(\sigma) = f(\partial\sigma).$$

Observemos que C_N^* es un funtor contravariante, pues es la composición del funtor covariante C con el funtor contravariante $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, N)$.

Si $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ es un refinamiento de $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$, entonces la restricción

$$C_N^*(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \rightarrow C_N^*(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$$

es un homomorfismo de complejos.

A partir de aquí suponemos que X es un espacio topológico y vamos a considerar únicamente pares de cubrimientos abiertos de (X, A) . Si $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ y $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ son dos de ellos, es claro que el par $(\mathcal{W}, \mathcal{W}')$ dado por

$$\mathcal{W} = \{U \cap V \mid U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}, \quad \mathcal{W}' = \{U' \cap V' \mid U' \in \mathcal{U}', V' \in \mathcal{V}'\}$$

es un refinamiento común, por lo que el conjunto de pares de cubrimientos abiertos de (X, A) , con el orden parcial determinado por $(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \leq (\mathcal{W}, \mathcal{W}')$ si $(\mathcal{W}, \mathcal{W}')$ refina a $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$, es un conjunto dirigido y $\{C_N^*(\mathcal{U}, \mathcal{U}')\}_{(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ es un sistema inductivo con los homomorfismos determinados por las restricciones. Por consiguiente, podemos definir

$$\tilde{A}_{\text{as}}(X, A; N) = \varinjlim_{(\mathcal{U}, \mathcal{U}')} C_N^*(\mathcal{U}, \mathcal{U}').$$

Se cumple que $\tilde{A}_{\text{as}}(-; N)$ es un funtor contravariante definido en la categoría de los pares de espacios topológicos (X, A) , pues si $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ es una aplicación continua, para cada cubrimiento abierto $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ de (Y, B) tenemos que $(f^{-1}[\mathcal{V}], f^{-1}[\mathcal{V}'])$ es un cubrimiento abierto de (X, A) , por lo que tenemos definidos homomorfismos

$$C_N^*(\mathcal{V}, \mathcal{V}') \rightarrow C_N^*(f^{-1}[\mathcal{V}], f^{-1}[\mathcal{V}']) \rightarrow \tilde{A}_{\text{as}}(X, A; N)$$

que a su vez inducen un homomorfismo $\tilde{A}_{\text{as}}(Y, B; N) \rightarrow \tilde{A}_{\text{as}}(X, A; N)$.

Vamos a probar que $\tilde{A}_{\text{as}}(X, A; N)$ es naturalmente isomorfo a $A_{\text{as}}(X, A; N)$.

Para ello tomamos $f \in A_N^p(X, A)$, es decir, una función $f : X^{p+1} \rightarrow N$ localmente nula en A . Esto significa que existe un cubrimiento abierto \mathcal{U}' de X tal que f se anula en $U^{p+1} \cap A^{p+1}$, para todo $U \in \mathcal{U}'$. Entonces, tomando $\mathcal{U} = \mathcal{U}' \cup \{X\}$ tenemos un cubrimiento abierto $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ de (X, A) y f se restringe a una cocadena $\bar{f} \in C_N^p(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$. Considerando a su vez su imagen en el límite inductivo tenemos un homomorfismo

$$\lambda : A_N^p(X, A) \rightarrow \tilde{A}_{\text{as}}^p(X, A; N).$$

En efecto, notemos que $\lambda(f)$ no depende de la elección del cubrimiento \mathcal{U}' , pues si tenemos otro \mathcal{V}' , podemos formar un refinamiento común, y basta comparar las imágenes calculadas con ambos y con el refinamiento, por lo que no perdemos generalidad si suponemos que \mathcal{V}' es un refinamiento de \mathcal{U}' . Ahora bien, en tal caso, $\bar{f}_{\mathcal{V}'}$ no es sino la restricción de $\bar{f}_{\mathcal{U}'}$, por lo que ambas se corresponden con la misma clase en $\tilde{A}_{\text{as}}^p(X, A; N)$. También es inmediato comprobar que λ conmuta con los operadores cofrontera, de modo que es, ciertamente, un homomorfismo de complejos.

Además es natural, es decir, que si $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ es una aplicación continua, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A_N(Y, B) & \xrightarrow{\lambda_{Y, B}} & \tilde{A}_{\text{as}}(Y, B; N) \\ f_{\#} \downarrow & & \downarrow f_{\#} \\ A_N(X, A) & \xrightarrow{\lambda_{X, A}} & \tilde{A}_{\text{as}}(X, A; N) \end{array}$$

Teorema 11.49 *Si (X, A) es un par de espacios topológicos, el homomorfismo natural*

$$\lambda : A_N(X, A) \longrightarrow \tilde{A}_{\text{as}}(X, A; N).$$

es un epimorfismo de complejos cuyo núcleo es $A_N(X)_0$.

DEMOSTRACIÓN: Para probar que λ es suprayectivo tomamos un elemento $x \in \tilde{A}_{\text{as}}^p(X, A; N)$, que será de la forma $\iota_{\mathcal{U}, \mathcal{U}'}(g)$, con $g \in C_N^p(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$, para cierto cubrimiento abierto $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ de (X, A) . Sea $f \in A_N^p(X)$ la aplicación dada por

$$f(x_0, \dots, x_p) = \begin{cases} g(x_0, \dots, x_p) & \text{si existe } U \in \mathcal{U} \text{ tal que } (x_0, \dots, x_p) \in U^p, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Entonces f se anula en $\mathcal{U}' \cap A$, luego $f \in A_N^p(X, A)$ y $\bar{f} = g$, luego $\lambda(f) = x$.

Si $f \in A_N(X, A)$, entonces, por el teorema 4.25, tenemos que f está en el núcleo de λ si y sólo si existe un cubrimiento abierto $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ de (X, A) tal que $\bar{f} = 0$, es decir, si y sólo si f se anula sobre los simplices de $C_p(\mathcal{U})$, es decir, si y sólo si $f \in A_N(X)_0$. ■

Así pues, λ induce un isomorfismo natural

$$\bar{\lambda} : A_{\text{as}}(X, A; N) \longrightarrow \tilde{A}_{\text{as}}(X, A; N).$$

El teorema 4.28 nos da a su vez la caracterización que necesitamos de la cohomología de Alexander-Spanier:

Teorema 11.50 *Existen isomorfismos naturales*

$$H_{\text{as}}^p(X, A; N) \cong \varinjlim_{(\mathcal{U}, \mathcal{U}')} H^p(C_N^*(\mathcal{U}, \mathcal{U}')).$$

Pasamos ya a probar el teorema de homotopía:

Teorema 11.51 (Teorema de homotopía) *Si $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ son aplicaciones continuas homotópicas y $f^*, g^* : H_{\text{as}}(Y, B) \longrightarrow H_{\text{as}}(X, A)$ son los homomorfismos inducidos, entonces $f^* = g^*$.*

En las condiciones del teorema, si $h : (I \times X, I \times A) \longrightarrow (Y, B)$ una homotopía entre f y g y $h_0, h_1 : (X, A) \longrightarrow (I \times X, I \times A)$ son las aplicaciones dadas por $h_0(x) = (0, x)$, $h_1(x) = (1, x)$, tenemos que $h_0 \circ h = f$, $h_1 \circ h = g$, luego $f^* = h^* \circ h_0^*$, $g^* = h^* \circ h_1^*$, y basta probar que $h_0^* = h_1^*$.

A su vez, para ello basta probar el teorema siguiente:

Teorema 11.52 *Si $h_0, h_1 : (X, A) \longrightarrow (I \times X, I \times A)$ son las aplicaciones dadas por $h_0(x) = (0, x)$, $h_1(x) = (1, x)$, para cada cubrimiento abierto $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ de $(I \times A, I \times A)$, existe un cubrimiento abierto $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ de (X, A) que refina a los cubrimientos $(h_i^{-1}[\mathcal{U}], h_i^{-1}[\mathcal{U}'])$ y de modo que los homomorfismos*

$$h_0^\sharp, h_1^\sharp : C(\mathcal{V}, \mathcal{V}') \longrightarrow C(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$$

son homotópicos.

En efecto, si se cumple este teorema, también serán homotópicos los homomorfismos duales

$$h_{0\sharp}, h_{1\sharp} : C^*(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \longrightarrow C^*(\mathcal{V}, \mathcal{V}'),$$

luego los homomorfismos que éstos inducen entre los grupos de cohomología

$$h_0^*, h_1^* : H^p(C^*(\mathcal{U}, \mathcal{U}')) \longrightarrow H^p(C^*(\mathcal{V}, \mathcal{V}'))$$

serán iguales, y también lo serán las composiciones

$$h_0^*, h_1^* : H^p(C^*(\mathcal{U}, \mathcal{U}')) \longrightarrow \tilde{A}_{\text{as}}(X, A; N).$$

Por último, pasando al límite, también lo serán los homomorfismos

$$h_0^*, h_1^* : \tilde{A}_{\text{as}}(I \times X, I \times A; N) \longrightarrow \tilde{A}_{\text{as}}(X, A; N).$$

Finalmente, el teorema 11.50 nos da que lo mismo vale para los homomorfismos inducidos entre los grupos de cohomología de Alexander-Spanier. ■

DEMOSTRACIÓN (de 11.52): En las condiciones del enunciado, fijado $x \in X$, para cada $r \in I$, existe un $U \in \mathcal{U}$ tal que $(r, x) \in U$, luego existe un entorno $V_{r,x}$ de x y naturales $0 \leq k < l < 2^n$ tales que

$$(r, x) \in [k/2^n, l/2^n] \times V_{r,x} \subset U,$$

(donde el intervalo es un entorno de r en I). Más aún, si $x \in A$, podemos exigir que el producto esté en un abierto de \mathcal{U}' .

Por la compacidad de $I \times \{x\}$ podemos cubrirlo por un número finito de productos de este tipo y, si llamamos V_x a la intersección de los $V_{r,x}$ del cubrimiento finito y n al máximo natural que aparece en los intervalos, tenemos que todo producto $[k/2^n, (k+1)/2^n] \times V_x$ está contenido en un abierto de \mathcal{U} (o de \mathcal{U}' si $x \in A$).

Llamamos $\mathcal{V} = \{V_x \mid x \in X\}$ y $\mathcal{V}' = \{V_x \mid x \in A\}$ y tenemos que probar que estos cubrimientos cumplen lo requerido.

Ante todo, como $[0, 1/2^n] \times V_x \subset U \in \mathcal{U}$, tenemos que $V_x \subset h_0^{-1}[U]$, luego \mathcal{V} refina a $h_0^{-1}[\mathcal{U}]$, e igualmente \mathcal{V}' refina a $h_0^{-1}[\mathcal{U}']$. Considerando el producto $[(n-1)/2^n, 1] \times V_x$ obtenemos que lo mismo vale para h_1 .

Falta probar que los homomorfismos

$$h_{0\sharp}, h_{1\sharp} : C(\mathcal{V}, \mathcal{V}') \longrightarrow C(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$$

son homotópicos. Para ello usaremos el teorema de los modelos acíclicos.

Consideramos la categoría \mathcal{C} formada por los complejos simpliciales abstractos $K \subset K(\mathcal{V})$, con las inclusiones como únicos morfismos. Sobre \mathcal{C} tenemos definido el funtor C que a cada complejo K le hace corresponder su complejo ordenado $C(K)$.

Si $F \neq \emptyset$ es un subconjunto finito de un abierto de \mathcal{V} , consideramos el complejo simplicial abstracto $\bar{F} = \mathcal{P}F \setminus \{\emptyset\} \in \mathcal{C}$. Sea \mathcal{M} el conjunto de todos los complejos de esta forma. Vamos a ver que C es un funtor libre con modelos en \mathcal{M} .

En efecto, fijado $p \geq 0$, si F es un subconjunto de un abierto de \mathcal{V} con $|F| = p + 1$, tenemos que $F^{p+1} \subset C_p(\bar{F})$. Vamos a probar que la unión de todos estos conjuntos de p -simplices forma una base de C_p .

Para ello observamos que si $K \in \mathcal{C}$, el conjunto $\text{hom}(\bar{F}, K)$ es vacío salvo que $\bar{F} \subset K$, es decir, salvo si $F \in K$, en cuyo caso el único morfismo es la inclusión $i_{\bar{F}, K}$ y, para cada $\sigma \in F^{p+1}$, tenemos que $G(i_{\bar{F}, K})(\sigma) = \sigma$, por lo que $G(i_{\bar{F}, K})(\sigma)$ recorre una base de $C_p(K)$.

Ahora vamos a definir un segundo funtor C' . Para ello, si F es un subconjunto finito de un abierto de \mathcal{V} (o de \mathcal{V}'), llamamos n_F al menor número natural no nulo tal que, para todo $0 \leq m < n_F$, el conjunto $[m/2^{n_F}, (m+1)/2^{n_F}] \times F$ está contenido en un abierto de \mathcal{U} (o de \mathcal{U}'). La existencia de n_F se sigue de la construcción del cubrimiento $(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$.

Para cada $K \in \mathcal{C}$, sea $C'(K) = C(K(\mathcal{W}))$, donde \mathcal{W} es el cubrimiento de $I \times X$ formado por los productos $[m/2^{n_F}, (m+1)/2^{n_F}] \times F$, con $F \in K$ (entendiendo que si F está contenido en un abierto de \mathcal{V}' el natural n_F se calcula respecto de \mathcal{V}').

Es claro que si $K \subset K'$, entonces $C'(K)$ es un subcomplejo de $C'(K')$, por lo que C' es un funtor covariante de \mathcal{C} en la categoría de complejos de \mathbb{Z} -módulos. Además, tenemos dos transformaciones naturales $h_0^\sharp, h_1^\sharp : C \rightarrow C'$ que a cada $K \in \mathcal{C}$ le asignan los homomorfismos de complejos

$$h_{0K}^\sharp, h_{1K}^\sharp : C(K) \rightarrow C'(K)$$

dados por

$$h_{0K}^\sharp(x_0, \dots, x_p) = ((0, x_0), \dots, (0, x_p)), \quad h_{1K}^\sharp(x_0, \dots, x_p) = ((1, x_0), \dots, (1, x_p)).$$

Los homomorfismos

$$h_{0K}^*, h_{1K}^* : H_0(C(K)) \rightarrow H_0(C'(K))$$

inducidos en los grupos de homología (completa) de dimensión 0 son iguales. En efecto, un elemento de $H_0(G(K))$ es de la forma $[x]$, con $x \in X$, y sus imágenes son $h_{0K}^*([x]) = [(0, x)]$, $h_{1K}^*([x]) = [(1, x)]$. Ahora bien, si $n = n_{\{x\}}$, tenemos que

$$c = \sum_{m=0}^{2^n-1} \left(\left(\frac{m}{2^n}, x \right), \left(\frac{m+1}{2^n}, x \right) \right) \in C'(K)_1$$

y $\partial c = (1, x) - (0, x)$, luego $h_{0K}^*([x]) = h_{1K}^*([x])$.

Si comprobamos que el funtor C' es acíclico en dimensiones positivas respecto a los modelos de C , podremos aplicar el teorema de los modelos acíclicos, que nos garantizará la existencia de una homotopía $\Delta : C \rightarrow C'$ entre ambas transformaciones naturales.

Considerando en particular $K = K(\mathcal{V})$ y $K' = K(\mathcal{V}' \cap A)$, tenemos que $K' \subset K$ y

$$C(K) = C(\mathcal{V}), \quad C(K') = C(\mathcal{V}' \cap A), \quad C'(K) \subset C(\mathcal{U}), \quad C'(K') \subset C(\mathcal{U}' \cap (I \times A)).$$

Por lo tanto, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} C(\mathcal{V}) & \xrightarrow{\Delta_K} & C'(K) & \xrightarrow{i} & C(\mathcal{U}) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ C(\mathcal{V}' \cap A) & \xrightarrow{\Delta_{K'}} & C'(K') & \xrightarrow{i} & C(\mathcal{U}' \cap (I \times A)) \end{array}$$

Pero es inmediato que $\Delta \circ i$ es también una homotopía entre $h_{0K} \circ i = h_0^\sharp$ y $h_{1K} \circ i = h_1^\sharp$, y la conmutatividad del diagrama implica que induce a su vez una homotopía

$$\Delta : C(\mathcal{V}, \mathcal{V}') \longrightarrow C(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$$

entre h_0^\sharp y h_1^\sharp , que es lo que teníamos que probar.

Así pues, sólo falta probar que C' es acíclico en dimensiones positivas, es decir, que si $F \neq \emptyset$ es un subconjunto finito de un un abierto de \mathcal{V} , entonces $H_p(C'(\bar{F})) = 0$ para todo $p \geq 1$. De hecho probaremos que $H_p(C'(\bar{F})) = 0$ para todo $p \geq 0$ con la homología reducida.

Si $F = F_1, \dots, F_q$ son todos los subconjuntos no vacíos de F y $n_i = n_{F_i}$, entonces $C'(F)$ es el complejo ordenado asociado al cubrimiento finito de $I \times X$ formado por los conjuntos $[m/2^{n_i}, (m+1)/2^{n_i}] \times F_i$, por lo que basta probar lo siguiente:

Sean $F = F_1, \dots, F_q$ subconjuntos de un conjunto $F \neq \emptyset$, sean n_1, \dots, n_q números naturales no nulos y sea K el complejo simplicial abstracto en $I \times F$ asociado al cubrimiento formado por los productos $[m/2^{n_i}, (m+1)/2^{n_i}] \times F_i$. Entonces $H_p(C(K)) = 0$ para todo $p \geq 0$, con la homología reducida.

La clave de esta formulación es que en ella no exigimos que los conjuntos F_i sean todos los subconjuntos de F , lo cual nos permite razonar por inducción sobre q . Empezamos, pues, probándolo para $q = 1$.

Si $0 \leq m < 2^n$, llamamos $K_m = K([m/2^n, (m+1)/2^n] \times F)$ y si $0 \leq m \leq 2^n$ sea $L_m = K(\{m/2^n\} \times F)$. Así resulta que $K = \bigcup_m K_m$, $K_m \cap K_{m+1} = L_{m+1}$ y $K_m \cap K_{m'} = \emptyset$ si $|m - m'| > 1$.

Llamemos $\tilde{K}_l = \bigcup_{m=1}^l K_l$, de modo que

$$\tilde{K}_{l+1} = \tilde{K}_l \cup K_{l+1}, \quad \tilde{K}_l \cap K_{l+1} = L_{l+1}.$$

El teorema 11.46 nos da que los complejos K_m y L_m tienen homología nula y de ahí se deduce inductivamente que lo mismo vale para todos los \tilde{K}_l . En efecto,

si vale para \tilde{K}_l , la sucesión de Mayer-Vietoris correspondiente a \tilde{K}_l y K_{l+1} nos da inmediatamente que lo mismo vale para \tilde{K}_{l+1} . Por lo tanto, $\tilde{K}_{2^m-1} = K$ tiene homología nula. Esto completa la prueba del caso $q = 1$.

Supongamos ahora que el resultado es cierto para menos de q conjuntos. Si $F_q = \emptyset$, entonces K es el complejo determinado por F_1, \dots, F_{q-1} y la homología de $C(K)$ es nula por hipótesis de inducción. Supongamos, pues, que $F_q \neq \emptyset$.

Definimos K_0 como el complejo correspondiente a los conjuntos F_1, \dots, F_{q-1} y K' el correspondiente a F_q . Entonces $C(K_0)$ tiene homología nula por hipótesis de inducción, mientras que $C(K')$ tiene homología nula por el caso $q = 1$. Basta probar que $C(K_0 \cap K')$ tiene homología nula, pues entonces la sucesión de Mayer-Vietoris nos da que lo mismo vale para $K_0 \cup K' = K$.

Ahora bien, $K_0 \cap K'$ es el complejo asociado a los conjuntos $F'_i = F_i \cap F_q$ y a los números naturales $n'_i = \max\{n_i, n_q\}$, para $i = 1, \dots, q-1$, luego $C(K_0 \cap K')$ tiene homología nula por hipótesis de inducción. ■

Capítulo XII

Homología y cohomología

En este capítulo vamos a ver varias aplicaciones a la topología algebraica de los funtores derivados que hemos estudiado en el capítulo VII.

12.1 Cambio de coeficientes en homología

El teorema 7.7 nos permite relacionar los grupos de homología de un espacio topológico con coeficientes en un \mathbb{A} -módulo arbitrario con los correspondientes a \mathbb{Z} . En general, podemos definir homomorfismos:

$$\mu : H_p(X, U) \otimes_{\mathbb{Z}} M \longrightarrow H_p^M(X, U)$$

determinado por $\mu([c] \otimes m) = [c \otimes m]$. Lo que asegura 7.7 es que cada uno de estos homomorfismos es el monomorfismo de una sucesión exacta corta que se escinde, de modo que tenemos una descomposición en suma directa:

Teorema 12.1 (de cambio de coeficientes) *Sea (X, U) un par de espacios topológicos, \mathbb{A} un dominio de ideales principales y M un \mathbb{A} -módulo. Entonces*

$$H_p^M(X, U) \cong (H_p(X, U) \otimes_{\mathbb{Z}} M) \oplus \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{p-1}(X, U), M).$$

En particular μ es un isomorfismo siempre que $H_{p-1}(X, U)$ o M es libre de torsión como grupo abeliano. Si $M = \mathbb{A}$ es un anillo, lo segundo sucede si tiene característica 0.

En general vemos que los números de Betti (y, por consiguiente, la característica de Euler) de un espacio en el que estén definidos, son los mismos para todos los dominios de ideales principales. En efecto, si $H_p^{\mathbb{Z}}(X) = \mathbb{Z}^r \oplus H_p^{\mathbb{Z}}(X)_t$, donde $H_p^{\mathbb{Z}}(X)_t$ es el submódulo de torsión, entonces

$$H_p^{\mathbb{A}}(X) \cong (\mathbb{Z}^r \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}) \oplus (H_p^{\mathbb{Z}}(X)_t \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}).$$

El primer sumando es isomorfo a \mathbb{A}^r , luego es libre, y el segundo es un \mathbb{A} -módulo de torsión. Por consiguiente, el rango de $H_p^{\mathbb{A}}(X)$ como \mathbb{A} -módulo es el mismo que el de $H_p^{\mathbb{Z}}(X)$ como \mathbb{Z} -módulo.

Como aplicación obtenemos algunos hechos adicionales sobre orientación de variedades topológicas:

Teorema 12.2 *Una variedad topológica es orientable si y sólo si es \mathbb{A} -orientable para todo anillo \mathbb{A} .*

DEMOSTRACIÓN: Una implicación es obvia. Si V es una variedad orientable, teniendo en cuenta la nota 2 tras el teorema 10.35, el teorema de cambio de coeficientes nos da un isomorfismo natural

$$H_n^{\mathbb{Z}}(V, V \setminus U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{A} \cong H_n^{\mathbb{A}}(V, V \setminus U), \quad (12.1)$$

para todo entorno abierto U suficientemente pequeño de cualquier punto de V . Si α es una orientación en V y α_U es una determinación local de α en un abierto U (suficientemente pequeño para que tengamos el isomorfismo anterior), es claro que $\alpha_U \otimes 1$ es un generador del miembro izquierdo de (12.1), de donde se sigue inmediatamente que las imágenes de estos tensores por los isomorfismos determinan una \mathbb{A} -orientación en V . ■

El teorema siguiente muestra que, en general, la orientabilidad depende del anillo de coeficientes:

Teorema 12.3 *Si \mathbb{A} es un anillo de característica 2, entonces toda variedad topológica es \mathbb{A} -orientable.*

DEMOSTRACIÓN: Si V es una variedad n -dimensional, consideremos un abierto U que satisfaga el teorema 10.35 y para el que tengamos el isomorfismo (12.1). Entonces el grupo abeliano $H_n^{\mathbb{Z}}(V, V \setminus U) \cong \mathbb{Z}$ tiene exactamente dos generadores $\pm\alpha_U$, pero ambos determinan el mismo tensor $\alpha_U \otimes 1 = -\alpha_U \otimes 1$ en $H_n^{\mathbb{Z}}(V, V \setminus U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}$, por lo que tenemos un generador $\beta_U \in H_n^{\mathbb{A}}(V, V \setminus U)$ unívocamente determinado. Estas clases constituyen las determinaciones locales de una \mathbb{A} -orientación de V . ■

El teorema siguiente generaliza a 10.52:

Teorema 12.4 *Si V es una variedad n -dimensional compacta y conexa, entonces*

$$H_n(V) \cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } V \text{ es } \mathbb{A}\text{-orientable,} \\ \mathbb{A}_{(2)} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: Recordemos que $\mathbb{A}_{(2)}$ es el núcleo de la multiplicación por 2 en \mathbb{A} . Equivalentemente, $\mathbb{A}_{(2)} = \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{A}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Supongamos que V no es \mathbb{A} -orientable y sea $s \in \Gamma[V]$ una sección no nula. Digamos que $x \in V$ cumple $s(x) \neq 0$.

Podemos identificar $H_n^{\mathbb{A}}(V, V \setminus \{x\}) = H_n^{\mathbb{Z}}(V, V \setminus \{x\}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}$ a través del isomorfismo natural. Si α_x es una base de $H_n^{\mathbb{Z}}(V, V \setminus \{x\})$, entonces $\alpha_x \otimes 1$ es una base de $H_n^{\mathbb{Z}}(V, V \setminus \{x\}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{A}$. Por lo tanto $s(x) = (x, \alpha_x \otimes a)$, para cierto $a \in \mathbb{A}$ no nulo.

Es claro que $s[V]$ es una componente conexa de $\tilde{V}_{\mathbb{A}}$ (es fácil ver que es abierto y, ciertamente, es cerrado y conexo). Por otra parte, también es fácil comprobar que la aplicación $\phi_a : (\tilde{V}_1)_{\mathbb{Z}} \rightarrow \tilde{V}_{\mathbb{A}}$ dada por $(y, \alpha_y) \mapsto (y, \alpha_y \otimes a)$ es continua y $(\tilde{V}_1)_{\mathbb{Z}}$ es conexo por el teorema 10.45 (si V fuera orientable sería \mathbb{A} -orientable). Por consiguiente $\phi_a[(\tilde{V}_1)_{\mathbb{Z}}]$ es un conexo en $\tilde{V}_{\mathbb{A}}$ que contiene a $s(x)$. Necesariamente, $\phi_a[(\tilde{V}_1)_{\mathbb{Z}}] \subset s[V]$. Ahora bien, la restricción de p a $s[V]$ es la inversa de s . En particular es biyectiva, pero sucede que la restricción de p a $\phi_a[(\tilde{V}_1)_{\mathbb{Z}}]$ ya es biyectiva, luego ha de ser $s[V] = \phi_a[(\tilde{V}_1)_{\mathbb{Z}}]$.

Pero $(x, \alpha_x \otimes a)$ y $(x, -\alpha_x \otimes a)$ son dos elementos de $\phi_a[(\tilde{V}_1)_{\mathbb{Z}}]$ con la misma proyección, lo que obliga a que $\alpha_x \otimes a = \alpha_x \otimes (-a)$ o, equivalentemente, a que $\alpha_x \otimes 2a = 0$. Puesto que $\alpha_x \otimes 1$ es una base, esto sólo puede suceder si $2a = 0$.

En resumen, s es la sección s_a dada por $s_a(x) = (x, \alpha_x \otimes a)$, donde α_x es cualquiera de las dos orientaciones locales en x . Es claro que s_a está definido para cualquier $a \in \mathbb{A}_{(2)}$, luego $\Gamma[V] = \{s_a \mid a \in \mathbb{A}_{(2)}\}$, y es claro que $a \mapsto s_a$ es un isomorfismo. Así pues, $\mathbb{A}_{(2)} \cong \Gamma[V] \cong H_n(V)$. ■

El teorema anterior nos aporta un dato sobre los grupos de homología de dimensión $n - 1$ sobre \mathbb{Z} :

Teorema 12.5 *Sea V una variedad topológica conexa n -dimensional. Entonces la parte de torsión del grupo $H_{n-1}(V)$ (sobre \mathbb{Z}) es de orden 2 si V es compacta y no orientable, y es nula en caso contrario.*

DEMOSTRACIÓN: Si V es compacta y orientable y $m > 1$, el teorema anterior y 7.7 nos dan que

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} &\cong H_n^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(V) \cong (H_n(V) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \oplus \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(V), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \\ &\cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(V), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(V), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) = 0$ para todo $m > 1$, lo que implica que $H_{n-1}(V)$ no tiene torsión. Si V no es compacta llegamos a la misma conclusión, pues esta vez la cadena de isomorfismos empieza con el módulo trivial.

Si V es compacta no orientable y m es impar, el teorema 10.53 nos da también que $H_n^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(V) = 0$, por lo que concluimos también que $\text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(V), \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ es trivial, y de aquí se sigue que el módulo de torsión de $H_{n-1}(V)$ tiene orden potencia de 2. Ahora bien, por el teorema anterior,

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong H_n^{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}(V) \cong \text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(V), \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = \{x \in H_{n-1}(V) \mid 4x = 0\}.$$

Esto implica que $H_{n-1}(V)$ no tiene elementos de orden 4 (o, de lo contrario, $\text{Tor}_{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(V), \mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ tendría al menos cuatro elementos) y sólo puede tener un elemento de orden 2. ■

La información que proporciona el teorema anterior puede parecer insignificante, pero el teorema siguiente, en el que calculamos la homología de las sumas conexas de variedades, muestra su utilidad:

Teorema 12.6 Si M y N son variedades topológicas compactas y conexas de la misma dimensión n , entonces, para la homología reducida, se cumple que

$$H_p(M\#N) \cong H_p(M) \oplus H_p(N) \quad \text{para } p = 0, \dots, n - 2$$

y también para $p = n - 1$ si al menos una de las dos variedades es orientable. Si ninguna de las dos lo es y $H_{n-1}(M) \cong \mathbb{Z}^r \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $H_{n-1}(N) \cong \mathbb{Z}^{r'} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, entonces

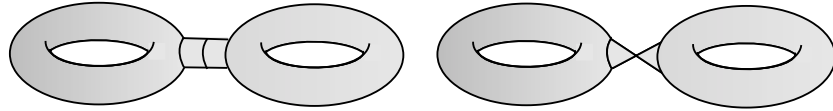
$$H_{n-1}(M\#N) = \mathbb{Z}^{r+r'+1} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Además,

$$H_n(M\#N) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } M \text{ y } N \text{ son orientables,} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: La suma conexa $M\#N$ es la suma amalgamada de los espacios M_0 y N_0 que resultan de eliminar en cada superficie un abierto homeomorfo a una bola abierta en \mathbb{R}^n a través de un homeomorfismo que identifica las fronteras \tilde{S}^{n-1} y \tilde{S}^{n-1} de los agujeros a una esfera $S_0^{n-1} \subset M\#N$. Vamos a probar que

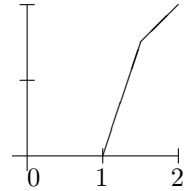
$$(M\#N)/S_0^{n-1} \cong M \vee N.$$



Sea $h : [1, 2] \rightarrow [0, 2]$ la aplicación dada por la gráfica de la figura. Claramente es un homeomorfismo que, restringido a un entorno de 2, es la identidad.

Consideremos ahora la corona $A = \bar{B}_2^n(0) \setminus B_1^n(0)$ y sea $f : A \rightarrow \bar{B}_2^n(0)$ la aplicación dada por

$$f(x) = \frac{h(\|x\|)}{\|x\|} x.$$



Se trata de una aplicación continua que, restringida a un entorno de $\partial B_2^n(0)$, es la identidad y que es biyectiva en la corona $A \setminus S^{n-1}$, mientras que en S^{n-1} toma el valor constante 0.

Tomemos ahora la variedad M de dimensión n y sea $U \subset M$ un abierto tal que esté definido un homeomorfismo $x : \bar{U} \rightarrow \bar{B}_2^n(0)$. Sea $p = x^{-1}(0)$, sea $M_0 = M \setminus x^{-1}[B_1^n(0)]$ y sea $\tilde{S}^{n-1} = x^{-1}[S^{n-1}] \subset M_0$. Definimos

$$g : M_0 \rightarrow M$$

como la aplicación dada por $g|_U = x \circ f \circ x^{-1}$ y que fuera de U es la identidad. Entonces g es también la identidad en un entorno de cada punto de ∂U , por lo que g es continua. Claramente es biyectiva en $M_0 \setminus \tilde{S}^{n-1}$, mientras que $g|_{\tilde{S}^{n-1}}$ es constante igual a p .

De aquí se sigue que g induce una aplicación continua $M_0/\tilde{S}^{n-1} \rightarrow M$ que claramente es biyectiva, luego por compacidad es un homeomorfismo. Esto significa que si a una variedad topológica le hacemos un agujero esférico y luego identificamos el borde a un punto el cociente es homeomorfo a M .

Realizamos la misma construcción con N , de modo que obtenemos una aplicación

$$g' : N_0 \rightarrow N,$$

biyectiva en $N_0 \setminus \tilde{S}'^{n-1}$ y que restringida a \tilde{S}'^{n-1} es constante igual a p' . Estas dos aplicaciones inducen una aplicación continua

$$g \oplus g' : M_0 \oplus N_0 \rightarrow M \vee N,$$

donde $M \vee N$ se obtiene identificando p y p' a un punto p_0 .

Sea cual sea el homeomorfismo entre \tilde{S}^{n-1} y \tilde{S}'^{n-1} que usemos para calcular la suma conexa, lo cierto es que cada par de puntos identificados tiene la misma imagen en $M \vee N$ (el punto p_0), por lo que esta aplicación induce una aplicación continua

$$\bar{g} : M \# N \rightarrow M \vee N.$$

Además es biyectiva salvo en la esfera S_0^{n-1} a la que se identifican las esferas \tilde{S}^{n-1} y \tilde{S}'^{n-1} , cuyos puntos van todos a p_0 . Por lo tanto, \bar{g} induce una aplicación continua

$$(M \# N)/S_0^{n-1} \rightarrow M \vee N,$$

que claramente es biyectiva, luego por compacidad es un homeomorfismo.

La sucesión exacta de homología asociada al par $(M \# N, S_0^{n-1})$ con la homología reducida es de la forma

$$\dots \rightarrow H_p(S_0^{n-1}) \rightarrow H_p(M \# N) \rightarrow H_p(M \vee N) \rightarrow H_{p-1}(S_0^{n-1}) \rightarrow \dots$$

Pero $H_k(S_0^{n-1}) = 0$ para $k < p-1$, por lo que, para $p = 0, \dots, n-2$, tenemos que

$$H_p(M \# N) \cong H_p(M \vee N) \cong H_p(M) \oplus H_p(N),$$

donde hemos usado el teorema 9.35 que nos da la homología de un ramo de espacios topológicos.

La parte no trivial de la sucesión exacta es

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_n(M \# N) \rightarrow H_n(M \vee N) \rightarrow H_{n-1}(S_0^{n-1}) \rightarrow \\ H_{n-1}(M \# N) \rightarrow H_{n-1}(M \vee N) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

o, más concretamente,

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_n(M \# N) \rightarrow H_n(M) \oplus H_n(N) \rightarrow \mathbb{Z} \\ \rightarrow H_{n-1}(M \# N) \rightarrow H_{n-1}(M) \oplus H_{n-1}(N) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ahora distinguimos casos según si M y N son o no orientables. Si ambas son orientables tenemos

$$0 \rightarrow H_n(M\#N) \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow H_{n-1}(M\#N) \rightarrow H_{n-1}(M) \oplus H_{n-1}(N) \rightarrow 0.$$

Como un homomorfismo $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ no puede ser inyectivo, tiene que ser $H_n(M\#N) \neq 0$, luego $M\#N$ es orientable, y en consecuencia $H_n(M\#N) \cong \mathbb{Z}$.

Ahora el monomorfismo $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$ no puede ser suprayectivo, luego el homomorfismo $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ no puede ser nulo y su imagen es un ideal $m\mathbb{Z}$ con $m \neq 0$. Por consiguiente $H_{n-1}(M\#N)$ contiene un submódulo isomorfo a $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, pero el teorema anterior afirma que no puede tener elementos de torsión, luego tiene que ser $m = 1$. Por lo tanto el homomorfismo $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$ es suprayectivo, luego el homomorfismo

$$H_{n-1}(M\#N) \rightarrow H_{n-1}(M) \oplus H_{n-1}(N)$$

es inyectivo y, de hecho, biyectivo.

Supongamos ahora que sólo una de las variedades es orientable. Entonces la situación es

$$0 \rightarrow H_n(M\#N) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow H_{n-1}(M\#N) \rightarrow H_{n-1}(M) \oplus H_{n-1}(N) \rightarrow 0.$$

Veamos en primer lugar que $M\#N$ no puede ser orientable. En tal caso sería $H_n(M\#N) \cong \mathbb{Z}$ y el monomorfismo $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tendría imagen $m\mathbb{Z}$, con $m \neq 0$, luego $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ sería isomorfo a un submódulo de \mathbb{Z} , lo cual sólo es posible si $m = 1$, luego como antes llegaríamos a que

$$H_{n-1}(M\#N) \cong H_{n-1}(M) \oplus H_{n-1}(N),$$

pero esto es imposible, porque según el teorema anterior el primer módulo no tiene parte de torsión, y el segundo tiene parte de torsión de orden 2. Así pues, $M\#N$ no es orientable y $H_n(M\#N) = 0$.

Tenemos entonces un monomorfismo $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, cuya imagen será un ideal $m\mathbb{Z}$, con $m \neq 0$ y entonces $H_{n-1}(M\#N)$ tiene un submódulo isomorfo a $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Por el teorema anterior tiene que ser $m = 1$ o bien $m = 2$.

Pero si $m = 2$ lo que tenemos es que el submódulo de torsión de $H_{n-1}(M)$ es el núcleo del epimorfismo final de la sucesión, pero eso significaría que el módulo $N_{n-1}(M) \oplus H_{n-1}(N)$ no tendría torsión, cuando debe tener un submódulo de torsión de orden 2, ya que uno de los sumandos corresponde a una variedad no orientable. Por lo tanto tiene que ser $m = 1$ y nuevamente llegamos a que

$$H_{n-1}(M\#N) \cong N_{n-1}(M) \oplus H_{n-1}(N).$$

Consideramos por último el caso en que ninguna de las dos variedades es orientable. Entonces el principio de la sucesión exacta nos da inmediatamente que $H_n(M\#N) = 0$, luego tenemos

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow H_{n-1}(M\#N) \rightarrow H_{n-1}(M) \oplus H_{n-1}(N) \rightarrow 0.$$

El teorema 10.26 nos da que

$$\text{rang } H_{n-1}(M\#N) = \text{rang } H_{n-1}(M) + \text{rang } H_{n-1}(N) + 1,$$

y por el teorema anterior la estructura de $H_{n-1}(M\#N)$ es la que indica el enunciado. ■

Veamos algunos ejemplos:

Sumas conexas de superficies compactas Si calculamos los grupos de homología H_1 y H_2 de las sumas conexas de superficies compactas vemos que

$$M_g\#M_{g'} \cong M_{g+g'}, \quad M_g\#N_h \cong N_{2g+h}, \quad N_h\#N_{h'} \cong N_{h+h'}.$$

En particular vemos que las sumas conexas de superficies compactas no dependen en absoluto de la forma en que se realiza el cociente. ■

Ejemplo: La suma conexa de dos planos proyectivos complejos Sin más que aplicar el teorema anterior, y teniendo en cuenta el teorema 10.18, vemos que la homología completa de la suma conexa de dos planos proyectivos complejos es

$$H_0(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})\#\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})\#\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = 0, \quad H_2(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})\#\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}^2, \\ H_3(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})\#\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) = 0, \quad H_4(\mathbb{P}^2(\mathbb{C})\#\mathbb{P}^2(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}.$$

(En realidad, por el teorema de cambio de coeficientes, teniendo en cuenta que todos los grupos de homología son libres, lo mismo vale para cualquier dominio de ideales principales \mathbb{A} en lugar de \mathbb{Z}). ■

Nota Más adelante necesitaremos una versión más fina del teorema 12.6 para el caso de variedades orientables. Sea $g : M\#N \rightarrow M \vee N$ la composición

$$M\#N \xrightarrow{\pi} (M\#N)/S_0^{n-1} \xrightarrow{g_0} M \vee N$$

de la proyección canónica en el cociente con el homeomorfismo construido en la prueba del teorema 12.6. Vamos a probar que $g_* : H_p(M\#N) \rightarrow H_p(M \vee N)$ es un isomorfismo salvo para $p = n$. En este caso tenemos que $H_p(M\#N) \cong \mathbb{Z}$, mientras que $H_p(M \vee N) \cong \mathbb{Z}^2$. Más precisamente, según la observación tras el teorema 9.35, se cumple que $H_n(M \vee N) \cong H_n(M) \oplus H_n(N)$, y el isomorfismo es el inducido por las proyección canónica

$$j : M \oplus N \rightarrow M \vee N,$$

de modo que $H_n(M \vee N) = \langle j(\zeta_M), j(\zeta_N) \rangle$.

La precisión que vamos a necesitar es que, eligiendo adecuadamente generadores $\zeta_{M\#N}$, ζ_M y ζ_N de los tres grupos de homología, se cumple que

$$g_*(\zeta_{M\#N}) = j_*(\zeta_M) + j_*(\zeta_N).$$

Observemos en primer lugar que el hecho de que g_* sea un isomorfismo para $p \neq n$ es esencialmente lo que ya hemos probado en 12.6. En efecto, para $p = 0$ es trivial y, para $0 < p < n$, allí hemos probado que la inclusión induce isomorfismos

$$i_* : H_p(M \# N) \longrightarrow H_p(M \# N, S_0^{n-1}),$$

pero este segundo grupo lo identificábamos con $H_p(M \vee N)$ a través de los isomorfismos

$$H_p(M \# N, S_0^{n-1}) \xrightarrow{\pi_*} H_p((M \# N)/S_0^{n-1}, \{p\}) \longleftarrow H_p(M \vee N) \xrightarrow{g_*} H_p(M \vee N)$$

dados por el teorema 9.33. Esto es lo mismo que

$$\begin{aligned} H_p(M \# N, S_0^{n-1}) &\xrightarrow{\pi_*} H_p((M \# N)/S_0^{n-1}, \{p\}) \\ &\xrightarrow{g_*} H_p(M \vee N, \{p\}) \longleftarrow H_p(M \vee N), \end{aligned}$$

que no es sino $g_* \circ i_*^{-1}$. En total tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_p(M \# N) & \xrightarrow{g_*} & H_p(M \vee N) \\ i_* \downarrow & & \downarrow i_* \\ H_p(M \# N, S_0^{n-1}) & \xrightarrow{g_*} & H_p(M \vee N, \{p\}) \end{array}$$

en el que todas las flechas salvo a lo sumo la superior son isomorfismos, luego ésta también lo es.

La parte delicada es analizar $g_* : H_n(M \# N) \longrightarrow H_n(M \vee N)$ o, más precisamente, la composición

$$H_n(M \# N) \xrightarrow{g_*} H_n(M \vee N) \xleftarrow{j_*} H_n(M) \oplus H_n(N).$$

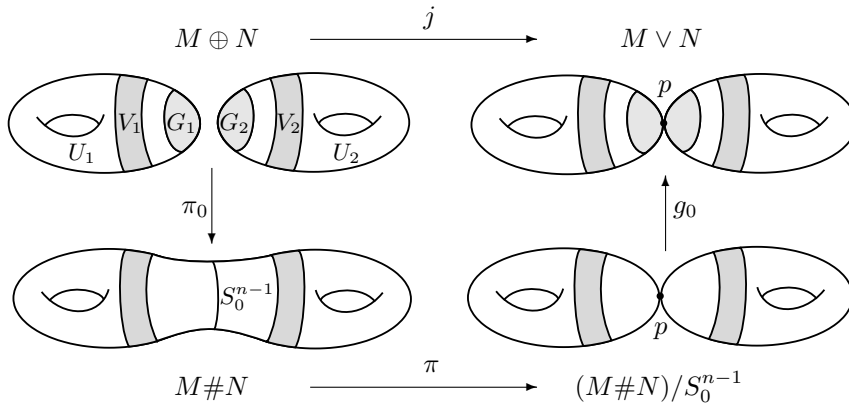
Tenemos que probar que un generador de $H_n(M \# N)$ se corresponde con una suma de generadores.

Dentro de un abierto coordenado de M consideramos abiertos

$$G_1 \subset G'_1 \subset \tilde{U}_1$$

homeomorfos a través de una carta a bolas abiertas concéntricas en \mathbb{R}^n , llamamos $S_1^{n-1} = \partial G_1$, $M_0 = M \setminus G_1$ y, de acuerdo con la construcción realizada en la prueba de 12.6, fijamos una aplicación continua $M_0 \longrightarrow M$ que induzca un homeomorfismo $M_0/S_1^{n-1} \longrightarrow M$ y que se restrinja a la identidad en $M \setminus G'_1$. Así G'_1 es el abierto que en la prueba de 12.6 llamábamos simplemente U . Ahora hemos tomado un abierto mayor \tilde{U}_1 homeomorfo a una bola mayor por la carta prefijada. Llamamos $U_1 = M \setminus \overline{G_1}$ y $V_1 = U_1 \cap \tilde{U}_1$.

En N tomamos conjuntos $G_2 \subset G'_2 \subset \tilde{U}_2$ en las mismas condiciones, y llamamos análogamente $U_2 = N \setminus \overline{G_2}$ y $V_2 = U_2 \cap \tilde{U}_2$. La suma conexa se forma eliminando G_1 y G_2 , con lo que pasamos a las variedades “agujereadas” M_0 y N_0 , y pegándolas a través de un homeomorfismo $h : S_1^{n-1} \longrightarrow S_2^{n-1}$, con lo que ambos subespacios se corresponden en la suma conexa a través de la proyección $\pi_0 : M_0 \cup N_0 \longrightarrow M \# N$ con una misma esfera S_0^{n-1} :



Al identificar S_0^{n-1} a un punto, el espacio que obtenemos no es exactamente $M \vee N$, entendido como el cociente que se obtiene de $M \oplus N$ identificando un punto, pues hemos eliminado $G_1 \cup G_2$, pero es homeomorfo a él a través del homeomorfismo g_0 construido en la prueba de 12.6. Según acabamos de ver, podemos exigir que g_0 deje inalterados los puntos del cociente que se corresponden con los de U_1 y U_2 , en el sentido de que, sobre estos puntos, $\pi_0 \circ g = \pi_0 \circ \pi \circ g_0$ coincide con j .

En $M \# N$ definimos $U'_1 = \pi_0[M_0 \cup (\tilde{U}_2 \setminus G_2)]$. Notemos que $\tilde{U}_1 \setminus G_1$ y $\tilde{U}_2 \setminus G_2$ son homeomorfos a coronas esféricas, luego también a cilindros $I \times S^{n-1}$, y π_0 los identifica a través de sus bases, con lo que el resultado es otro cilindro. Es fácil ver entonces que $\pi_1[U_1]$ es un retracto por deformación fuerte de U_1 . Igualmente definimos $U'_2 = \pi_0[N_0 \cup (\tilde{U}_1 \setminus G_1)]$, con lo que $M \# N = U'_1 \cup U'_2$ y la intersección $V' = U'_1 \cap U'_2 = \pi_0[(\tilde{U}_1 \setminus G_1) \cup (\tilde{U}_2 \setminus G_2)]$ es homeomorfo a un cilindro y S_0^{n-1} es un retracto por deformación fuerte de V' . Llamamos $V'' = i[\tilde{U}_1 \cup \tilde{U}_2] = g[V'] \subset M \vee N$. Se trata de un abierto contractible (pues es homeomorfo a dos bolas abiertas identificadas por un punto).

Fijado el contexto topológico, empezamos con el álgebra observando que la sucesión de Mayer-Vietoris correspondiente a las tríadas $(M \# N, U'_1, U'_2)$ y (V', V', V') nos da el fragmento

$$0 = H_n(V', V') \longrightarrow H_n(U'_1, V') \oplus H_n(U'_2, V') \longrightarrow H_n(M \# N, V') \longrightarrow 0.$$

Así pues, $H_n(M \# N, V') \cong H_n(U'_1, V') \oplus H_n(U'_2, V')$, y el isomorfismo es el que a cada par de clases en la suma directa les asigna la clase de la diferencia de dos representantes respectivos.

Para determinar la estructura de los sumandos directos observamos en primer lugar que, por el teorema de escisión,

$$H_n(U_1, V_1) \cong H_n(M, \tilde{U}_2) \cong H_n(M) \cong \mathbb{Z}.$$

El segundo isomorfismo se debe a que \tilde{U}_2 es homeomorfo a una bola en \mathbb{R}^n (considerando la sucesión exacta de homología). Si identificamos a U_1 con un

subespacio de $M\#N$ el teorema de escisión nos da también que la inclusión induce un isomorfismo

$$H_n(U'_1, V') \cong H_n(U_1, V_1) \cong \mathbb{Z}.$$

Lo mismo vale para U'_2 , luego en total tenemos que

$$H_n(M\#N, V') \cong H_n(U'_1, V') \oplus H_n(U'_2, V') \cong \mathbb{Z}^2.$$

Consideremos ahora una clase fundamental de $M\#N$ y expresémosla como $\zeta_{M\#N} = [\alpha_1 - \alpha_2]$, con $\alpha_i \in C_n(U'_i)$, de modo que $i_*(\zeta_{M\#N}) \in H_n(M\#N, V')$ se descompone como $i_*(\zeta_{M\#N}) = [\alpha_1] - [\alpha_2]$. Vamos a probar que $[\alpha_i]$ genera $H_n(U'_i, V')$.

Para ello consideramos la sucesión de Mayer-Vietoris de $(M\#N, U'_1, U'_2)$, que nos da el fragmento:

$$0 = H_n(U'_1) \oplus H_n(U'_2) \longrightarrow H_n(M\#N) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(V') \longrightarrow H_{n-1}(U'_1) \oplus H_{n-1}(U'_2).$$

El primer grupo es nulo por 10.50 y el último es libre de torsión por 12.5. Por lo tanto, δ tiene que ser un isomorfismo, o de lo contrario el submódulo de torsión no sería nulo. Esto significa que $\delta(\zeta_{M\#N})$ es un generador de $H_{n-1}(V')$, pero $\delta(\zeta_{M\#N})$ se calcula tomando un representante $\zeta_{M\#N} = [\alpha_1 - \alpha_2]$, con $\alpha_i \in C_n(U'_i)$ y entonces $\delta(\zeta_{M\#N}) = [\partial\alpha_1] = [\partial\alpha_2]$. Así pues, estas clases generan $H_{n-1}(V')$ y esto prueba que $[\alpha_i]$ genera $H_n(U'_i, V')$, pues tenemos el homomorfismo de conexión de la sucesión exacta del par (U'_i, V')

$$\delta : H_n(U'_i, V') \longrightarrow H_{n-1}(V')$$

dado por $\delta([c]) = [\partial c]$ y se cumple que $\delta([\alpha'_i])$ es un generador de $H_{n-1}(V')$, lo cual sólo puede suceder si $[\alpha_i]$ es un generador de $H_n(U'_i, V')$.

En resumen, hemos probado que el homomorfismo

$$H_n(M\#N) \longrightarrow H_n(M\#N, V') \cong H_n(U'_1, V') \oplus H_n(U'_2, V')$$

transforma un generador $\zeta_{M\#N}$ en la suma de generadores de los sumandos directos.

Razonando análogamente con M y U_1, \tilde{U}_1 , tomamos una clase fundamental ζ_M de M y la expresamos como $\zeta_M = [\alpha_M - \alpha'_M]$, para ciertas $\alpha_M \in C_n(U_1)$, $\alpha'_M \in C_n(\tilde{U}_1)$. La sucesión de Mayer-Vietoris nos da el fragmento

$$0 \longrightarrow H_n(M) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(V_1) \longrightarrow H_{n-1}(U_1) \oplus H_{n-1}(\tilde{U}_1),$$

y el mismo argumento anterior implica que δ es un isomorfismo, lo que se traduce en que $[\partial\alpha_M]$ genera $H_{n-1}(V_1)$, y esto a su vez implica que $[\alpha_M]$ genera $H_n(U_1, V_1)$. Considerando a $U_1 \subset M\#N$ y teniendo en cuenta que la inclusión induce un isomorfismo $H_n(U_1, V_1) \cong H_n(U'_1, V')$ (porque (U_1, V_1) es un retracto por deformación fuerte de (U'_1, V')), concluimos que $[\alpha_M]$ es un generador de $H_n(U'_1, V')$. Lo mismo vale para N y así concluimos que

$$i_*(\zeta_{M\#N}) = \pm[\alpha_M] \pm [\alpha_N].$$

Como $\pi_0 \circ g = i$ sobre $U_1 \cup U_2$, al aplicar g_* resulta que

$$g_*(i_*(\zeta_{M\#N})) = \pm[\alpha_M] \pm [\alpha_N] \in H_n(M \vee N, V'').$$

Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(M\#N) & \xrightarrow{g_*} & H_n(M \vee N) \\ i_* \downarrow & & \downarrow i_* \\ H_n(M\#N, V) & \xrightarrow{g_*} & H_n(M \vee N, V'') \end{array}$$

y hemos calculado la imagen de $\zeta_{M\#N}$ por el camino inferior. La flecha derecha es un isomorfismo porque V'' es contractible. Por otra parte, en $H_n(M \vee N)$ tenemos la clase $j_*(\zeta_M) = [\alpha_M - \alpha'_M]$, pero al calcular su imagen por i_* la imagen de α'_M se anula porque está en $C_n(V'')$, luego $i_*(j_*(\zeta_M)) = [\alpha_M]$. Lo mismo vale para N , y así

$$g_*(i_*(\zeta_{M\#N})) = \pm i_*(j_*(\zeta_M)) \pm i_*(j_*(\zeta_N)).$$

Como i_* es un isomorfismo, concluimos que $g_*(\zeta_{M\#N}) = \pm j_*(\zeta_M) \pm j_*(\zeta_N)$, como había que probar. ■

12.2 La homología de un producto

Ahora usaremos el teorema de Künneth 7.8 para relacionar la homología singular de un producto de espacios topológicos con la homología de sus factores. Para ello probamos en primer lugar que los grupos de homología de un producto $X \times Y$ coinciden con los grupos de homología del complejo $C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y)$.

Teorema 12.7 (Teorema de Eilenberg-Zilber) *Si \mathbb{A} es un dominio de ideales principales, los funtores de cadenas singulares $C(X \times Y)$ y $C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y)$ son naturalmente homotópicos.*

Esto quiere decir que existen cuatro transformaciones naturales

$$\begin{aligned} \phi(X, Y) &: C(X \times Y) \longrightarrow C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y), \\ \psi(X, Y) &: C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y) \longrightarrow C(X \times Y), \\ \Delta_1(X, Y) &: C(X \times Y) \longrightarrow C(X \times Y), \\ \Delta_2(X, Y) &: C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y) \longrightarrow C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y), \end{aligned}$$

tales que ϕ y ψ son homomorfismos de complejos, Δ_1 es una homotopía entre $\phi \circ \psi$ y la identidad y Δ_2 es una homotopía entre $\psi \circ \phi$ y la identidad. En particular, ϕ y ψ inducen isomorfismos mutuamente inversos entre los grupos de homología singular $H_p(X \times Y) \cong H_p(C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y))$.

DEMOSTRACIÓN: Vamos a aplicar el teorema de los modelos acíclicos 9.48. Para ello probaremos que los dos funtores son libres considerando como modelos $\mathcal{M} = \{(\Delta_i, \Delta_j)\}_{i,j \geq 0}$, donde, recordemos, Δ_p es el p -símplice canónico. Concretamente, una base de $C_p(C \times Y)$ es la aplicación diagonal $d : \Delta_p \rightarrow \Delta_p \times \Delta_p$. Para comprobarlo basta ver que, cuando (f, g) recorre $\text{hom}((\Delta_p, \Delta_p), (X, Y))$, entonces $C_p(f, g)(d)$ recorre los p -símplices singulares en $X \times Y$. Ciertamente, $C_p(f, g)(d) = d \circ (f \times g)$ es un p -símplice singular.

Recíprocamente, si $\sigma : \Delta_p \rightarrow X \times Y$ es un p -símplice singular arbitrario, basta componerlo con las proyecciones para formar $f = \sigma \circ \pi_X$, $g = \sigma \circ \pi_Y$ y es claro que $\sigma = C_p(f, g)(d)$.

Por consiguiente, $C(X \times Y)$ es libre con modelos $\{(\Delta_p, \Delta_p)\}_{p \geq 0}$, luego también con modelos \mathcal{M} .

Hemos visto que la identidad $\sigma_i : \Delta_i \rightarrow \Delta_i$ es una base del functor C_i . Más concretamente, si $f : \Delta_i \rightarrow X$ es un i -símplice, entonces $C_i(f)(\sigma_i) = f$.

Así pues, para todo espacio X , una base de $C_i(X)$ está formada por los i -símplices singulares $C_i(f)(\sigma_i)$, donde $f \in \text{hom}(\Delta_i, X)$. Similarmente, una base de $C_j(Y)$ la forman los j -símplices singulares $C_j(g)(\sigma_j)$, con $g \in \text{hom}(\Delta_j, Y)$.

Por el teorema 5.24, tenemos que una base de $C_i(X) \otimes_{\mathbb{A}} C_j(Y)$ la forman los productos tensoriales $f \otimes g = C_i(f)(\sigma_i) \otimes C_j(g)(\sigma_j)$ y una base del módulo $(C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y))_p$ la forman los productos

$$(C(f) \otimes C(g))_p(\sigma_i \otimes \sigma_j), \quad i + j = p,$$

donde $(f, g) \in \text{hom}((\Delta_i, \Delta_j), (X, Y))$. Por consiguiente, una base del functor $C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y)$ lo forman los productos $\sigma_i \otimes \sigma_j \in C(\Delta_i) \otimes_{\mathbb{A}} C(\Delta_j)$.

Por otra parte, $C(\Delta_i \times \Delta_j)$ es obviamente libre y es acíclico en dimensiones positivas, porque $\Delta_i \times \Delta_j$ es contractible. Por el teorema 5.24 tenemos también que $C(\Delta_i) \otimes_{\mathbb{A}} C(\Delta_j)$ es libre y por el teorema de Künneth tenemos que

$$H(C(\Delta_i) \otimes_{\mathbb{A}} C(\Delta_j)) \cong H(\Delta_i) \otimes_{\mathbb{A}} H(\Delta_j),$$

claramente acíclico en dimensiones positivas. También por el teorema de Künneth, tenemos el isomorfismo natural $H_0(C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y)) \cong H_0(X) \otimes_{\mathbb{A}} H_0(Y)$. Por otra parte tenemos el isomorfismo natural

$$H_0(X) \otimes_{\mathbb{A}} H_0(Y) \rightarrow H_0(X \times Y)$$

dado por $[p] \otimes [q] \mapsto [(p, q)]$. Al componerlos obtenemos un isomorfismo natural

$$\alpha : H_0(C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y)) \rightarrow H_0(X \times Y).$$

El teorema de los modelos acíclicos nos da entonces que existen los homomorfismos naturales de complejos ϕ, ψ que buscamos. La composición $\phi \circ \psi$ induce en H_0 el isomorfismo natural $\alpha \circ \alpha^{-1} = 1$, es decir, el mismo que la identidad, luego, de nuevo por el teorema de los modelos acíclicos, concluimos que $\phi \circ \psi$ es naturalmente homotópico a la identidad, y lo mismo sucede con la composición en sentido contrario. ■

Ahora el teorema de Künneth 7.8 nos permite concluir:

Teorema 12.8 (Künneth) *Si X e Y son dos espacios topológicos, y \mathbb{A} es un dominio de ideales principales, entonces*

$$H_p(X \times Y) \cong \bigoplus_{i+j=p} H_i(X) \otimes_{\mathbb{A}} H_j(Y) \oplus \bigoplus_{i+j=p-1} \text{Tor}_{\mathbb{A}}(H_i(X), H_j(Y)).$$

Ejemplo: La homología de $S^2 \times S^2$ Por el teorema 10.2 sabemos que

$$H_0(S^2) \cong \mathbb{A}, \quad H_1(S^2) = 0, \quad H_2(S^2) \cong \mathbb{A},$$

y que todos los demás grupos de homología son nulos. Si \mathbb{A} es un dominio de ideales principales, el teorema anterior nos da que

$$H_0(S^2 \times S^2) \cong \mathbb{A}, \quad H_1(S^2 \times S^2) = 0, \quad H_2(S^2 \times S^2) \cong \mathbb{A}^2,$$

$$H_3(S^2 \times S^2) = 0, \quad H_4(S^2 \times S^2) \cong \mathbb{A},$$

y todos los demás grupos de homología son nulos.

Comparando con el último ejemplo de la sección anterior, tenemos que $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \# \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ y $S^2 \times S^2$ son un ejemplo de dos variedades topológicas de dimensión 4 con grupos de homología isomorfos. Sin embargo, en el último apartado de la sección 12.5 veremos que las variedades no son homotópicas. ■

12.3 Homología y cohomología singular

El teorema 7.17 nos permite expresar la cohomología de un espacio topológico en términos de su homología. En general, si \mathbb{A} es un dominio de ideales principales y N es un \mathbb{A} -módulo, tenemos definida una aplicación bilineal

$$H_p(X, U) \times H_N^p(X, U) \longrightarrow N$$

dada por $\langle [c], [f] \rangle = f(c)$.

Equivalentemente, a través del isomorfismo natural

$$C^p(X, U) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_p(X, U), N) \cong \text{Hom}_{\mathbb{A}}(C_p^N(X, U), N),$$

podemos considerar también.

$$H_p^N(X, U) \times H_N^p(X, U) \longrightarrow N.$$

Esta aplicación bilineal induce un homomorfismo

$$h : H_N^p(X, U) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_p(X, U), N) \cong \text{Hom}_{\mathbb{A}}(H_p^{\mathbb{A}}(X, U), N).$$

El teorema 7.17 nos asegura que h es el epimorfismo de una sucesión exacta corta que se escinde, de modo que tenemos una descomposición en suma directa:

Teorema 12.9 Sea (X, U) un par de espacios topológicos, \mathbb{A} un dominio de ideales principales y N un \mathbb{A} -módulo. Entonces

$$H_N^p(X, U) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_p(X, U), N) \oplus \text{Ext}_{\mathbb{Z}}(H_{p-1}(X, U), N).$$

En particular, h es un isomorfismo cuando $H_{p-1}(X, U)$ es un \mathbb{Z} -módulo proyectivo (por ejemplo, libre) y cuando N es un \mathbb{Z} -módulo inyectivo (por ejemplo, un cuerpo de característica 0, por el teorema 5.11). En tal caso cada $x \in H_N^p(X, U)$ está completamente determinado por el homomorfismo $\langle -, x \rangle$ que determina en $H_p(X, U)$ (o en $H_p^N(X, U)$).

Otro caso particular menos restrictivo es el siguiente:

Teorema 12.10 Sea (X, U) un par de espacios topológicos y \mathbb{A} un dominio de ideales principales tal que $H_p^{\mathbb{A}}(X, U)$ es finitamente generado para todo p . Entonces el rango de $H_p^{\mathbb{A}}(X, U)$ coincide con el de $H_p^{\mathbb{A}}(X, U)$ y el submódulo de torsión de $H_p^{\mathbb{A}}(X, U)$ es isomorfo al de $H_{p-1}^{\mathbb{A}}(X, U)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $H_p^{\mathbb{A}}(X, U) = L_p \oplus T_p$, donde L_p es libre y T_p es el submódulo de torsión. Entonces

$$\text{Hom}_{\mathbb{A}}(H_p^{\mathbb{A}}(X, U), \mathbb{A}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{A}}(L_p, \mathbb{A}) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{A}}(T_p, \mathbb{A}) \cong L_p,$$

y por el teorema 7.16,

$$\text{Ext}_{\mathbb{A}}(H_{p-1}^{\mathbb{A}}(X, U), \mathbb{A}) \cong T_{p-1} \otimes_{\mathbb{A}} \mathbb{A} \cong T_{p-1}.$$

Ahora basta aplicar el teorema anterior. ■

Es fácil ver que si algún $H_p^{\mathbb{A}}(X, U)$ tiene rango infinito, lo mismo ocurre con el correspondiente grupo de cohomología, por lo que los números de Betti están definidos para la homología de un par si y sólo si lo están para su cohomología, y en tal caso son iguales. Lo mismo vale, por tanto, para la característica de Euler.

La cohomología de las superficies compactas Como aplicación directa del teorema anterior obtenemos que, si \mathbb{A} es un dominio de ideales principales, la homología completa de las superficies compactas viene dada por:

$$H_{\mathbb{A}}^p(M_g) \cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } p = 0, 2, \\ \mathbb{A}^{2g} & \text{si } p = 1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad H_{\mathbb{A}}^p(N_h) \cong \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } p = 0, \\ \mathbb{A}^{h-1} & \text{si } p = 1, \\ \mathbb{A}/2\mathbb{A} & \text{si } p = 2, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

■

El teorema 12.5 tiene la traducción siguiente:

Teorema 12.11 Sea V una variedad topológica conexa n -dimensional y \mathbb{A} un dominio de ideales principales. Entonces

$$H_{\mathbb{A}}^n(V) = \begin{cases} \mathbb{A} & \text{si } V \text{ es orientable,} \\ \mathbb{A}/2\mathbb{A} & \text{si } V \text{ no es orientable.} \end{cases}$$

12.4 El producto exterior

Analicemos con más detalle el isomorfismo dado por el teorema de Künneth 12.8. Por una parte, el teorema 7.8 nos da que el homomorfismo

$$\mu : \bigoplus_{i+j=p} H_i(X) \otimes_{\mathbb{A}} H_j(Y) \longrightarrow H_p(C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y))$$

dado por $\mu([c_1] \otimes [c_2]) = [c_1 \otimes c_2]$ es el monomorfismo de una sucesión exacta que se escinde y, por otra parte, el teorema de Eilenberg-Zilber nos da un isomorfismo $H_p(C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y)) \cong H_p(X \times Y)$ inducido por un homomorfismo de complejos

$$\phi : C(X \times Y) \longrightarrow C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y).$$

La composición de ambos es un monomorfismo

$$\mu \circ \bar{\phi}^{-1} : \bigoplus_{i+j=p} H_i(X) \otimes_{\mathbb{A}} H_j(Y) \longrightarrow H_p(X \times Y)$$

cuya imagen está complementada por el segundo sumando que aparece en la fórmula del teorema 12.8. En particular, tenemos que μ es un isomorfismo cuando los \mathbb{A} -módulos $H_i(X)$ o bien los \mathbb{A} -módulos $H_j(Y)$ son libres de torsión.

El teorema de los modelos acíclicos usando en la prueba del teorema de Eilenberg-Zilber asegura que ϕ (considerado como transformación natural entre los funtores $C(X \times Y)$ y $C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y)$) está determinado salvo equivalencia homotópica por el hecho de que en dimensión 0 induce el isomorfismo natural $[(x, y)] \mapsto [x] \otimes [y]$. Esto hará que las construcciones siguientes no dependan de la elección de ϕ .

Empecemos razonando en un contexto general, con dos \mathbb{A} -módulos de coeficientes N_1 y N_2 . Definimos una aplicación bilineal

$$\times : C_{N_1}^i(X) \times C_{N_2}^j(Y) \longrightarrow C_{N_1 \otimes_{\mathbb{A}} N_2}^{i+j}(X \times Y) \quad (12.2)$$

estableciendo que $\omega \times \eta$ es la composición

$$C_{i+j}(X \times Y) \xrightarrow{\phi} C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y) \xrightarrow{\omega \otimes \eta} N_1 \otimes_{\mathbb{A}} N_2.$$

Hemos de entender que $\omega \otimes \eta$ se define como el homomorfismo nulo sobre todos los sumandos directos de $C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y)$ distintos de $C_i(X) \otimes_{\mathbb{A}} C_j(Y)$.

Si $f : X \longrightarrow X'$ y $g : Y \longrightarrow Y'$ son aplicaciones continuas entre espacios topológicos, entonces la naturalidad de ϕ nos da el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} C(X \times Y) & \xrightarrow{\phi(X, Y)} & C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y) & & \\ (f \times g)_{\#} \downarrow & & f_{\#} \otimes g_{\#} \downarrow & \searrow f_{\#}(\omega) \otimes g_{\#}(\eta) & \\ C(X' \times Y') & \xrightarrow{\phi(X', Y')} & C(X') \otimes C(Y') & \xrightarrow{\omega \otimes \eta} & N_1 \otimes_{\mathbb{A}} N_2 \end{array}$$

del que se desprende que

$$(f \times g)_\#(\omega \times \eta) = f_\#(\omega) \times g_\#(\eta).$$

Equivalentemente, que tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} C_{N_1}^i(X') \times C_{N_2}^j(Y') & \xrightarrow{\times} & C_{N_1 \otimes_{\mathbb{A}} N_2}^{i+j}(X' \times Y') \\ f_\# \times g_\# \downarrow & & \downarrow (f \times g)_\# \\ C_{N_1}^i(X) \times C_{N_2}^j(Y) & \xrightarrow{\times} & C_{N_1 \otimes_{\mathbb{A}} N_2}^{i+j}(X \times Y) \end{array}$$

Teorema 12.12 *En las condiciones anteriores*

$$d(\omega \times \eta) = d\omega \times \eta + (-1)^i \omega \times d\eta.$$

DEMOSTRACIÓN: Como ϕ es un homomorfismo de complejos, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} C_{p+1}(X \times Y) & \xrightarrow{\phi} & C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ C_p(X \times Y) & \xrightarrow{\phi} & C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y) \xrightarrow{\omega \otimes \eta} N_1 \otimes_{\mathbb{A}} N_2 \end{array}$$

Por consiguiente,

$$d(\omega \times \eta) = \partial \circ \phi \circ (\omega \otimes \eta) = \phi \circ \partial \circ (\omega \otimes \eta),$$

$$d\omega \times \eta = \phi \circ (d\omega \otimes \eta), \quad \omega \times d\eta = \phi \circ (\omega \otimes d\eta).$$

De aquí que basta comprobar la relación

$$\partial \circ (\omega \otimes \eta) = d\omega \otimes \eta + (-1)^i \omega \otimes d\eta.$$

Tomemos un elemento $u \otimes v \in C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y)$. Estamos adoptando el convenio de que los productos tensoriales de homomorfismos se anulan donde no están definidos los factores. Por lo tanto, los tres homomorfismos de la igualdad anterior se anulan sobre $u \otimes v$ salvo si $u \in C_{i+1}(X)$, $v \in C_j(X)$ o bien $u \in C_i(X)$, $v \in C_{j+1}(X)$. En el primer caso,

$$\begin{aligned} (\omega \otimes \eta)(\partial(u \otimes v)) &= (\omega \otimes \eta)(\partial u \otimes v + (-1)^i u \otimes \partial v) \\ &= \omega(\partial u) \otimes \eta(v) + 0 = (d\omega \otimes \eta)(u \otimes v) + 0 \\ &= (d\omega \otimes \eta)(u \otimes v) + (-1)^i (\omega \otimes d\eta)(u \otimes v). \end{aligned}$$

El segundo caso es análogo. ■

Es obvio que $\omega \times \eta$ es nulo si un factor lo es. El teorema anterior implica entonces las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \text{cociclo} \times \text{cociclo} &= \text{cociclo} \\ \text{cociclo} \times \text{cofrontera} &= \text{cofrontera} \\ \text{cofrontera} \times \text{cociclo} &= \text{cofrontera} \end{aligned}$$

De aquí se sigue a su vez que el producto \times induce un producto bilineal

$$\times : H_{N_1}^i(X) \times H_{N_2}^j(Y) \longrightarrow H_{N_1 \otimes N_2}^{i+j}(X \times Y) \quad (12.3)$$

mediante $[\omega] \times [\eta] = [\omega \times \eta]$.

Veamos que no depende de la elección de ϕ . En efecto, sabemos que si $\psi : C(X \times Y) \longrightarrow C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y)$ está en las mismas condiciones, entonces existe una homotopía $\Delta : C(X \times Y) \longrightarrow C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y)$ tal que

$$\phi - \psi = \partial \circ \Delta + \Delta \circ \partial.$$

Por consiguiente, si $\omega \in Z^i(X)$, $\eta \in Z^j(Y)$, $p = i + j$, se cumple

$$\begin{aligned} \omega \times_{\phi} \eta - \omega \times_{\psi} \eta &= \partial_p \circ \Delta_{p-1} \circ (\omega \otimes \eta) + \Delta_p \circ \partial_{p+1} \circ (\omega \otimes \eta) \\ &= d(\Delta_{p-1} \circ (\omega \otimes \eta)), \end{aligned}$$

pues es claro que el producto de cociclos $\omega \otimes \eta$ se anula en las fronteras. Así pues, $[\omega \times_{\phi} \eta] = [\omega \times_{\psi} \eta]$. ■

Claramente, si $f : X \longrightarrow X'$ y $g : Y \longrightarrow Y'$ son aplicaciones continuas, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_{N_1}^i(X') \times H_{N_2}^j(Y') & \xrightarrow{\times} & H_{N_1 \otimes N_2}^{i+j}(X' \times Y') \\ f^* \times g^* \downarrow & & \downarrow (f \times g)^* \\ H_{N_1}^i(X) \times H_{N_2}^j(Y) & \xrightarrow{\times} & H_{N_1 \otimes N_2}^{i+j}(X \times Y) \end{array}$$

Teorema 12.13 Sean X, Y, Z espacios topológicos y $\omega \in Z_{N_1}^i(X)$, $\eta \in Z_{N_2}^j(Y)$, $\theta \in Z_{N_3}^k(Z)$. Entonces

$$([\omega] \times [\eta]) \times [\theta] = [\omega] \times ([\eta] \times [\theta]).$$

DEMOSTRACIÓN: Fijemos una transformación natural ϕ entre los funtores $C(X \times Y)$ y $C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y)$ en las condiciones del teorema de Eilenberg-Zilber. Es fácil ver entonces que $\phi(X \times Y, Z) \circ (\phi(X, Y) \otimes 1)$ y $\phi(X, Y \times Z) \circ (1 \otimes \phi(Y, Z))$ son transformaciones naturales entre los funtores

$$C(X \times Y \times Z) \quad \text{y} \quad C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y) \otimes_{\mathbb{A}} C(Z).$$

Exactamente igual que en la prueba del teorema de Eilenberg-Zilber, se comprueba que a estos funtores les podemos aplicar el teorema de los modelos

acíclicos. Como ambas transformaciones naturales inducen la misma transformación sobre H_0 , concluimos que son naturalmente homotópicas, es decir, existe una homotopía $\Delta : C(X \times Y \times Z) \rightarrow C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y) \otimes_{\mathbb{A}} C(Z)$ tal que

$$\phi(X \times Y, Z) \circ (\phi(X, Y) \otimes 1) - \phi(X, Y \times Z) \circ (1 \otimes \phi(Y, Z)) = \partial \circ \Delta + \Delta \circ \partial.$$

Componiendo con $\omega \otimes \eta \otimes \theta$ obtenemos

$$(\omega \times \eta) \times \theta - \omega \times (\eta \times \theta) = d(\Delta_{p-1} \circ (\omega \otimes \eta \otimes \theta)),$$

donde $p = i + j + k$ y donde usamos que, al ser ciclos ω , η y θ , el producto $\omega \otimes \eta \otimes \theta$ se anula sobre las fronteras. Tomando clases obtenemos la igualdad del enunciado. ■

Nos restringimos ahora al caso en que $N_1 = N_2 = \mathbb{A}$. Entonces, el isomorfismo natural $\alpha : \mathbb{A} \otimes_{\mathbb{A}} \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ (dado por $\alpha(a \otimes b) = ab$) induce un isomorfismo natural entre grupos de cocadenas y de cohomología con coeficientes en $\mathbb{A} \otimes_{\mathbb{A}} \mathbb{A}$ y los grupos de cohomología con coeficientes en \mathbb{A} , por lo que podemos transformar los productos (12.2) y (12.3) en otros

$$\times : C_{\mathbb{A}}^i(X) \times C_{\mathbb{A}}^j(Y) \rightarrow C_{\mathbb{A}}^{i+j}(X \times Y), \quad (12.4)$$

$$\times : H_{\mathbb{A}}^i(X) \times H_{\mathbb{A}}^j(Y) \rightarrow H_{\mathbb{A}}^{i+j}(X \times Y). \quad (12.5)$$

(A partir de aquí omitiremos el \mathbb{A} en los grupos de cohomología.) Es claro que el teorema anterior sigue siendo válido. Además ahora tenemos una propiedad de anticonmutatividad:

Teorema 12.14 Sean X e Y espacios topológicos y $T : X \times Y \rightarrow Y \times X$ la aplicación dada por $T(x, y) = (y, x)$. Entonces la aplicación

$$T^* : H^{i+j}(X \times Y) \rightarrow H^{i+j}(Y \times X)$$

cumple $T^*([\omega] \times [\eta]) = (-1)^{ij}[\eta] \times [\omega]$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $T' : C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y) \rightarrow C(Y) \otimes_{\mathbb{A}} C(X)$ el homomorfismo dado por $T'(u \otimes v) = (-1)^{ij}v \otimes u$, donde $u \in C_i(X)$, $v \in C_j(Y)$. Veamos que efectivamente se trata de un homomorfismo de complejos (conviene observar que no lo sería si hubiéramos omitido el signo). En efecto,

$$\begin{aligned} T'(\partial(u \otimes v)) &= T'(\partial u \otimes v + (-1)^i u \otimes \partial v) \\ &= (-1)^{(i-1)j} v \otimes \partial u + (-1)^{i+(j-1)} \partial v \otimes u, \\ \partial T'(u \otimes v) &= (-1)^{ij} \partial(v \otimes u) = (-1)^{ij} (\partial v \otimes u + (-1)^j v \otimes \partial u). \end{aligned}$$

Claramente ambas expresiones coinciden. Si llamamos ϕ a la transformación natural que define el producto \times , es claro que tanto $\phi(X, Y) \circ T'(X, Y)$ como $T^{\sharp}(X, Y) \circ \phi(Y, X)$ son transformaciones naturales del funtor $C(X \times Y)$ en el funtor $C(Y) \otimes_{\mathbb{A}} C(X)$ y ambas inducen la misma transformación natural en H_0 .

Es claro que podemos aplicar el teorema de los modelos acíclicos para concluir que ambas son homotópicas. Si Δ es una homotopía tenemos que

$$T^\sharp \circ \phi(Y, X) - \phi(X, Y) \circ T' = \partial \circ \Delta + \Delta \circ \partial. \quad (12.6)$$

Componemos con $(\eta \otimes \omega) \circ \alpha$ y obtenemos

$$T_\sharp(\eta \times \omega) - (-1)^{ij}(\omega \times \eta) = d(\Delta \circ (\eta \otimes \omega) \circ \alpha).$$

Al tomar clases obtenemos la igualdad del enunciado. ■

Ahora podemos retomar la situación que planteábamos al principio de esta sección. Si pasamos a llamar

$$\mu : \bigoplus_{i+j=p} H_i(X) \otimes_{\mathbb{A}} H_j(Y) \longrightarrow H_p(X \times Y)$$

al monomorfismo que allí llamábamos $\mu \circ \bar{\phi}^{-1}$, entonces $\mu([c_1] \otimes [c_2]) = [c]$, con $\phi(c) = c_1 \otimes c_2$.

Por otra parte, la definición del producto \times establece que

$$\begin{aligned} (\omega \times \eta)(c) &= \alpha((\omega \otimes \eta)(\phi(c))) = \alpha((\omega \otimes \eta)(c_1 \otimes c_2)) \\ &= \alpha(\omega(c_1) \otimes \eta(c_2)) = \omega(c_1)\eta(c_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\langle \mu([c_1] \otimes [c_2]), [\omega] \times [\eta] \rangle = \omega(c_1)\eta(c_2) = \langle [c_1], [\omega] \rangle \langle [c_2], [\eta] \rangle. \quad (12.7)$$

En particular vemos que la restricción del homomorfismo $\langle -, x \times y \rangle$ a la imagen de μ está determinada por los homomorfismos $\langle -, x \rangle$ y $\langle -, y \rangle$.

Si suponemos que todos los \mathbb{A} -módulos $H_i(X)$ o $H_j(Y)$ son libres, entonces μ es un isomorfismo (porque se anulan los módulos de torsión de la fórmula del teorema 12.8), y también lo son los epimorfismos naturales

$$H^i(X) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{A}}(H_i(X), \mathbb{A}), \quad H^j(Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{A}}(H_j(Y), \mathbb{A}),$$

(porque se anulan los módulos de extensiones de la fórmula del teorema 12.9). Por lo tanto, la relación (12.7) determina el producto \times . Más aún:

Teorema 12.15 *Si \mathbb{A} es un dominio de ideales principales y X e Y son espacios topológicos tales que todos los grupos de homología $H_i(X)$ o $H_j(Y)$ son \mathbb{A} -módulos libres de rango finito, entonces el homomorfismo*

$$H^*(X) \otimes_{\mathbb{A}} H^*(Y) \longrightarrow H^*(X \times Y)$$

determinado por $\omega \otimes \eta \mapsto \omega \times \eta$ es un isomorfismo de \mathbb{A} -módulos.

DEMOSTRACIÓN: En efecto, basta observar que si x_1, \dots, x_k e y_1, \dots, y_l son bases de $H_i(X)$, $H_j(Y)$, respectivamente y $\omega_1, \dots, \omega_k$, η_1, \dots, η_l son las bases duales respectivas, la relación (12.7) muestra que las clases $\omega_u \times \eta_v$ forman la base dual de la base $x_u \otimes x_v$ de $H^i(X) \otimes_{\mathbb{A}} H^j(Y)$, luego el homomorfismo del enunciado se restringe a isomorfismos entre las componentes homogéneas de ambos miembros. ■

Así, bajo las hipótesis del teorema anterior, tenemos una representación de la cohomología de $X \times Y$ en términos de las cohomologías de X e Y .

Ejemplo Si $H_0(S^2) = \langle 1 \rangle \cong \mathbb{Z}$, $H^2(S^2) = \langle \omega \rangle \cong \mathbb{Z}$, se cumplen las condiciones del teorema anterior y, por lo tanto,

$$H^0(S^2 \times S^2) = \langle 1 \times 1 \rangle, \quad H^2(S^2 \times S^2) = \langle \omega \times 1, 1 \times \omega \rangle, \\ H^4(S^2 \times S^2) = \langle \omega \times \omega \rangle. \quad \blacksquare$$

Ahora consideramos el caso en que $Y = X$, con lo que podemos considerar la aplicación diagonal $\delta : X \rightarrow X \times X$ dada por $\delta(x) = (x, x)$. Al componer (12.4) y (12.5) con los homomorfismos inducidos

$$\delta_{\#} : C^{i+j}(X \times X) \rightarrow C^{i+j}(X), \quad \delta^* : H^{i+j}(X \times X) \rightarrow H^{i+j}(X)$$

obtenemos aplicaciones bilineales

$$\smile : C^i(X) \times C^j(X) \rightarrow C^{i+j}(X), \\ \smile : H^i(X) \times H^j(X) \rightarrow H^{i+j}(X). \quad (12.8)$$

Definición 12.16 Llamaremos *producto exterior* de cohomología al producto

$$\smile : H^*(X) \times H^*(X) \rightarrow H^*(X)$$

inducido por los homomorfismos (12.8) sobre el \mathbb{A} -módulo graduado $H^*(X)$ formado por los grupos de cohomología de X .

El teorema 12.13 implica que \smile es asociativo, luego $H^*(X)$ adquiere estructura de álgebra graduada sobre \mathbb{A} , a la que llamaremos *álgebra de cohomología* de X . Además, si $f : X \rightarrow X'$ es una aplicación continua, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} H^i(X') \times H^j(X') & \xrightarrow{\times} & H^{i+j}(X' \times X') & \longrightarrow & H^{i+j}(X') \\ f^* \times f^* \downarrow & & (f \times f)^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ H^i(X) \times H^j(X) & \xrightarrow{\times} & H^{i+j}(X \times X) & \longrightarrow & H^{i+j}(X) \end{array}$$

el cual prueba que $f^* : H^*(X') \rightarrow H^*(X)$ es un homomorfismo de álgebras.

El teorema siguiente afirma que las álgebras de cohomología son anticonmutativas:

Teorema 12.17 Sea X un espacio topológico y $[\omega], [\eta] \in H^*(X)$ dos clases de cohomología de dimensiones i y j respectivamente. Entonces

$$[\omega] \smile [\eta] = (-1)^{ij} [\eta] \smile [\omega].$$

DEMOSTRACIÓN: Con la notación del teorema 12.14, tenemos obviamente el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\delta} & X \times X \\ \downarrow 1 & & \downarrow T \\ X & \xrightarrow{\delta} & X \times X \end{array}$$

el cual induce a su vez el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^{i+j}(X \times X) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{i+j}(X) \\ T^* \downarrow & & \downarrow 1 \\ H^{i+j}(X \times X) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{i+j}(X) \end{array}$$

Partiendo de $[\omega] \times [\eta]$ y aplicando 12.14 obtenemos la igualdad del enunciado. ■

No hemos probado que el álgebra de cohomología es unitaria, pero posponemos la prueba porque un poco más adelante será inmediato.

Si recapitulamos la construcción del producto exterior de cohomología, observamos que

$$[\omega] \smile [\eta] = [\delta_* \circ \phi(X, X) \circ (\omega \otimes \eta) \circ \alpha].$$

Si llamamos $\tau(X) = \delta_*(X) \circ \phi(X, X)$, es claro que τ satisface la definición siguiente:

Definición 12.18 Una *aproximación diagonal* es una transformación natural τ entre los funtores $C(X)$ y $C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(X)$ con la propiedad de que $\tau(x) = x \otimes x$, para todo espacio X y todo $x \in C_0(X)$.

Es claro que podemos aplicar el teorema de los modelos acíclicos a los funtores indicados, por lo que dos aproximaciones diagonales cualesquiera son naturalmente homotópicas. De aquí se sigue, por el mismo razonamiento que ya hemos empleado en varias ocasiones, que si τ es una aproximación diagonal y ω y η son dos cociclos singulares en un espacio X , entonces

$$[\omega] \smile [\eta] = [\tau \circ (\omega \otimes \eta) \circ \alpha].$$

Conviene definir

$$\omega \smile \eta = \tau \circ (\omega \otimes \eta) \circ \alpha$$

para cocadenas cualesquiera ω y η , y así $[\omega] \smile [\eta] = [\omega \smile \eta]$, aunque hemos de tener presente que este producto depende de la elección de τ . Del teorema 12.12 se sigue la relación

$$d(\omega \smile \eta) = d\omega \smile \eta + (-1)^i \omega \smile d\eta, \quad \omega \in C^i(X), \quad \eta \in C^j(X).$$

Vamos a definir una aproximación diagonal especialmente simple:

Definición 12.19 Definimos la *aproximación diagonal de Alexander-Whitney* como la dada por

$$\tau_X(\sigma) = \sum_{i+j=p} {}_i\sigma \otimes \sigma_j,$$

donde σ es un p -símplice singular en el espacio X y, para cada índice i ,

$${}_i\sigma = \sigma^\#(x_0, \dots, x_i), \quad \sigma_i = \sigma^\#(x_{p-i}, \dots, x_p),$$

donde x_0, \dots, x_p son los vértices del p -símplice canónico Δ_p .

Veamos que $\tau_X : C(X) \rightarrow C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(X)$ es un homomorfismo de complejos. Una vez probado esto, es inmediato comprobar que τ es realmente una aproximación diagonal. Calculamos

$$\begin{aligned} \tau(\partial\sigma) &= \tau\left(\sum_{r=0}^p (-1)^r \sigma^\#(x_0, \dots, \hat{x}_r, \dots, x_p)\right) \\ &= \sum_{r=0}^p (-1)^r \sum_{i+j=p-1} {}_i\sigma^\#(x_0, \dots, \hat{x}_r, \dots, x_p) \otimes \sigma^\#(x_0, \dots, \hat{x}_r, \dots, x_p)_j \\ &= \sum_{r=0}^p (-1)^r \sum_{i=r}^p \sigma^\#(x_0, \dots, \hat{x}_r, \dots, x_{i+1}) \otimes \sigma^\#(x_{i+1}, \dots, x_p) \\ &\quad + \sum_{r=0}^p (-1)^r \sum_{i=0}^{r-1} \sigma^\#(x_0, \dots, x_i) \otimes \sigma^\#(x_i, \dots, \hat{x}_r, \dots, x_p). \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \partial(\tau(\sigma)) &= \partial\left(\sum_{i=0}^p \sigma^\#(x_0, \dots, x_i) \otimes \sigma^\#(x_i, \dots, x_p)\right) \\ &= \sum_{i=0}^p (\sigma^\# \partial(x_0, \dots, x_i) \otimes \sigma^\#(x_i, \dots, x_p) + (-1)^i \sigma^\#(x_0, \dots, x_i) \otimes \sigma^\# \partial(x_i, \dots, x_p)) \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{r=0}^i (-1)^r \sigma^\#(x_0, \dots, \hat{x}_r, \dots, x_i) \otimes \sigma^\#(x_i, \dots, x_p) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{r=i}^p (-1)^r \sigma^\#(x_0, \dots, x_i) \otimes \sigma^\#(x_i, \dots, \hat{x}_r, \dots, x_p). \end{aligned}$$

Los términos con $i = r$ del primer sumando se cancelan con los del segundo, y es fácil ver que los restantes coinciden con los de la expresión que hemos obtenido para $\tau(\partial\sigma)$. ■

En términos de la aproximación de Alexander-Whitney, el producto $\omega \smile \eta$ de dos cocadenas de dimensiones i y j actúa sobre un $i + j$ -símplice σ como

$$(\omega \smile \eta)(\sigma) = \alpha((\omega \otimes \eta)(\tau(\sigma))) = \alpha(\omega({}_i\sigma) \otimes \eta(\sigma_j)) = \omega({}_i\sigma)\eta(\sigma_j).$$

Si tomamos clases de cohomología sabemos que el resultado es independiente de la elección de τ :

$$\langle [\sigma], x \smile y \rangle = \langle [{}_i\sigma], x \rangle \langle [{}_j\sigma], y \rangle, \quad x \in H^i(X), \quad y \in H^j(X).$$

Ahora ya es inmediato que el álgebra de cohomología es unitaria: la unidad es la clase del homomorfismo $1 : C_0(X) \rightarrow \mathbb{A}$ dado por $1(x) = 1$ para todo 0-símplice x , pues se cumple que $1 \smile \omega = \omega$. En efecto:

$$(1 \smile \omega)(\sigma) = (1 \smile \omega)({}_0\sigma)\omega(\sigma) = \omega(\sigma).$$

La sección siguiente está dedicada a mostrar algunos ejemplos de álgebras de cohomología.

El producto mixto Introducimos ahora otro producto de interés a la hora de relacionar la homología y la cohomología de un espacio topológico X . Si $\tau : C(X) \rightarrow C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(X)$ es una aproximación diagonal, definimos

$$\frown : C_p(X) \times C^i(X) \rightarrow C_{p-i}(X).$$

de modo que $c \frown \omega$ es la imagen de c por la composición

$$C(X) \xrightarrow{\tau} C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(X) \xrightarrow{\omega \otimes 1} \mathbb{A} \otimes_{\mathbb{A}} C(X) \xrightarrow{\beta} C(X),$$

donde se entiende que ω toma el valor 0 sobre los símplices de dimensión distinta de i . Este producto mixto está íntimamente relacionado con el producto exterior. Para probarlo vamos a calcular $\langle c \frown \omega, \eta \rangle$. Se trata de la imagen de c por la composición

$$\tau \circ (\omega \otimes 1) \circ \beta \circ \eta.$$

Ahora bien, es inmediato que $\beta \circ \eta = (1 \otimes \eta) \circ \alpha$, donde

$$\beta : \mathbb{A} \otimes_{\mathbb{A}} C(X) \rightarrow C(X) \quad \text{y} \quad \alpha : \mathbb{A} \otimes_{\mathbb{A}} \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$$

son los homomorfismos naturales. Por lo tanto $\langle c \frown \omega, \eta \rangle$ es la imagen de c por

$$\tau \circ (\omega \otimes 1) \circ (1 \otimes \eta) \circ \alpha = \tau \circ (\omega \otimes \eta) \circ \alpha,$$

es decir,

$$\langle c \frown \omega, \eta \rangle = \langle c, \omega \smile \eta \rangle,$$

entendiendo que los dos productos se calculan con la misma aproximación diagonal. Si usamos concretamente la aproximación de Alexander-Whitney, es fácil ver que, para un p -símplice σ y $\omega \in C^i(X)$,

$$\sigma \frown \omega = \omega({}_i\sigma)\sigma_{p-i}.$$

Veamos ahora que el producto mixto induce un producto entre las clases de homología y cohomología. Para ello estudiamos la frontera de un producto mixto:

$$\langle \partial(c \frown \omega), \eta \rangle = \langle c \frown \omega, d\eta \rangle = \langle c, \omega \smile d\eta \rangle.$$

Ahora usamos que $d(\omega \smile \eta) = d\omega \smile \eta + (-1)^i \omega \smile d\eta$, con lo que

$$\begin{aligned} \langle \partial(c \frown \omega), \eta \rangle &= \langle c, (-1)^i (d(\omega \smile \eta) - d\omega \smile \eta) \rangle \\ &= (-1)^i (\langle \partial c \frown \omega, \eta \rangle - \langle c \frown d\omega, \eta \rangle) \\ &= \langle (-1)^i (\partial c \frown \omega - c \frown d\omega), \eta \rangle. \end{aligned}$$

Como esto es válido para toda cocadena η , podemos concluir que

$$(-1)^i \partial(c \frown \omega) = \partial c \frown \omega - c \frown d\omega. \tag{12.9}$$

De aquí se desprenden las relaciones

$$\begin{aligned} \text{ciclo} \frown \text{cociclo} &= \text{ciclo} \\ \text{ciclo} \frown \text{cofrontera} &= \text{frontera} \\ \text{frontera} \frown \text{cociclo} &= \text{frontera} \end{aligned}$$

Estos hechos implican a su vez que el producto $[c] \frown [\omega] = [c \frown \omega]$ está bien definido, e induce una aplicación bilineal

$$H_p(X) \times H^i(X) \longrightarrow H_{p-i}(X)$$

que no depende de la aproximación diagonal con la que se calcula. En efecto, si τ y τ' son dos aproximaciones diagonales, sabemos que son naturalmente homotópicas, por lo que $\tau_X - \tau'_X = \Delta\partial + \partial\Delta$, para una cierta homotopía natural Δ . Por lo tanto, si $\omega \in Z^p(X)$ y $c \in Z_i(X)$,

$$(c \frown_\tau f)(c) - (c \frown_{\tau'} f)(c) = \beta((\omega \otimes 1)(\tau_X(c) - \tau'_X(c))) = \beta((\omega \otimes 1)(\partial\Delta(c))).$$

Si $\Delta(c) = \sum_l c_l \otimes c'_l$, entonces

$$\begin{aligned} (c \frown_\tau \omega)(c) - (c \frown_{\tau'} f)(c) &= \sum_l \beta((\omega \otimes 1)(\partial c_l \otimes c'_l + (-1)^{r_l} c_l \otimes \partial c'_l)) \\ &= \sum_l \beta(d\omega(c_l)) \otimes c'_l + (-1)^{r_l} \omega(c_l) \otimes \partial c'_l \\ &= \sum_l (-1)^{r_l} \omega(c_l) \partial c'_l = \partial \left(\sum_l (-1)^{r_l} \omega(c_l) c'_l \right), \end{aligned}$$

luego $[c \frown_\tau \omega] = [c \frown_{\tau'} \omega]$.

Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua, la naturalidad de τ nos da, para cada cocadena $\omega \in C^i(Y)$, el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} C(X) & \xrightarrow{\tau_X} & C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(X) & \xrightarrow{f_{\sharp}(\omega) \otimes 1} & \mathbb{A} \otimes_{\mathbb{A}} C(X) & \longrightarrow & C(X) \\ f_{\sharp} \downarrow & & f_{\sharp} \otimes f_{\sharp} \downarrow & & 1 \otimes f_{\sharp} \downarrow & & \downarrow f_{\sharp} \\ C(Y) & \xrightarrow{\tau_Y} & C(Y) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y) & \xrightarrow{\omega \otimes 1} & \mathbb{A} \otimes_{\mathbb{A}} C(Y) & \longrightarrow & C(Y) \end{array}$$

del que se desprende la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_p(X) \times C^i(X) & \xrightarrow{\quad \frown \quad} & C_{p-i}(X) \\ f^\# \downarrow & & \uparrow f_\# \\ C_p(Y) \times C^i(Y) & \xrightarrow{\quad \frown \quad} & C_{p-i}(Y) \end{array}$$

que a su vez induce el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_p(X) \times H^i(X) & \xrightarrow{\quad \frown \quad} & H_{p-i}(X) \\ f_* \downarrow & & \uparrow f^* \\ H_p(Y) \times H^i(Y) & \xrightarrow{\quad \frown \quad} & H_{p-i}(Y) \end{array}$$

Equivalentemente, se cumple que $f_*(\alpha) \frown \omega = f_*(\alpha \frown f^*(\omega))$, para todo $\alpha \in H_p(X)$ y todo $\omega \in H^i(Y)$.

Productos relativos El producto exterior y el producto mixto pueden definirse también entre grupos de homología y cohomología relativa. Para ello observamos que si τ es una aproximación diagonal, la naturalidad aplicada a una inclusión $i : A \rightarrow X$ hace que $\tau_X|_{C(A)} = \tau_A$. Por consiguiente, si $\omega \in C^i(X, A)$, $\eta \in C^j(X, A)$ son dos cocadenas relativas, es decir, que se anulan en $C(A)$, tenemos que $\omega \smile \eta \in C^{i+j}(X, A)$. En efecto, si $c \in C_{i+j}(A)$, entonces $\tau(c) \in C(A) \otimes C(A)$, luego $(\omega \otimes \eta)(\tau(c)) = 0$ y también $(\omega \smile \eta)(c) = 0$.

Es inmediato entonces que el producto exterior de cocadenas induce entonces un producto

$$\smile : H^i(X, A) \otimes_{\mathbb{A}} H^j(X, A) \rightarrow H^{i+j}(X, A).$$

Además es independiente de la aproximación con la que se calcula, pues si τ y τ' son dos aproximaciones diagonales, entonces $\tau_X - \tau'_X = \Delta\partial + \partial\Delta$, para una cierta homotopía natural Δ . Si ω y η son dos cociclos, componiendo con $(\omega \otimes \eta) \circ \alpha$ obtenemos que

$$\omega \smile_{\tau} \eta - \omega \smile_{\tau'} \eta = d(\Delta \circ (\omega \otimes \eta) \circ \alpha),$$

y la cocadena de la derecha se anula en $C(A)$ porque $\Delta_X|_{C(A)} = \Delta_A$. Por consiguiente el miembro derecho está en $F^*(X, A)$ y los dos productos exteriores son cohomólogos.

Esta misma técnica permite adaptar para el producto exterior relativo las demostraciones de las propiedades del producto absoluto. En principio podríamos trabajar con un producto relativo general $\omega \times \eta$, pero esto involucra productos de pares

$$(X, A) \times (Y, B) = (X \times Y, X \times B \cup A \times Y),$$

cuando para nuestros fines es más sencillo adaptar las pruebas particularizadas al caso $X = Y$. Veamos por ejemplo la anticonmutatividad. Observemos que

si T es la aplicación del teorema 12.14 (para $X = Y$) y $\delta : X \rightarrow X \times X$ es la aplicación diagonal, entonces $\delta \circ T = \delta$. Por consiguiente $\delta^\# \circ T^\# = \delta^\#$ y si componemos (12.6) con $\delta^\#$ por la izquierda y con $(\omega \otimes \eta) \circ \alpha$ por la derecha nos queda la relación

$$\eta \smile \omega - (-1)^{ij}(\omega \smile \eta) = d(\delta^\# \circ \Delta \circ (\omega \otimes \eta) \circ \alpha).$$

Como antes, la cocadena de la derecha se anula en $C(A)$, por lo que al tomar clases de cohomología relativa obtenemos la anticonmutatividad del producto. ■

Similarmente se prueba la asociatividad del producto y, en general, que $H^*(X, A)$ es un álgebra graduada unitaria. También es claro que los homomorfismos inducidos por las aplicaciones continuas entre pares son homomorfismos de álgebras.

Pasamos ahora a los productos mixtos. Si tenemos un par de espacios (X, A) y $\tau : C \rightarrow C \otimes_{\mathbb{A}} C$ es una aproximación diagonal, el hecho de que sea una transformación natural nos da la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} C(X) & \xrightarrow{\tau_X} & C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(X) \\ \uparrow i & & \uparrow i \otimes i \\ C(A) & \xrightarrow{\tau_A} & C(A) \otimes_{\mathbb{A}} C(A) \end{array}$$

Equivalentemente, $\tau_X[C(A)] \subset C(A) \otimes_{\mathbb{A}} C(A)$. Por lo tanto si $c \in C_p(A)$ y $\omega \in C^i(X, A)$, entonces $\tau(c) \in C(A) \otimes C(A)$, luego $(\omega \otimes 1)(\tau(c)) = 0$, de donde se sigue que $c \frown \omega = 0$. A su vez, esto implica que el producto mixto induce un producto

$$\frown : C_p(X, A) \times C^i(X, A) \rightarrow C_{p-i}(X).$$

Puesto que se sigue cumpliendo la igualdad (12.9), este producto induce a su vez una aplicación bilineal

$$\frown : H_p(X, A) \times H^i(X, A) \rightarrow H_{p-i}(X)$$

que no depende de la elección de la aproximación diagonal con la que se calcula, y es natural en el sentido de que si $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ es una aplicación continua, entonces el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_p(X, A) \times H^i(X, A) & \xrightarrow{\frown} & H_{p-i}(X) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ H_p(Y, B) \times H^i(Y, B) & \xrightarrow{\frown} & H_{p-i}(Y) \end{array}$$

Las comprobaciones son similares a las que hemos visto para \smile y para el producto mixto absoluto.

Por otra parte, si $c \in C_p(A)$ y $\omega \in C^i(X)$, entonces no es cierto en general que $c \smile \omega = 0$, pero, al menos $c \smile \omega \in C_{p-i}(A)$. Por lo tanto el producto mixto induce un producto

$$\smile : C_p(X, A) \times C^i(X) \longrightarrow C_{p-i}(X, A),$$

que a su vez induce un homomorfismo

$$\smile : H_p(X, A) \otimes_{\mathbb{A}} H^i(X) \longrightarrow H_{p-i}(X, A). \quad (12.10)$$

12.5 Ejemplos de álgebras de cohomología

Vamos a calcular explícitamente la estructura del álgebra de cohomología de algunos espacios topológicos. El caso de las esferas es trivial:

El álgebra de cohomología de S^n Los únicos grupos de cohomología no nulos de S^n son

$$H^0(S^n) = \langle 1 \rangle \cong \mathbb{A}, \quad H^n(S^n) = \langle \omega \rangle \cong \mathbb{A}.$$

Necesariamente entonces:

$$1 \smile 1 = 1, \quad 1 \smile \omega = \omega \smile 1 = \omega, \quad \omega \smile \omega = 0,$$

pues $\omega \smile \omega$ debe tener grado $2n$, y el grupo correspondiente es nulo. Esto determina completamente la estructura de $H^*(S^n) \cong \mathbb{A}[x]/(x^2)$. ■

El teorema siguiente nos determina en algunos casos el álgebra de cohomología de un producto de espacios topológicos:

Teorema 12.20 Si X_1 y X_2 son dos espacios topológicos y $p_k : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_k$ es la proyección, entonces, para cada $\omega \in H^i(X)$, $\eta \in H^j(Y)$ se cumple que

$$\omega \times \eta = p_1^*(\omega) \smile p_2^*(\eta).$$

DEMOSTRACIÓN: Por definición, si $\omega \in C^i(X)$, $\eta \in C^j(Y)$, tenemos que $p_{1\#}(\omega) \smile p_{2\#}(\eta)$ es la composición de

$$C(X \times Y) \xrightarrow{\delta_{\#}} C(X \times Y \times X \times Y) \xrightarrow{\phi}$$

$$C(X \times Y) \otimes_{\mathbb{A}} C(X \times Y) \xrightarrow{p_1^{\#} \otimes p_2^{\#}} C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y)$$

con $\omega \otimes \eta : C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y) \longrightarrow \mathbb{A} \otimes_{\mathbb{A}} \mathbb{A}$ y con $\alpha : \mathbb{A} \otimes_{\mathbb{A}} \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$. Ahora bien,

$$\psi(X, Y) = \delta_{\#} \circ \phi \circ p_1^{\#} \otimes p_2^{\#} : C(X \times Y) \longrightarrow C(X) \otimes_{\mathbb{A}} C(Y)$$

es una transformación natural que en dimensión 0 induce el isomorfismo natural $([x], [y]) \mapsto [x] \otimes [y]$. Por lo tanto es homotópicamente equivalente a $\phi(X, Y)$ y podemos usarla para calcular $\omega \times \eta$, pero esto consiste en componerla con $\omega \otimes \eta$ y con α , luego concluimos que $p_{1\#}(\omega) \smile p_{2\#}(\eta) = \omega \times \eta$. Al tomar clases de cohomología obtenemos la igualdad del enunciado. ■

En particular, en las condiciones del teorema anterior tenemos que

$$p_1^*(\omega) = \omega \times 1, \quad p_2^*(\eta) = 1 \times \eta, \quad \omega \times \eta = (\omega \times 1) \smile (1 \times \eta).$$

Notemos que los homomorfismos de álgebras $p_k^* : H^*(X_k) \rightarrow H^*(X_1 \times X_2)$ son monomorfismos, pues, fijado $y \in X_2$, la aplicación $g(x) = (x, y)$ cumple $g \circ p_1 = 1$, luego $p_1^* \circ g^* = 1$, luego p_1^* es inyectiva.

El álgebra de cohomología de M_1 Vamos a calcular el álgebra de cohomología de $M_1 = S^1 \times S^1$. Para ello observamos que si $H_0(S^1) = \langle 1 \rangle \cong \mathbb{Z}$ y $H^1(S^1) = \langle \omega \rangle \cong \mathbb{Z}$, entonces, según el teorema 12.15,

$$H_0(M_1) = \langle 1 \times 1 \rangle, \quad H_1(M_1) = \langle \omega \times 1, 1 \times \omega \rangle, \quad H_2(M_1) = \langle \omega \times \omega \rangle.$$

Tenemos que $1 \times 1 = 1$ es la identidad del álgebra y

$$(\omega \times 1)^2 = (1 \times \omega)^2 = (\omega \times \omega)^2 = 0,$$

$$(\omega \times 1) \smile (1 \times \omega) = \omega \times \omega = -(1 \times \omega) \smile (\omega \times 1).$$

donde la primera igualdad de la segunda línea se tiene por el teorema anterior y la segunda por la anticonmutatividad. Eso determina completamente la estructura de álgebra. ■

El álgebra de cohomología de $S^2 \times S^2$ Análogamente al caso anterior, si $H_0(S^2) = \langle 1 \rangle$, $H^2(S^2) = \langle \omega \rangle$, ahora tenemos que

$$H^0(S^2 \times S^2) = \langle 1 \rangle, \quad H^2(S^2 \times S^2) = \langle \omega \times 1, 1 \times \omega \rangle, \quad H^4(S^2 \times S^2) = \langle \omega \times \omega \rangle,$$

y el producto está determinado por las relaciones

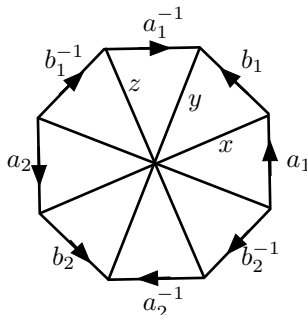
$$(\omega \times 1)^2 = (1 \times \omega)^2 = (\omega \times \omega)^2 = 0,$$

$$(\omega \times 1) \smile (1 \times \omega) = \omega \times \omega = (1 \times \omega) \smile (\omega \times 1).$$

En este caso el álgebra es conmutativa, y así $H^*(S^2 \times S^2) \cong \mathbb{Z}[x, y]/(x^2, y^2)$. ■

El álgebra de cohomología de las superficies compactas Vamos a calcular las álgebras de cohomología de las superficies compactas. Para evitar complicaciones de notación calcularemos concretamente las correspondientes a los espacios M_2 y N_3 , pero todos los cálculos se adaptan fácilmente al caso general.

Sean a_1, b_1, a_2 y b_2 los 1-ciclos de M_2 indicados en la figura.



Sabemos (véanse las observaciones tras el teorema 10.13) que $H_0(M_2) = \langle 1 \rangle$, $H_1(M_2) = \langle [a_1], [b_1], [a_2], [b_2] \rangle$, $H_2(M_2) = \langle [c] \rangle$, donde c es la suma de los ocho triángulos que muestra la figura, considerados como 2-símplices orientados en sentido antihorario. Más concretamente, si σ es uno de ellos, convenimos que $\sigma(x_0)$ es el vértice central. Así, por ejemplo, si σ es el 2-símplice de lados x , b_1 e y , tenemos que $\partial\sigma = x + b_1 - y$ (consideramos que los radios están orientados del centro hacia los vértices del octógono), ${}_1\sigma = x$, $\sigma_1 = -y$.

Las cuatro clases $[a_i]$, $[b_i]$ son, de hecho, una base de $H_1(M_2)$. Como H_0 no tiene torsión, el teorema 7.17 nos da que $H^1(M_2)$ se identifica de forma natural con $H_1(M_2)^*$. Sea $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ la base dual de $[a_1], [b_1], [a_2], [b_2]$, es decir, α_1 toma el valor 1 sobre $[a_1]$ y 0 sobre las otras tres clases, etc. Pongamos que $\alpha_1 = [a_1^*]$, $\beta_1 = [b_1^*]$, $\alpha_2 = [a_2^*]$, $\beta_2 = [b_2^*]$, donde a_1^* , etc. son 1-cociclos de los que, en principio, sólo sabemos cómo actúan sobre a_1, b_1, a_2, b_2 , pero no sobre otras 1-cadenas.

Similarmente, $H^2(M_2)$ se identifica de forma natural con $H_2(M_2)^*$. Una base es, pues, la base dual de $[c]$, formada por una única clase ζ caracterizada por que $\zeta([c]) = 1$. Calculamos:

$$(a_1^* \smile b_1^*)(c) = \sum_{i=1}^8 (a_1^* \smile b_1^*)(\sigma_i) = \sum_{i=1}^8 a_1^*({}_1(\sigma_i)) b_1^*((\sigma_i)_1).$$

Como $(\sigma_i)_1$ es uno de los símplexes $\pm a_i, \pm b_i$, todos los sumandos son nulos excepto dos:

$$(a_1^* \smile b_1^*)(c) = a_1^*(x) - a_1^*(z).$$

Ahora bien, a_1^* es un cociclo, luego se anula sobre las fronteras. Concretamente, si llamamos σ al 2-símplice de frontera $\partial\sigma = x + b_1 - y$ tenemos que $0 = a_1^*(\partial\sigma) = a_1^*(x) + 0 - a_1^*(y)$. Similarmente, $0 = a_1^*(y) - 1 - a_1^*(z)$, de donde se sigue que $(a_1^* \smile b_1^*)(c) = 1$.

Así pues, al tomar clases concluimos que $\alpha_1 \smile \beta_1 = \zeta$. Similarmente se comprueba que $\alpha_1 \smile \beta_2 = 0$. Las conclusiones restantes las enunciamos en general para M_g :

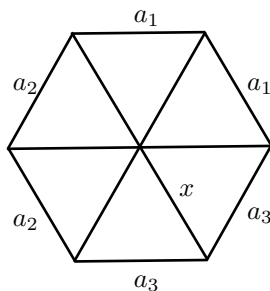
El módulo $H^1(M_g)$ tiene por base $2g$ clases α_i, β_i , para $i = 1, \dots, g$, tales que

$$\alpha_i \smile \alpha_j = \beta_i \smile \beta_j = 0,$$

$$\alpha_i \smile \beta_j = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

y la clase $\alpha_i \smile \beta_i = -\beta_i \smile \alpha_i$ es independiente de i y es una base de $H^2(M_g)$. En particular, $H^*(M_g)$ está generada como álgebra por las clases α_i, β_i .

Nos ocupamos ahora de la superficie N_3 . Consideramos los símplexes indicados en la figura:



Tomamos las orientaciones análogas a las del caso anterior. Ahora resulta que

$$H_0(N_3) = \langle 1 \rangle, \quad H_1(N_3) = \langle [a_1], [a_2], [a_3] \rangle, \quad H_2(N_3) = 0.$$

Sin embargo, ahora $H_1(N_3)$ no es libre, sino que sus generadores están sujetos a la relación $2[a_1] + 2[a_2] + 2[a_3] = [\partial c] = 0$, donde c es la suma de los seis triángulos que aparecen en la figura. Su estructura es

$$H_1(N_3) \cong \mathbb{A} \otimes \mathbb{A} \otimes (\mathbb{A}/2\mathbb{A}).$$

Más concretamente, $H_1(N_3)$ se descompone en suma directa de una parte libre de rango 2, por ejemplo $\langle [a_1], [a_2] \rangle$, más el submódulo de torsión, que es precisamente $\langle [a_1] + [a_2] + [a_3] \rangle$ (notemos que será nulo si $\mathbb{A} = 2\mathbb{A}$, pues entonces su generador es la clase de $\partial \frac{1}{2}c$).

Como $H_0(N_3)$ no tiene torsión, tenemos que $H^1(N_3)$ se puede identificar con $H_1(N_3)^*$, mientras que el teorema 12.10 nos da que $H^2(N_3) \cong \mathbb{A}/2\mathbb{A}$. Un primer ejemplo de la utilidad del producto exterior es que, como vamos a ver, nos proporciona un generador explícito de $H^2(N_3)$.

Es fácil ver que $H_1(N_3)^* \cong \langle [a_1], [a_2] \rangle^*$, donde el isomorfismo es la restricción, pues un homomorfismo de $\mathbb{A}/2\mathbb{A}$ en \mathbb{A} ha de ser nulo (estamos suponiendo que \mathbb{A} es un dominio de ideales principales, luego en particular un dominio íntegro).

Sea α_1, α_2 la base dual de $[a_1], [a_2]$. Digamos que $\alpha_i = [a_i^*]$. Puesto que a_1^* es un cociclo, ha de anularse sobre la frontera $2a_1 + 2a_2 + 2a_3$, de donde deducimos que $a_1^*(a_3) = 1$. Similarmente $a_2^*(a_3) = 1$.

El mismo razonamiento que en el caso anterior prueba que a_1^* toma el mismo valor $u \in \mathbb{A}$ sobre todos los radios del hexágono, a excepción del marcado como x en la figura, para el que se cumple $a_1^*(x) = u + 1$.

El cálculo de $(a_1^* \smile a_2^*)(c)$ nos lleva a seis sumandos, uno para cada triángulo de la figura, de los cuales sólo son no nulos los cuatro correspondientes a los dos lados a_2 y a los dos lados a_3 . Concretamente, queda $(a_1^* \smile a_2^*)(c) = 4u + 1$.

Si fuera $a_1^* \smile a_2^* = d\omega$, para cierta cocadena ω , entonces tendríamos que

$$4u + 1 = df(c) = \omega(\partial c) = \omega(2a_1 + 2a_2 + 2a_3) = 2v, \quad v \in \mathbb{A},$$

luego $1 = 2(v - 2u) \in 2\mathbb{A}$, lo que implica que $\mathbb{A} = 2\mathbb{A}$.

Recíprocamente, si $\mathbb{A} = 2\mathbb{A}$ entonces todo 2-cociclo es una cofrontera, en particular $a_1^* \smile a_2^*$. En cualquier caso, tomando clases concluimos que $\alpha_1 \smile \alpha_2$ es un generador (quizá nulo) de $H^2(N_3)$.

Es fácil ver que lo mismo vale para $\alpha_i \smile \alpha_j$, cualesquiera que sean $i, j = 1, 2$. Notemos que $\alpha_i \smile \alpha_j = -\alpha_j \smile \alpha_i = \alpha_j \smile \alpha_i$.

Todo esto vale en general: el grupo $H^1(N_h)$ tiene una base de la forma $\alpha_1, \dots, \alpha_{h-1}$ de modo que todos los $\alpha_i \smile \alpha_j$ son el mismo elemento de $H^2(N_h)$, el único elemento no nulo si es lo hay o 0 en caso contrario. ■

Teorema 12.21 (El álgebra de cohomología de una suma topológica)

Si $X = \bigoplus_k X_k$ es una suma de espacios topológicos y sea $i_k : X_k \rightarrow X$ la inclusión. Entonces

$$\prod_k i_k^* : H_N^p(X) \rightarrow \prod_k H_N^p(X_k)$$

es un isomorfismo de álgebras si consideramos al producto cartesiano como álgebra con el producto definido componente a componente.

Basta tener en cuenta que la aplicación es un isomorfismo por 11.28 y que cada i_k^* es un homomorfismo de álgebras.

Así, por ejemplo, $H^*(S^1 \oplus S^1) = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle \oplus \langle (\alpha, 0), (0, \alpha) \rangle$ y todos los productos de elementos básicos dan 0 excepto

$$\begin{aligned} (1, 0) \smile (1, 0) &= (1, 0), & (0, 1) \smile (0, 1) &= (0, 1), \\ (1, 0) \smile (\alpha, 0) &= (\alpha, 0), & (0, 1) \smile (0, \alpha) &= (0, \alpha). \end{aligned}$$

Teorema 12.22 (El álgebra de cohomología un ramo) Sea $\{X_i\}_{i=1}^n$ una familia de espacios topológicos arcoconexos y fijemos puntos $p_i \in X_i$ que sean retracts por deformación fuertes de entornos respectivos. Entonces las restricciones de las proyecciones

$$\pi_i : X_i \rightarrow \bigvee_{i=1}^n X_i$$

inducen un monomorfismo de álgebras

$$\bigoplus_{i=1}^n \pi_i^* : H^*(\bigvee_{i=1}^n X_i) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n H^*(X_i)$$

que se restringe a un isomorfismo en todos los submódulos de elementos homogéneos excepto para $p = 0$, cuya imagen es $\langle (1, \dots, 1) \rangle$.

DEMOSTRACIÓN: Las pruebas de los teoremas 9.33 y 9.35 se adaptan para la cohomología sin más que invertir el sentido de todos los homomorfismos considerados entre los grupos de homología. El resultado es que, para la cohomología reducida, se cumple que $\bigoplus_{i=1}^n \pi_i^*$ es un isomorfismo de espacios vectoriales y sigue siéndolo para la cohomología completa salvo a lo sumo en dimensión 0.

Pero la situación en dimensión 0 es fácil de analizar: Como el ramo es arcoconexo, tenemos que $H^0(\bigvee_{i=1}^n X_i) \cong \mathbb{A}$ se identifica con las funciones constantes

con valores en \mathbb{A} , y lo mismo vale para cada X_i . Como cada π_i^* es un homomorfismo de álgebras, transforma la función constante 1 en la función constante 1, luego, en total, la imagen de 1 es $(1, \dots, 1)$. Esto prueba que el homomorfismo del enunciado es inyectivo en todas las dimensiones, luego es un monomorfismo. ■

Por ejemplo:

$$H^*(S^1 \vee S^1) = \langle (1, 1) \rangle \oplus \langle (\alpha, 0), (0, \alpha) \rangle \cong \mathbb{Z}[x, y]/(x^2, y^2, xy).$$

Teorema 12.23 (El álgebra de cohomología de una suma conexa) Sean M y N son variedades topológicas compactas conexas y orientables de la misma dimensión n . Sea S la subálgebra graduada de $H^*(M) \oplus H^*(N)$ (considerada como álgebra con el producto definido componente a componente) que resulta de sustituir $H^0(M) \oplus H^0(N)$ por el subespacio $\langle (1, 1) \rangle$. Entonces existe un epimorfismo de álgebras graduadas

$$\phi : S \longrightarrow H^*(M \# N)$$

que se restringe a isomorfismos $\phi_p : S^p \longrightarrow H^p(M \# N)$ salvo para $p = n$. Si $H^n(M) = \langle \omega_1 \rangle$, $H^n(N) = \langle \omega_2 \rangle$, entonces $\phi_n(\omega_1, 0)$ y $\phi(0, \omega_2)$ son generadores de $H^n(M \# N)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $g : M \# N \longrightarrow M \vee N$ la identificación construida en la prueba del teorema 12.6 y sea $S_0^{n-1} \subset M \# N$ la esfera que se identifica a un punto p . El teorema 12.22 y la versión dual del teorema 9.33 nos dan los homomorfismos siguientes de álgebras graduadas:

$$S \xleftarrow{\pi_1^* \oplus \pi_2^*} H^*(M \vee N) \xleftarrow{i^*} H^*(M \vee N, \{p\}) \xrightarrow{g^*} H^*(M \# N, S^{n-1}),$$

de modo que $\pi_1^* \oplus \pi_2^*$ y g^* son isomorfismos para la cohomología completa, pero i^* sólo lo es para la reducida, luego para la completa es también un isomorfismo salvo en dimensión 0. Concretamente, en dimensión 0 tenemos que

$$H^0(M \vee N, \{p\}) = 0, \quad H^0(M \vee N) \cong \mathbb{Z}.$$

Ahora consideramos la sucesión exacta de cohomología del par $(M \# N, S^{n-1})$ respecto de la cohomología reducida:

$$0 \longrightarrow H^0(M \# N, S^{n-1}) \longrightarrow H^0(M \# N) \longrightarrow H^0(S^{n-1}) \longrightarrow H^1(M \# N, S^{n-1})$$

Como $H^p(S^{n-1}) = 0$ para $p = 0, \dots, n-2$, obtenemos isomorfismos

$$i_p^* : H^p(M \# N, S^{n-1}) \longrightarrow H^p(M \# N).$$

El final de la sucesión exacta es

$$0 \longrightarrow H^{n-1}(M \# N, S^{n-1}) \xrightarrow{i_{n-1}^*} H^{n-1}(M \# N) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{i_n^*} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

donde hemos usado que $H^n(M \# N, S^{n-1}) \cong H^n(M \vee N) \cong \mathbb{Z}^2$, así como que $H^n(M \# N) \cong \mathbb{Z}$ porque las variedades son orientables.

El núcleo de i_n^* no puede ser trivial, luego β no es nula. Si el núcleo de β es $n\mathbb{Z}$ con $n > 1$, entonces su imagen es $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, lo cual es imposible, porque \mathbb{Z}^2 no tiene elementos de torsión, luego tiene que ser $n = 0$ y así α es nula, luego también tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H^{n-1}(M\#N, S^{n-1}) \xrightarrow{i_n^*} H^{n-1}(M\#N) \longrightarrow 0$$

de modo que $i^* : H^*(M\#N, S^{n-1}) \longrightarrow H^*(M\#N)$ es un isomorfismo salvo en dimensión n con la cohomología reducida (y en dimensión n es un epimorfismo), luego lo es salvo a lo sumo en dimensión $0, n$ para la cohomología completa.

Lo mismo vale entonces para la composición

$$g^* : H^*(M \vee N, \{p\}) \longrightarrow H^*(M\#N),$$

que es, pues, un homomorfismo de álgebras, un isomorfismo para dimensiones $0 < p < n$, un epimorfismo para $p = n$ y en dimensión 0 es nulo. Por otra parte tenemos la composición

$$S \xleftarrow{j^*} H^*(M \vee N, \{p\}),$$

que es un isomorfismo salvo en dimensión 0 . A partir de ellos podemos definir

$$\phi : S \longrightarrow H^*(M\#N)$$

como el homomorfismo de \mathbb{Z} -módulos graduados determinado por que ϕ_0 es el isomorfismo natural que lleva la identidad $1 = (1, 1) \in S$ a la identidad de $H^*(M\#N)$ y, para $p > 0$, es $\phi_p = j_p^{*-1} \circ g_p^*$.

Se cumple que ϕ es un homomorfismo de álgebras, pues, como lo son j^* y g^* , tenemos que ϕ conserva el producto de elementos homogéneos de grados no nulos, pero si uno de los factores tiene grado 0 , entonces es de la forma $m \cdot 1$, con lo que

$$\phi(m \cdot 1 \smile \alpha) = \phi(m\alpha) = m\phi(\alpha) = m \cdot 1 \smile \phi(\alpha),$$

y así ϕ conserva todos los productos.

Sólo nos falta estudiar cómo actúa $\phi_n : H^n(M) \oplus H^n(N) \longrightarrow H^n(M\#N)$, es decir, la composición

$$H^n(M) \oplus H^n(N) \xrightarrow{\pi_1^* \oplus \pi_2^*} H^n(M \vee N) \xrightarrow{g^*} H^n(M\#N).$$

En la nota final de la sección 12.1 hemos analizado el comportamiento de los homomorfismos inducidos por las mismas aplicaciones sobre los grupos de homología:

$$H_n(M) \oplus H_n(N) \xrightarrow{\pi_{1*} \oplus \pi_{2*}} H_n(M \vee N) \xleftarrow{g_*} H_n(M\#N).$$

Concretamente, hemos visto que eligiendo adecuadamente clases fundamentales ζ_M, ζ_N y $\zeta_{M\#N}$ de las variedades correspondientes, entonces

$$g_*(\zeta_{M\#N}) = \pi_{1*}(\zeta_M) + \pi_{1*}(\zeta_N).$$

Como los grupos de homología de dimensión $n - 1$ de las superficies compactas orientables son libres, el teorema 12.9 nos da que

$$H^n(M\#N) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(M\#N), \mathbb{Z}), \quad H^n(M \vee N) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(M \vee N), \mathbb{Z}),$$

donde los isomorfismos asignan a cada clase de cohomología ω el homomorfismo $\langle -, \omega \rangle$. Además, de las meras definiciones se sigue que $\langle \alpha, g^*(\omega) \rangle = \langle g_*(\alpha), \omega \rangle$.

Cada clase fundamental ζ_M determina un generador de $H^n(M)$, a saber, la clase dual ω_M determinada por la relación $\langle \zeta_M, \omega_M \rangle = 1$. Igualmente tenemos los generadores ω_N y $\omega_{M\#N}$. Sea $\omega'_M \in H^n(M \vee N)$ tal que $(\pi_1^* \oplus \pi_2^*)(\omega'_M) = \omega_M$, es decir, tal que $\pi_1^*(\omega'_M) = \omega_M$, $\pi_2^*(\omega'_M) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle \zeta_{M\#N}, \phi(\omega_M) \rangle &= \langle \zeta_{M\#N}, g^*(\omega'_M) \rangle = \langle g_*(\zeta_{M\#N}), \omega'_M \rangle = \\ \langle \pi_{1*}(\zeta_M) + \pi_{2*}(\zeta_N), \omega'_M \rangle &= \langle \zeta_M, \pi_1^*(\omega'_M) \rangle + \langle \zeta_N, \pi_2^*(\omega'_M) \rangle = 1, \end{aligned}$$

luego $\phi(\omega_M) = \omega_{M\#N}$. Igualmente se concluye que $\phi(\omega_N) = \omega_{M\#N}$. ■

Nota El teorema anterior no determina completamente el homomorfismo descrito, pues si ω_M y ω_N son generadores de $H^n(M)$ y $H^n(N)$, respectivamente, deja abierta la posibilidad de que sea $\phi(\omega_M) = \phi(\omega_N)$ y, por consiguiente, $\phi(-\omega_M) = \phi(-\omega_N)$, o bien que sea $\phi(\omega_M) = \phi(-\omega_N)$ y $\phi(-\omega_M) = \phi(\omega_N)$.

Los dos casos pueden darse, ya que si, por ejemplo, con la notación de la nota final de la sección 12.1, se da el primero con la suma conexas calculada con un homeomorfismo $f : S_1^{n-1} \rightarrow S_2^{n-1}$, entonces la suma conexas calculada con un homeomorfismo que resulte de componer f con un homeomorfismo de una de las esferas que invierta la orientación está en el segundo caso. Según explicamos tras la definición de la suma conexas, esta diferencia se interpreta como la diferencia entre agujerear las variedades e identificar los agujeros con las variedades en lados opuestos del agujero o bien en el mismo lado (allí decíamos “desde fuera” o “desde dentro”).

Más precisamente, vimos que cada clase $\zeta_M \in H_n(M)$, $\zeta_N \in H_n(N)$ o $\zeta_{M\#N} \in H_n(M\#N)$ determina una clase fundamental $\delta(\zeta_M) \in H_{n-1}(S_1^{n-1})$, $\delta(\zeta_N) \in H_{n-1}(S_2^{n-1})$ o $\delta(\zeta_{M\#N}) \in H_{n-1}(S_0^{n-1})$, respectivamente, a través de los homomorfismos de conexión de las sucesiones de Mayer-Vietoris, y es fácil ver que la condición $\phi(\omega_M) = \phi(\omega_N)$ es equivalente a $f_*(\delta(\zeta_M)) = -f_*(\delta(\zeta_N))$.

Por lo tanto, invertir la orientación en la identificación que determina la suma conexas puede dar lugar a variedades con álgebras de cohomología no isomorfas. Es importante que sólo decimos que *puede* dar lugar, ya que no es necesariamente así. Por ejemplo, sabemos que una suma conexas de dos toros es siempre $M_1\#M_1 \cong M_2$, independientemente de la identificación considerada. A este respecto hay que tener en cuenta que dos álgebras definidas de forma distinta pueden, no obstante, ser isomorfas, mediante un isomorfismo que no sea la identidad. Vamos a ver ejemplos de ambas posibilidades. ■

El teorema anterior determina la estructura de álgebra de una suma conexas de variedades topológicas compactas, conexas y orientables salvo por la forma en que deben identificarse los generadores de los grupos de cohomología H^n de uno y otro sumando. Veamos ejemplos concretos:

El álgebra de cohomología de M_2 Vamos a aplicar el teorema anterior para calcular el álgebra de cohomología de $M_2 = M_1 \# M_1$. Sabemos que el álgebra de cohomología del toro M_1 está determinada por que

$$H^0(M_1) = \langle 1 \rangle, \quad H^1(M_1) = \langle a, b \rangle, \quad H^2(M_1) = \langle \omega \rangle,$$

de modo que

$$a \smile a = b \smile b = 0, \quad a \smile b = -b \smile a = \omega.$$

Si ahora tomamos dos copias de M_2 y las sumamos con una identificación respecto a la cual $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, tenemos que

$$H^0(M_2) = \langle 1 \rangle, \quad H^1(M_2) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \rangle, \quad H^2(M_2) = \langle \omega \rangle,$$

donde llamamos $a_1 = (a, 0)$ y $a_2 = (0, a)$, e igualmente con b_1 y b_2 . Así, los generadores con el mismo índice se multiplican como en M_1 , por ejemplo,

$$a_1 \smile a_1 = b_1 \smile b_1 = 0, \quad a_1 \smile b_1 = -b_1 \smile a_1 = \omega,$$

mientras que generadores con índices distintos tienen producto nulo.

Observemos que es el mismo resultado que obtuvimos al calcular el álgebra de cohomología de las superficies compactas. De hecho, el teorema anterior nos permite calcular de forma alternativa el álgebra de cohomología de las superficies compactas orientables.

Si, por el contrario, la identificación hace que $\omega_1 = -\omega_2 = \omega$, el álgebra que obtenemos resulta ser isomorfa a la anterior, pues, por ejemplo, un isomorfismo entre ambas es simplemente la aplicación que intercambia a_2 con b_2 . ■

Veamos ahora un ejemplo en el que la orientación de la identificación en una suma conexa sí afecta a la superficie resultante. Para entender la situación conviene introducir un nuevo concepto:

Variedades quirales Una variedad topológica conexa orientable V es *quiral* si, cuando fijamos en ella una orientación, todo homeomorfismo $h : V \rightarrow V$ conserva la orientación.

Notemos que no importa cuál de las dos orientaciones de V fijamos, pues si todos los homeomorfismos conservan una de ellas, también conservarán la opuesta.

Equivalentemente, V es quiral si cuando V_1 y V_2 son dos variedades orientadas homeomorfas a V , o bien todos los homeomorfismos $f : V_1 \rightarrow V_2$ conservan la orientación, o bien todos la invierten. En efecto, en si hubiera un homeomorfismo que conserva la orientación y otro que la invierte, al componer uno con el inverso de otro obtendríamos un homeomorfismo $h : V_1 \rightarrow V_1$ que invertiría la orientación, luego V_1 no sería quiral, y, claramente, V tampoco (la quiralidad es claramente una propiedad topológica, es decir, invariante por homeomorfismos).

Esto significa que si V es una variedad quiral y llamamos V_+ y V_- a V con una orientación o con su opuesta, respectivamente, entonces las variedades

orientadas homeomorfas a V se dividen en dos clases disjuntas:¹ las homeomorfas a V_+ con homeomorfismos orientados y las homeomorfas a V_- , siempre con homeomorfismos orientados.

Por ejemplo, las superficies compactas orientables no son quirales. Sin duda, M_g puede dotarse de dos orientaciones opuestas, pero si V_1 y V_2 son superficies topológicas orientadas homeomorfas a M_g , existe un homeomorfismo $f : V_1 \rightarrow V_2$ que conserva la orientación. En efecto, si uno dado la invierte, basta componerlo con un homeomorfismo $h : V_2 \rightarrow V_2$ que invierta la orientación. La existencia de tal homeomorfismo se demuestra sin más que considerar una simetría del polígono del cual se obtiene M_g como cociente.

Así pues, no podemos hablar, por ejemplo, de “toros derechos” o de “toros izquierdos” como hablamos de manos derechas o izquierdas.² Cualquier par de toros orientados son homeomorfos mediante un homeomorfismo que conserve la orientación.

Un ejemplo de variedad quiral El teorema 12.30 nos dará el álgebra de cohomología de los espacios proyectivos complejos. En particular probaremos que si $V = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, entonces

$$H^0(V) = \langle 1 \rangle, \quad H^2(V) = \langle a \rangle, \quad H^4(V) = \langle \omega \rangle,$$

con $\omega = a \smile a$. Esto tiene varias consecuencias interesantes.

En primer lugar observamos que tenemos dos elecciones posibles para la clase a , pues $-a$ es otro generador, pero si queremos que se cumpla la relación $\omega = a \smile a$, esto determina completamente la clase ω , ya que $a \smile a = (-a) \smile (-a)$.

Esto significa que, aunque $H^4(V)$ admite, como no podía ser de otro modo, dos generadores $\pm\omega$, éstos pueden distinguirse intrínsecamente, ya que sólo ω es un cuadrado en el álgebra de cohomología. Esto implica que V es quiral, pues si $h : V \rightarrow V$ es un homeomorfismo, entonces

$$h^*(\omega) = h^*(a \smile a) = h^*(a) \smile h^*(a) = \omega,$$

y de aquí se sigue que h_* conserva la clase fundamental y, por consiguiente, que h conserva la orientación.

Más aún, cuando una variedad es quiral, podemos distinguir entre sus versiones orientadas “izquierda” y “derecha”, pero sin que haya necesariamente un criterio por el que definir cuál de las dos orientaciones es la que llamamos “izquierda” y cuál es la “derecha”. Sin embargo, en el caso de V , lo que tenemos

¹Esto explica el nombre de “quiral”, del griego $\chiείρ$ (mano), pues las variedades quirales son como las manos: todas las manos son homeomorfas, pero, si atendemos a su orientación, las hay de dos clases, “derechas” e “izquierdas”.

²En realidad, una mano derecha sí que es homeomorfa a una mano izquierda mediante un homeomorfismo que conserve la orientación. Basta con aplastar el pulgar y elevar otro pulgar en el lado opuesto. En sentido estricto, la quiralidad de las manos es relativa a isometrías, por lo que la comparación con el caso puramente topológico no es exacta.

es que es posible definir, digamos, las variedades derechas como las orientadas por la clase fundamental cuya clase dual es un cuadrado en el álgebra de cohomología, con lo que tenemos un criterio intrínseco a la variedad³

El mismo razonamiento, teniendo en cuenta el teorema 12.30, prueba que todos los espacios proyectivos $P^{2n}(\mathbb{C})$ son quirales. ■

El álgebra de cohomología de $P^2(\mathbb{C}) \# P^2(\mathbb{C})$ Admitiendo la descripción del álgebra de cohomología de $V = P^2(\mathbb{C})$ que nos dará el teorema 12.30, vamos a usar el teorema anterior para calcular el álgebra de cohomología de $V \# V$.

En particular, vamos a ver que depende de la orientación del homeomorfismo entre esferas a través del cual se lleva construye la suma conexas.⁴

Recordemos que el álgebra de cohomología de V está determinada por que

$$H^0(V) = \langle 1 \rangle, \quad H^2(V) = \langle a \rangle, \quad H^4(V) = \langle \omega \rangle,$$

con $\omega = a \smile a$.

Por lo tanto,

$$H^0(V \# V) = \langle 1 \rangle, \quad H^2(V \# V) = \langle a_1, a_2 \rangle, \quad H^4(V \# V) = \langle \omega \rangle$$

y, si la identificación hace que $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, entonces

$$a_1 \smile a_1 = a_2 \smile a_2 = \omega, \quad a_1 \smile a_2 = 0,$$

lo que, en otros términos, significa que

$$H^*(V \# V) \cong \mathbb{Z}[x, y]/(x^2 - y^2, xy).$$

En cambio, si invertimos la identificación de modo que $\omega_1 = -\omega_2 = \omega$, entonces

$$a_1 \smile a_1 = -a_2 \smile a_2 = \omega, \quad a_1 \smile a_2 = 0,$$

y en este caso

$$H^*(V \# V) \cong \mathbb{Z}[x, y]/(x^2 + y^2, xy).$$

Es interesante comparar también con $H^*(S^2 \times S^2)$ que, de acuerdo con el tercer ejemplo de esta sección, tiene grupos de cohomología isomorfos, pero la estructura de álgebra es (llamando ahora a_1 y a_2 a las clases que antes llamábamos $\omega \times 1$ y $\omega \times 2$ y llamando ω a la que llamábamos $\omega \times \omega$):

$$a_1 \smile a_1 = a_2 \smile a_2 = 0, \quad a_1 \smile a_2 = a_2 \smile a_1 = \omega,$$

de modo que $H^*(S^2 \times S^2) \cong \mathbb{Z}[x, y]/(x^2, y^2)$.

³En el sentido de que si tuviéramos que comunicarnos verbalmente a distancia con un extraterrestre, sin posibilidad de transmitir imágenes, aunque él pudiera ver el dibujo de una mano derecha y de otra izquierda, no podríamos explicarle con palabras a cuál de ellas llamamos “derecha”. En cambio, sí que podríamos explicarle con palabras qué variante orientada de V llamamos “derecha”.

⁴Puede probarse, aunque no es fácil, que una suma conexas $V \# W$ entre variedades compactas, conexas y orientables depende de la orientación de la identificación si y sólo si ambos sumandos son quirales.

Estas tres álgebras son no isomorfas dos a dos. En efecto, si calculamos el cuadrado de un elemento arbitrario de grado 2, obtenemos, respectivamente

- En $V\#V$ con $\omega_1 = \omega_2$,

$$(ua_1 + va_2)^2 = (u^2 + v^2)\omega.$$

- En $V\#V$ con $\omega_1 = -\omega_2$,

$$(ua_1 + va_2)^2 = (u^2 - v^2)\omega.$$

- En $S^2 \times S^2$

$$(ua_1 + va_2)^2 = 2uv\omega.$$

Así pues, en el primer caso no hay elementos no nulos de grado 2 con cuadrado nulo, en el segundo sí que los hay, y alguno de ellos genera el grupo de cohomología de grado 4, y en el tercero también los hay, pero ninguno de ellos es un generador.

Tenemos así un ejemplo de tres variedades topológicas de dimensión 4 con grupos de homología y cohomología isomorfos, pero que no son homeomorfas, ni siquiera homotópicas, ya que tienen álgebras de cohomología no isomorfas. Esto muestra que el álgebra de cohomología es un invariante topológico más preciso que los meros grupos de cohomología. ■

12.6 La dualidad de Poincaré

Ya tenemos todos los ingredientes necesarios para generalizar a variedades topológicas arbitrarias el teorema de dualidad de Poincaré 11.18 que hemos demostrado para variedades diferenciales con la cohomología de De Rham.

Consideremos una variedad topológica orientable n -dimensional V y fijemos una orientación, que podemos identificar con una sección $s \in \Gamma[V]$ (véase la definición 10.46). Para cada compacto $K \subset V$, el teorema 10.48 nos da un isomorfismo

$$j_K : H_n(V, V \setminus K) \longrightarrow \Gamma[K].$$

Llamaremos $\zeta_K \in H_n(V, V \setminus K)$ a la única clase de homología que cumple $j_K(\zeta_K) = s|_K$ y la llamaremos *clase fundamental* de la orientación dada en el compacto K .

Observemos que si V es compacta y conexa entonces ζ_V es la clase fundamental de V tal y como la hemos definido en la página 419, luego esta definición generaliza a la anterior.

Por la conmutatividad del diagrama (10.2), si $K \subset K'$ son compactos en V y $j_K^{K'} : H_n(V, V \setminus K') \longrightarrow H_n(V, V \setminus K)$ es el homomorfismo inducido por la inclusión, se cumple que $j_K^{K'}(\zeta_{K'}) = \zeta_K$.

Similarmente, si $K \subset U \subset V$, donde K es compacto y U es abierto, y consideramos a U con la orientación inducida por $s|_U$, entonces ζ_K^U se corresponde con ζ_K^V a través del homomorfismo inducido por la inclusión.

Llamaremos $\zeta_K \frown: H^p(V, V \setminus K) \rightarrow H_{n-p}(V)$ al homomorfismo inducido por el producto mixto. La consistencia de las clases fundamentales y la naturalidad del producto mixto hacen que el diagrama siguiente sea conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^p(V, V \setminus K) & \xrightarrow{\zeta_K \frown} & H_{n-p}(V) \\ \downarrow \iota_{KK'} & \nearrow \zeta_{K'} \frown & \\ H^p(V, V \setminus K') & & \end{array}$$

Esto nos permite definir el homomorfismo

$$D = \varinjlim_K \zeta_K \frown : H_c^p(V) \rightarrow H_{n-p}(V).$$

Si V es una variedad compacta y conexa entonces $H_c^p(V) = H^p(V)$ y D es simplemente la aplicación $x \mapsto \zeta_V \frown x$.

El teorema de dualidad de Poincaré afirma que D es un isomorfismo. La prueba es relativamente simple salvo por el teorema siguiente, cuya prueba es más complicada de lo que podría preverse (compárese con el paso B de la prueba del teorema 11.18):

Teorema 12.24 *Sea V una variedad topológica orientable n -dimensional y sean U_1, U_2 abiertos tales que $V = U_1 \cup U_2$. Sea $U = U_1 \cap U_2$. Entonces el diagrama siguiente es conmutativo salvo signo:*

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \rightarrow & H_c^p(U) & \longrightarrow & H_c^p(U_1) \oplus H_c^p(U_2) & \longrightarrow & H_c^p(V) & \longrightarrow & H_c^{p+1}(U) & \rightarrow \cdots \\ & \downarrow D_U & & \downarrow D_{U_1} \oplus D_{U_2} & & \downarrow D_V & & \downarrow D_U & \\ \cdots \rightarrow & H_{n-p}(U) & \rightarrow & H_{n-p}(U_1) \oplus H_{n-p}(U_2) & \rightarrow & H_{n-p}(V) & \rightarrow & H_{n-p-1}(U) & \rightarrow \cdots \end{array}$$

donde las filas son las sucesiones de Mayer-Vietoris respectivas.

DEMOSTRACIÓN: Más precisamente, vamos a ver que los dos primeros cuadrados conmutan, y el tercero conmuta salvo signo, es decir, que los dos homomorfismos que “deberían” ser iguales lo son salvo un factor \pm . La conmutatividad del primer cuadrado se descompone a su vez en dos partes, correspondientes a los dos sumandos directos. Para el primero tenemos

$$\begin{array}{ccc} H_c^p(U) & \xrightarrow{i_*} & H_c^p(U_1) \\ \downarrow D_U & & \downarrow D_{U_1} \\ H_{n-p}(U) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-p}(U_1) \end{array}$$

Para probarlo basta tener en cuenta la naturalidad del producto mixto, es decir, que si $K \subset U$ es compacto tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_n(U, U \setminus K) \times H^p(U, U \setminus K) & \xrightarrow{\frown} & H_{n-p}(U) \\ i_* \downarrow & & \uparrow i^* \\ H_n(U_1, U_1 \setminus K) \times H^p(U_1, U_1 \setminus K) & \xrightarrow{\frown} & H_{n-p}(U_1) \end{array}$$

Teniendo en cuenta además que $i_*(\zeta_K^U) = \zeta_{K^1}^{U_1}$, concluimos que

$$i_*(\zeta_K^U \frown i^*(\alpha)) = \zeta_{K^1}^{U_1} \frown \alpha$$

o, equivalentemente,

$$i_*(\zeta_K^U \frown \alpha) = \zeta_{K^1}^{U_1} \frown j_K(\alpha),$$

donde $j_K : H^p(U, U \setminus K) \rightarrow H^p(U_1, U_1 \setminus K)$ es la inversa de i^* , que forma parte del sistema inductivo de homomorfismos cuyo límite inductivo es, por definición, $i_* : H_c^p(U) \rightarrow H_c^p(U_1)$. Equivalentemente, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^p(U, U \setminus K) & \xrightarrow{j_K} & H^p(U_1, U_1 \setminus K) \\ \zeta_K \frown \downarrow & & \downarrow \zeta_K \frown \\ H_{n-p}(U) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-p}(U_1) \end{array}$$

Pasando al límite en K , obtenemos la conmutatividad que queríamos probar. El caso del segundo sumando directo es totalmente análogo, y por un razonamiento similar se llega a la conmutatividad del segundo cuadrado del diagrama del enunciado. La parte más delicada de la prueba es comprobar que el tercero conmuta salvo signo.

Recordando la prueba del teorema 11.14, el homomorfismo de conexión de la sucesión de Mayer-Vietoris para la cohomología con soportes compactos se obtiene mediante el paso al límite a partir de los homomorfismos que forman la fila superior del diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} H^p(V, V \setminus (K_1 \cup K_2)) & \xrightarrow{\Delta} & H^{p+1}(V, V \setminus (K_1 \cap K_2)) \rightarrow H^{p+1}(U, U \setminus (K_1 \cap K_2)) \\ \zeta_{K_1 \cup K_2} \frown \downarrow & & \downarrow \zeta_{K_1 \cap K_2} \frown \\ H_{n-p}(V) & \xrightarrow{\delta} & H_{n-p-1}(U) \end{array}$$

Si probamos que este diagrama conmuta salvo signo, al pasar al límite en (K_1, K_2) obtendremos la conmutatividad (salvo signo) del tercer cuadrado del esquema del enunciado.

Si llamamos $A_1 = V \setminus K_1$, $A_2 = V \setminus K_2$, el homomorfismo Δ es el homomorfismo de conexión de la sucesión de Mayer-Vietoris que se obtiene de la

sucesión exacta corta de complejos que resulta de aplicar el funtor $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{A})$ a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow C(V, A_1 \cap A_2) \longrightarrow C(V, A_1) \oplus C(V, A_2) \longrightarrow C(V)/(C(A_1) + C(A_2)) \longrightarrow 0$$

considerada en la prueba del teorema 9.44. La sucesión sigue siendo exacta porque los módulos son libres, y obtenemos

$$0 \longrightarrow C^*(V, A_1 + A_2) \longrightarrow C^*(V, A_1) \oplus C^*(V, A_2) \longrightarrow C^*(V, A_1 \cap A_2) \longrightarrow 0,$$

donde $C^*(V, A_1 + A_2) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C(V)/(C(A_1) + C(A_2)))$ se identifica con el \mathbb{A} -módulo de las cocadenas que se anulan sobre los simplices de A_1 y los de A_2 . Los homomorfismos son los dados, respectivamente, por

$$f \mapsto (f, f), \quad (f_1, f_2) \mapsto f_1 - f_2.$$

Para calcular Δ partimos de un cociclo

$$f \in Z^p(V, V \setminus (K_1 \cup K_2)) = Z^p(V, A_1 \cap A_2)$$

y lo expresamos como $f = f_1 - f_2$, con $f_i \in C^p(V, A_i)$. Luego calculamos $(df_1, df_2) \in C^{p+1}(V, A_1) \oplus C^{p+1}(V, A_2)$ y tomamos $\tilde{\Delta}(f) \in Z^{p+1}(V, A_1 + A_2)$ tal que $\tilde{\Delta}(f) = df_1 = df_2$. Así $\Delta([f]) = [\tilde{\Delta}(f)]$.

Análogamente, si $z \in Z_{n-p}(V)$, para calcular $\delta([z])$ expresamos $z = z_1 - z_2$, con $z_i \in H_{n-p}(U_i)$, calculamos $(\partial z_1, \partial z_2)$ y tomamos $\tilde{\delta}(z) \in Z_{n-p-1}(U)$ tal que $\tilde{\delta}(z) = \partial z_1 = \partial z_2$.

Por el teorema 9.41, podemos tomar un representante de la clase $\zeta_{K_1 \cup K_2}^V = [c]$ de modo que $c = c_{U_1 \setminus K_2} + c_U + c_{U_2 \setminus K_1}$, donde $c_{U_1 \setminus K_2} \in C_n(U_1 \setminus K_2)$, $c_U \in C_n(U)$ y $c_{U_2 \setminus K_1} \in C_n(U_2 \setminus K_1)$, pues los abiertos $U_1 \setminus K_2$, U y $U_2 \setminus K_1$ cubren V .

Entonces $\zeta_{K_1 \cap K_2}^V = [c_{U_1 \setminus K_2} + c_U + c_{U_2 \setminus K_1}] = [c_U] = \zeta_{K_1 \cap K_2}^U$, pues las otras dos cocadenas son nulas, ya que están contenidas en $V \setminus (K_1 \cap K_2)$. Similarmente, $\zeta_{K_1}^V = [c_{U_1 \setminus K_2} + c_U]$.

Pasamos ya a demostrar la conmutatividad del diagrama. Partimos de un cociclo $f \in Z^p(V, V \setminus (K_1 \cup K_2))$ y calculamos $\tilde{\Delta}(f) \in Z^{p+1}(V, V \setminus (K_1 \cap K_2))$, de modo que se cumple $\tilde{\Delta}(f) = df_1 = df_2$, con $f = f_1 - f_2$ con $f_i \in C^p(V, A_i)$. De ahí pasamos a $\tilde{\Delta}(f)|_U \in Z^{p+1}(U, U \setminus (K_1 \cap K_2))$ y a continuación calculamos $c_U \frown \tilde{\Delta}(f)|_U$.

Ahora usamos la fórmula (12.9), que vale también para el producto mixto relativo, lo que nos da la relación

$$\begin{aligned} (-1)^p \partial(c_U \frown f_1|_{C_p(U)}) &= (\partial c_U \frown f_1|_{C_p(U)} - c_U \frown df_1|_{C_p(U)}) \\ &= (\partial c_U \frown f_1|_{C_p(U)} - c_U \frown \tilde{\Delta}(f)|_{C_p(U)}), \end{aligned}$$

y llegamos finalmente a $[c_U \frown \tilde{\Delta}(f)|_{C_p(U)}] = [\partial c_U \frown f_1|_{C_p(U)}] \in H_{n-p-1}(U)$.

Ahora volvemos a f y realizamos el cálculo por los otros dos lados del diagrama. En primer lugar pasamos a $c \frown f$, y ahora tenemos que calcular el homomorfismo de conexión. Para ello descomponemos

$$c \frown f = (c_{U_1 \setminus K_2} \frown f) + (c_U \frown f) + (c_{U_2 \setminus K_1} \frown f),$$

con lo que pasamos al par

$$(c_{U_1 \setminus K_2} \frown f, -((c_U \frown f) + (c_{U_2 \setminus K_1} \frown f))) \in C^p(U_1) \oplus C^p(U_2)$$

tal que la resta de sus componentes es $c \frown f$. La imagen por el homomorfismo de conexión será la clase $[\partial(c_{U_1 \setminus K_2} \frown f)|_{C_p(U)}]$. Aplicamos de nuevo (12.9), teniendo en cuenta que $df = 0$:

$$\partial(c_{U_1 \setminus K_2} \frown f)|_{C_p(U)} = (-1)^p(\partial c_{U_1 \setminus K_2} \frown f)|_{C_p(U)} = (-1)^p(\partial c_{U_1 \setminus K_2} \frown f_1)|_{C_p(U)},$$

pues $f_2 \in C^p(V, V \setminus K_2)$ se anula sobre los símlices de $U_1 \setminus K_2$, que componen la cadena $\partial c_{U_1 \setminus K_2}$.

Por último, puesto que, según hemos visto, $\zeta_{K_1}^V = [c_{U_1 \setminus K_2} + c_U]$, tenemos que $\partial(c_{U_1 \setminus K_2} + c_U) \in C(V \setminus K_1)$, luego $\partial(c_{U_1 \setminus K_2} + c_U) \frown f_1 = 0$, luego la imagen a la que hemos llegado es

$$(-1)^p[\partial c_{U_1 \setminus K_1} \frown f_1|_{C_p(U)}] = (-1)^{p+1}[\partial c_U \frown f_1|_{C_p(U)}],$$

que difiere del cálculo precedente en el signo $(-1)^{p+1}$. ■

Ahora ya podemos probar:

Teorema 12.25 (Teorema de Dualidad de Poincaré) *Si V es una variedad topológica orientable de dimensión n , entonces $D : H_c^p(V) \rightarrow H_{n-p}(V)$ es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN: Dividimos la prueba en varios pasos:

1) *Si el teorema vale para los abiertos U_1 , U_2 y $U = U_1 \cap U_2$, entonces vale para $W = U_1 \cup U_2$.*

Esto es consecuencia inmediata del teorema anterior y de 4.12.

2) *Si el teorema vale para una familia de abiertos $\{U_i\}_{i \in I}$ totalmente ordenada por la inclusión, entonces vale para su unión.*

Observemos que si $U' \subset U \subset V$ son dos abiertos y $K \subset U'$ es compacto, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^p(U, U \setminus K) & \xrightarrow{\zeta_K \frown} & H_{n-p}(U) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^p(U', U' \setminus K) & \xrightarrow{\zeta_K \frown} & H_{n-p}(U') \end{array}$$

debido a la naturalidad del producto mixto. Tomando el límite en K , de aquí se sigue la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccc} H_c^p(U) & \xrightarrow{D_U} & H_{n-p}(U) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_c^p(U') & \xrightarrow{D_{U'}} & H_{n-p}(U') \end{array}$$

(los dos homomorfismos $H_c^p(U') \rightarrow H_{n-p}(U)$ conmutan con el mismo sistema de homomorfismos $H^p(U', U' \setminus K) \rightarrow H_{n-p}(U)$, luego son iguales).

Llamemos U a la unión de los abiertos dados y sea $\alpha \in H_{n-p}(U)$, digamos $\alpha = [c]$, con $c \in Z_{n-p}(U)$. Como la unión de las imágenes de los símlices de c es un compacto contenido en U , existe un U_i que los contiene a todos, luego $c \in Z_{n-p}(U_i)$ y $\alpha' = [c] \in H_{n-p}(U_i)$ cumple que $i_*(\alpha') = \alpha$. Por hipótesis existe $\beta' \in H_c^p(U_i)$ tal que $D_{U_i}(\beta') = \alpha'$. Entonces $\beta = i_*(\beta') \in H_c^p(U)$ cumple $D_U(\beta) = \alpha$, luego D_U es suprayectivo.

Supongamos ahora que $\alpha \in H_c^p(U)$ cumple $D_U(\alpha) = 0$. Sea $K \subset U$ tal que exista $\alpha_1 \in H^p(U, U \setminus K)$ tal que $\iota_K(\alpha_1) = \alpha$. Entonces $\zeta_K \frown \alpha_1 = D_U(\alpha) = 0$. Sea U_i tal que $K \subset U_i$. Como $j_K : H^p(U_i, U_i \setminus K) \rightarrow H^p(U, U \setminus K)$ es un isomorfismo, podemos tomar $\alpha_2 \in H^p(U_i, U_i \setminus K)$ tal que $j_K(\alpha_2) = \alpha_1$. Entonces

$$\zeta_K^{U_i} \frown \alpha_2 = \zeta_K^U \frown \alpha_1 = 0,$$

luego $\alpha_3 = \iota_K(\alpha_2) \in H_c^p(U_i)$ cumple $D_{U_i}(\alpha_3) = 0$. Por hipótesis $\alpha_3 = 0$ y la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_c^p(U_i) & \xrightarrow{i_*} & H_c^p(U) \\ \uparrow \iota_K & & \uparrow \iota_K \\ H^p(U_i, U_i \setminus K) & \xrightarrow{j_K} & H^p(U, U \setminus K) \end{array}$$

hace que $\alpha = \iota_K(\alpha_1) = \iota_K(j_K(\alpha_2)) = i_*(\iota_K(\alpha_2)) = i^*(\alpha_3) = 0$.

3) *El teorema vale para abiertos de \mathbb{R}^n .*

Lo probamos primero en el caso en que U es la bola abierta de centro 0 y radio 1 . Según la observación tras el teorema 11.44, sabemos que $H_c^p(U) = 0$ salvo si $p = n$ (y también $H_{n-p}(U) = 0$). Por lo tanto, el teorema es trivial salvo para $p = n$. En este caso vamos a calcular

$$\zeta_K \frown : H^n(U, U \setminus K) \rightarrow H_0(U).$$

Tenemos que $H_0(U) \cong \mathbb{A}$. Más concretamente, una base de $H_0(U)$ la forma la clase g de cualquier 0 -símplex. Usando la aproximación de Alexander-Whitney, para cada n -símplex σ y cada n -cocadena ω tenemos $\sigma \frown \omega = \omega(\sigma)\sigma_0$, luego, tomando clases, $[\sigma] \frown [\omega] = \langle [\sigma], [\omega] \rangle g$.

Por linealidad esto vale para clases arbitrarias, luego en particular tenemos que $\zeta_K \frown x = \langle \zeta_K, x \rangle g$, para todo $x \in H^n(U, U \setminus K)$.

Con la notación previa al teorema 12.9, tenemos $\zeta_K \frown x = h(x)(\zeta_K)g$. Por este mismo teorema h es un isomorfismo y $\zeta_K \frown$ es la composición de h con la evaluación en ζ_K —que es un isomorfismo porque ζ_K es un generador de $H_n(U, U \setminus K)$ — y con la multiplicación por g —que es un isomorfismo porque g es un generador de $H_0(U)$. Así pues, D es un isomorfismo, por ser el límite inductivo de un sistema de isomorfismos.

Por el teorema 1.6, todo abierto convexo en \mathbb{R}^n es homeomorfo a una bola abierta, luego en realidad tenemos probado el teorema para abiertos convexos cualesquiera. De aquí se sigue que es cierto para uniones finitas de abiertos convexos. Razonamos por inducción sobre el número m de convexos. Lo tenemos para $m = 1$ y si U es unión de $m + 1$ convexos, llamamos U' a la unión de m de ellos y U'' al que queda. Entonces $U' \cap U''$ es unión de a lo sumo m convexos, luego por hipótesis de inducción el teorema vale para U' , U'' y $U' \cap U''$. Por el apartado 1) también vale para U .

En particular tenemos probado el teorema para uniones finitas de bolas abiertas. Por el apartado 2) vale también para uniones numerables, pero todo abierto de \mathbb{R}^n es una unión numerable de bolas abiertas.

4) *El teorema vale en general.*

Tenemos que el teorema vale para los abiertos de V homeomorfos a abiertos de \mathbb{R}^n . La intersección de dos de estos abiertos es también de este tipo, luego el apartado 1) y un argumento inductivo idéntico al del apartado anterior nos da que el teorema vale para uniones finitas de abiertos coordenados. Por el apartado 2) vale también para uniones numerables. Si la variedad V es “razonable”, por ejemplo, si cumple el segundo axioma de numerabilidad, entonces V es unión de una cantidad numerable de abiertos coordenados, con lo que cumple el teorema.

Pero el teorema de Poincaré es válido incluso sin esta hipótesis, pues en general podemos razonar usando el lema de Zorn. En efecto, el apartado 2) nos da que la familia de los abiertos que cumplen el teorema tiene un maximal U respecto a la inclusión. Si $U \neq V$, podemos tomar un abierto coordenado $U' \neq U$, y entonces $U \cap U'$ cumple también el teorema porque es homeomorfo a un abierto en \mathbb{R}^n . Por 1) tenemos que $U \cup U'$ también cumple el teorema, en contra de la maximalidad de U . ■

Según vimos al final tras el teorema 12.1, los números de Betti pueden calcularse indistintamente con los grupos de homología o cohomología, por lo que el teorema de Poincaré nos da inmediatamente la relación siguiente:

Teorema 12.26 *Si V es una variedad compacta \mathbb{A} -orientable de dimensión n , entonces sus números de Betti cumplen $b_p = b_{n-p}$ para todo índice p .*

Por otra parte, el teorema 12.10 nos da la relación siguiente entre los módulos de torsión de los grupos de homología:

Teorema 12.27 Si \mathbb{A} es un dominio de ideales principales, V es una variedad compacta y orientable de dimensión n y T_p es el módulo de torsión de $H_p(V)$, entonces $T_p \cong T_{n-p-1}$, para todo índice p .

La relación entre los números de Betti implica inmediatamente lo siguiente:

Teorema 12.28 Si V es una variedad compacta \mathbb{A} -orientable de dimensión impar, entonces $\chi(V) = 0$.

De este modo, al contrario de lo que sucede con las superficies compactas, la característica de Euler no distingue las variedades tridimensionales. Menos obvia es la propiedad siguiente:

Teorema 12.29 Si V es una variedad compacta conexa orientable de dimensión $n = 4k + 2$, entonces $\chi(V)$ es par.

DEMOSTRACIÓN: Es claro que basta probar que b_{2k+1} es par. Sabemos que podemos calcularlo con cualquier anillo de coeficientes de característica 0. Tomaremos un cuerpo, por ejemplo $\mathbb{A} = \mathbb{Q}$. El producto exterior es una forma bilineal

$$\smile: H^{2k+1}(V) \times H^{2k+1}(V) \longrightarrow H^n(V) \cong \mathbb{Q}.$$

Como $2k + 1$ es impar, la anticonmutatividad del producto hace que esta forma bilineal sea antisimétrica, es decir, se cumple $x \smile y = -y \smile x$, para todo $x, y \in H^{2k+1}(V)$. Vamos a probar que es regular, es decir, que si $x \smile y = 0$ para todo y , entonces $x = 0$.

Puesto que trabajamos con un cuerpo, el producto de Kronecker induce un isomorfismo $H^{2k+1}(V) \cong H_{2k+1}(V)^*$. Si $x \neq 0$ entonces existe un cierto $w \in H_{2k+1}(V)$ tal que $\langle w, x \rangle \neq 0$. Sea $y \in H^{2k+1}(V)$ la antiimagen de w por el isomorfismo de Poincaré, es decir, $w = \zeta_K \frown y$. Entonces

$$\langle \zeta_K, y \smile x \rangle = \langle \zeta_K \frown y, x \rangle \neq 0.$$

Así pues, $y \smile x \neq 0$.

En general, si un espacio vectorial E de dimensión finita tiene definida una forma bilineal antisimétrica regular F , su dimensión ha de ser par. Recordemos el argumento: si $x_1 \in E$ es no nulo, existe $y_1 \in E$ tal que $F(x_1, y_1) \neq 0$. Ha de ser $y_1 \neq \lambda x_1$ porque la antisimetría da $F(x_1, x_1) = 0$. Definimos

$$E_1 = \{x \in E \mid F(x, x_1) = F(x, y_1) = 0\}.$$

Es fácil ver que E_1 es un subespacio vectorial tal que $E = \langle x_1, y_1 \rangle \oplus E_1$. Repitiendo el argumento llegamos a una base con un número par de vectores. ■

Nota Una consecuencia elemental de la dualidad de Poincaré es que la homología de una variedad topológica (conexa) compacta y orientable V está completamente determinada por $H_1(V)$, pues necesariamente $H_0(V) \cong H_3(V) \cong \mathbb{A}$ y $H_2(V) \cong H_1(V)$.

En particular, V es una esfera homológica si y sólo si $H_1(V) = 0$. Así, el hecho de que la esfera homológica de Poincaré es realmente una esfera homológica no requiere los cálculos que hemos usado en la prueba del teorema 10.20, sino que basta con el razonamiento hecho allí de que $H^3(\mathbb{C}) \neq 0$, pues eso prueba que se trata de una variedad orientable, junto con el hecho de que el grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{C})$ tiene abelianización trivial, como probamos al final de la sección 8.4. ■

Seguidamente calcularemos el álgebra de cohomología de los espacios proyectivos complejos. Recordemos que su homología viene dada por el teorema 10.18. Además, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ tiene estructura de complejo celular con una única celda en cada dimensión $2p$, para $0 \leq p \leq n$, de modo que su esqueleto de dimensión $2n - 2$ es precisamente $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$. Sea $i : \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ la inclusión. La sucesión exacta del par $(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}), \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}))$ junto con el teorema 10.14 (y su traducción a cohomología) nos da que

$$i^* : H^{2p}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \rightarrow H^{2p}(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}))$$

es un isomorfismo para $0 \leq p < n$. Vamos a probar lo siguiente:

Teorema 12.30 *Si $\alpha \in H^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ es un generador de este grupo, entonces α es también un generador del álgebra de cohomología de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, es decir, α^p es un generador de $H^{2p}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ para $0 \leq p \leq n$.*

DEMOSTRACIÓN: Razonamos por inducción sobre n . Para $n = 1$ es trivial. Supuesto cierto para $n - 1$, con la notación anterior, $i^*(\alpha)$ genera $H^2(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}))$, luego por hipótesis de inducción $i^*(\alpha)^p$ genera $H^{2p}(\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}))$ para $0 \leq p \leq n - 1$. Como i^* es un isomorfismo (de álgebras), también α^p genera $H^{2p}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$. Sólo falta probar que esto se cumple también para $p = n$.

Sea $\zeta \in H_{2n}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ la clase fundamental (que es un generador). Sabemos que α^{n-1} genera $H^{2n-2}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$. Por el isomorfismo de Poincaré, $\zeta \frown \alpha^{n-1}$ genera $H_2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$.

Como la homología de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ no tiene torsión, el producto de Kronecker induce un isomorfismo entre $H^2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ y $H_2(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))^*$. De aquí se sigue que $\langle \zeta \frown \alpha^{n-1}, \alpha \rangle = \langle \zeta, \alpha^n \rangle$ ha de ser un generador de \mathbb{A} . A su vez, el isomorfismo natural entre $H^{2n}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ y $H_{2n}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))^*$ implica que α^n genera $H^{2n}(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$. ■

No podemos aplicar sin más un argumento similar a los espacios proyectivos reales $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ porque los de dimensión par no son orientables. No obstante sí lo son sobre el anillo de coeficientes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y, sobre este anillo tenemos que $H^p(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ para $0 \leq p \leq n$. El mismo argumento que acabamos de emplear nos da el teorema siguiente:

Teorema 12.31 *Si $\alpha \in H^1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ es un generador de este grupo, con $\mathbb{A} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, entonces α es también un generador del álgebra de cohomología de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, es decir, α^p es un generador de $H^p(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))$ para $0 \leq p \leq n$.*

Con esto podemos demostrar finalmente el caso general del teorema de Borsuk-Ulam 2.13. En virtud del teorema 2.14, basta con demostrar lo siguiente:

Teorema 12.32 (Borsuk-Ulam) *Si $n > m \geq 1$ no existe ninguna aplicación continua $g : S^n \rightarrow S^m$ tal que $g(-x) = -g(x)$ para todo $x \in S^n$.*

DEMOSTRACIÓN: Una tal aplicación induciría a su vez una aplicación continua $f : P^n(\mathbb{R}) \rightarrow P^m(\mathbb{R})$. Vamos a usar el criterio de elevación 8.9 para probar que f se eleva a una aplicación $\tilde{f} : P^n(\mathbb{R}) \rightarrow S^m$.

Fijando $z \in S^n$, $y = p(z)$, $\tilde{x} = g(z)$ y $x = p(\tilde{x})$, hemos de probar que $f_*[\pi_1(P^n(\mathbb{R}), y)] \subset p_*[\pi_1(S^m, \tilde{x})]$.

El caso $m = 1$ es claro, pues el único homomorfismo de $\pi_1(P^n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en $\pi_1(P^1(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}$ es el trivial. Supongamos $m > 1$.

Consideramos el homomorfismo entre las álgebras de cohomología con coeficientes en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$f^* : H^*(P^m(\mathbb{R})) \rightarrow H^*(P^n(\mathbb{R})).$$

Vamos a usar la estructura de estas álgebras, que hemos determinado en el teorema anterior. Sean α_n y α_m generadores respectivos.

Como $0 = f^*(\alpha_m^{m+1}) = f^*(\alpha_m)^{m+1}$ y $n > m$, tenemos que $f^*(\alpha_m) \neq \alpha_n$, pero $H^1(P^n(\mathbb{R}))$ no tiene más elementos que α_n y 0 , luego ha de ser $f^*(\alpha_m) = 0$. Por consiguiente, $f^* = 0$.

Sean $i : P^1(\mathbb{R}) \rightarrow P^n(\mathbb{R})$ y $j : P^1(\mathbb{R}) \rightarrow P^m(\mathbb{R})$ las inclusiones naturales ($i([u, v]) = [u, v, 0, \dots, 0]$, e igualmente con j). Vamos a probar que $j^* : H^1(P^m(\mathbb{R})) \rightarrow H^1(P^1(\mathbb{R}))$ es un isomorfismo.

En efecto, tenemos la sucesión exacta

$$\rightarrow H_1(P^1(\mathbb{R})) \xrightarrow{j_*} H_1(P^m(\mathbb{R})) \rightarrow H_1(P^m(\mathbb{R}), P^1(\mathbb{R})) = 0,$$

donde el último término es nulo por el teorema 10.14. Por consiguiente j_* es un epimorfismo y, como todos los grupos son isomorfos a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, de hecho es un isomorfismo. Dualizando concluimos que lo mismo vale para j^* .

Así pues, $j^*(\alpha_m) \neq 0$, mientras que $(i \circ f)^*(\alpha_m) = 0$ (porque $f^* = 0$), luego j no es homotópica a $i \circ f$.

Consideremos la aplicación $r : I \rightarrow P^1(\mathbb{R})$ dada por $t(s) = [(\cos \pi s, \text{sen } \pi s)]$. Los bucles $\sigma = r \circ i$ y $\tau = r \circ j$ se elevan a arcos en S^n y S^m respectivamente que unen dos puntos antípodas, luego, según la observación tras el teorema 8.27, estos bucles generan los correspondientes grupos fundamentales. Una homotopía de bucles entre $r \circ i \circ f$ y $\tau = r \circ j$ permitiría construir fácilmente una homotopía entre $i \circ f$ y j . Así pues, $f_*([\sigma]) \neq [\tau]$, o, lo que es lo mismo, $f_*([\sigma]) = 0$. En resumen, $f_* = 0$.

Esto justifica que podemos aplicar el criterio de elevación, con lo que f se eleva a \tilde{f} , según el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{g} & S^m \\ p' \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ P^n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{f} & P^m(\mathbb{R}) \end{array}$$

Vemos entonces que $p' \circ \tilde{f}$ y g son dos elevaciones de $p' \circ f$. Si $x \in S^n$, o bien $(\tilde{f}(p'(x)) = g(x)$, o bien $\tilde{f}(p'(x)) = -g(x)$, pero esto equivale a la relación $\tilde{f}(p'(-x)) = g(-x)$. En ambos casos las dos elevaciones coinciden en un punto, luego $p' \circ \tilde{f} = g$, pero esto es absurdo, ya que el miembro izquierdo toma el mismo valor en puntos antípodos y el miembro derecho toma valores opuestos en puntos antípodos. ■

12.7 La dualidad de Alexander

Consideramos una variedad compacta n -dimensional \mathbb{A} -orientable V y un cerrado $A \subset V$. Sea $\zeta_A \in H_n(V, V \setminus A)$ la clase fundamental que determina la \mathbb{A} -orientación de V . Para cada entorno W de A , el teorema de escisión nos da el isomorfismo $H_n(W, W \setminus A) \cong H_n(V, V \setminus A)$. Llamaremos también $\zeta_A \in H_n(W, W \setminus A)$ a la antiimagen de la clase fundamental por la escisión.

El producto mixto (12.10) nos proporciona un homomorfismo

$$\zeta_A \frown: H^p(W) \longrightarrow H_{n-p}(W, W \setminus A).$$

Componiéndolo con la escisión podemos considerar que

$$\zeta_A \frown: H^p(W) \longrightarrow H_{n-p}(V, V \setminus A).$$

La naturalidad del producto mixto nos da que $\zeta_A \frown$ conmuta con las inclusiones al cambiar W , luego podemos tomar el límite en W (véase la sección 11.6):

$$D_A: \check{H}^p(A) \longrightarrow H_{n-p}(V, V \setminus A).$$

Teorema 12.33 (Teorema de dualidad de Alexander) *Sea V una variedad topológica compacta \mathbb{A} -orientable y A un subespacio cerrado. Entonces los homomorfismos $D_A: \check{H}^p(A) \longrightarrow H_{n-p}(V, V \setminus A)$ que acabamos de definir son isomorfismos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $U = X \setminus A$ y consideremos la sucesión exacta dada por el teorema 11.43. Basta comprobar que el diagrama siguiente es conmutativo salvo signos:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_c^p(U) & \longrightarrow & H^p(V) & \longrightarrow & \check{H}^p(A) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow D_U & & \downarrow D_V & & \downarrow D_A \\ \cdots & \longrightarrow & H_{n-p}(U) & \longrightarrow & H_{n-p}(V) & \longrightarrow & H_{n-p}(V, V \setminus A) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

(aquí D_U y D_V son los isomorfismos de Poincaré).

En efecto, si esto es así, tomando una porción de cinco grupos de esta sucesión con D_A en el medio y modificando el signo de los isomorfismos de Poincaré podemos aplicar el teorema 4.12.

El primer cuadrado es, de hecho, conmutativo, y esto se prueba pasando al límite la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^p(U, U \setminus K) & \longleftarrow & H^p(V, V \setminus K) \\ \zeta_K^U \frown \downarrow & & \zeta_K^V \frown \downarrow \\ H_{n-p}(U) & \longrightarrow & H_{n-p}(V) \end{array}$$

A su vez, ésta se sigue de la naturalidad del producto mixto y de que la inclusión transforma ζ_K^U en ζ_K^V .

El segundo cuadrado también es conmutativo: si $\alpha \in H^p(V)$, entonces $D_A(j(\alpha)) = \zeta_A \frown \alpha$, mientras que por el otro camino obtenemos la imagen de $\zeta_V \frown \alpha$ en $H_{n-p}(V, V \setminus A)$. Basta considerar la naturalidad del producto mixto y que la inclusión transforma ζ_A en ζ_V .

Falta estudiar el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} \check{H}^p(A) & \xrightarrow{\delta^*} & H_c^{p+1}(U) \\ D_A \downarrow & & \downarrow D_U \\ H_{n-p}(V, U) & \xrightarrow{\delta_*} & H_{n-p-1}(U) \end{array}$$

Fijando un entorno abierto W de A o, equivalentemente, un subespacio compacto $K = V \setminus W \subset U$, basta estudiar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^p(W) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{p+1}(V, W) \\ \zeta_A^V \frown \downarrow & & \downarrow \\ H_{n-p}(W, W \setminus A) & & H^{p+1}(U, U \setminus K) \\ \downarrow & & \downarrow \zeta_K^U \frown \\ H_{n-p}(V, V \setminus A) & \xrightarrow{\delta_*} & H_{n-p-1}(U) \end{array}$$

Partimos de $\alpha = [\omega] \in H^p(W)$. Para calcular $\delta^*(\alpha)$ tomamos una extensión $\tilde{\omega} \in C^p(V)$ y entonces $\delta^*(\alpha) = [d\tilde{\omega}]$. A su vez de aquí pasamos a $[d\tilde{\omega}|_{C_{p+1}(U)}]$ y a $[\tilde{\zeta}_K^U \frown d\tilde{\omega}|_{C_{p+1}(U)}]$, donde $\tilde{\zeta}_K^U$ es un representante de ζ_K^U .

Más aún, aplicando la regla de derivación de un producto mixto vemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_K^U \frown d\tilde{\omega}|_{C_{p+1}(U)} &= \tilde{\zeta}_K^U \frown d(\tilde{\omega}|_{C_p(U)})|_{C_{p+1}(U)} = \\ &= \partial \tilde{\zeta}_K^U \frown \tilde{\omega}|_{C_p(U)} - (-1)^p \partial(\tilde{\zeta}_K^U \frown \tilde{\omega}|_{C_p(U)}). \end{aligned}$$

Ahora bien, el último término es una frontera de una cadena de $C_{n-p}(U)$, luego la imagen de α en $H_{n-p-1}(U)$ es simplemente $[\partial \tilde{\zeta}_K^U \frown \tilde{\omega}|_{C_p(U)}]$. Más aún, puesto que $\tilde{\zeta}_K^U \in Z_n(U, U \setminus K)$, tenemos que $\partial \tilde{\zeta}_K^U \in C_{n-1}(U \setminus K) = C_{n-1}(W \setminus A)$, por lo que la naturalidad del producto mixto nos permite sustituir $\tilde{\omega}|_{C_p(U)}$ por $\omega|_{C_p(W \setminus A)}$ y éste a su vez por ω . En resumen hemos llegado a $[\partial \tilde{\zeta}_K^U \frown \omega]$.

Por el otro camino tenemos $\delta_*(\zeta_A^W \frown \alpha) = [\partial(\tilde{\zeta}_A^W \frown \omega)] = (-1)^p[\partial\tilde{\zeta}_A^W \frown \omega]$.

La demostración estará concluida si probamos que, eligiendo adecuadamente los representantes $\tilde{\zeta}_A^W$ y $\tilde{\zeta}_K^U$ de las clases fundamentales, podemos exigir que $\partial\tilde{\zeta}_A^W = -\partial\tilde{\zeta}_K^U$. En efecto, sea $\zeta_V \in H_n(V)$ la clase fundamental de V . Por el teorema 9.41, podemos tomar un representante $\tilde{\zeta}_V$ tal que todos los símlices que lo componen tienen su soporte en W o en U . Llamemos $\tilde{\zeta}_A^W$ a la parte de $\tilde{\zeta}_V$ con soporte en W y $\tilde{\zeta}_K^U$ al resto (con soporte en U), de modo que $\tilde{\zeta}_V = \tilde{\zeta}_A^W + \tilde{\zeta}_K^U$. Falta probar que estos sumandos son realmente representantes de las clases fundamentales correspondientes. Ahora bien, la clase $\zeta_A^V \in H_n(V, V \setminus A)$ tiene por representante a $\tilde{\zeta}_V$, luego también a $\tilde{\zeta}_A^W$, pues el resto tiene soporte en $U = V \setminus A$, y ζ_A^W es la antiimagen de ζ_A^V por la inclusión, luego también admite como representante a $\tilde{\zeta}_A^W$. Similarmente se razona con la otra clase. ■

Las aplicaciones principales del teorema de dualidad que acabamos de demostrar son teoremas de separación. Nos apoyaremos en el resultado siguiente:

Teorema 12.34 *Sea A una subvariedad compacta de \mathbb{R}^n . Entonces, para todo índice p ,*

$$H^p(A) \cong H_{n-p-1}(\mathbb{R}^n \setminus A),$$

donde en el segundo miembro consideramos la homología reducida.

DEMOSTRACIÓN: Consideramos a \mathbb{R}^n como S^n menos un punto. Por el teorema 11.40 podemos identificar $\check{H}^p(A)$ con $H^p(A)$. Tenemos los isomorfismos:

$$H^p(A) \xrightarrow{D_A} H_{n-p}(S^n, S^n \setminus A) \longleftarrow H_{n-p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus A) \xrightarrow{\delta_*} H_{n-p-1}(\mathbb{R}^n \setminus A).$$

■

Como consecuencia obtenemos una generalización del teorema de Jordan:

Teorema 12.35 *Si A es una subvariedad compacta de \mathbb{R}^n de dimensión $n-1$ con k componentes conexas, entonces $\mathbb{R}^n \setminus A$ tiene $k+1$ componentes conexas.*

DEMOSTRACIÓN: Tomamos como anillo de coeficientes $\mathbb{A} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Por el teorema de Poincaré y el teorema anterior vemos que

$$H_0(A) \cong H^{n-1}(A) \cong H_0(\mathbb{R}^n \setminus A),$$

donde en el primer grupo consideramos la homología completa y en el último la reducida. ■

Notemos que el teorema vale igualmente si cambiamos \mathbb{R}^n por S^n .

A su vez esto nos da otra aplicación:

Teorema 12.36 *Una variedad compacta no orientable de dimensión n no puede sumergirse en \mathbb{R}^{n+1} .*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y sea k el número de componentes conexas de A . Tomamos coeficientes en \mathbb{Z} y así

$$\text{rang}H_n(A) = \text{rang}H^n(A) = \text{rang}H_0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) = k,$$

pues por el teorema anterior $\mathbb{R}^{n+1} \setminus A$ tiene $k+1$ componentes conexas y el último grupo es respecto a la homología reducida. Ahora bien, si A es no orientable alguna de sus componentes conexas es no orientable, y por 10.52, el rango de $H_n(A)$ ha de ser menor que k . ■

En particular las superficies N_h no pueden sumergirse en \mathbb{R}^3 .

Capítulo XIII

Cohomologías en espacios paracompactos

Si X es un espacio topológico, tenemos definidos sus grupos de cohomología singular $H^p(X)$, sus grupos de cohomología de Alexander-Spanier y, si además se trata de una variedad diferencial, también tenemos definidos sus grupos de cohomología singular diferenciable y sus grupos de cohomología de De Rham. En este capítulo veremos que estos grupos de cohomología son isomorfos a los grupos de cohomología $H^n(X, N_X)$ del haz constante del módulo de coeficientes considerado, en el sentido que hemos definido y estudiado en la sección 7.4, calculados a partir de distintas resoluciones paracompactas.

13.1 La cohomología singular

En esta subsección supondremos que X es un espacio paracompacto localmente contractible, es decir, tal que todo punto tiene una base de entornos contractibles. Esto lo cumplen, por ejemplo, las variedades topológicas con una base numerable. Además A será un anillo conmutativo y unitario (no necesariamente un dominio de ideales principales) y N un A -módulo.

Para cada $p \geq 0$, definimos el prehaz $C_{X,N}^p$ que a cada abierto $U \subset X$ le asigna el A -módulo de las cocadenas singulares $C_{X,N}^p(U) = C_N^p(U)$ y en el que las restricciones son las restricciones usuales de homomorfismos (notemos que si $U \subset V$, entonces $C_p(U)$ es un submódulo de $C_p(V)$).

Es claro que estos prehaces cumplen la segunda condición de la definición de haz (sobre extensión de elementos consistentes), pero cuando $p \geq 1$ no tienen por qué cumplir la primera, pues, dado un cubrimiento abierto de X , puede ocurrir que ninguno de los símlices de una p -cadena de X esté contenido en ninguno de los abiertos del cubrimiento, y una cocadena que sólo tome valores no nulos sobre esta clase de símlices tendrá restricciones nulas a todos los abiertos del cubrimiento sin ser, ella misma, nula.

Representaremos por $\mathcal{C}_{X,N}^p$ la compleción del prehaz de cocadenas singulares de dimensión p en X .

Es evidente que los operadores cofrontera d_p son consistentes con las restricciones de los prehaces de cocadenas singulares, por lo que inducen homomorfismos de prehaces, que determinan un complejo inverso de prehaces $\mathcal{C}_{X,N}^-$:

$$0 \longrightarrow N_X^- \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{C}_{X,N}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{C}_{X,N}^1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{C}_{X,N}^2 \longrightarrow \dots$$

que hemos completado con el homomorfismo ϵ que a cada $n \in N$ le asigna la función constantemente igual a n .

Extendiendo estos homomorfismos a las compleciones obtenemos un complejo inverso de haces

$$0 \longrightarrow N_X \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{C}_{X,N}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{C}_{X,N}^1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{C}_{X,N}^2 \longrightarrow \dots$$

Teorema 13.1 *Si X es un espacio topológico paracompacto, A es un anillo conmutativo y unitario y N es un A -módulo, entonces el complejo inverso $\mathcal{C}_{X,N}$ (extendido con el homomorfismo ϵ) constituye una resolución paracompacta del haz constante N_X . Si N es libre de torsión lo mismo vale para $\mathcal{C}_{X,N}$.*

DEMOSTRACIÓN: En primer lugar probamos que la sucesión es exacta, lo que equivale a probar que lo es en cada punto $P \in X$, para lo cual podemos trabajar con el complejo de prehaces, ya que las localizaciones de los homomorfismos son las mismas.

La exactitud en N_X^- es obvia, pues cada ϵ_P es ciertamente un monomorfismo.

Tomemos ahora un $[f] \in (\mathcal{C}_{X,N}^0)_P$ tal que $[df] = 0$. Podemos restringir f hasta un entorno de P arbitrariamente pequeño. Ahora usamos por primera vez la hipótesis de que X es localmente contractible, al tomar un entorno U de P que sea arcoconexo. Para cada par de puntos $x, y \in U$ existe un arco $\sigma : \Delta_1 = [0, 1] \rightarrow U$ tal que $\sigma(0) = x, \sigma(1) = y$. Así, σ es un 1-símplice y, por las definiciones de los operadores frontera y cofrontera,

$$df(\sigma) = f(\partial\sigma) = f(y) - f(x) = 0.$$

Esto prueba que f es constante en U , luego $f \in N_D^-(U)$ y tenemos la exactitud en $(\mathcal{C}_{X,N}^0)_P$.

Fijemos ahora $p \geq 1$ y tomemos un $[f] \in (\mathcal{C}_{X,N}^p)_P$ tal que $[df] = 0$. Usamos por segunda vez la hipótesis de que X es localmente contractible al restringir f a un entorno U de P que sea homotópico a un punto. Esto hace que $H_N^p(U) = 0$. Así pues, existe un $g \in \mathcal{C}_{X,N}^{p-1}(U)$ tal que $[f] = [dg]$.

A continuación probamos que los haces $\mathcal{C}_{X,N}^p$ son paracompactos. Tomemos un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ de X localmente finito y consideremos las funciones $\chi_i : X \rightarrow \{0, 1\}$ definidas como en la prueba del teorema 7.25 (lo

que supone tomar previamente otro cubrimiento $\{V_i\}_{i \in I}$ tal que $V_i \subset \bar{V}_i \subset U_i$. Para cada abierto $U \subset X$, definimos $\phi_{iU}^- : C_{X,N}^p(U) \rightarrow C_{X,N}^p(U)$ mediante

$$\phi_{iU}^-(f)(\sigma) = \chi_i(\sigma(0))f(\sigma),$$

donde $0 \in \mathbb{R}^n$ es el origen de coordenadas (un vértice del simplejo Δ_p). Es obvio que estos endomorfismos conmutan con las restricciones, por lo que definen un homomorfismo de prehaces ϕ_i^- , que a su vez se extiende a un homomorfismo de haces $\phi_i : \mathcal{C}_{X,N}^p \rightarrow \mathcal{C}_{X,N}^p$. Es evidente que $\text{sop } \phi_i \subset \bar{V}_i \subset U_i$, así como que $\sum_i \phi_i = I$.

Si N es un A -módulo libre de torsión, los haces $\mathcal{C}_{X,N}^p$ también lo son. En efecto, si $[f] \in (\mathcal{C}_{X,N}^p)_P = (C_{X,N}^p)_P$ cumple que $[af] = 0$ para cierto $a \in A$ no nulo, entonces, restringiendo f , si es preciso, a un dominio U menor, tenemos que $af = 0$, luego, para todo $\sigma \in C_p^A(U)$, se cumple que $af(\sigma) = 0$, luego $f(\sigma) = 0$, luego $f = 0$. ■

Nota Considerando el caso particular $N = A = \mathbb{Z}$ tenemos probada la existencia de una resolución paracompacta y libre de torsión del haz constante \mathbb{Z}_X , lo cual termina la prueba del teorema 7.30. ■

A partir de aquí podemos volver al caso general sin necesidad de suponer que el anillo A sea libre de torsión.

En virtud del teorema 7.30 sabemos que podemos tomar cualquier resolución paracompacta de N_X para calcular los grupos de cohomología de cualquier \mathcal{O}_X -módulo. En particular, los grupos de cohomología $H^n(X, N_X)$ son los grupos de cohomología del complejo

$$0 \rightarrow \mathcal{C}_{X,N}^0(X) \xrightarrow{d_0} \mathcal{C}_{X,N}^1(X) \xrightarrow{d_1} \mathcal{C}_{X,N}^2(X) \rightarrow \dots$$

Ahora bien, estos no son, en principio, los grupos clásicos de cohomología singular, puesto que $\mathcal{C}_{X,N}^p(X)$ no es lo mismo que $C_N^p(X)$. El teorema siguiente nos da la relación entre ambos grupos:

Teorema 13.2 *Sea \mathcal{F} un prehaz en un espacio X que cumpla la segunda condición de la definición de haz, sea \mathcal{F}^+ su compleción, sea $j^+ : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ el homomorfismo natural y sea*

$$\mathcal{F}(X)_0 = \{f \in \mathcal{F}(X) \mid f_P = 0 \text{ para todo } P \in X\}.$$

Entonces, la sucesión

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X)_0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{j_X^+} \mathcal{F}^+(X) \rightarrow 0$$

es exacta.

DEMOSTRACIÓN: Es obvio que $\mathcal{F}(X)_0$ es el núcleo de j_X^+ . Sólo hemos de probar que j_X^+ es suprayectiva. Tomemos $t \in \mathcal{F}^+(X)$. Puesto que los homomorfismos j_P^+ son isomorfismos, existe un cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ de X de modo que existen elementos $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ con $j_{U_i}^+(s_i) = t|_{U_i}$.

La paracompacidad de X nos permite suponer que el cubrimiento es localmente finito, así como tomar un refinamiento $\{V_i\}_{i \in I}$ tal que $V_i \subset \bar{V}_i \subset U_i$. (Véase la prueba de 7.25).

Sea I_P el conjunto (finito) de índices i tales que $P \in \bar{V}_i$. Por la finitud local del cubrimiento, la unión de las clausuras de los V_i con $i \notin I_P$ es cerrada, luego podemos tomar un entorno abierto W_P de P tal que

1. $W_P \cap \bar{V}_i = \emptyset$ para todo $i \notin I_P$,
2. $W_P \subset U_i$ para todo $i \in I_P$,
3. $s_i|_{W_P} = s_j|_{W_P}$ para todo $i, j \in I_P$.

(Para la condición 3, notamos que s_{iP} es necesariamente la única antiimagen de t_P por j_P^+ .) Llamemos $s_P \in \mathcal{F}(W_P)$ a la restricción común indicada en 3).

Veamos ahora que $s_P|_{W_P \cap W_Q} = s_Q|_{W_P \cap W_Q}$. En efecto, tomemos un punto $R \in W_P \cap W_Q$. Por a) vemos que $I_R \subset I_P \cap I_Q$. Tomemos $i \in I_R$. Por c), se cumple que $s_P = s_i|_{W_P}$ y $s_Q = s_i|_{W_Q}$, luego

$$s_P|_{W_P \cap W_Q} = s_i|_{W_P \cap W_Q} = s_Q|_{W_P \cap W_Q}.$$

Estamos suponiendo que \mathcal{F} cumple la segunda condición de la definición de haz, luego existe un $s \in \mathcal{F}(X)$ tal que $s|_{W_P} = s_P$ para todo P . Entonces $j^+(s)_P = t_P$ para todo $P \in X$ y, como \mathcal{F}^+ es un haz, esto implica que $j^+(s) = t$. ■

Volviendo a las cocadenas singulares, tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow C_N^p(X)_0 \longrightarrow C_N^p(X) \xrightarrow{j_X^+} \mathcal{C}_{X,N}^p(X) \longrightarrow 0,$$

que determina una sucesión exacta corta de complejos de A -módulos al variar p . Si demostramos que todos los grupos de cohomología del primer complejo son nulos, entonces la sucesión exacta larga asociada a la sucesión anterior implicará que el homomorfismo de completación induce isomorfismos

$$\bar{j}_X^+ : H_N^p(X) \longrightarrow H^p(X, N_X)$$

entre los grupos clásicos de cohomología singular (completa) con coeficientes en N y los grupos de cohomología del A_X -módulo constante N_X .

Así pues, nos fijamos ahora en el complejo

$$0 \longrightarrow C_N^0(X)_0 \longrightarrow C_N^1(X)_0 \longrightarrow C_N^2(X)_0 \longrightarrow \dots$$

formados por las cocadenas singulares localmente nulas.

Observemos en primer lugar que $C_N^0(X)_0 = 0$, porque el prehaz $\mathcal{C}_{X,N}^{0-}$ ya es un haz (aunque también se puede ver directamente sin dificultad). Esto ya prueba que el grupo de cohomología de orden 0 es nulo.

Fijemos, pues, $q \geq 1$, tomemos un $f \in C_N^q(X)_0$ tal que $df = 0$ y hemos de encontrar un $g \in C_N^{q-1}(X)$ tal que $f = dg$.

Que f sea localmente nulo significa que existe un cubrimiento abierto \mathcal{U} de X tal que $f|_U = 0$ para todo abierto $U \in \mathcal{U}$. Tenemos una sucesión exacta de complejos

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \{C_N^p(X)\}_p \longrightarrow \{C_N^p(X; \mathcal{U})\}_p \longrightarrow 0,$$

donde $C_N^p(X; \mathcal{U}) = \text{Hom}_A(C_p(X; \mathcal{U}), N)$ (definición 9.40), los epimorfismos son las restricciones y los módulos \mathcal{N}^p son sus núcleos. Ahora bien, el teorema 11.27 nos da que las restricciones inducen isomorfismos en los grupos de cohomología, luego la sucesión exacta larga asociada a esta sucesión de complejos prueba que el complejo \mathcal{N} tiene todos sus grupos de cohomología nulos, pero $f \in \mathcal{N}^q$ cumple $df = 0$, luego existe un $g \in \mathcal{N}^{q-1} \subset C_N^{q-1}(X)$ tal que $f = dg$, que es lo que queríamos probar.

Con esto hemos probado el teorema siguiente:

Teorema 13.3 *Si X es un espacio topológico paracompacto y localmente contractible, A es un anillo y N es un A -módulo, entonces tenemos isomorfismos*

$$H^p(X, N_X) \cong H_N^p(X)$$

entre los grupos de cohomología (completa) del haz constante N_X y los grupos de cohomología singular de X con coeficientes en N .

Cohomología singular diferenciable Si X es una variedad diferencial, podemos definir igualmente un complejo $\mathcal{C}_{X,N}^\infty$ considerando cocadenas singulares diferenciables, lo que a su vez nos permite definir los grupos de cohomología diferenciable $H^{\infty p}(X, N_X)$ con los cuales podemos probar un resultado análogo al teorema anterior sin más que tener en cuenta que todos los resultados que hemos usado sobre la cohomología singular valen igualmente para la cohomología singular diferenciable. Pero, más aún, podemos relacionar directamente los grupos $H^p(X, N_X)$ y $H^{\infty p}(X, N_X)$.

En primer lugar, las restricciones determinan homomorfismos de complejos

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & N_U & \longrightarrow & C_N^0(U) & \longrightarrow & C_N^1(U) & \longrightarrow & C_N^2(U) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N_U & \longrightarrow & C_N^{\infty 0}(U) & \longrightarrow & C_N^{\infty 1}(U) & \longrightarrow & C_N^{\infty 2}(U) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

que claramente determinan a su vez un homomorfismo entre los complejos de prehaces $\mathcal{C}_{X,N}^-$ y $\mathcal{C}_{X,N}^{\infty -}$, que a su vez se extienden a un homomorfismo entre los complejos de haces $\mathcal{C}_{X,N}$ y $\mathcal{C}_{X,N}^\infty$, los cuales son dos resoluciones paracompactas (luego acíclicas) del haz constante N_X .

Por la nota posterior al teorema 6.12 tenemos que este homomorfismo induce isomorfismos entre los funtores derivados del funtor $\Gamma(X, -)$ calculados con dichas resoluciones, es decir, entre los grupos de cohomología de los complejos

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}_{X,N}^0(X) & \longrightarrow & \mathcal{C}_{X,N}^1(X) & \longrightarrow & \mathcal{C}_{X,N}^2(X) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}_{X,N}^{\infty 0}(X) & \longrightarrow & \mathcal{C}_{X,N}^{\infty 1}(X) & \longrightarrow & \mathcal{C}_{X,N}^{\infty 2}(X) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Con esto hemos probado el teorema siguiente:

Teorema 13.4 *Si X es una variedad diferencial, A es un anillo y N es un A -módulo, el homomorfismo $\mathcal{C}_{X,N} \rightarrow \mathcal{C}_{X,N}^{\infty}$ inducido por las restricciones induce a su vez un isomorfismo $H^p(X, N_X) \rightarrow H^{\infty p}(X, N_X)$.*

Más aún, tenemos diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccccc} C_N^p(X) & \longrightarrow & C_N^p(X)/C_N^p(X)_0 & \longrightarrow & \mathcal{C}_{X,N}^p(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C_N^{\infty p}(X) & \longrightarrow & C_N^{\infty p}(X)/C_N^{\infty p}(X)_0 & \longrightarrow & \mathcal{C}_{X,N}^{\infty p}(X) \end{array}$$

en los que todas las flechas inducen isomorfismos entre los grupos de cohomología correspondientes, por lo que, a través de los isomorfismos descritos en esta subsección, el isomorfismo del teorema anterior se corresponde con el isomorfismo $H_N^p(X) \rightarrow H_N^{\infty p}(X)$ entre los grupos de cohomología singular (completa) y de cohomología singular (completa) diferenciable de X inducido por las restricciones.

13.2 La cohomología de Alexander-Spanier

Vamos a probar ahora que si X es un espacio topológico paracompacto, A es un anillo conmutativo y unitario y N es un A -módulo, los grupos de cohomología $H^n(X, N_X)$ del haz constante son también isomorfos a los grupos de cohomología de Alexander-Spanier con coeficientes en N .

Si $U \subset X$ es un abierto, tenemos un complejo

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{\epsilon} A_N^0(U) \xrightarrow{d_0} A_N^1(U) \xrightarrow{d_1} A_N^2(U) \rightarrow \dots$$

donde $\epsilon(n)$ es la función constante n . El teorema 11.29 afirma que se trata de una sucesión exacta, es decir, que el complejo tiene homología nula. El operador cofrontera es claramente compatible con las restricciones, $A_N^p(U) \rightarrow A_N^p(V)$ (donde $V \subset U \subset X$), por lo que tenemos un complejo (exacto) de prehaces

$$0 \rightarrow N_X^- \rightarrow \mathcal{A}_{X,N}^0 \rightarrow \mathcal{A}_{X,N}^{1-} \rightarrow \mathcal{A}_{X,N}^{2-} \rightarrow \dots$$

Como en el caso de la cohomología singular, estos prehaces cumplen la segunda condición de haz, pero no la primera (excepto para $p = 0$, pues en este caso se cumplen ambas). Pasando a las completaciones obtenemos un complejo exacto de haces

$$0 \longrightarrow N_X \longrightarrow \mathcal{A}_{X,N}^0 \longrightarrow \mathcal{A}_{X,N}^1 \longrightarrow \mathcal{A}_{X,N}^2 \longrightarrow \dots$$

Se demuestra que los haces $\mathcal{A}_{X,N}^p$ son paracompactos, así como que son libres de torsión si N lo es. La prueba es idéntica al caso de la cohomología singular, sin más que cambiar los p -símplices por elementos de U^{p+1} .

Así hemos vuelto a demostrar la existencia de resoluciones paracompactas y libres de torsión de los módulos constantes A_X , y además concluimos que los grupos de cohomología $H^p(X, N_X)$ pueden calcularse como los grupos de cohomología del complejo

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_{X,N}^0(X) \longrightarrow \mathcal{A}_{X,N}^1(X) \longrightarrow \mathcal{A}_{X,N}^2(X) \longrightarrow \dots$$

Notemos que el paso a la completación es crucial, ya que el complejo $\mathcal{A}_N^p(X)$ es exacto (excepto en \mathcal{A}^0 , pues ahora hablamos del complejo reducido). El teorema 13.2 nos asegura que este complejo es isomorfo al complejo $A_{\text{as}}(X; N)$ que define la cohomología de Alexander-Spanier, luego hemos demostrado el teorema siguiente:

Teorema 13.5 *Si X es un espacio paracompacto, A es un anillo y N es un A -módulo, entonces tenemos isomorfismos $H^p(X, N_X) \cong H_{\text{as}}^p(X; N)$ entre los grupos de cohomología del haz constante N_X y los grupos de cohomología de Alexander-Spanier.*

En particular, si X es paracompacto y localmente contractible, tenemos isomorfismos

$$H_{\text{as}}^p(X; N) \cong H_N^p(X) \cong H_N^{\infty p}(X)$$

entre los grupos de cohomología de Alexander-Spanier y los grupos de cohomología singular (diferenciable). Bajo la hipótesis de que A sea un dominio de ideales principales y N un A -módulo libre de torsión, podemos mostrarlos explícitamente. Consideremos el homomorfismo

$$\phi_{p,U} : \mathcal{A}_N^p(U) \longrightarrow C_N^p(U)$$

tal que $\phi_{p,U}(f)$ actúa sobre un p -símplice como f actúa sobre la $(p+1)$ -tupla de sus vértices. La definición del operador cofrontera de la cohomología de Alexander-Spanier se corresponde con la definición para la cohomología singular, de modo que es fácil ver que los homomorfismos ϕ_p determinan un homomorfismo de complejos de prehaces:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N_X^- & \longrightarrow & \mathcal{A}_{X,N}^0 & \longrightarrow & \mathcal{A}_{X,N}^1 & \longrightarrow & \mathcal{A}_{X,N}^2 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow \phi_0 & & \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \\ 0 & \longrightarrow & N_X^- & \longrightarrow & C_{X,N}^0 & \longrightarrow & C_{X,N}^1 & \longrightarrow & C_{X,N}^2 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

que a su vez se extiende a los complejos formados por las compleciones, es decir, a un homomorfismo entre las resoluciones

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N_X & \longrightarrow & \mathcal{A}_{X,N}^0 & \longrightarrow & \mathcal{A}_{X,N}^1 & \longrightarrow & \mathcal{A}_{X,N}^2 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow \bar{\phi}_0 & & \downarrow \bar{\phi}_1 & & \downarrow \bar{\phi}_2 & & \\ 0 & \longrightarrow & N_X & \longrightarrow & \mathcal{C}_{X,N}^0 & \longrightarrow & \mathcal{C}_{X,N}^1 & \longrightarrow & \mathcal{C}_{X,N}^2 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Puesto que se trata de dos resoluciones paracompactas del haz N_X , la nota posterior al teorema 6.12 nos da que $\bar{\phi}_p$ induce un isomorfismo entre los grupos de cohomología de N_X calculados con las respectivas resoluciones.

Más precisamente, tenemos diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccccc} A_N^p(X) & \longrightarrow & A_{\text{as}}^p(X; N) & \longrightarrow & A_{X,N}^p(X) \\ \phi_{p,X} \downarrow & & \tilde{\phi}_{p,X} \downarrow & & \downarrow \bar{\phi}_{p,X} \\ C_N^p(X) & \longrightarrow & C_N^p(X)/C_N^p(X)_0 & \longrightarrow & \mathcal{C}_{X,N}^p(X) \end{array}$$

de donde se sigue que el isomorfismo $H_{\text{as}}^p(X; N) \rightarrow H_N^p(X)$ es el que a la clase de cohomología del cociclo determinado por $[f]$ le hace corresponder la clase de cohomología de $\phi_{p,X}(f)$. Naturalmente, el mismo razonamiento es válido con la cohomología singular diferenciable.

De aquí se sigue a su vez que la equivalencia entre los funtores $H_{\text{as}}^p(-; N)$ y H_N^p es natural, es decir, que conmuta con los morfismos asociados a aplicaciones continuas.

Más aún, si (X, U) es un par de espacios topológicos, es claro que $\tilde{\phi}_{p,X}$ induce homomorfismos entre los módulos de cocadenas relativas que hacen conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_{\text{as}}^p(X, U; N) & \longrightarrow & A_{\text{as}}^p(X; N) & \longrightarrow & A_{\text{as}}^p(U; N) & \longrightarrow & 0 \\ & & \tilde{\phi}_{p,X} \downarrow & & \tilde{\phi}_{p,X} \downarrow & & \tilde{\phi}_{p,U} \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C_N^p(X, U)/C_N^0(X, N)_0 & \longrightarrow & C_N^p(X)/C_N^p(X)_0 & \longrightarrow & C_N^p(U)/C_N^0(X)_0 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Las sucesiones exactas largas de cohomología quedan entonces conectadas por homomorfismos de los cuales sabemos que dos de cada tres son isomorfismos, por lo que el teorema 4.12 implica que todos lo son, luego también tenemos isomorfismos naturales $H_{\text{as}}^p(X, U; N) \rightarrow H_N^p(X, U)$.

Como consecuencia:

Teorema 13.6 *Si V es una variedad topológica y $B \subset A \subset V$ son cerrados, entonces $\check{H}^p(A, B) = H_{\text{as}}^p(A, B)$ y, en particular, no depende de la inmersión de A y B en V .*

DEMOSTRACIÓN: Si $A \subset U \subset V$ y $B \subset U' \subset V$ son entornos abiertos de A y B en V con $U' \subset U$, entonces U es una variedad topológica, luego tenemos isomorfismos naturales $H^p(U, U') \cong H_{\text{as}}^p(U, U')$. La naturalidad implica en particular que conmutan con los homomorfismos inducidos por las inclusiones, lo que nos da un isomorfismo

$$\check{H}^p(A, B) \cong \check{H}_{\text{as}}^p(A, B) \cong H_{\text{as}}^p(A, B),$$

donde hemos usado el teorema 11.39. ■

Ahora, la misma prueba del teorema 12.34 nos da que si A es un cerrado en \mathbb{R}^n (no necesariamente una variedad topológica), entonces

$$H_{\text{as}}^p(A) \cong H_{n-p-1}(\mathbb{R}^n \setminus A),$$

donde en el segundo miembro consideramos la homología reducida. De aquí deducimos a su vez:

Teorema 13.7 (Teorema general de separación) *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto cerrado, el número de componentes conexas de $\mathbb{R}^n \setminus A$ es una unidad mayor que el rango de $H_{\text{as}}^{n-1}(A)$, por lo que es un invariante topológico de A .*

Es claro que el resultado es cierto también cambiando \mathbb{R}^n por S^n . Como aplicación podemos refinar el teorema 12.35:

Teorema 13.8 *Si $V \subset S^n$ es una variedad topológica compacta conexa de dimensión $n - 1$, entonces $S^n \setminus V$ tiene dos componentes conexas U_1 y U_2 , tales que $\partial U_1 = \partial U_2 = V$.*

DEMOSTRACIÓN: Obviamente $\partial U_1, \partial U_2 \subset V$. Supongamos que $x \in V \setminus \partial U_1$. Entonces existe un abierto $U_0 \subset S^n$ tal que $x \in U_0 \subset S^n \setminus U_1$. Sea $A = V \setminus U_0$, de modo que $A \subsetneq V$ es cerrado y

$$S^n \setminus A = (S^n \setminus V) \cup U_0 = U_1 \cup (U_2 \cup U_0),$$

que es una unión de dos abiertos disjuntos. Por lo tanto, $S^n \setminus A$ es disconexo. Por el teorema anterior (véase la observación posterior) $H_{\text{as}}^{n-1}(A) \neq 0$, pero por 13.6 y el teorema de dualidad de Alexander

$$H_{\text{as}}^{n-1}(A) \cong \check{H}^{n-1}(A) \cong H_0(V, V \setminus A) = 0,$$

pues es el número de componentes arcoconexas de V contenidas en A . ■

Veamos otro ejemplo de teorema de separación. Se dice que un compacto $K \subset S^n$ separa dos puntos $a, b \in S^n \setminus K$ si a y b están en componentes conexas distintas de $S^n \setminus K$.

Teorema 13.9 *Sea $n \geq 2$ y sean $K_1, K_2 \subset S^n$ dos compactos ninguno de los cuales separa a dos puntos dados $a, b \in S^n \setminus (K_1 \cup K_2)$. Si $H_{\text{as}}^{n-2}(K_1 \cap K_2) = 0$ (para la cohomología reducida) entonces $K_1 \cup K_2$ tampoco separa a a y b .*

La condición $H_{\text{as}}^{n-2}(K_1 \cap K_2) = 0$ se da por ejemplo si $K_1 \cap K_2$ es contractible o, para $n = 2$, si $K_1 \cap K_2$ es conexo o, para $n = 3$, si $K_1 \cap K_2$ es simplemente conexo.

DEMOSTRACIÓN: Consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 H_{\text{as}}^{n-1}(K_j) & \xrightarrow{D} & H_1(S^n, S^n \setminus K_j) & \xrightarrow{\delta} & H_0(S^n \setminus K_j) \\
 \uparrow i_j^* & & \uparrow i_{j*} & & \uparrow i_{j*} \\
 H_{\text{as}}^{n-1}(K_1 \cup K_2) & \xrightarrow{D} & H_1(S^n, S^n \setminus (K_1 \cup K_2)) & \xrightarrow{\delta} & H_0(S^n \setminus (K_1 \cup K_2))
 \end{array}$$

donde D es la dualidad de Alexander y δ el homomorfismo de conexión de la sucesión exacta del par (S^n, K_i) en la fila superior y $(S^n, K_1 \cup K_2)$ en la inferior. Considerando la homología reducida, tenemos que δ es un isomorfismo, pues en la sucesión exacta va precedido y seguido de $H_1(S^n)$ y $H_0(S^n)$, respectivamente.

Si K_i no separa a y b , entonces $[a - b] = 0$ en $H_0(S^n \setminus K_i)$, pues $a - b$ es la frontera de un arco que los una. Queremos probar que también $[a - b] = 0$ en $H_0(K_1 \cup K_2)$. Sea $u \in H_{\text{as}}^{n-1}(K_1 \cup K_2)$ tal que $\delta(D(u)) = [a - b]$. La conmutatividad del diagrama nos da que $i_j^*(u) = 0$, para $j = 1, 2$.

Ahora consideramos la sucesión de Mayer-Vietoris

$$0 = H_{\text{as}}^{n-2}(K_1 \cap K_2) \longrightarrow H_{\text{as}}^{n-1}(K_1 \cup K_2) \xrightarrow{i_1^* \oplus i_2^*} H_{\text{as}}^{n-1}(K_1) \oplus H_{\text{as}}^{n-1}(K_2).$$

Como u tiene imagen nula, concluimos que $u = 0$, luego también $[x - y] = 0$. ■

Ejercicio: Probar que si $K_1, K_2 \subset S^n$ no separan S^n (es decir, que $S^n \setminus K_j$ es conexo), $H_{\text{as}}^{n-2}(K_j) = 0$ para $j = 1, 2$ y $H_{\text{as}}^{n-2}(K_1 \cap K_2)$ tiene rango 1, entonces $S^n \setminus (K_1 \cup K_2)$ tiene exactamente dos componentes conexas. Particularizar a $n = 2$.

Terminamos con una caracterización de los abiertos simplemente conexos en el plano:

Teorema 13.10 *Un abierto conexo no vacío $U \subset \mathbb{R}^2$ es simplemente conexo si y sólo si $\mathbb{R}^2 \setminus U$ es conexo.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 10.31 sabemos que U es simplemente conexo si y sólo si $H_1(U) = 0$, luego basta tener en cuenta la relación $H_{\text{as}}^0(\mathbb{R}^2 \setminus U) \cong H_1(U)$ junto con el teorema 11.34 (véase la nota posterior). ■

13.3 El teorema de De Rham

En esta sección X será una variedad diferencial y como anillo de coeficientes tomaremos $A = \mathbb{R}$. Para cada abierto $U \subset X$ tenemos el complejo

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \Lambda^0(U) \longrightarrow \Lambda^1(U) \longrightarrow \Lambda^2(U) \longrightarrow \dots$$

donde el primer homomorfismo es el que asigna a cada número real r la función constante igual a r .

Es claro que los espacios $\Lambda^p(U)$, cuando U recorre los abiertos de X , forman un haz Λ_X^p , y que la diferencial exterior es compatible con las restricciones, por lo que tenemos un complejo de haces

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}_X \longrightarrow \Lambda_X^0 \longrightarrow \Lambda_X^1 \longrightarrow \Lambda_X^2 \longrightarrow \dots$$

El primer homomorfismo es la compleción del homomorfismo de prehaces $\mathbb{R}_X \longrightarrow \Lambda_X^0$. Concretamente, para cada abierto $U \subset X$, tenemos que $\mathbb{R}_X(U) \longrightarrow \Lambda_X^0(U)$ identifica a $\mathbb{R}_X(U)$ con el espacio de las funciones localmente constantes en U .

Veamos ahora que el complejo es una resolución paracompacta y libre de torsión de \mathbb{R}_X :

Los \mathbb{R}_X -módulos Λ_X^p son libres de torsión porque \mathbb{R} es un cuerpo, y son paracompactos porque son C_X^∞ -módulos (teorema 7.24). La exactitud de la sucesión para $p \geq 1$ se comprueba exactamente igual que en el caso de la cohomología singular: es consecuencia de que todo punto $P \in X$ tiene un entorno U homotópico a un punto (es decir, contractible) y que entonces $H^p(U) = 0$ (teorema [GD 5.44]). La exactitud en \mathbb{R}_X ya la hemos comprobado (hemos visto que $\mathbb{R}_X \longrightarrow \Lambda_X^0$ es un monomorfismo) y la exactitud en Λ_X^0 se debe a que una función $f \in \Lambda^0(U) = C^\infty(U)$ cumple $df = 0$ si y sólo si es localmente constante en U .

Por consiguiente, podemos calcular los grupos de cohomología $H^p(X, \mathbb{R}_X)$ a partir de la resolución Λ_X , lo cual supone pasar al complejo

$$0 \longrightarrow \Lambda^0(X) \longrightarrow \Lambda^1(X) \longrightarrow \Lambda^2(X) \longrightarrow \dots$$

y calcular sus grupos de cohomología, pero éstos son precisamente los grupos de cohomología de De Rham. Así pues:

Teorema 13.11 *Si X es una variedad diferencial, entonces existen isomorfismos*

$$H^p(X, \mathbb{R}_X) \cong H^p(X)$$

entre los grupos de cohomología del haz constante \mathbb{R}_X y los grupos de cohomología de De Rham.

De hecho, hemos probado que los isomorfismos son igualdades si calculamos $H^p(X, \mathbb{R}_X)$ concretamente con la resolución Λ_X . Esto ya prueba que la cohomología de De Rham depende únicamente de la estructura topológica de X , y no de su estructura diferencial. Vamos a poner este hecho de relieve encontrando isomorfismos explícitos $H^p(X) \cong H_\infty^p(X)$ entre los grupos de cohomología de De Rham y los grupos de cohomología singular diferenciable de X (con coeficientes en \mathbb{R} , aunque en esta sección omitiremos el subíndice \mathbb{R} ya que no vamos a considerar ningún otro anillo de coeficientes).

Para ello necesitamos introducir la integración sobre cadenas de simplices diferenciables.

Consideremos en primer lugar un p -símplice diferenciable $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$ y una p -forma $\omega \in \Lambda^p(X)$. Por definición, σ se extiende a una aplicación diferenciable $\tilde{\sigma} : U \rightarrow X$, donde U es un abierto en \mathbb{R}^p que contiene al símplice canónico Δ_p . Ésta define un homomorfismo $\tilde{\sigma}^* : \Lambda^p(X) \rightarrow \Lambda^p(U)$. Existe una única función $f \in C^\infty(U)$ tal que $\tilde{\sigma}^*(\omega) = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^p$, donde las funciones x^i son las coordenadas de la identidad en U . Definimos

$$\int_\sigma \omega = \int_{\Delta_p} f(x) dx_1 \cdots dx_p,$$

donde la última integral es la integral de f en el sentido usual del análisis.

Observemos que esta definición no depende de la extensión $\tilde{\sigma}$ de σ . En efecto, si $\tilde{\sigma}_1$ y $\tilde{\sigma}_2$ son dos extensiones de σ y x es un punto interior de Δ_p , entonces ambas coinciden en un entorno de x , por lo que $\tilde{\sigma}_1^*(\omega)$ y $\tilde{\sigma}_2^*(\omega)$ coinciden en el punto x , luego las funciones correspondientes f_1 y f_2 coinciden en el interior de Δ_p . Por continuidad coinciden en todo Δ_p y las integrales correspondientes también coinciden.

Para $p = 0$ definimos $\int_\sigma \omega = \omega(\sigma(0))$.

Si $c = \sum_{i=1}^r a_i \sigma_i \in C_p^\infty(X)$ es una p -cadena singular diferenciable (con coeficientes en \mathbb{R}), definimos

$$\int_c \omega = \sum_{i=1}^r a_i \int_{\sigma_i} \omega.$$

Así tenemos definida una forma bilineal

$$\int : C_p^\infty(X) \times \Lambda^p(X) \rightarrow \mathbb{R}.$$

En primer lugar probamos que se comporta adecuadamente respecto a los homomorfismos inducidos por las aplicaciones diferenciables.

Teorema 13.12 *Sea $h : X \rightarrow Y$ una aplicación diferenciable entre variedades, sea $c \in C_p^\infty(X)$ y $\omega \in \Lambda^p(Y)$. Entonces*

$$\int_c h^*(\omega) = \int_{h^\sharp(c)} \omega.$$

DEMOSTRACIÓN: Por linealidad basta probarlo en el caso en que $c = \sigma$ es un p -símplice. Si $p = 0$ ambos miembros son $\omega(h(\sigma(0)))$.

Supongamos que $p > 0$ y sea $\tilde{\sigma}$ una extensión de σ a una función diferenciable en un entorno de Δ_p . Entonces $\tilde{\sigma} \circ h$ es una extensión diferenciable de $\sigma \circ h = h^\sharp(\sigma)$. Así pues, si

$$\tilde{\sigma}^*(h^*(\omega)) = (\tilde{\sigma} \circ h)^*(\omega) = \widetilde{h^\sharp(\sigma)}^*(\omega) = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^p,$$

entonces los dos miembros de la igualdad del enunciado son la integral de f sobre Δ_p . ■

El teorema fundamental sobre integración de formas diferenciales sobre sím-
plices es una variante del teorema de Stokes:

Teorema 13.13 (Teorema de Stokes para símlices) *Sea X una variedad
diferencial, $c \in C_{p+1}^\infty(X)$, $\omega \in \Lambda^p(X)$. Entonces*

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

DEMOSTRACIÓN: Por linealidad podemos suponer que $c = \sigma$ es un $p + 1$ -
símlice. El caso $p = 0$ es simplemente la regla de Barrow. En efecto, tenemos
que $\sigma : [0, 1] \rightarrow V$, luego $\tilde{\sigma}_\#(d\omega) = d(\sigma \circ \omega) = (\sigma \circ \omega)' dx$ y

$$\int_\sigma d\omega = \int_0^1 (\sigma \circ \omega)' dx = \omega(\sigma(1)) - \omega(\sigma(0)) = \int_{\sigma(1) - \sigma(0)} \omega = \int_{\partial\sigma} \omega.$$

Supongamos, pues, que $p > 0$ y veamos que podemos reducir la demostración
al caso en que σ es la identidad I en Δ_{p+1} . En efecto, basta observar que
 $\sigma = I \circ \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^\#(I)$, luego el teorema anterior nos da que

$$\begin{aligned} \int_\sigma d\omega &= \int_{\tilde{\sigma}^\#(I)} d\omega = \int_I \tilde{\sigma}^*(d\omega) = \int_I d\tilde{\sigma}^*(\omega), \\ \int_{\partial\sigma} \omega &= \int_{\partial\tilde{\sigma}^\#(I)} \omega = \int_{\tilde{\sigma}^\#(\partial I)} \omega = \int_{\partial I} \tilde{\sigma}^*(\omega). \end{aligned}$$

Notemos que $\tilde{\sigma}^*(\omega) \in \Lambda^p(U)$, donde U es un entorno de Δ_{p+1} en \mathbb{R}^{p+1} .
Así pues, podemos suponer que $\sigma = I$ y $\omega \in \Lambda^p(U)$. Más aún, por linealidad
podemos suponer que

$$\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^{p+1},$$

con lo que

$$d\omega = df \wedge dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^{p+1} = (-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{p+1}.$$

Para evitar confusión con las funciones coordenadas llamaremos e_0, \dots, e_{p+1}
a los vértices del símlice canónico Δ_{p+1} , es decir,

$$e_0 = (0, \dots, 0), \quad e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_{p+1} = (0, \dots, 0, 1).$$

Con la notación de la sección 9.2 (salvo por lo que acabamos de decir),
tenemos que

$$\sigma = (e_0, \dots, e_{p+1}), \quad \partial\sigma = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j (e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_{p+1}).$$

Si llamamos $\tau_j = (e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_{p+1})$, hemos de probar que

$$\int_\sigma (-1)^{i+1} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{p+1} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \int_{\tau_j} f dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^{p+1}.$$

Ahora hemos de aplicar mecánicamente las definiciones. Empezaremos calculando el miembro derecho. Tomemos $j > 0$. Entonces $\tau_j : \Delta_p \rightarrow U$ es la aplicación afín que hace corresponder los vértices e_0, \dots, e_p de Δ_p con los vértices $e_0, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_{p+1}$ de Δ_{p+1} . Es claro que se trata de la aplicación

$$\tau_j(x_1, \dots, x_p) = (x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_p).$$

Por consiguiente

$$\tau_j^*(dx^k) = d(\tau_j \circ x^k) = \begin{cases} dx^k & \text{si } k < j, \\ 0 & \text{si } k = j, \\ dx^{k-1} & \text{si } k > j, \end{cases}$$

luego $\tau_{j\#}(\omega) = 0$ salvo a lo sumo si $j = 0$ o $j = i$. Además

$$\tau_i^*(\omega) = \tau_i^*(f) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p.$$

Por otra parte $\tau_0(x_1, \dots, x_p) = \left(1 - \sum_{r=1}^p x_r, x_1, \dots, x_p\right)$, luego

$$\tau_0^*(dx^k) = \begin{cases} -\sum_{r=1}^p dx^r & \text{si } k = 1, \\ dx^{k-1} & \text{si } k > 1. \end{cases}$$

Es fácil ver entonces que $\tau_0^*(\omega) = -(-1)^i \tau_0^*(f) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p$. En resumen, tenemos que

$$\int_{\partial\sigma} \omega = (-1)^i \int_{\Delta_p} (\tau_i^*(f)(x) - \tau_0^*(f)(x)) dx_1 \cdots dx_p. \quad (13.1)$$

Por otra parte,

$$\int_{\sigma} d\omega = (-1)^{i+1} \int_{\Delta_{p+1}} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \cdots dx_{p+1}.$$

Vamos a aplicar el teorema de Fubini, integrando primero respecto a la coordenada i -ésima. Así,

$$\int_{\sigma} d\omega = (-1)^{i+1} \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{\Delta_{p+1}}(\iota(x, t)) \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\iota(x, t)} dt \right) dx_1 \cdots dx_p,$$

donde $\iota(x, t) = (x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_i, \dots, x_p)$ y $\chi_{\Delta_{p+1}}$ es la función característica de Δ_{p+1} . Ahora bien, se cumple que $\iota(x, t) \in \Delta_{p+1}$ si y sólo si $x \in \Delta_p$ y $0 \leq t \leq s(x) = 1 - \sum_{r=1}^p x_r$, luego

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} d\omega &= (-1)^{i+1} \int_{\Delta_p} \left(\int_0^{s(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\iota(x, t)} dt \right) dx_1 \cdots dx_p \\ &= (-1)^{i+1} \int_{\Delta_p} (f(\iota(x, s(x))) - f(\iota(x, 0))) dx_1 \cdots dx_p. \end{aligned}$$

Para terminar observamos que $f(\iota(x, 0)) = f(\tau_i(x)) = \tau_i^*(f)(x)$, por lo que, comparando con (13.1), sólo queda demostrar que

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta_p} f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1 - \sum_{r=1}^p x_r, x_i, \dots, x_p) dx_1 \cdots dx_p \\ &= \int_{\Delta_p} f(1 - \sum_{r=1}^p x_r, x_1, \dots, x_p) dx_1 \cdots dx_p, \end{aligned}$$

pero el teorema de cambio de variable aplicado a la aplicación que intercambia la primera coordenada con la i -ésima transforma una integral en la otra. ■

Nota En el caso de una variedad compacta conexa y orientable V hay una relación muy estrecha entre la integración sobre V y la integración sobre cadenas de símlices. Puede probarse que un representante de la clase fundamental es el ciclo formado por una triangulación de V , es decir, un ciclo diferenciable, con coeficientes iguales a 1, cuyo soporte sea toda la variedad V y de modo que la intersección de los soportes de dos cualesquiera de sus símlices sea vacía o un $n - 1$ -símlice común a sus fronteras. Entonces es claro que integrar sobre V equivale a integrar sobre este ciclo. No obstante, demostrar que toda variedad compacta diferencial es triangulable es muy complicado. Sin embargo, podemos probar la equivalencia de las integrales mediante un argumento local:

Teorema 13.14 *Sea V una variedad diferencial compacta, conexa y orientada de dimensión n y sea ζ su clase fundamental. Entonces, para toda $\omega \in H_c^n(V)$ se cumple que*

$$\int_{\zeta}^* \omega = \int_V^* \omega.$$

DEMOSTRACIÓN: Si $p \in V$, por definición de clase fundamental (véase el teorema 10.53 y el párrafo siguiente) tenemos que la identidad induce un isomorfismo $j_p : H_n(V) \rightarrow H_n(V, V \setminus \{p\})$ (consideramos la homología con coeficientes enteros). Según la observación tras el teorema 10.32, un generador del grupo $H_n(V, V \setminus \{p\})$ es la clase de cualquier n -símplejo inyectivo σ que tenga a p en el interior de su soporte. Podemos tomarlo diferenciable. Más aún, cambiando su orientación si es preciso, podemos suponer que $j_p(\zeta) = [\sigma]$. Sea $\zeta = [c]$. Entonces $c = \sigma + c' + \partial b$, donde $|c'| \subset V \setminus \{p\}$.

Sea U_p un entorno de p contenido en el interior del soporte de σ y disjunto del soporte de c' . De este modo, si $\omega \in \Lambda^n(V)$ cumple $\text{sop } \omega \subset U_p$, entonces

$$\int_c \omega = \int_{\sigma} \omega + \int_{c'} \omega + \int_{\partial b} \omega = \int_{\sigma} \omega + \int_b d\omega = \int_{\sigma} \omega = \int_V \omega.$$

La última igualdad se sigue inmediatamente de las definiciones de integral de una forma sobre un símplejo y sobre un abierto.

De este modo, para cada punto p hemos encontrado un entorno abierto U_p de modo que si una n -forma tiene su soporte en U_p entonces su integral sobre ζ coincide con su integral sobre V . Mediante una partición de la unidad, toda

n -forma ω se descompone como $\omega = \omega_1 + \dots + \omega_r$, de modo que cada ω_i tiene su soporte en un abierto U_i en las condiciones anteriores. Entonces

$$\int_{\zeta} \omega = \sum_i \int_{\zeta} \omega_i = \sum_i \int_V \omega_i = \int_V \omega.$$

■

Como consecuencia del teorema de Stokes, las aplicaciones lineales

$$\phi_{p,U} : \Lambda^p(U) \longrightarrow C^{\infty p}(U)$$

dadas por $\phi_{p,U}(\omega)(c) = \int_c \omega$ inducen un homomorfismo de complejos de prehaces

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{R}_X^- & \longrightarrow & \Lambda^0 & \longrightarrow & \Lambda^1 & \longrightarrow & \Lambda^2 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow \phi_0 & & \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{R}_X^- & \longrightarrow & C_X^{\infty 0} & \longrightarrow & C_X^{\infty 1} & \longrightarrow & C_X^{\infty 2} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

pues $d(\phi_p(\omega))(c) = \int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega = \phi_{p+1}(d\omega)(c)$.

A su vez, éste se extiende a un homomorfismo de haces:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{R}_X & \longrightarrow & \Lambda^0 & \longrightarrow & \Lambda^1 & \longrightarrow & \Lambda^2 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow \bar{\phi}_0 & & \downarrow \bar{\phi}_1 & & \downarrow \bar{\phi}_2 & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{R}_X & \longrightarrow & \mathcal{C}_X^{\infty 0} & \longrightarrow & \mathcal{C}_X^{\infty 1} & \longrightarrow & \mathcal{C}_X^{\infty 2} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Por la nota posterior al teorema 7.29, este homomorfismo entre las dos resoluciones induce un isomorfismo entre los funtores de cohomología construidos con cada una de ellas, es decir, entre los grupos de cohomología de los complejos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Lambda^0(X) & \longrightarrow & \Lambda^1(X) & \longrightarrow & \Lambda^2(X) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \bar{\phi}_{0,X} & & \downarrow \bar{\phi}_{1,X} & & \downarrow \bar{\phi}_{2,X} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}_X^{\infty 0}(X) & \longrightarrow & \mathcal{C}_X^{\infty 1}(X) & \longrightarrow & \mathcal{C}_X^{\infty 2}(X) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Ahora basta considerar el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^p(X) & & \\ \downarrow \phi_{p,X} & \searrow \bar{\phi}_{p,X} & \\ C^{\infty p}(X) & \xrightarrow{j_X^+} & \mathcal{C}_X^{\infty p}(X) \end{array}$$

La flecha oblicua y la horizontal inducen isomorfismos entre los grupos de cohomología, luego la vertical también. Con esto hemos probado:

Teorema 13.15 (De Rham) *Si X es una variedad diferencial, la integración sobre simplices*

$$\int : \Lambda^p(X) \longrightarrow C^{\infty p}(X)$$

induce un isomorfismo natural $H^p(X) \longrightarrow H^{\infty p}(X)$ entre los grupos de cohomología de De Rham y los grupos de cohomología singular diferenciable de X .

Observemos ahora que el teorema 7.17 (aplicado a $A = \mathbb{A} = \mathbb{R}$) nos da isomorfismos naturales $H^{\infty p}(X) \cong H_p^{\infty}(X)^*$ entre los grupos de cohomología singular diferenciable y los espacios vectoriales duales de los grupos de homología singular diferenciable (el funtor Ext se anula sobre los \mathbb{R} -espacios vectoriales porque son libres).

El teorema de Stokes implica que la integral induce una forma bilineal

$$\int^* : H_p^{\infty}(X) \times H^p(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

que a su vez induce una aplicación lineal $H^p(X) \longrightarrow H_p^{\infty}(X)^*$ que de hecho es un isomorfismo, ya que compuesta con el isomorfismo $H_p^{\infty}(X)^* \longrightarrow H^{\infty p}(X)$ no es sino el isomorfismo dado por el teorema de De Rham. Así pues, tenemos esta variante del teorema de De Rham:

Teorema 13.16 (De Rham) *Si X es una variedad diferencial, tenemos una forma bilineal regular*

$$\int^* : H_p^{\infty}(X) \times H^p(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por $([\sigma], [\omega]) \mapsto \int_{\sigma} \omega$.

Claramente, si $U \subset X$ es un abierto, la integración se restringe a una aplicación lineal

$$\int : \Lambda^p(X, U) \longrightarrow C^{\infty p}(X, U),$$

que a su vez induce homomorfismos naturales $H^p(X, U) \longrightarrow H^{\infty p}(X, U)$. Considerando el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Lambda(X, U) & \longrightarrow & \Lambda(X) & \longrightarrow & \Lambda(U) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C^{\infty p}(X, U) & \longrightarrow & C^{\infty p}(X) & \longrightarrow & C^{\infty p}(U) \longrightarrow 0 \end{array}$$

vemos que las sucesiones exactas largas de cohomología asociadas están relacionadas por homomorfismos de los cuales dos de cada tres son isomorfismos, luego por el teorema 4.12 concluimos que la integración induce también isomorfismos

$$\int : H^p(X, U) \longrightarrow H^{\infty p}(X, U).$$

Cohomología con soportes compactos Veamos ahora que la cohomología de De Rham con soportes compactos también es naturalmente equivalente a la cohomología singular diferenciable con soportes compactos.

Para ello observamos que, al igual que sucede con la cohomología singular, también podemos expresar la cohomología de De Rham con soportes compactos como límite inductivo, pues

$$\Lambda^p(X) = \varinjlim_K \Lambda^p(X, X \setminus K),$$

donde K recorre los subconjuntos compactos de X , donde el límite se calcula respecto de las inclusiones $\Lambda^p(V, V \setminus K) \rightarrow \Lambda^p(V, V \setminus K')$, para $K' \subset K$. El teorema 4.28 nos da entonces que

$$H_c^p(V) = \varinjlim_K H^p(V, V \setminus K).$$

Ahora, la integración sobre p -símplices determina un homomorfismo

$$\int : \Lambda^p(V, V \setminus K) \rightarrow C^{\infty p}(V, V \setminus K),$$

y tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Lambda(V, V \setminus K) & \longrightarrow & \Lambda(V) & \longrightarrow & \Lambda(V \setminus K) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C^{\infty*}(V, V \setminus K) & \longrightarrow & C^{\infty*}(V) & \longrightarrow & C^{\infty*}(V \setminus K) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Las flechas verticales son los homomorfismos determinados por la integración sobre símlices. Al formar la sucesión exacta de cohomología obtenemos un nuevo diagrama conmutativo donde dos de cada tres flechas verticales son isomorfismos por el teorema de De Rham. Por consiguiente, el teorema 4.12 nos da que la integración induce isomorfismos

$$\int : H^p(V, V \setminus K) \rightarrow H^{\infty p}(V, V \setminus K).$$

Éstos conmutan claramente con los homomorfismos que definen los límites inductivos, por lo que determinan un isomorfismo

$$\int^* : H_c^p(V) \rightarrow H_c^{\infty p}(V)$$

que no es sino el inducido por la integración sobre símlices. En definitiva, hemos probado la versión siguiente del teorema de De Rham:

Teorema 13.17 *Si V es una variedad diferencial, la integración sobre símlices*

$$\int : \Lambda_c^p(V) \rightarrow C_c^{\infty p}(V)$$

induce un isomorfismo $H_c^p(V) \rightarrow H_c^{\infty p}(V)$ entre los grupos de cohomología de De Rham con soportes compactos y los grupos de cohomología singular diferenciable con soportes compactos.

13.4 La estructura multiplicativa

Si X es una variedad diferencial, el teorema de De Rham nos proporciona un isomorfismo graduado natural $H^*(X) \cong H^{\infty*}(X)$ entre la suma directa de todos los grupos de cohomología de De Rham y la suma directa de los grupos de cohomología singular diferenciable. En esta sección probaremos que no sólo es un isomorfismo graduado de espacios vectoriales, sino que se trata de un isomorfismo de álgebras, considerando en $H^*(X)$ la estructura de álgebra inducida por el álgebra de Grassmann de X y en $H^{\infty*}(X)$ la inducida por el producto exterior, que hemos construido para la cohomología singular, pero que obviamente puede construirse igualmente con la cohomología singular diferenciable.

Para ello probaremos que ambas estructuras de álgebra son isomorfas al álgebra de cohomología $H(X, \mathbb{R}_X)$ asociada al haz constante \mathbb{R}_X , definida en la sección 7.5.

Teorema 13.18 (De Rham) *Si X es una variedad diferencial, los isomorfismos naturales*

$$H^*(X) \cong H(X, \mathbb{R}_X) \cong H_{\mathbb{R}}^{\infty}(X)$$

entre el álgebra de cohomología de De Rham, el álgebra de cohomología del haz constante \mathbb{R}_X y el álgebra de cohomología singular diferenciable de X (en particular el dado por el teorema 13.15) son isomorfismos de álgebras.

DEMOSTRACIÓN: Podemos calcular el producto de $H(X, \mathbb{R}_X)$ partiendo de la resolución determinada por el álgebra de Grassmann Λ_X . De acuerdo con la nota final de la sección 7.5, para ello sólo tenemos que componer el homomorfismo canónico

$$H_{\Lambda_X}^i(X, \mathbb{R}_X) \otimes_{\mathbb{R}} H_{\Lambda_X}^j(X, \mathbb{R}_X) \longrightarrow H_{\Lambda_X \otimes_{\mathbb{R}_X} \Lambda_X}^{i+j}(X, \mathbb{R}_X)$$

con el isomorfismo natural $H_{\Lambda_X \otimes_{\mathbb{R}_X} \Lambda_X}^{i+j}(X, \mathbb{R}_X) \cong H_{\Lambda_X}^{i+j}(X, \mathbb{R}_X)$, pero es claro que el producto exterior define homomorfismos

$$\Lambda^i(U) \otimes_{\mathbb{R}} \Lambda^j(U) \longrightarrow \Lambda^{i+j}(U),$$

que inducen homomorfismos de haces $\Lambda_X^i \otimes \Lambda_X^j \longrightarrow \Lambda_X^{i+j}$, que, a su vez, es fácil ver que definen un homomorfismo de complejos $\Lambda_X \otimes_{\mathbb{R}_X} \Lambda_X \longrightarrow \Lambda_X$, es decir, un homomorfismo que conmuta con los operadores diferenciales. Según la nota tras el teorema 7.29, dicho homomorfismo induce el isomorfismo natural entre los grupos de cohomología calculados con ambas resoluciones. Por lo tanto, el producto en $H_{\Lambda_X}(X, \mathbb{R}_X)$ viene dado por la composición

$$\begin{aligned} H^i(X, \mathbb{R}_X) \times H^j(X, \mathbb{R}_X) &\longrightarrow H^i(X, \mathbb{R}_X) \otimes_{\mathbb{R}} H^j(X, \mathbb{R}_X) \\ &\longrightarrow H^{i+j}(X, \mathbb{R}_X) \longrightarrow H^{i+j}(X, \mathbb{R}_X) \end{aligned}$$

que, explícitamente, consiste en calcular

$$([\omega_1], [\omega_2]) \mapsto [\omega_1] \otimes [\omega_2] \mapsto [\omega_1 \otimes \omega_2] \mapsto [\omega_1 \wedge \omega_2].$$

Equivalentemente,

$$[\omega_2] \times [\omega_2] = [\omega_1 \wedge \omega_2] = [\omega_1] \wedge [\omega_2],$$

lo que prueba que el isomorfismo $H(X, \mathbb{R}_X) \cong H^*(X)$ es un isomorfismo de álgebras.

Ahora partimos de la resolución \mathcal{C}_X^∞ correspondiente a la cohomología singular diferenciable de X . Si definimos

$$\smile: C^{\infty i}(U) \times C^{\infty j}(U) \longrightarrow C^{\infty i+j}(U)$$

a partir de cualquier aproximación diagonal como se indica tras la definición 12.18, este producto exterior induce homomorfismos

$$\phi_U: C^{\infty i}(U) \otimes_{\mathbb{R}_X(U)} C^{\infty j}(U) \longrightarrow C^{\infty i+j}(U)$$

mediante $f_1 \otimes f_2 \mapsto f_1 \smile f_2$, que determinan un homomorfismo ϕ de prehaces, que a su vez se extiende a un homomorfismo de haces

$$\bar{\phi}: \mathcal{C}_X^{\infty i} \otimes_{\mathbb{R}_X} \mathcal{C}_X^{\infty j} \longrightarrow \mathcal{C}_X^{\infty i+j},$$

y es fácil ver que estos homomorfismos forman un homomorfismo de complejos (es decir, que conmutan con los operadores cofrontera), el cual induce a su vez el isomorfismo natural

$$H_{\mathcal{C}_X^{\infty} \otimes \mathcal{C}_X^{\infty}}^{i+j}(X, \mathbb{R}_X) \cong H_{\mathcal{C}_X^{\infty}}^{i+j}(X, \mathbb{R}_X).$$

Recordemos ahora (véase la discusión tras el teorema 13.2) que la completación

$$j_X^+: C_{\mathbb{R}}^{\infty i}(X) \longrightarrow \mathcal{C}_{X, \mathbb{R}}^{\infty i}(X)$$

que a cada $f \in C_{\mathbb{R}}^{\infty i}(X)$ le asocia el elemento $j_X^+(f) \in \mathcal{C}_{X, \mathbb{R}}^{\infty i}(X)$ con las mismas secciones locales, induce el isomorfismo $\bar{j}_X^+: H_{\mathbb{R}}^{\infty, i}(X) \longrightarrow H_{\mathcal{C}_{X, \mathbb{R}}^{\infty}}^i(X, \mathbb{R}_X)$.

Si partimos de dos clases de cohomología $[f_1] \in H_{\mathbb{R}}^{\infty, i}(X)$, $[f_2] \in H_{\mathbb{R}}^{\infty, j}(X)$, el producto de sus imágenes se calcula mediante

$$\begin{aligned} ([j_X^+(f_1)], [j_X^+(f_2)]) &\mapsto [j_X^+(f_1)] \otimes [j_X^+(f_2)] \mapsto [j_X^+(f_1) \otimes j_X^+(f_2)] \\ &\mapsto [\bar{\phi}_X(j_X^+(f_1 \smile f_2))] = [j_X^+(\phi_X(f_1 \smile f_2))] = [j_X^+(f_1 \smile f_2)] \\ &= \bar{j}_X^+([f_1 \smile f_2]) = \bar{j}_X^+([f_1] \smile [f_2]). \end{aligned}$$

Por lo tanto, \bar{j}_X^+ resulta ser un isomorfismo de álgebras. ■

Nota El mismo argumento empleado en el teorema anterior prueba que, si X es un espacio paracompacto localmente contractible, el isomorfismo natural $H_N(X) \longrightarrow H_{\mathcal{C}_{X, N}}(X, N_X)$ es un isomorfismo de álgebras. ■

El producto exterior en variedades diferenciales Sean ahora V_1 y V_2 dos variedades diferenciales. Definimos

$$\times : \Lambda^p(V_1) \times \Lambda^q(V_2) \longrightarrow \Lambda^{p+q}(V_1 \times V_2)$$

mediante $\omega_1 \times \omega_2 = p_1^\sharp(\omega_1) \wedge p_2^\sharp(\omega_2)$, donde $p_i : V_1 \times V_2 \longrightarrow V_i$ son las proyecciones. Igualmente podemos definir

$$\times : H^p(V_1) \times H^q(V_2) \longrightarrow H^{p+q}(V_1 \times V_2)$$

mediante $\omega_1 \times \omega_2 = p_1^*(\omega_1) \wedge p_2^*(\omega_2)$, de modo que $[\omega_1] \times [\omega_2] = [\omega_1 \times \omega_2]$. Sucede que todas las operaciones que hay que realizar para calcular $\omega_1 \times \omega_2$, a saber

$$H^p(V_1) \times H^q(V_2) \xrightarrow{p_1^* \times p_2^*} H^p(V_1 \times V_2) \times H^q(V_2 \times V_2) \xrightarrow{\wedge} H^{p+q}(V_1 \times V_2)$$

conmutan, a través del isomorfismo de De Rham, con las operaciones correspondientes entre los grupos de cohomología singular diferenciable:

$$H^{\infty p}(V_1) \times H^{\infty q}(V_2) \xrightarrow{p_1^* \times p_2^*} H^{\infty p}(V_1 \times V_2) \times H^{\infty q}(V_2 \times V_2) \xrightarrow{\smile} H^{\infty p+q}(V_1 \times V_2)$$

y, en virtud del teorema 12.20, el resultado es el producto exterior de la cohomología singular. En otras palabras, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^p(V_1) \times H^q(V_2) & \xrightarrow{\times} & H^{p+q}(V_1 \times V_2) \\ f^* \times f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ H^{\infty p}(V_1) \times H^{\infty q}(V_2) & \xrightarrow{\times} & H^{\infty p+q}(V_1 \times V_2) \end{array}$$

Por ejemplo, el teorema 12.15 se traduce ahora en un hecho que, naturalmente, también puede probarse directamente, pero la prueba no es inmediata, y es la versión para la cohomología de De Rham del teorema de Künneth:

Teorema 13.19 Si V_1 y V_2 son variedades diferenciales, la aplicación

$$H^*(V_1) \otimes_{\mathbb{R}} H^*(V_2) \longrightarrow H^*(V_1 \times V_2)$$

dada por $\omega_1 \otimes \omega_2 \mapsto \omega_1 \times \omega_2$ es un isomorfismo de espacios vectoriales graduados.

Nota Conviene observar una propiedad elemental del producto exterior de formas diferenciales. Si V_1 y V_2 son variedades orientables de dimensiones m y n , y $\omega_1 \in \Lambda_c^m(V_1)$, $\omega_2 \in \Lambda_c^n(V_2)$, entonces

$$\int_{V_1 \times V_2} \omega_1 \times \omega_2 = \left(\int_{V_1} \omega_1 \right) \left(\int_{V_2} \omega_2 \right).$$

La prueba consiste en usar una partición de la unidad para reducir el problema al caso en que los soportes de las formas están contenidos en un abierto coordenado y entonces la igualdad es un caso particular del teorema de Fubini. ■

El álgebra de cohomología de Alexander-Spanier Terminamos observando que el producto exterior admite una definición extremadamente simple en términos de la cohomología de Alexander-Spanier: Con la notación de la definición 11.30, si $f_1 \in A_N^i(X)$, $f_2 \in A_N^j(X)$, definimos $f_1 \smile f_2 \in A_N^{i+j}(X)$ mediante

$$(f_1 \smile f_2)(x_0, \dots, x_{i+j}) = f_1(x_0, \dots, x_i) f_2(x_i, \dots, x_{i+j}).$$

Si $f_1 \in A_N^i(X)_0$ o $f_2 \in A_N^j(X)_0$, es claro que $f_1 \smile f_2 \in A_N^{i+j}(X)_0$, por lo que este producto induce otro

$$\smile: A_{\text{as}}^i(X; N) \times A_{\text{as}}^j(X; N) \longrightarrow A_{\text{as}}^{i+j}(X; N).$$

Además se comprueba que

$$d(f_1 \smile f_2) = df_1 \smile f_2 + (-1)^i f_1 \smile df_2,$$

por lo que \smile induce a su vez un producto

$$\smile: H_{\text{as}}^i(X; N) \times H_{\text{as}}^j(X; N) \longrightarrow H_{\text{as}}^{i+j}(X; N).$$

que claramente dota a $H_{\text{as}}(X; N)$ de estructura de álgebra. El mismo argumento empleado con la cohomología singular y la cohomología singular diferenciable prueba que el isomorfismo $H_{\text{as}}(X; N) \cong H(X, N_X)$ es un isomorfismo de álgebras.

Esto vale para cualquier espacio topológico paracompacto X , pero si además X es localmente contractible, entonces tenemos que el isomorfismo natural $H_{\text{as}}(X; N) \cong H_N^*(X)$ entre el álgebra de cohomología de Alexander-Spanier y el álgebra de cohomología singular es un isomorfismo de álgebras. ■

Bibliografía

- [1] Ahlfors, L., Sario, L., *Riemann surfaces*, Princeton (1960).
- [2] Artin, E., Braun, H. *Introduction to Algebraic Topology*, Charles E. Merrill P. C., Ohio (1969).
- [3] Bredon, G.E., *Topology and geometry*, Springer, New York (1993).
- [4] Curtin, E. *Another Short Proof of the Hairy Ball Theorem*, The American Mathematical Monthly, 125 (5) (2018), 462–463.
- [5] Greenberg, M.J., Harper, J.R. *Algebraic Topology*, Benjamin, New York (1981).
- [6] Hatcher, A. *Algebraic Topology* (2001).
- [7] Hilton, P. J., Stammach, U. *A Course in Homological Algebra*. Springer, New York, 1971.
- [8] Maehara, R., The Jordan Curve Theorem via the Brouwer Fixed Point Theorem, The American Mathematical Monthly, 91 (10) (1984), 641–643.
- [9] Maunder, C.R.F., *Algebraic Topology*, van Nostrand, London (1970).
- [10] Rotman, J.J. *Notes on Homological Algebra*. Van Nostrand, New York, 1970.
- [11] Shastri, A.R. *Basic Algebraic Topology*, CRC Press, (2014)
- [12] Spanier, E.H., *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York (1966).
- [13] Vick, J.W., *Homology Theory*, Springer, New York (1994).
- [14] Wallace, A. H., *Algebraic Topology*, W.A. Benjamin, New York (1970).
- [15] Warner, F.K. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman and Co., Londres 1971.

Índice de Materias

- abierto coordinado, 16
- acíclico
 - complejo, 153
 - módulo, 213
- adjunción
 - de un espacio a otro, 129
 - de una celda, 130
- afín a trozos (función), 108
- Alexander-Spanier (cohomología de), 446
- álgebra de cohomología, 492
- antipodal (aplicación), 369
- aproximación
 - diagonal, 493
 - libre, 156
- árbol, 98
- asociados (elementos de un anillo), 409

- balanceada (aplicación), 172
- baricentro, 344
- base de un funtor, 361
- Betti (números de), 392
- bimódulo, 166
- botella de Klein, 122
- buen cubrimiento, 28

- cadena, 148, 327
 - celular, 379
- característica de Euler, 393
- carta, 15
- categoría, 141
 - con modelos, 361
 - opuesta, 145
 - pequeña, 143
- celular (aplicación), 382
- ciclo, 148

- clase
 - de la orientación, 436
 - del volumen, 436
 - fundamental, 419, 510
- cociclo, 158
- cociente (espacio, topología), 31
- cofinal, 162
- cofrontera, 158
- cohomología, 200
 - con soporte compacto, 456
 - de Alexander-Spanier, 446
 - de De Rham, 423
 - con soportes compactos, 429
 - singular, 439
 - diferenciable, 445
- combinación
 - afín, 324
 - convexa, 3
- complejo
 - celular, 132
 - directo, 147
 - inverso, 157
 - libre, 153
- complejo simplicial, 463
- conúcleo, 188
- cono, 154
- contractible
 - complejo, 153
 - espacio, 23
- convexo, 3
- cubrimiento, 45
 - universal, 277
- curva topológica, 17

- deltaedro, 106
 - abstracto, 105
- determinación del argumento, 51

- dirigido (conjunto), 158
- diseminado (módulo), 243
- divisible (módulo), 169
- dominio de Jordan, 79
- elevación, 49
- entorno fundamental, 45
- envoltura convexa, 4
- equivalencia homotópica, 153
- escisión (de una sucesión exacta), 167
- esfera
 - cornuda de Alexander, 316
 - homológica, 387
 - de Poincaré, 137
- espacio
 - anillado, 189
 - recubridor, 45
- esqueleto, 133
- estrella de un conjunto, 14
- exacta (sucesión), 149
- exacto (functor), 163
- extensión de módulos, 239
- frontera, 148
- functor
 - contravariante, 144
 - covariante, 143
 - derivado
 - derecho, 211, 215
 - exacto, 163, 192
 - por la izquierda/derecha, 192
- grafo, 93
- grupo
 - de cohomología, 158
 - de homología, 148
 - de transformaciones de un cubrimiento, 273
 - de un nudo, 304
 - fundamental, 267
- haz, 181
 - constante, 186
- homeomorfismo relativo, 131
- homología, 200, 327
 - singular
 - en un módulo, 437
- homomorfismo
 - de complejos, 147
 - de conexión, 151, 216
 - de prehaces, 184
 - graduado, 147
- homotopía, 21, 337
 - de complejos, 149
 - inversos, 200
 - de espacios topológicos, 26
 - entre arcos, 266
- identificación, 32
- índice, 52
- involución, 428
- inyectivo (módulo), 167, 195
- isomorfismo, 142
 - de grafos, 95
 - natural, 145
- Jordan
 - arco de, 79
 - curva de, 60, 79
- Knopp (curva de), 63
- límite inductivo, 158
- Lebesgue (lema del cubrimiento), 3
- modelo, 361
- módulo
 - dual, 144
 - graduado, 147
 - plano, 177
- naturalmente equivalentes, 145
- normal (espacio), 8
- nudo, 82
 - toroidal, 83
- orientación, 403, 412
 - local, 401, 402
- paracompacto (espacio), 12
- partición de la unidad, 13
- plano (módulo), 177
- Poincaré
 - conjetura de, 387
 - esfera homológica de, 137

- prehaz, 181
 - constante, 182
- prisma, 338
- producto
 - amalgamado, 289
 - exterior, 492
 - tensorial, 171
- propia (aplicación), 430
- propiedad
 - de extensión de homotopías, 27
 - proyectiva, 153
- proyectivo (módulo), 167
- quiral (variedad), 507
- ramo, 39
- rascacielos, 182
- refinamiento baricéntrico, estrella, 14
- regular (espacio), 8
- representación de un grafo, 94
- resolución
 - directa, inversa, 203
 - inyectiva, proyectiva, 203
- restricción (de un prehaz), 183
- retracción, 22
- retracto, 22
 - absoluto, 28
 - de entornos, 29
 - por deformación fuerte, 23
- rosa, 102
- símplice
 - afín, 324
 - singular
 - afín, 327
- satélite, 217
- sección, 412
- simplemente conexo, 269
- sistema inductivo, 158
- soporte, 246, 327
- subcomplejo, 148
- subgrafo, 98
- subhaz, 183
- submódulo graduado, 147
- subprehaz, 183
- sucesión
 - de homología, 342
 - exacta, 149
- suma
 - amalgamada, 38
 - conexa, 41
 - topológica, 37
- superficie topológica, 85
- tensamente sumergido, 451
- Teorema
 - de Borsuk-Ulam, 74, 519
 - de De Rham, 541, 543
 - de dualidad de Alexander, 520
 - de Eilenberg-Zilber, 483
 - de escisión, 350, 443
 - de homotopía, 338, 442
 - de Jordan, 60
 - de Jordan-Brouwer, 77, 373
 - de Künneth, 230, 233, 485
 - de la esfera peluda, 56
 - de los modelos acíclicos, 361
 - de Mayer-Vietoris, 359, 426, 431, 443, 458, 464
 - de Poincaré, 433, 514
 - de Schoenflies, 78
 - de Stokes, 537
 - de Tietze, 10, 11
 - del bocadillo de jamón, 76
 - del giro de la tangente, 286
 - del homeomorfismo relativo, 353
 - del punto fijo de Brouwer, 57
- tríada, 354
- transformación natural, 145
- triangulación, 85
- triángulo, 85
 - afín, 104
- Urysohn (lema de), 9
- variedad
 - afín, 323
 - de orientaciones, 409
 - topológica, 15